МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Формирование исследовательских умений в процессе обучения решению задач с параметрами в средней школе

Выпускная квалификационная работа по направлению

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность программы бакалавриата

«Математика. Информатика»

Форма обучения очная

Проверка на объем заимствований:
64,12% авторского текста
Работа рекомендована к защите
«26» марта 2021 г.
и. о. зав. кафедрой математики и МОМ
______________ Шумакова Е.О.

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513/204-5-1
Агеева Вероника Александровна

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент кафедры МиМОМ
Шумакова Екатерина Олеговна

Челябинск
2021

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Задачи с параметром в школьном курсе математики – одни из самых сложных и многогранных. Они выполняют важную роль в формировании логического мышления и математической грамотности обучающихся, но их решение может вызывать значительные затруднения. Сложность вызвана необходимостью производить ветвление значений параметров на классы, при каждом из которых задача имеет конкретный ответ. Требуется следить за сохранением равносильности решаемых уравнений или неравенств, учитывать области определения выражений и выполнимость производимых операций.

К моменту завершения обучения, ученики владеют как правило стандартными способами решения задач с параметрами. Они пользуются известными алгоритмами решения, а в случае неудачи, считая проблему неразрешимой, не пытаются продолжить поиск ответа. Это позволяет говорить о том, что учащиеся в достаточной степени не владеют полученными знаниями и исследовательскими умениями.

Решение задач с параметрами требует от учащихся нестандартного мышления. Отметим, что знание дополнительных методов и приемов решения задач способствует развитию логического и нового, нешаблонного мышления.

Развитие исследовательских навыков в процессе решения задач с параметром позволяет достичь определенных целей: сформировать умение самостоятельно находить недостающую информацию в образовательных ресурсах, выделять несколько вариантов решения задачи и находить самый рациональный, а также устанавливать причинно-следственные связи.

Актуальность темы исследования:

1. Проблема формирования исследовательских умений, которые составляют основу исследовательской деятельности, особенно актуальна для учащихся основной и старшей школы, так как в этом возрасте

завершается формирование когнитивных процессов и, прежде всего, мышления.

2. Задачи с параметром часть встречаются в итоговой аттестации за курс основной школы, вступительных экзаменов в высшие учебные заведения и в заданиях единого государственного экзамена (далее – ЕГЭ). Именно эти задачи вызывают большие затруднения, в то же время играют важную роль в формировании исследовательских умений, логического мышления и математической культуры учащихся.

Цель выпускной квалификационной работы:

Разработать цифровой образовательный ресурс для развития навыков исследовательской деятельности обучающихся при решении задач с параметром на уроках математики.

Объект исследования: процесс обучения решению задач с параметрами учащихся средней школы.

Предмет исследования: формирование исследовательских умений при помощи решения параметрических задач.

Гипотеза – обучение решению задач с параметрами и использование электронного образовательного ресурса «Задачи с параметром» способствуют развитию исследовательских умений школьников, систематизации ранее приобретенных предметных знаний и повышению мотивации учеников к продолжению изучения математики.

Изложенные выше цель и гипотеза исследования являются достаточным основанием для определения задач исследования:

1. Проанализировать методические особенности организации исследовательской деятельности учащихся.

2. Произвести анализ учебников и пособий по математике средней школы, включающих задачи с параметрами, которые отвечают федеральным государственным образовательным стандартам.

3. Рассмотреть наиболее распространенные (стандартные) приемы и методы решений параметрических задач.

4. Создать электронный образовательный ресурс и сформировать базу заданий развития исследовательских компетенций таких, как самостоятельное решение учащимися новой для них проблемы с применением таких элементов, как учебное исследование, наблюдение, самостоятельный анализ фактов, создание качественно новых ценностей для развития личности.

5. Проверить эффективность электронного образовательного ресурса.

Структура работы: работа состоит из введения, двух глав, заключения, библиографического списка и приложений.

ГЛАВА 1. ФОРМИРОВАНИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ УМЕНИЙ У ШКОЛЬНИКОВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ

1.1 Определение исследовательских умений.

На сегодняшний день существует тенденция устаревания знаний и вследствие информационно-технологического прогресса. Главным навыком в жизни человека становится самостоятельный исследовательский поиск. Образование, в свою очередь, превращается в открытый, непрерывный процесс самообучения человека в течение всей его жизни. В эпоху развития информационного общества важно научить подрастающее поколение самостоятельному приобретению необходимых знаний и навыков, исследовать объекты действительности, стимулировать и мотивировать творческую активность [21].

Многие ученые-исследователи в своих трудах описывали исследовательскую деятельность как одно из требований роста творческой активности личности.

Уже XIX веке А. Я. Герд, М. М. Стасюлевич продвигали теорию о том, что исследовательская деятельность способствует формированию готовности к самостоятельной умственной деятельности, создание атмосферы и мотивации увлеченности учебным процессом, доставляя чувства радости детям от самостоятельного поиска ответа и развития.

Овид Декроли полагал, что исследовательская деятельность есть природные инстинкты. По его мнению, в основе сущности педагогического процесса лежат эмоции от результатов исследовательской деятельности, побуждаемые инстинктами, а творческую деятельность он сравнил с «рычагом», благодаря которому повышается детская активность.

Американский философ и педагог Джон Дьюи представлял исследовательскую деятельность как один из видов детской занятости в контексте «что-нибудь делать». Связывал исследовательскую деятельность также с инстинктами, присущими ребенку от природы.

За исследование окружающего мира и происходящих в нем процессов отвечает человеческое познание.

В психолого-педагогической литературе говорится, что познание – это творческая составляющая человека, направленная на приобретение достоверных знаний об окружающем мире. С другой стороны, определение познания можно трактовать как деятельность, итогом которой считается знание явлений внешнего и внутреннего мира в их сосуществовании и закономерной последовательности [22].

Доктор психологических наук А. Н. Поддьяков сформулировал направления развития познавательной деятельности человека, описал следующие типы общего познавательно-исследовательского отношения к миру [22]:

1. Первое направление определяется статическим отношением объекта к материальному миру как к стабильной целостной структуре, описывается универсальное отношение человека к реальному миру как к стабильно организованной системе и потребностью в стабильности, точности компонентов познавательной деятельности. Будем называть его инвариантным.

2. Второе направление определяет отношение к миру как к динамической системе, которая развивается и обновляется. В начале данного типа определяется необходимость в новшестве, неточности, склонности к выходу за рамки стандартов и в столкновении противоречий.

Более того, исследование может быть представлено как направленное познание, сочетание логических последовательностей и экспериментальных операций, выполненных в отношении объекта исследования для определения его свойств и закономерностей поведения [26].

Г. М. Андреева обозначила перечень черт научного исследования [3]:

– исследование осуществляется с конкретными объектами, иными словами, с доступным объемом практических сведений, которые собраны современными научными методами;

– в нем численно решается ряд задач практического, теоретического, познавательного типа;

– для него свойственно точное разграничение между существующими фактами и гипотетическими предположениями, поскольку отработаны процедуры проверки гипотез;

– цель научного исследования заключается в доказательстве и предсказании фактов и процессов.

Учебное исследование имеет некоторые отличия от научного. Учебной исследовательской деятельностью будем называть деятельность учащихся, направленную на решение задачи путем творческой деятельности с заранее неизвестным результатом (в отличие от практикума, служащего для иллюстрации тех или иных законов природы) и предполагающая наличие основных этапов, характерных для исследования в научной сфере: постановку проблемы, изучение теории, посвященной данной проблематике, подбор методик исследования и практическое овладение ими, сбор собственного материала, его анализ и обобщение, собственные выводы [3].

Авторы «Концепции развития исследовательской деятельности учащихся» (Н. Г. Алексеев, А. В. Леонтович, А. С. Обухов, Л. Ф. Фомина) подчёркивают отличие учебного исследования от научно-исследовательской деятельности: учебное исследование не требует получения объективно новых знаний, для него существенно, что учащийся прошёл весь путь исследования [12].

Что же понимается под исследовательскими умениями?

В. А. Сластенин связывает образование умений с последствием упражнений, которые модифицируют условия учебной деятельности и предполагают ее постепенное усложнение, направляются четко осознаваемой целью [25].

Существуют различные подходы к формулировке «исследовательские умения». К примеру, Е. А. Шашенкова, Н. Л. Головизнина, И. А. Зимняя определяют исследовательские умения как итог и меру исследовательской деятельности, т.е. как возможность к реализации персональных наблюдений, опытов, получаемой в процессе решения разного вида исследовательских задач. Н. В. Сычкова, П. Ю. Романов представляют исследовательские умения как мотивацию к действиям, необходимом для реализации исследовательской деятельности.

Исследовательские умения представляются учёными как сложные умения, состоящие из следующих звеньев: операционного (система умений и навыков), содержательного (система исследовательских знаний), мотивационного, выражающегося в виде когнитивного увлечения.

Учебным исследовательскими умениями, по мнению П.М. Скворцова, нужно считать:

– умение работать с научной и научно популярной литературой;

– умение проведения наблюдения;

– умение постановки эксперимента [13].

Г. В. Мухамадиярова обращает внимание на различные подходы к определению понятия «исследовательские умения» [20]:

– возможность персональных наблюдений, экспериментов, приобретаемых в процессе решения исследовательских задач;

– навык использования различных методов исследования при решении поставленной проблемы;

– система мыслительных и прикладных умений образовательной работы, необходимая для автономной реализации исследования или его части.

В трудах А. И. Савенкова цитируется представленный перечень исследовательских умений [23]:

– умение выделять подзадачи;
– умение задавать вопросы;
– умение выдвигать гипотезы;
– умение давать определение понятиям;
– умение классифицировать;
– умение делать выводы и умозаключения;
– умения и навыки работы с текстом;
– умение доказывать и защищать свои идеи.

Таким образом, проанализировав формулировки и сущность исследовательских умений, выделяемые современными учёными, под исследовательскими умениями мы будем понимать следующие: видеть проблемы, ставить вопросы, выдвигать гипотезы, давать определения понятиям, классифицировать, наблюдать, проводить эксперименты; делать умозаключения и выводы; структурировать материал; готовить тексты собственных докладов; объяснять, доказывать и защищать собственные идеи.

Еще совсем недавно сформированные исследовательские навыки для большой группы людей излишеством. Считалось, что они нужны только узким группам специалистов – научным работникам, разведчикам, следователям и журналистам. Для адаптации в современном мире человек лишь изредка прислушивается к разработанным стандартам предков. Для приспособления человеку все чаще необходимо применять поисковую активность. Это является предпосылкой интереса всей образовательной сферы к исследовательским методам обучения современных школьников [12].

Базовыми моделями формирования учебно-исследовательской деятельности явились исследования современной дидактики, получившие развитие в трудах В. И. Андреева, Ю. К. Бабанского, Б. П. Есипова, В. И. Загвязинского, И. Я. Лернера, П. И. Пидкасистого, М. Н. Скаткина, П. М. Эрдниева и др.

Мировоззренческие идеологические позиции о всемирной связи, обоюдной зависимости и общности явлений и процессов реальности, о сущности и роли исследовательских умений и навыков как общественного феномена отражены в работах К. А. Абульхановой-Славской, А. И. Арнольдова, Э. А. Орлова и других, о зависимости совершенствования личности предметом деятельности и методы ее реализации у В. Е. Давидовича, Ю. А. Жданова, Л. Н. Маркаряна и др. [12].

1.2 Понятие учебно-исследовательской деятельности, её особенности в школьном возрасте

Сейчас школа живет и развивается в динамичном мире, который предъявляет к ней суровые требования. Перемены, происходящие в мире, оставили след на современном российском образовании. С одной стороны, происходит увеличение объемов информации, подлежащей усвоению, а с другой – полученные знания быстро устаревают. Молодой человек в современном обществе сможет быть конкурентоспособным, когда он будет обладать не только знаниями, умениями и навыками, но и компетентностями: ключевыми, межпредметными и предметными. В связи с этим возникла необходимость изменения приоритетов в образовании, потребность в реорганизации содержания, форм и методов работы.

С 2011 года образование перешло на новые Федеральные государственные образовательные стандартны (далее – ФГОС). В основу стандарта второго поколения легли новые правила устройства, которые называют главными условиями формирования личности современных подростков: активность, умение изобретательно мыслить, отыскивать оригинальные решения.

Методологической основой ФГОС нового поколения является компетентностно-деятельностный подход. Цели образования представлены в качестве характеристик сформированности универсальных учебных действий (далее – УУД). Стандарты направлены не на одиночные элементы нововведений, а на возникновение цельной системы образования, организованной на применении инновационных технологий и их результатов.

Приоритетным методом в технологии системно-деятельностного подхода обучения является метод исследования или открытия, потому что он:

– формирует самостоятельность мышления;

– заставляет мыслить творчески;

– нарабатывает опыт мыслительной деятельности, определённые алгоритмы действий и мыслительных операций (то есть УУД);

– обязывает самостоятельно добывать новые знания логическими рассуждениями.

Согласно новому стандарту, учащиеся должны овладеть различными метапредметными умениями. Ученик при содействии педагога должен самостоятельно научиться получать новую информацию, из собственного опыта делать необходимые выводы, использовать ранее накопленные знания и умения, а также самостоятельно осуществлять поиск необходимой информации в различных источниках. Все перечисленные умения являются составляющими исследовательской деятельности, поэтому формирование исследовательских умений является актуальным на сегодняшний день.

Каждая образовательная программа в учреждении должна включать план развития универсальных учебных действий, обеспечивающий «формирование у обучающихся основ культуры исследовательской и проектной деятельности, навыков разработки, реализации и общественной презентации результатов исследования предметного или межпредметного учебного проекта, направленного на решение научной, личностно и (или) социально значимой проблемы».

В основной школе стоит необходимость акцентировать обучение на развитие способности занимать исследовательскую позицию, независимо ставить и добиваться цели в учебной деятельности; в старшей школе – развивать исследовательские компетентности и предпрофессиональные навыки как основы профильного обучения.

Рассмотрим и проведем анализ методических основ процесса обучения исследовательской деятельности нескольких сторон:

– психологические особенности учащихся среднего школьного возраста;

– стратегии формирования познавательного интереса;

– организации исследовательской работы на уроках.

Одной из ключевых проблем педагогики в современной школе можно считать активизацию познавательной деятельности учащихся. В подростковом возрасте возникают трудности, о которых должен знать педагог. Необходимо привлечь внимание учащихся к предмету, создавая мотивацию, стимулируя любопытство и оживление познавательной деятельности, которая напрямую связана с инициативностью и познавательным интересом субъекта.

Принимая во внимание ценности и запросы гармонично развивающейся личности, педагогика совместно с психологией называют интерес основой учебного процесса, создающего обширный потенциал для обучения. Интерес способствует сформированию личности, сопутствует и содействует развитию ученика.

По нашему мнению, все протекающее в течение урока должно базироваться на конкретном педагогическом подходе. От учителя зависит расширение знаний, умений и навыков, становление индивидуальной активности школьника, которая обусловлена современной жизнью в обществе. В связи с этим появляется отдельный тип любопытства, связанный с познавательной деятельностью. Ученик приобретает знания на основе содержания учебных предметов, основанных на способах и умениях.

Что касается самого подростка, то его познавательная деятельность во многом зависит от самостоятельности, самоконтроля и самооценки. Ученик лучше усваивает материал только при появлении собственного интереса к предмету.

Даже при владении ключевыми компетенциями и навыками обучения, подросток зачастую не умеет верно их использовать и применять в практической деятельности. Как показали исследования Г. И. Щукиной, познавательные горизонты у ребят, учащихся в одном классе, могут различаться [8].

Познавательный интерес, совершенствуемый у обучающихся, полностью опирается на стимулирование познавательной деятельности. К ним относится готовность к достижению высоких результатов, благодаря выбору методов и средств обучения. От учащихся требуется не только правильное понимание изученного материала, но и навык формулировать и использовать в своей практике эти знания. Результат обучения будет более продуктивным при наличии активной мыслительной и практической деятельности школьника [8].

Одним из главных принципов в обучении является принцип проблемности. Поставленную проблему необходимо исследовать. Обучение должно опираться на исследовательскую деятельность. Одной из важных проблем современного образования является изучение познавательной и активизации учебной деятельности. В связи с этим значимым служит поисковый характер, основы анализа и обобщения.

Учебная и исследовательская деятельность помогает готовить учеников к новым социальным отношениям, развивает личностные качества, необходимые им для успешного самоопределения во взрослой жизни.

Исследовательский метод обучения имеет место быть на всех ступенях обучения, если соответственно будут учтены возрастные особенности и подготовка обучающихся. Этот метод применяется в следующих направлениях:

– включение элемента поиска в практические задания учащихся;

– использование педагогом познавательного процесса, осуществляемого учащимися при доказательстве того или иного положения;

– создание цельного исследования, реализуемого учениками индивидуально, но под управлением и наблюдением учителя (доклады, проекты, основанные на самостоятельном поиске, анализе, обобщении фактов).

По-нашему мнению, развиваясь в представленных направлениях, обучающиеся формируют необходимые исследовательские навыки.

Прямое управление учебно-исследовательской работой школьника – это вид педагогического взаимодействия, нацеленного на раскрытие возможностей сотрудничества.

Мы считаем, что постоянное включение элементов познавательной работы в систему ранее полученных знаний позволит получить высокий процент усвоения предмета. Наша педагогическая идея сводится к необходимости систематического применения в той или иной форме элементов исследовательской деятельности учащихся на уроках математики при их сочетании с основным содержанием урока.

В качестве существенного приема построения исследовательской работы служит система исследовательских знаний. Исследовательские знания – это представленные учащимися задания, содержащие проблему. Решение требует проведения теоретических методов научного исследования, с помощью которых учащиеся открывают ранее неизвестное для них знание.

Рассмотрим основные этапы учебного исследования.

1. Мотивация исследовательской деятельности.

2. Формулирование проблемы.

3. Сбор и систематизация сведений.

4. Выдвижение гипотез.

5. Проверка гипотез.

Развитие исследовательских навыков дает возможность овладения методами исследования и будет хорошим подспорьем при изучении материалов любых дисциплин. Оно позволяет применять полученные знания и умения в реализации собственных интересов, что способствует дальнейшему самоопределению учащихся. Ученики начинают проявлять больший интерес к различным наукам, школьным дисциплинам и процессам познания в целом.

На сегодняшний день работа учащихся в мини-группах (в парах) представляется одной из наиболее рациональных форм организации исследовательской деятельности. Отметим, что в этом случае качество работы, уровень подготовки и результативность резко повышаются, т.к. учащиеся неоднократно обсуждают свою тему, совершенствуются, спорят, взаимно проверяют освоенный материал, исправляют ошибки и недочеты.

Ежедневно при решении математических задач учащиеся должны совершать «мини-исследование», разделять задачи на подзадачи, используя основные мыслительные операции – анализ и синтез, индукцию и дедукцию, сравнение и аналогию. При этом представленная перед учащимися проблема может носить как прикладной, так и фундаментальный математический характер.

Задача – основное дидактическое средство, которое помогает педагогу в постановке проблемы. Примером исследовательских задач служит класс задач с параметром.

1.3 Исследовательская деятельность как основа решения задач с параметрами

В последнее время актуальным остается вопрос определения списка конкретных исследовательских умений, которым должен овладеть школьник на протяжении учебного процесса. В связи с этим перед учителями стоит задача: определить перечень конкретных исследовательских умений. Для определение представленной практической проблемы школьного образования необходимо иметь представление о разнице данных тезисов: в отличие от навыков, умение может быть сформировано и без специализированных упражнений в совершении какого-либо действия. Данные знания позволяют определиться с сутью понятия «исследовательские умения». Вопреки множеству подходов к определению представленного положения, мы будем придерживаться мнения П. В. Седеренко «исследовательские умения и навыки школьников – это возможность и ее реализация выполнения совокупности операций по осуществлению интеллектуальных и эмпирических действий, составляющих исследовательскую деятельность приводящих к новому знанию». Таким образом, в соответствии с данной позицией мы будем рассматривать понятие «исследовательские умения» [24].

Из своего опыта мы понимаем, что задачи с параметрами очень сложны как в логическом, так и техническом планах разделом элементарной математики, хотя математическая структура данных заданий не исключено из школьной программы. Все зависит от того, как понимается параметр. С одной стороны, параметр представляется как переменная, которая при решении уравнений и неравенств считается постоянной величиной, с другой – параметр - это величина, численное значение которой не задано, но должно считаться известным, причем параметр может принимать произвольные значения, т.е. параметр, будучи фиксированным, но неизвестным числом, имеет как бы двойственную природу. Во-первых, предполагаемая известность параметра позволяет обращаться с ним как с числом, а во-вторых, степень свободы обращения с параметром ограничивается его неизвестностью.

В каждом представлении естества параметров предполагается неопределенность – на каких фазах решения параметр нужно принимать за константу и когда он выполняет функцию переменной величины. Представленные двойственные характеристики параметра при знакомстве с новыми типами задач вызывают у учащихся некоторые психологические сложности.

Не будем забывать, что применение обобщенных графических примеров в конкретных моментах может помочь определению направления исследований, а изредка помогает сразу найти готовый алгоритм к решению задачи. Ведь для некоторых задач самый простой рисунок, макет представляет шанс миновать различные ошибки и более легким способом найти ответ. Решение математических задач вызывает трудность и страх в деятельности школьника при изучении математики и связанно тем, что для решения задач необходим высокая степень развития интеллекта высшего уровня, т.е. теоретического, формального и рефлексивного мышления, а такое мышление, как уже отмечалось, еще только развивается в подростковом возрасте.

Однако не стоит недооценивать роль задач с параметрами в развитии у школьников пространственных представлений. Они отлично стимулируют накопление определенных геометрических представлений, расширяют образное мышление, помогают представить построение графика той или иной функции и развивать умение мысленно трансформировать элементы этого графика. Такие задачи содействуют пониманию обучающихся возникновение геометрических фигур и графиков функций, возможности их преобразования – все это является важным условием совершенствования пространственного мышления школьников. Кроме того, эти задачи хорошо развивают геометрическую интуицию. В процессе решения задач с параметрами формируются компоненты алгоритмической культуры.

Основной особенностью параметрических задач выступает ветвление решения, которое изменяется от конкретных значений параметров. Иными словами, решение производится разбиением частных уравнений (неравенств) по типам с детальным поиском решений каждого типа.

На этапе знакомства с параметром целесообразно чаще применять наглядно-графическую демонстрацию результата. Это не только поможет побороть элементарную нерешительность ученика перед параметром, но и дает педагогу преимущество в параллельной пропедевтике использовать графические приемы доказательства.

Вместе с тем решение бесконечной совокупности частных уравнений и неравенств с учетом требования равносильности преобразований возможно лишь при развитии достаточного уровня логического мышления. С другой стороны, развитие и овладение различными методами решения уравнений и неравенств с параметрами позволит увеличить и в большей степени развить математическую культуру обучающихся.

Развивающий характер уравнений и неравенств с параметрами определяется их способностью реализовывать многие виды мыслительной деятельности учащихся:

– построение четких алгоритмов мышления;

– умение предопределить существование и количество корней в уравнении;

– решение семейств уравнений, являющихся следствием данного;

– выражение одной переменной через другую;

– нахождение области определения уравнения;

– актуализировать знания и повторить большой объем формул при решении;

– значение соответствующих методов решения;

– уместное использование словесной и графической аргументации;

– совершенствование графической культуры учащихся.

Большая часть типовых задач в математике можно видоизменить так, чтобы подходить под определение параметрической задачи.

Само решение предполагает багаж значительного количества эвристических приемов общего характера, которые используются в каждом математическом материале, помогая вырабатывать стремление к исследованию.

Проанализируем пример из учебника А. Г. Мерзляка за 8 класс.

При каких значениях параметра a корни квадратного уравнения $x^2 + (a + 1)x + 3 = 3$ лежат по разные стороны от числа 2?

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + (a + 1)x + 3$. Она представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх ($a > 0$). Одним из способов решения задачи является решение с помощью метода интервалов. Если мы найдем $f(2) < 0$, то корни уравнения как раз будут находиться по разные стороны от числа 2.

$$f(2) = 4 + 2a + 2 + 3 = 2a + 9 < 0;$$

$$2a < -9;$$

$$a < -4{,}5.$$

Ответ: $a \in (-\infty; -4{,}5)$.

В процессе решения этой задачи у учащихся формируются следующие умения: умение конструировать новый способ из ранее изученных, умение применять нестандартный способ мышления, а также происходит актуализация знаний по теме «Парабола», «Решение квадратных уравнений с параметром», «Метод интервалов». На конкретных этапах решения задачи ученик формирует такие умения, как работа с условием, понимание текста, выделение главного; умение строить математическую модель, правильно ставить цель и делать выводы.

Как можно заметить, такие задачи предполагают активизацию именно исследовательской деятельности. Это объединяет все типы задач с параметром и делает их мощным дидактическим средством в руках педагога для развития навыков исследовательской деятельности. Учащиеся тренируются понимать проблему, строить гипотезу, выделять главные и второстепенные признаки, проводить аналогию, моделировать ситуацию на алгебраическом и геометрическом языке, искать пути решения проблемы, планировать свою деятельность, анализировать полученный результат, делать выводы. Выше перечисленные навыки имеют прямое отношение к развитию УУД.

Проблема развития исследовательских навыков учащихся заключается в том, что современное математическое образование уделяет больше времени формированию алгоритмического способа мышления. Школьники привыкают рассуждать так, как им объяснили. Отсутствие алгоритма, как показывает педагогический опыт, вызывает дискомфорт, противоречие, нежелание решать задание. Однако задачи с параметром используют в контрольно-измерительных материалах на ОГЭ в 9 классе и ЕГЭ в 11 классе. Их относят к заданиям повышенного и высокого уровня сложности. За их решение учащиеся могут получить высокий балл на экзамене. Поэтому важно формировать умение решать их, начиная со среднего школьного звена, и заканчивая выпускным классом. При этом существенным недостатком большинства школьных учебников можно считать отсутствие задач с параметром, или сведение их числа к минимуму в отдельных изучаемых темах.

Выделим основные этапы решения задач с параметром.

Первый назовем ознакомительным. Данный этап предполагает механическое прочтение задачи и повторное смысловое прочтение.

Второй этап – проблемный. Учащийся осознает необходимость получения нового знания для решения поставленной задачи.

Третий этап – творческий. Выдвигается гипотеза о том, как достигнуть поставленной цели, осуществляется выбор метода решения.

Четвертый этап – технический – на основе разработанного плана производятся необходимые преобразования, построения, находятся необходимые значения параметра.

Пятый этап – саморегуляция. Учащийся выполняет проверку гипотезы, критикует собственное решение с целью выявить потенциальные неточности.

1.4 Методический анализ школьных учебников 7-11 классов на предмет «Задачи с параметром»

Задачи с параметрами – одна из самых сложных тем в школьном курсе математики. Их можно встретить как на олимпиадах различного уровня, так и на Государственной итоговой аттестации и Едином государственном экзамене. При этом ученики совершают множество ошибок. Большей частью они не могут математически грамотно и ясно записать решение, не обоснованно записав ответ, не могут осуществить доказательные рассуждения и не стремятся справиться с заданием, если не могут применить известный им алгоритм в незначительно изменившейся ситуации (характеризует задачу с параметром).

Отменим, что большинство учебных программ общеобразовательной школы не имеет содержательно-методической линии «Задачи с параметрами». Выполним анализ учебно-методических комплексов (далее – УМК) по алгебре 7-9 класса на предмет подобных задач [10].

Рассмотрим учебник под редакцией А. Г. Мордковича базового уровня для учеников 7, 8, 9 классов. В данном УМК мы не найдем параграфа с пометкой «Параметры». Задания, в которых фигурируют параметры, не присутствуют в учебниках за 7 и 9 класс. Однако само определение «уравнение с параметром» встречается впервые в учебнике алгебры за 8 класс [18]. В §25 «Формулы корней квадратных уравнений» можно обнаружить задание такого типа (№25.46):

«Решить уравнение

$$x^2 - (2p - 2)x + p^2 - 2p = 0.$$

Ранее учащиеся не встречались с подобным уравнением, где в роли коэффициентов стоит параметр – буквенное выражение. Подобные уравнения будем называть уравнениями с буквенными коэффициентами или *уравнениями с параметрами*». В §25 и §34 присутствуют квадратные уравнения и неравенства с параметром, где необходимо определить количество корней в зависимости от параметрических значений. Такие задания носят отметку повышенной сложности.

Если рассматривать учебник А. Г. Мордковича за 8 класс повышенного уровня [19], можно заметить, что §39 носит название «Задачи с параметрами», а общее количество часов, отводимое на данную тему, равняется 6. В ходе объяснения теоретического материала представлен разбор пяти примеров на решение параметрических уравнений, указаны необходимые замечания к решению. В общем случае в задачнике присутствуют 83 задания к данному параграфу.

Аналогично в учебнике профильного уровня для 9 классов в главе 1 представлен параграф «Задачи с параметрами», где разобраны три примера, а общее количество часов, отводимое для этой темы также равно 6.

В учебнике за 7 класс задания такого вида не представлены.

Рассмотрим УМК А. Г. Мерзляка.

В учебнике 7 класса задачи с параметром не представлены. В учебнике за 8 класс авторы предлагают пример решения линейного уравнения с параметром уже в §2, после чего можно увидеть 6 линейных и квадратных уравнений «под звездочкой» [15]. Стоит отметить, что учащиеся, занимающиеся по этому учебнику, не знают определения значения слова «параметр». Само слово в данном случае является синонимом к слову «значение». Исследовав предложенный материал учебника, приходим к выводу, что задания с параметром различных типов присутствуют в конце практически каждого параграфа, отмеченные значком повышенной сложности. Можно увидеть задания такого типа:

«Определите, при каком значении a один из корней квадратного уравнения равен 0, и найдите второй корень уравнения:

$$ax^2 + (a+3)x + a^2 - 3a = 0\text{»}.$$

При обучении в 9 классе А. Г. Мерзляк демонстрирует задания с множеством буквенных выражений, что подготавливает учащихся не бояться нескольких неизвестных в уравнении или неравенстве. В §5 №157-№164 предлагает решить линейные и квадратные уравнения и неравенства, при этом слово «параметр» опять не фигурирует в заданиях [16]. А в заданиях №204-№218 (повышенной сложности) мы можем увидеть решение систем уравнений и неравенств с параметром. В заданиях №270-№273 предлагается исследовать функцию в зависимости от значений параметра. А в №323-№328 ученикам предстоит проявить исследовательские навыки, воспользоваться ранее полученными знаниями и соотнести график функции и параметр.

В УМК под редакцией Г. В. Дорофеева задачи с параметрами не обнаружены.

В УМК Ю. Н. Макарычева за 8 класс под редакцией С. А. Теляковского мы уже в §1 «Рациональные дроби и их свойства» можем увидеть два задания с параметром [14]. Эти задания относятся к исследовательскому типу, так как учащиеся должны проанализировать выражение, применив полученные ранее знания, высказать несколько предположений. Уже в следующем параграфе мы можем встретить задание повышенной сложности такого типа:

«При каких целых значениях m дробь $\frac{(m-1)(m+1)-10}{m}$ принимает целые значения». Примеры решения в теоретическом материале не демонстрируются. В дополнительных материалах особое внимание привлек

№488 (Задача-исследование). Учащимся необходимо проанализировать выражение в зависимости от значения n, провести анализ при произвольном значении n, подумать и сгруппировать множители в произведении так, чтобы подкоренное выражение представляло собой квадрат и выполнить необходимое преобразование. Данный номер разбит на подпункты, с помощью наводящих вопросов авторов учебника, ученик сам должен исследовать и решить задачу. В главе III п. 27 «Уравнения с параметром» с пометкой «Для тех, кто хочет знать больше» авторы дают определение слову «параметр», выполняет пошаговый разбор нескольких примеров решения квадратных уравнений с параметром, далее следует ряд заданий повышенной сложности. В учебнике за 9 класс представлено меньше заданий по данной теме, они напрямую связаны с анализом свойств функции относительно параметра.

Выполним методический анализ некоторых учебников, вошедших в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию, для старшей школы.

В УМК под редакцией Ш. А. Алимова для учащихся 10-11 классов в оглавлении не было обнаружено упоминание о задачах с параметром. Однако лишь в §19 мы впервые встречаемся с параметрическим уравнением: «Найти все значения параметра a, при которых уравнение $5\log_5 x + \log_a x - 4\log_{25} x = a$ имеет корни». Позже мы выполним решение данного примера. Далее параметрические задания встречаются лишь в §36, где авторы просят решить два тригонометрических уравнения с параметром. Мы видим задания с параметром в дополнительных упражнениях к главе VI. В №687-№689 предлагается решить подобные тригонометрические уравнения с параметром. Далее обнаруживаем 5 задач с параметром уже в дополнительных упражнениях к главе VIII в теме «Производная». В §52 мы можем увидеть ряд геометрических задач с параметром. Итого на весь учебник для 10-11 класса мы обнаружили порядка 15 примеров, относящиеся к нашей тематике. Заметим, что автор определил такие задачи как одни из самых трудных, но примеры решения не демонстрируются. По одному-два примера мы можем найти в конце главы.

Исследуем учебник Г. К. Муравина углубленного уровня за 10 класс. Автор приводит пример простейшего параметрического неравенства в первой главе в пункте 4 «Квадратичная и дробно-линейная функции. Преобразование графиков». Автор развивает в учениках наглядно-образное мышление, призывая рассуждать об изменении графика при меняющемся значении параметра. Мы можем найти по одному заданию степенной, логарифмической функции с параметром, несколько задач по теме «Свойства и график функции $\cos x = y$». Мы обнаружили порядка 8 задач по нашей теме исследования. В учебнике за 11 класс углубленного уровня мы обнаруживаем §18 «Задания с параметрами». В данном параграфе представлены уравнения и неравенства разных видов: квадратные уравнения, система квадратных неравенств рациональные уравнения и неравенства, уравнения и неравенства с модулем, а также пример с двумя параметрами. Далее идут 42 задания к параграфу. Стоит отметить, что материал представлен доступным для школьников языком, все задания строятся по принципу «от простого к сложному», приводятся пояснения и пошаговое построение графиков (там, где это необходимо).

В учебниках Г. К. Муравина для 10 класса базового уровня были найдены квадратные, степенные, логарифмические и тригонометрические уравнения с параметром, представленные с отметкой повышенного уровня сложности. Всего около 10 примеров. В учебнике для 11 класса базового уровня мы также, как и в углубленном уровне, видим §16 «Задания с параметром». Теоретический материал и практические задания на базовом и углубленном уровне идентичны.

В учебнике С. М. Никольского для общеобразовательных учреждений базового уровня за 10 класс мы видим в §2 «Рациональные уравнения и неравенства» 3 упражнения, в которых необходимо решить системы неравенств с параметром. Больше данных задач в учебнике за 10 класс не представлено. В учебнике этого же автора для 11 класса мы находим §15, он помечен «звездочкой». Здесь произведен краткий обзор простейших примеров каждого типа уравнений и неравенств с параметром и представлены 45 заданий для самостоятельного решения.

В учебнике А. Г. Мерзляка базового уровня за 10 класс можно встретить задания такого типа: «При каких значениях b функция $y = 3x^2 - bx + 1$ возрастает на промежутке $[3; +\infty)$?», а также «Для каждого значения а решите неравенство: $\frac{(x+1)(x-a)}{x-a} \leq 0$». Также в дополнительном материале к §5 мы можем найти подробный пример решения параметрического уравнения четвертой степени с модулем. Далее по мере изучения материала автор предлагает учащимся порассуждать и найти такое значение параметра, при котором функция имеет одну или несколько критических точек. В учебнике А. Г. Мерзляка базового уровня для 11 класса задачи с параметром не представлены.

В учебнике А. Г. Мерзляка углубленного уровня за 10 класс задачи с параметром представлены почти после каждой темы, с отметкой «Сложные задачи». Примеры решения не приводятся.

В учебнике А. Г. Мерзляка углубленного уровня за 11 класс приводится пример показательного уравнения, затем (аналогично учебнику углубленного уровня за 10 класс) мы видим задачи с параметром с отметкой «Сложные задачи» и «Задачи высокой сложности». Логарифмические уравнение с параметром также представлены, но без примера решения.

В учебнике А. Г. Мордковича базового уровня 10-11 класс мы нашли только два задания с параметром следующего типа: «При каких значениях параметра a функция $y = x^6 e^{-x}$ на интервале $(a; a + 7)$ имеет одну точку экстремума, возрастает, убывает». Других заданий не найдено.

Рассмотрим учебник А. Г. Мордковича углубленного уровня для 10-11 классов. Здесь мы не найдем параграфа, посвященному задачам с параметрами. Они включены почти в каждую тему, носят отметку «повышенной сложности». Пример заданий: «Дано уравнение с параметром a: $\sqrt{a\cos 2x - 3\sin 2x} = \cos x$. Известно, что $x = 0$ является корнем этого уравнения. Найдите остальные корни» или «При каких действительных значениях a число $z = (2 - ai)^3 - (3 - ai)^2 + 5 + a(1 - a^2 i)$ является чисто мнимым числом?».

Выполнив анализ учебников по математике, соответствующих современным требованиям федерального государственного образовательного стандарта, приходим к некоторым выводам.

Задачи с параметром относятся к задачам повышенной сложности и в силу загруженной математической программы редко решаются на уроке математики.

УМК Ю. Н. Макарычева и А. Г. Мерзляка (профильный уровень) для основной школы подходят для изучения данной темы, учащиеся получат первичные представления о параметрах и продолжат развивать исследовательские навыки.

УМК К. Г. Муравина и С. М. Никольского помогут подготовить ученика старшей школы для единого государственного экзамена. Специальные тематические параграфы охватывают все типы уравнений с параметром, имеется в достаточной степени дидактический материал.

В большинстве общеобразовательных школ учащиеся не встречаются с подобными заданиями, даже если сами задачи представлены в учебниках. Это происходит в силу разного уровня подготовки учащихся и недостаточного количества примеров решения в самих учебниках [10].

Существует необходимость создать качественный электронный образовательный ресурс в поддержку изучения «Задач с параметром» учащихся школ и педагогов.

Для качественной подготовки учащихся необходимо сделать акцент на развитие вариативности математического образования средствами кружков, факультативов, а также на самостоятельной дополнительной подготовке учеников [10].

Выводы по главе 1

Исследовательская деятельность – один из наиболее важных компонентов учебной деятельности. Она способствует развитию специальных мыслительных приемов, присущим людям технических и научных профессий. Включая элементы исследовательской деятельности в уроки математики, мы можем формировать у учеников устойчивое понимание того, что алгоритмическое мышление не является естественным способом достижения поставленных целей.

Выполнив анализ федерального государственного образовательного стандарта, учебных методических комплексов, теоретического материала, посвященного задачам с параметрами, можно сделать следующие выводы:

1. Задачи с параметрами за редким исключением встречаются в школьной программе, представлены как «задания повышенной сложности» или «для тех, кто хочет знать больше». Но в следствие нехватки учебного времени редко реализуются на уроках математики.
2. Учителя стремятся развивать исследовательские умения путем решения задач с параметрами, вынося их на элективные курсы по выбору.
3. Задачи с параметром выполняют сразу несколько методических функций:

– позволяют ученикам овладеть исследовательскими техниками;

– помогают формулировать логические математические рассуждения;

– развивают общую математическую культуру и логическое мышление;

– позволяют овладеть учащимся эвристическими приемами решения.

4. Такие задачи обеспечивают формирование компетенций, которые так важны как в учебной, так и в повседневной деятельности:

– осуществление анализа ситуации;

– реализация задач более рациональным способом;

– использование навыков поиска и работы с литературными источниками;

– выполнение самоанализа и самоконтроля собственной деятельности.

ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТРОННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО РЕСУРСА И ЕГО АПРОБАЦИЯ

2.1 Типы и виды задач с параметрами

В нашей жизни слово «параметр» ассоциируется с каким-либо выбором: параметры производства, цена, критерии и т.д. В толковом словаре параметр представлен в роли величины, описывающей некое конкретное свойство машины, устройства, системы или явления, процесса.

Когда мы говорим о параметре в математике, то сразу вспоминаем уравнения прямой или параболы ($kx + l = 0, ax^2 + bx + c = 0$), где при поиске их корней значения остальных переменных, входящих в уравнения, считаются фиксированными и заданными (k, l в уравнении прямой, a, b, c в уравнении параболы). Все разночтения в существующей литературе связаны с толкованием того, какими фиксированными и заданными могут быть эти значения остальных переменных [2].

Школьные учебники не дают определение параметра. Можно сформулировать определение так:

Параметром будем называть независимую переменную, которая может являться в задаче заданным фиксированным или произвольным действительным числом, или числом, которое будет принадлежать заранее оговоренному множеству [2].

Математический параметр является независимым, так как зачастую он может не обладать свойствами, следующими из условия задачи. Например, из неотрицательности левой части уравнения $|x| = a - 1$ не следует неотрицательность значений выражения $a - 1$, и если $a - 1 < 0$, то мы обязаны констатировать, что уравнение не имеет решений.

Важнейшим этапом является грамотная запись ответа к задаче. Ученик должен отобразить множество ответов решений в зависимости от конкретного значения параметра. В конце решения необходимо представить обоснование для любого значения параметра, принадлежащего заранее оговоренному множеству.

С другой стороны, если необходимо отыскать значения параметра, при которых множество решений уравнения, неравенства и т. д. отвечает поставленному условию, то решение задачи заключается в поиске указанных значений параметра. Такая задача решается относительно параметра.

Обозначим основные типы задач с параметрами [17]:

1. Уравнения, неравенства и их системы (далее – УНиС), которые необходимо решить либо для любого значения параметра (параметров), либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству.

2. УНиС, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра (параметров).

3. УНиС, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения, неравенства, их системы и совокупности имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений).

Обратим внимание, что задачи типа 3 можно назвать обратными задачам типа 2.

4. УНиС, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

Разнообразие параметрических задач содержит полный курс школьной алгебры и геометрии, но их значительное количество на олимпиадах, выпускных и вступительных экзаменах принадлежит к одному из перечисленных типов, которые поэтому назовем основными.

Рассмотрим *линейное* уравнение, содержащее параметр.

Уравнение вида $Ax - B = 0$, где A и В — выражения, зависящие только от параметров, а x — неизвестное, называется *линейным* *относительно* x [4]. Оно приводится к виду $Ax = B$ и при $A \neq 0$ имеет единственное решение:

$$x = \frac{B}{A},$$

где A и B – действительные числа. Если же параметр $A = 0$, возникают два вопроса о значениях параметра B:

1) если $B = 0$, то уравнение примет вид $0 \cdot x = 0$, значит, x может быть любым действительным числом,

2) если $B \neq 0$, то уравнение примет вид $0 \cdot x = \text{B}$, значит уравнение не имеет корней [1].

Для наглядности данного материала, обучающимся можно представить следующий алгоритм рассуждения (рисунок 1):

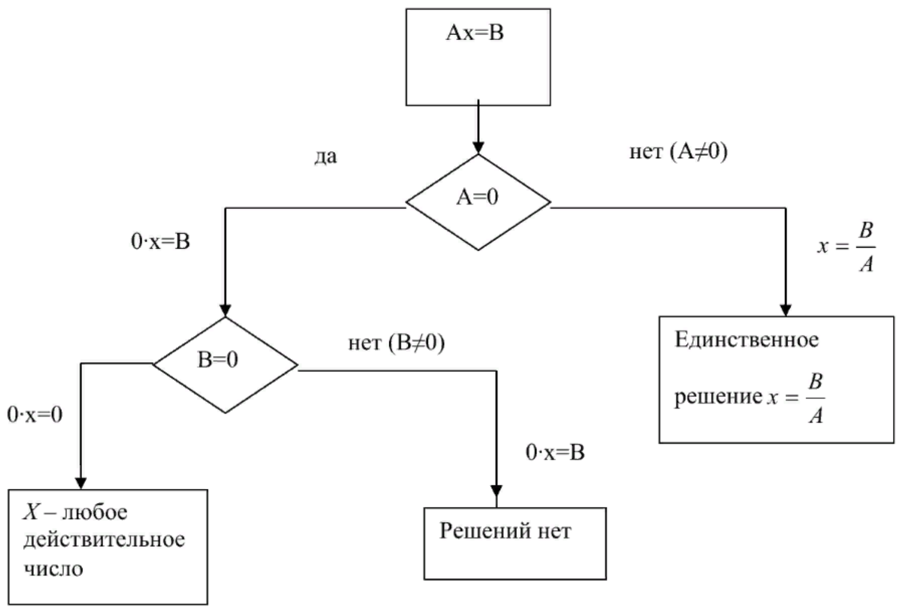

Рисунок 1– Алгоритм

Пример 1. Ю. Н. Макарычев, 8 класс, базовый уровень.

Решить уравнение $mx - \frac{3x}{m} - m = 7 - \frac{8}{m} - 2x$.

Решение. Перенесем все слагаемые в левую часть, приведем к общему знаменателю:

$$\frac{m^2x - 3x - m^2 - 7m + 8 + 2mx}{m} = 0.$$

1. При $m = 0$ корней нет.

2. При $m \neq 0$ получаем:

$$m^2x - 3x - m^2 - 7m + 8 + 2mx = 0;$$

$$m^2x - 3x + 2mx = m^2 + 7m - 8;$$

$$(m^2 - 3 + 2m)x = m^2 + 7m - 8;$$

$$(m-1)(m+3)x = (m-1)(m+8).$$

2.1. При $m \neq 0, m \neq 3$:

$$x = \frac{(m-1)(m+8)}{(m-1)(m+3)};$$

$x = \frac{(m+8)}{(m+3)}$ – единственное решение.

2.2. При $m = 1$ получим:

$0 \cdot x = 0$, где x – любое число.

2.3. При $m = -3$:

$0 \cdot x = -4{,}5$ – решений нет.

Ответ: при $m \neq 0, m \neq 3, m \neq 1$, единственное решение $x = \frac{(m+8)}{(m+3)}$; при $m = 0$ или $m = -1$, корней нет; при $m = 1$, x – любое число.

Рассмотрим *квадратное* уравнение, содержащее параметр.

Уравнение вида $m \cdot x^2 + n \cdot x + q = 0$, где x — неизвестное, m, n, q — выражения, зависящие только от параметров и $\mathrm{m} \neq 0$, называется *квадратным относительно x* [2].Допустимыми будем считать только те значения параметров, при которых m, n, q — действительны.

Линейные и квадратные уравнения, содержащие параметр, можно объединить в одну группу — группу уравнений с параметром не выше второй степени. Уравнения с параметром не выше второй степени являются самыми распространенными в практике итоговых и конкурсных заданий. Их общий вид определяется многочленом

$$F(a, x) = f(a) \cdot x^2 + g(a) \cdot x + h(a).$$

Для таких уравнений всякое частное уравнение не выше второй степени принадлежит одному из следующих типов [4]:

1. $f(a) = g(a) = h(a) = 0$ тогда $x \in (-\infty, +\infty)$.

2. $f(a) = g(a)$ и $h(a) \neq 0$, тогда решений нет.

3. $f(a) = 0$ и $g(a) \neq 0$, тогда $x = -\frac{\mathrm{h(a)}}{\mathrm{g}(a)}$.

4. $f(a) \neq 0$, $D = g^2(a) - 4f(a)h(a) = 0$, тогда $x = -\frac{\mathrm{g(a)}}{2\mathrm{f}(a)}$.

5. $f(a) \neq 0, D > 0$, тогда $x = -\frac{\mathrm{g(a)} \pm \sqrt{D}}{2\mathrm{f}(a)}$.

6. $f(a) \neq 0, D < 0$, решений нет.

Контрольные значения параметра определяются уравнением $D = 0$. На выделенных контрольными значениями промежутках допустимых значений параметра дискриминант имеет определенный знак, соответствующие частные уравнения принадлежат одному из двух последних типов.

Этапами решения всякого уравнения с параметром степени не выше второй можно считать следующий план [17]:

1. Отметим на числовой прямой все контрольные значения параметра, для которых соответствующие частные уравнения не определены.

2. На области допустимых значений параметра исходного уравнения при помощи равносильных преобразований приводится к виду:

$$F(a, x) = f(a) \cdot x^2 + g(a) \cdot x + h(a).$$

3. Выделим множество контрольных значений параметра, для которых

$$f(a) = 0.$$

Если уравнение $f(a) = 0$ имеет конечное множество решений, то для каждого найденного контрольного значения параметра соответствующее частное уравнение решается отдельно. Проводится классификация частных уравнений по первым трем типам.

На бесконечном множестве решений уравнения $f(a) = 0$ проводится решение уравнения $g(a) = 0$, выделяются типы бесконечных и пустых особых частных уравнений. Множеству значений параметра, для которых

$f(a) = 0$ и $g(a) \neq 0$, соответствует третий тип не особых частных уравнений.

1. Выделяются контрольные значения параметра, для которых дискриминант обращается в нуль. Соответствующие не особые частные уравнения имеют двукратный корень $x = -\frac{\mathrm{g(a)}}{2\mathrm{f}(a)}$.

2. Найденные контрольные значения параметра разбивают область допустимых значений параметра на промежутки. На каждом из промежутков определяется знак дискриминанта.

Множеству значений параметра, для которых $f(a) \neq 0$ и $D < 0$, соответствует тип не особых частных уравнений, не имеющих решений, для значений параметра из множества, где $f(a) \neq 0$ и $D > 0$, частные уравнения имеют два различных действительных корня [1].

Пример 2. А. Г. Мордкович, 8 класс, базовый уровень.

Решить уравнение:

$$(a-5)x^2 + 3ax - (a-5) = 0.$$

Решение. При решении квадратных уравнений с параметром необходимо рассмотреть значения параметра, при котором старший коэффициент обращается в нуль. Тогда оно становится линейным. Учащиеся часто об этом забывают и теряют часть ответа.

1. При $a = 5 \Rightarrow x = 0$.

2. При $a \neq 5$ получаем квадратное уравнение, находим дискриминант:

$$D = 9a^2 + 4(a-5)^2 = 13a^2 - 40a + 100;$$

$$13a^2 - 40a + 100 = 0;$$

$$D' = 400 - 1300 = -900 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D > 0 \text{ при любом значении.}$$

Данное квадратное уравнение имеет два различных корня:

$$x_{1,2} = \frac{-3a \pm \sqrt{13a^2 - 40a + 100}}{2(a-5)}.$$

Ответ: при $a = 5, x = 0$; при $a \neq 5, x_{1,2} = \frac{-3a \pm \sqrt{13a^2 - 40a + 100}}{2(a-5)}$.

Линейные уравнения с параметром следует вводить в середине 7 класса на дополнительных занятиях или в качестве закрепления материала, квадратные в 8 классе. Благодаря данным заданиям формируются такие исследовательские умения, как:

– составлять алгоритм решения;

– формулировать вопросы по изученной теме;

– структурировать пройденный материал и т.д.

Рассмотрим *дробно-рациональное* уравнение с параметром, сводящееся к линейному.

Процесс решения дробно-рациональных уравнений протекает по обычной схеме:

1. Данное уравнение заменяется целым путем умножения обеих частей уравнения на общий знаменатель левой и правой его частей.

2. После чего учащиеся решают известным им способом целое уравнение, исключая посторонние корни, то есть числа, которые обращают общий знаменатель в нуль [27].

Примечание: для исключения посторонних корней требуется находить значение параметра, обращающее общий знаменатель в нуль, то есть решать соответствующие уравнения относительно параметра.

Пример 3. А. Г. Мордкович, 9 класс, базовый уровень.

Решить уравнение $\frac{x}{x-2} = 1 + \frac{m}{x}$.

Решение. Перенесем все слагаемые в левую часть, приведем к общему знаменателю:

$$\frac{x^2 - x^2 + 2x - mx + 2m}{x(x-2)} = 0;$$

$$\frac{2x - mx + 2m}{x(x-2)} = 0;$$

$$\begin{cases}(m-2)x = 2m,\\ x \neq 0; x \neq 2.\end{cases}$$

1. Если $m \neq 2$, то $x = \frac{2m}{m-2}$.

2. Если $m = 2$, то уравнение не имеет корней

3. Найдем значения m, при которых $x = 2$ и $x = 0$.

При $x = 0$: $\frac{2m}{m-2} = 0$ при $m = 0$.

При $x = 2$: $\frac{2m}{m-2} = 2; 2m = 2m - 4$. Данное равенство не выполнимо при любом значении m.

Ответ: при $m \neq 2, m \neq 0$ – уравнение имеет единственный корень $x = \frac{2m}{m-2}$; при $m = 0, m = 2$ – уравнение не имеет корней.

Дробно-рациональные уравнения с параметром помогают развивать умение структурировать ранее пройденный материал и выделять обобщенный алгоритм исследования.

Рассмотрим *иррациональное* уравнение, содержащее параметр.

Главными особенностями при решении уравнений такого типа являются:

1. Ограничение области определения неизвестной x, так как она меняется в зависимости от значения параметра.

2. В решении уравнений вида $f(x,a) = g(x,a)$ при возведении в квадрат необходимо учитывать знак $g(x,a)$ [27].

$$\sqrt{f(x,a)} = g(x,a);$$

$$\begin{cases} g(x,a) \geq 0,\\ f(x,a) = g^2(x,a).\end{cases}$$

При рассмотрении всех особых случаев и возведении обеих частей иррационального уравнения в квадрат мы переходим к решению квадратного уравнения с параметром.

Пример 4. Г. К. Муравин, 11 класс, углубленный уровень.

При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{x+3} = 2x - a$$

имеет единственный корень?

Решение. Наше исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2x - a \geq 0, \\ x + 3 = 4x^2 - 4ax + a^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{a}{2}, \\ 4x^2 - (4a+1)x + (a^2 - 3) = 0. \end{cases}$$

Данная система имеет единственное решение, если:

$$\left[\begin{array}{l} D = 0, \\ f\left(\frac{a}{2}\right) < 0. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (4a+1)^2 - 16(a^2 - 3) = 0, \\ 4 \cdot \frac{a^2}{4} - (4a+1) \cdot \frac{a}{2} + a^2 - 3 < 0. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = -\frac{49}{8}, \\ a > -6. \end{array}\right.$$

Ответ: при $a = -\frac{49}{8}$ или $a > -6$ данное уравнение имеет единственный корень.

Уравнение такого вида часто встречается во второй части ОГЭ. Умения, формируемые в ходе решения такой задачи:

– выполнять анализ условия;

– акцентировать внимание на области допустимых значений подкоренного выражения и т.д.

Рассмотрим *показательное* уравнение, содержащее параметр.

Большинство показательных уравнений с параметрами сводится к показательным уравнениям вида:

$$a^{f(x)} = b^{\varphi(x)}, \text{ где } a > 0,\ b > 0.$$

Область допустимых значений такого уравнения находится как пересечение областей допустимых значений функций $f(\text{x})$ и $\varphi(\text{x})$. Для решения уравнения необходимо рассмотреть следующие случаи:

1. При $a = b = 1$ решением уравнения является область его допустимых значений D.

2. При $a = 1, b \neq 1$ решением уравнения служит решение уравнения $\varphi(\text{x}) = 0$ на области допустимых значений D.

3. При $a \neq 1, b = 1$ решение уравнения находится как решение уравнения $f(\text{x}) = 0$ на области D.

4. При $a = b$ $(a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1)$ уравнение равносильно уравнению $f(x) = \varphi(x)$ на области D.

5. При $a \neq b$ $(a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1)$ уравнение тождественно уравнению $\log_c a^{f(x)} = \log_c b^{\varphi(x)}$ $(c > 0, c \neq 1)$ на области D [3].

Пример 5. С. М. Никольский, 11 класс, базовый уровень.

Решить уравнение

$$2^{(a^2+10a+21)x} = 2^{2a^2+a-15}.$$

Решение. Основания равны, имеем право приравнять показатели степеней:

$$(a^2 + 10a + 21)x = 2a^2 + a - 15.$$

Разложим на множители квадратные трехчлены:

$$(a + 3)(a + 7)x = (2a - 5)(a + 3).$$

1. Если $a = -3$, то $0 \cdot x = 0, x \in R$.

2. Если $a = -7$, то $0 \cdot x = 36 \Rightarrow$ решений нет.

3. Если $a \neq -3, a \neq -7$, то $x = \frac{2a-5}{a+7}$.

Ответ: при $a = -3,\ x \in R$; при $a = -7$ решений нет; при $a \neq -3, a \neq -7,\ x = \frac{2a-5}{a+7}$.

На данном примере показано развитие такого исследовательского умения, как умение проводить переформулирование задачи (т.е. на основе привнесенных данных выдвигается новое требование – переход от показательного уравнения к квадратному).

Рассмотрим *логарифмическое* уравнение, содержащее параметр.

Решение логарифмических уравнений с параметрами сводится к нахождению корней элементарного логарифмического уравнения.

Пример 6. Решить уравнение [27]:

$$\log_5(x - 2) + \log_5(x^3 - a) + \log_5(x - 2)^{-1} = 2.$$

Решение. Обозначим область допустимых значений:

$$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x^3 - a > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x > \sqrt[3]{a}. \end{cases}$$

Так как логарифмы имеют одинаковое основание, то по свойствам логарифма:

$$\log_5 (x-2)(\mathrm{x}^3-a)(\mathrm{x}-2)^{-1} = 2\,;$$

$$x^3 - a = 25;$$

$$x = \sqrt[3]{25+a}.$$

Исходя их области допустимых значений (далее – ОДЗ):

$$\sqrt[3]{25+a} > 2;$$

$$25 + a > 8;$$

$$a > -17.$$

Ответ: $a \in (-17, +\infty), x = \sqrt[3]{25+a}$.

Решение данного примера направлено на развитие умения конструировать новый способ из ранее изученных, умение применять нестандартный способ мышления, учитывая ОДЗ, а также происходит актуализация знаний по теме «Логарифм», «Свойства логарифмов», «Решение иррациональных неравенств с параметром».

Рассмотрим *тригонометрическое* уравнение, содержащее параметр.

Уравнение будем называть *тригонометрическим*, если неизвестное находится только под знаком тригонометрической функции. Решение таких уравнений сводится к нахождению корней одного из простейших тригонометрических уравнений [11].

Пример 7. При каких значениях параметра a уравнение:

$$\sin x = a^2 - 2a$$

имеет единственное решение на $[0, 2\pi]$ [11]?

Решение. Уравнение имеет единственное решение на $[0, 2\pi]$, если:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 1\,, \\ \sin x = -1.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a^2 - 2a = 1, \\ a^2 - 2a = -1.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a = 1 \pm \sqrt{2}, \\ \quad a = 1.\end{array}\right.$$

Ответ: уравнение имеет единственное решение на данном промежутке при $a = 1 \pm \sqrt{2}, a = 1$.

Пример 8. Решить уравнение [11]:

$$tg^2 2x-(2a+1)tg2x+a(a+1)=0.$$

Решение. Уравнение квадратное относительно $tg2x$, следовательно, оно равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} tg2x=a+1, \\ tg2x=a. \end{array}\right.$$

Мы нашли корни по теореме Виета, они являются действительными при $\forall a \in R$. Отсюда получим два множества корней данного уравнения:

$$x=\frac{1}{2}arctg(a+1)+\frac{1}{2}\pi n, \text{где } n \in Z;$$

$$x=\frac{1}{2}arctg\ a+\frac{1}{2}\pi k, \text{где } k \in Z.$$

Ответ: $x=\frac{1}{2}arctg(a+1)+\frac{1}{2}\pi n, x=\frac{1}{2}arctg\ a+\frac{1}{2}\pi k,$ где $n,k \in Z.$

Системы уравнений, содержащие параметр.

Рассмотрим решение систем линейных уравнений, содержащих параметр. Геометрическая интерпретация решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными выяснит, как расположены две прямые на плоскости, двух линейных уравнений с тремя неизвестными – как расположены плоскости [17]. Общий вид системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0. \end{cases}$$

Рассмотрим 3 случая расположения таких прямых:

1. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ бесконечное множество решений системы, так как прямые совпадают.

2. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ решений нет, так как прямые параллельны.

3. При $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ система имеет единственное решение [1].

Рассмотрим случай, когда $\mathrm{f(x,y,a)}, \varphi\mathrm{(x,y,a)}$ — нелинейные функции. Решение уравнения $\mathrm{f(x,y,a)}=\varphi\mathrm{(x,y,a)}$, можно свести к решению системы уравнений, которую в некоторых случаях удобно решать графически.

$$\begin{cases} y = f(x, a), \\ y = \varphi(x, a). \end{cases}$$

Решая такую систему, мы рассматриваем два семейства кривых $y = f(x, a), y = \varphi(x, a)$. Это часто оказывается не просто, так как зависимость графиков от параметра не всегда бывает легкой. Тогда можно рассмотреть области определения функций $f(x, y, a) = 0, \varphi(x, y, a) = 0$ при различных значениях параметра a можно судить о количестве решений системы [7].

Пример 9. Выяснить, при каких положительных значениях параметра a система уравнений имеет два решения [9]:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ 2x - y = 2. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем исходную систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ 2x - y = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ y = 2x - 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (2x-2)^2 = a^2, \\ y = 2x - 2. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы:

$$x^2 + 4x^2 - 8x + 4 - a^2 = 0;$$

$$5x^2 - 8x + 4 - a^2 = 0.$$

$$D = 16 - 5(4 - a^2) = 5a^2 - 4.$$

Уравнение имеет два корня по условию. Так как нам требуется найти положительные значения параметра системы уравнений, то решим неравенство:

$$5a^2 - 4 > 0;$$

$$5a^2 > 4;$$

$$|a| > \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Так как нам нужны положительные значения параметра a, то ответом к задаче будет интервал $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}; +\infty\right)$.

Ответ: система имеет 2 решения при $a \in \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}; +\infty\right)$.

На конкретных этапах решения представленной задачи ученик формирует такие умения, как работа с условием, понимание текста, выделение главного; умение строить математическую модель, правильно ставить цель и делать выводы.

Рассмотрим пример, где необходимо вычислить значение параметра в комплексном уравнении.

Пример 10. А. Г. Мордкович, 10 класс, углубленный уровень.

При каких действительных значениях a число

$$z = (2 - ai)^3 - (3 - ai)^2 + 5 + a(1 - a^2 i)$$

а) является чисто мнимым числом;

б) является действительным числом?

Решение.

Так как $(2 - ai)^3 = 8 - 3 \cdot 4 \cdot ai + 3 \cdot 2 \cdot (ai)^2 - (ai)^3 =$

$= (8 - 6a^2) + (-12a + a^3)i$ и $(3 - ai)^2 = (9 - a^2) - 6ai,$ то

$$z = (8 - 6a^2 - 9 + a^2 + 5 + a) + i(-12a + a^3 + 6a - a^3);$$

$$z = (-5a^2 + a + 4) - 6ai.$$

а) z – чисто мнимое число тогда и только тогда, когда $Re\, z = 0,$ т.е. $5a^2 - a - 4 = 0,$ откуда находим, что $a = 1$ или $a = -0{,}8$.

b) z – действительное число тогда и только тогда, когда $Im\, z = 0,$ т.е. $-6a = 0, a = 0.$

Ответ: а) $1, -0{,}8;$ б) $0.$

2.2 Методы решения задач с параметром

Рассмотрим один из самых распространенных методов решения параметрических задач – *аналитический метод*.

Решение задач данным методом практикует большинство школьников, которые пытаются одолеть задачи с параметром. Можно назвать решение задачи аналитическим методом прямым решением, в силу того, что при решении используются стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра [9].

В то же время такой способ решения является, пожалуй, самым трудным, так как требует от учащихся высокой грамотности и наибольших усилий по овладению им.

Рассмотрим некоторые задачи и подчеркнем «уязвимые» места, где обучающиеся могут допустить ошибки.

Существует такой вид задач, который предполагает ограничения параметра a. Стоит акцентировать внимание учащихся на ответах к таким задачам. Если в задании мы имеем уравнение, к примеру: при каком значении параметра a данное уравнение имеет 2 решения.

В ответе следует указать только значение самого параметра a. Если же мы имеем в задании неравенство, к примеру: при каком значении параметра a данное неравенство имеет 2 решения, то в ответе мы должны указать какое-то подмножество множества действительных чисел и другие.

Перед решением следующего примера обучающимся необходимо напомнить метод интервалов [1].

Пример 11. А.Г. Мерзляк, 8 класс, дидактический материал.

Решить уравнение

$$(a+4)x^2+2x(a+6)+2a+9=0.$$

Решение.

1. При $a=-4$ уравнение будет линейным: $4x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{4}$.

2. При $a\neq -4$ уравнение будет квадратным, находим дискриминант:

$$D=(a+6)^2-(a+4)(2a+9)=-a(a+5).$$

2.1. При $a\in(-\infty;-5)\cup(0;+\infty), D<0 \Rightarrow$ нет корней.

2.2. При $a=0$ или $a=-5, D=0 \Rightarrow$ один корень.

2.3. При $a\in(-5;-4)\cup(-4;0), D>0 \Rightarrow$ два корня.

Ответ: при $a = -4$, $x = -\frac{1}{4}$; при $a \in (-\infty; -5) \cup (0; +\infty)$ уравнение не имеет корней; при $a = 0$, $x = -1{,}5$; при $a = -5$, $x = 1$; при $a \in (-5; -4) \cup (-4; 0)$ уравнение имеет два корня.

В следующем примере обучающихся может напугать иррациональность знаменателя. Необходимо вспомнить решение уравнений такого вида прежде чем переходить к уравнению с параметром.

Пример 12. Вариант ЕГЭ – 2019 год.

При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x-x^2-a^2}} = 0$$

имеет один корень на отрезке $[4; 8]$?

Решение. Уравнение равносильно следующей системе:

$$\frac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x-x^2-a^2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a-7)(x+a-2) = 0, \\ 10x-x^2-a^2 > 0.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} x = a+7, \\ x = 2-a, \end{array}\right. \\ 10x-x^2-a^2 > 0.\end{cases}$$

Рассмотрим первый случай, когда корни совпадают: $a + 7 = 2 - a \Leftrightarrow a = -\frac{5}{2}$. Тогда корень $x = \frac{9}{2}$ при надлежит отрезку $[4; 8]$ и удовлетворяет ОДЗ.

Рассмотрим второй случай, когда первый корень $x = a + 7$ принадлежит отрезку $[4; 8]$ и удовлетворяет ОДЗ. Тогда уравнение имеет единственное решение на заданном отрезке, если второй корень не принадлежит отрезку $[4; 8]$ или не удовлетворяет ОДЗ. Имеем:

$$\begin{cases} 4 \le a+7 \le 8, \\ 10(a+7)-(a+7)^2-a^2>0, \\ \left[\begin{array}{l} 2-a>8, \\ 2-a<4, \\ 10(2-a)-(2-a)^2-a^2 \le 0. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a^2-4a+21>0, \\ -3 \le a \le 1, \\ \left[\begin{array}{l} a<-6, \\ a>-2, \\ -a^2-3a+8 \le 0. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-2-\sqrt{46}}{2} < a < \dfrac{-2+\sqrt{46}}{2}, \\ -3 \le a \le 1, \\ \left[\begin{array}{l} a>-2, \\ a \ge -\dfrac{-3+\sqrt{41}}{2}, \\ a \le -\dfrac{-3-\sqrt{41}}{2}. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -2 < a \le 1.$$

Рассмотрим второй случай, когда второй корень $x = 2 - a$ принадлежит отрезку $[4; 8]$ и удовлетворяет ОДЗ. Тогда уравнение имеет единственное решение на заданном отрезке, если первый корень не принадлежит отрезку $[4; 8]$ или не удовлетворяет ОДЗ. Имеем:

$$\begin{cases} 4 \le 2-a \le 8, \\ 10(2-a)-(2-a)^2-a^2>0, \\ \left[\begin{array}{l} 7+a>8, \\ 7+a<4, \\ 10(7+a)-(7+a)^2-a^2 \le 0. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2-3a+8>0, \\ -6 \le a \le -2, \\ \left[\begin{array}{l} a<-3, \\ a>1, \\ -2a^2-4a+21 \le 0. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-3-\sqrt{41}}{2} < a < \dfrac{-3+\sqrt{41}}{2}, \\ -6 \le a \le -2, \\ \left[\begin{array}{l} a>-3, \\ a \ge -\dfrac{-2+\sqrt{46}}{2}, \\ a \le -\dfrac{-2-\sqrt{46}}{2}. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-3-\sqrt{41}}{2} < a < -3.$$

Ответ: уравнение будет иметь единственное решение при $\frac{-3-\sqrt{41}}{2} < a < -3, a = -\frac{5}{2}, -2 < a \le 1$.

Рассмотрим пример, который может вызвать у учащихся большие трудности с преобразованиями. Перед решением таких задач необходимо повторить с обучающимися свойства представленной функции, в нашем случае функция будет логарифмическая.

Пример13. Ш. А. Алимов, 10-11 класс, базовый уровень.

Найти все значения параметра а, при которых уравнение $5\log_5 x + \log_a x - 4\log_{25} x = a$ имеет корни.

Решение. Воспользуемся определением логарифма, его свойствами и получим:

$$5\log_5 x + \frac{\log_5 x}{\log_5 a} - 2\log_5 x = a;$$

$$\log_5 x \cdot \left(3 + \frac{1}{\log_5 a}\right) = a;$$

$$\log_5 x = \frac{a \cdot \log_5 a}{3\log_5 a + 1} \cdot \log_5 5\,;$$

$$x = 5^{\frac{a \cdot \log_5 a}{3\log_5 a + 1}};$$

$$a > 0, a \neq 1;\ a \neq 5^{-\frac{1}{3}}.$$

Ответ: $a > 0, a \neq 1;\ a \neq 5^{-\frac{1}{3}}$.

Мы не просто так рассмотрели логарифмическое уравнение. Очень часто у школьников возникают трудности с основанием логарифма, а в данном примере в основании стоит параметр. Уравнение будет решаться подобным образом. Рассмотрим пример из тригонометрии. Позже решим его еще и графическим способом.

Пример 14. Найти все значения параметра a, при котором имеет корни уравнение [11]:

$$\cos 2x + \sin^4 x - a^2 + 2a - 1 = 0.$$

Решение. При решении задачи аналитическим способом, обучающимся стоит актуализировать знания по основным тригонометрическим формулам. В нашем случае будем использовать формулу косинуса двойного угла:

$$1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x - a^2 + 2a - 1 = 0;$$

$$\sin^4 x - 2\sin^2 x - a^2 + 2a = 0.$$

Используем замену переменной: $\sin^2 x = t, \;\; t \in [0; 1]$.

Подставим замену в предыдущее уравнение:

$$t^2 - 2t - a^2 + 2a = 0; \;\; (*)$$

$$t^2 - 2t + 1 = a^2 - 2a + 1;$$

$$(t - 1)^2 = (a - 1)^2;$$

$$\left[\begin{array}{l} t - 1 = a - 1, \\ t - 1 = 1 - a. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = a, \\ t = 2 - a. \end{array}\right.$$

Для записи ответа необходимо найти значение параметра a в соответствии с ограничениями синуса ($t \in [0; 1]$). Необходимо, чтобы выполнялись условия:

$$\left[\begin{array}{l} 0 \le a \le 1, \\ 0 \le 2 - a \le 1. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le a \le 1, \\ 1 \le a \le 2. \end{array}\right.$$

Делаем вывод, что уравнение будет иметь корни при $0 \le a \le 2$.

Ответ: при $0 \le a \le 2$.

Рассмотрим *графический метод* решения параметрических задач.

Решение задач данным методом отличаются наглядностью. Обучающихся увлекает такой красивый метод решения, зачастую они начинают игнорировать другие. Учитель должен чутко следить за этим и указывать школьникам, что нельзя заострять внимание на одном методе решения задач с параметрами. Необходимо помнить, что в каждом классе задач может обнаружиться такая задача, которая легко решается одним способом и с огромными затруднениями решается остальными способами. Поэтому, чтобы решать задачи данным способом, перед этим обучающимся необходимо освоить другие [7].

Рассмотрим решение задач с параметрами графическим способом. Покажем решение предыдущего тригонометрического уравнения.

Пример15. Найти все значения параметра a, при котором уравнение

$$\cos 2x + \sin^4 x - a^2 + 2a - 1 = 0$$

имеет корни.

Решение. При решении задачи аналитическим способом, обучающимся стоит актуализировать знания по основным тригонометрическим формулам. В нашем случае будем использовать формулу косинуса двойного угла:

$$1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x - a^2 + 2a - 1 = 0;$$

$$\sin^4 x - 2\sin^2 x - a^2 + 2a = 0.$$

Используем замену переменной: $\sin^2 x = t,\ \ t \in [0;1]$.

Подставим замену в предыдущее уравнение, обозначенное в примере 14 (*):

$$t^2 - 2t - a^2 + 2a = 0.$$

Следует повторить с учащимися алгоритм нахождения вершины параболы. Также учеников может смутить новое обозначение переменных. Найдем координаты вершины:

$$t_0 = 1;\quad y_0 = -a^2 + 2a - 1 = -(a-1)^2.$$

Дальнейшее решение задачи будет состоять в рассмотрении расположения параболы в соответствии с требованиями нашей задачи (рисунок 2). Построим графики при разных значениях параметра a.

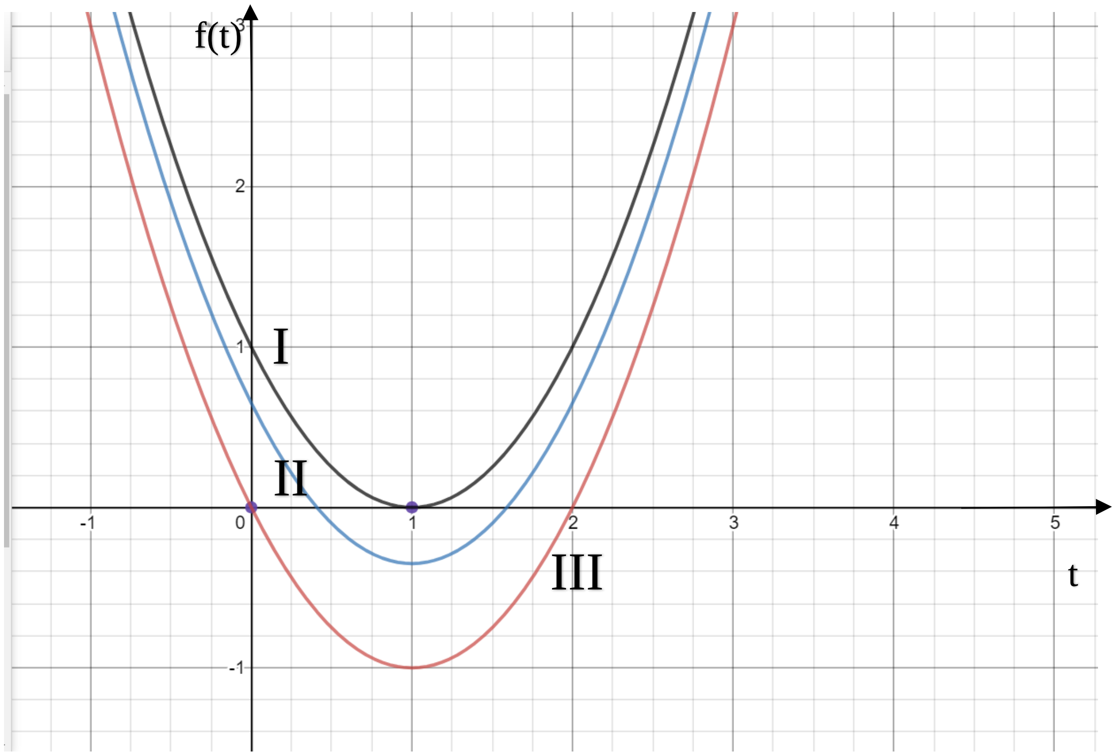

Рисунок 2 – График к примеру 14

Анализируем представленные графики. График I на промежутке $[0; 1]$ имеет единственный корень $t = 1$. В соответствии с этим параметр принимает значение $a = 1$. График II на этом же промежутке также имеет один корень $0 < t < 1, 0 < a < 1$ или $1 < a < 2$. На промежутке III мы получаем также единственный корень $t = 0$. Подставляя его в уравнение $(t^2 - 2t - a^2 + 2a = 0)$, получим $\left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = 2. \end{array}\right.$

Составим аналитическую запись, соответствующую графикам $(I), (II), (III)$.

$I: f(1) = -(a-1)^2 = 0 \ \Rightarrow a = 1.$

$II: \begin{cases} f(1) < 0, \\ f(0) > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -(a-1)^2 < 0, \\ 2a - a^2 > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \neq 1, \\ a(2-a) > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \neq 1, \\ 0 < a < 2. \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < a < 1$ или $1 < a < 2$.

$III: \begin{cases} f(1) < 0, \\ f(0) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \neq 1, \\ a(2-a) = 0. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = 2. \end{array}\right.$

Получим окончательный ответ, объединив полученные решения с трех случаях: $0 \leq a \leq 2$.

Ответ: при $0 \leq a \leq 2$.

Примечание: при решении данной задачи учащимся необходимо представить несколько способов решения. Каждый из них имеет свои особенности и «подводные камни». Стоит заметить, что уравнение (*), которое мы использовали при показе двух методов решения, является аналитически рациональным за счет легкого выделения полных квадратов. На этом стоит заострить внимание школьников.

Пример 16. Для каждого значения параметра a определить количество решений уравнения

$$|x^2 - 7|x| + 6| = a.$$

Решение. Необходимо обратить внимание учащихся, что количество решений нашего уравнения будет равно количеству точек пересечения графиков функций $y = |x^2 - 7|x| + 6|$ и $y = a$ – разбили начальное уравнение на два отдельных уравнения. Можно заметить, что уравнение $y = |x^2 - 7|x| + 6|$ не содержит параметра a, построим его график на координатной плоскости. Будем строить последовательно.

Изобразим график функции $y = x^2 - 7x + 6 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$ (рисунок 3). Графиком будет являться парабола с вершиной в точке $\left(\frac{7}{3}; \frac{-25}{4}\right)$. Необходимо повторить с учащимися выделение полного квадрата, нахождение вершины параболы и ее построение на графике.

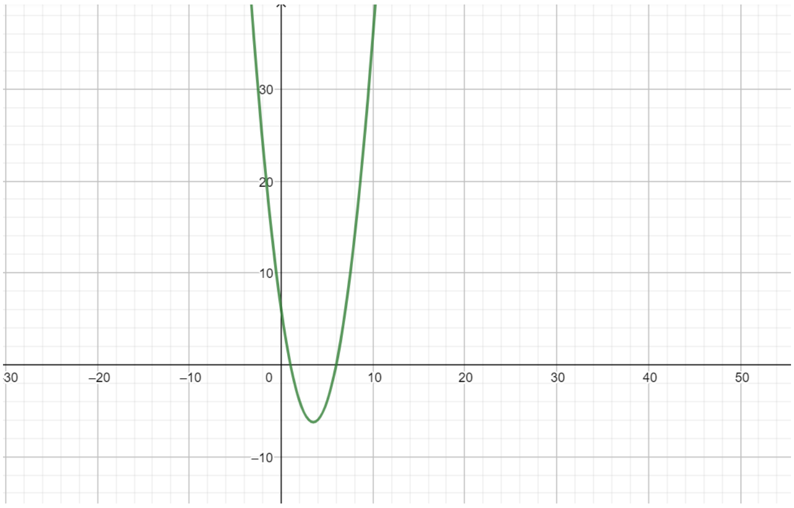

Рисунок 3 – График №1 к примеру 16

График функции $y = x^2 - 7|x| + 6$ получен путем отражения Графика 1, расположенного в правой полуплоскости, в левую полуплоскость (рисунок 4).

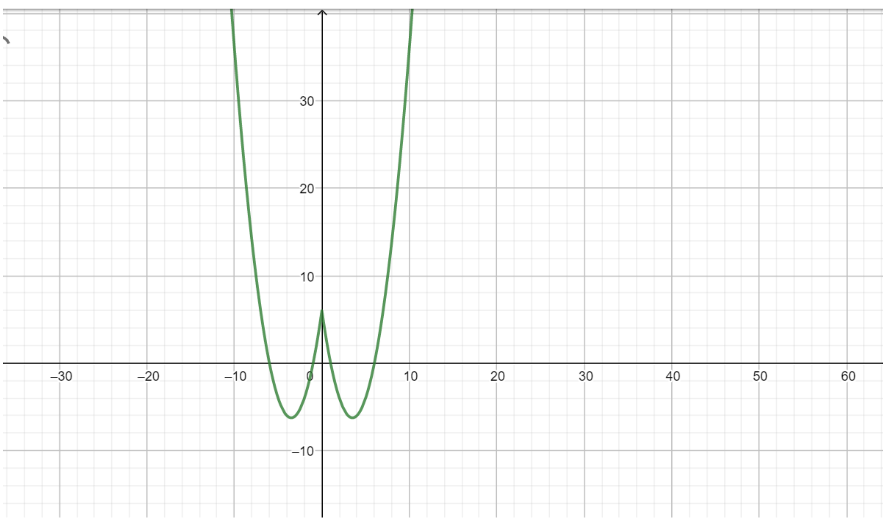

Рисунок 4 – График №2 к примеру 16

График функции $y = |x^2 - 7|x| + 6|$ получаем из Графика 2. Часть графика, расположенного ниже оси OX, отображается симметрично относительно оси OX , остальная часть графика не изменяется (рисунок 5).

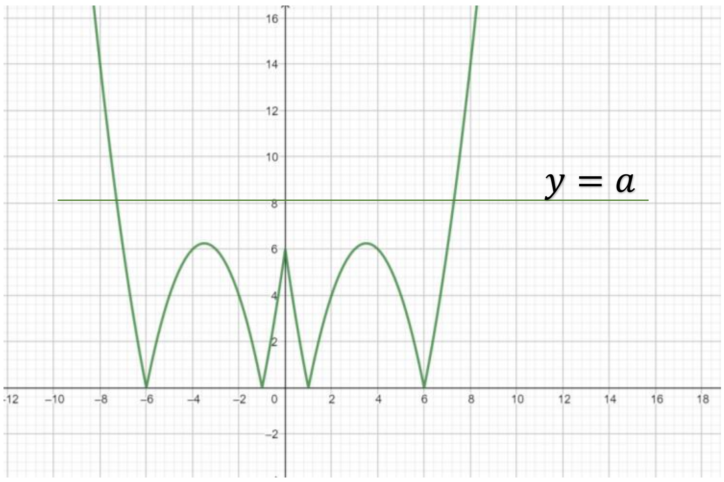

Рисунок 5 – График №3 к примеру 16

Далее переходим к анализу. $y = a$ – это горизонтальная прямая. Устанавливаем по графику количество точек пересечения в зависимости от параметра a. Учащимся необходимо внимательно относится к координатам выпуклости. После установления количества решений уравнения при каждом значении параметра a переходим к правильной записи ответа.

Ответ: при $a < 0$ – решений нет; при $a = 0$ и $a = \frac{25}{4}$ – четыре решения; при $0 < a < 6$ – восемь решений; при $a = 6$ – семь решений; при $6 < a < \frac{25}{4}$ – шесть решений; при $a > \frac{25}{4}$ – два решения.

Пример 17. Вариант ЕГЭ – 2020 год.

При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(a+1), \\ (x+y)^2 = 14, \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

Решение. Графиком первого уравнения является семейство окружностей с центром в начале координат и радиусом $r = \sqrt{2(a+1)}$ с ограничением $a > -1$.

Преобразуем второе уравнение, занесем обе части под корень. Получаем два параллельные прямые $x + y = \sqrt{14}$ и $x + y = -\sqrt{14}$ (рисунок 6).

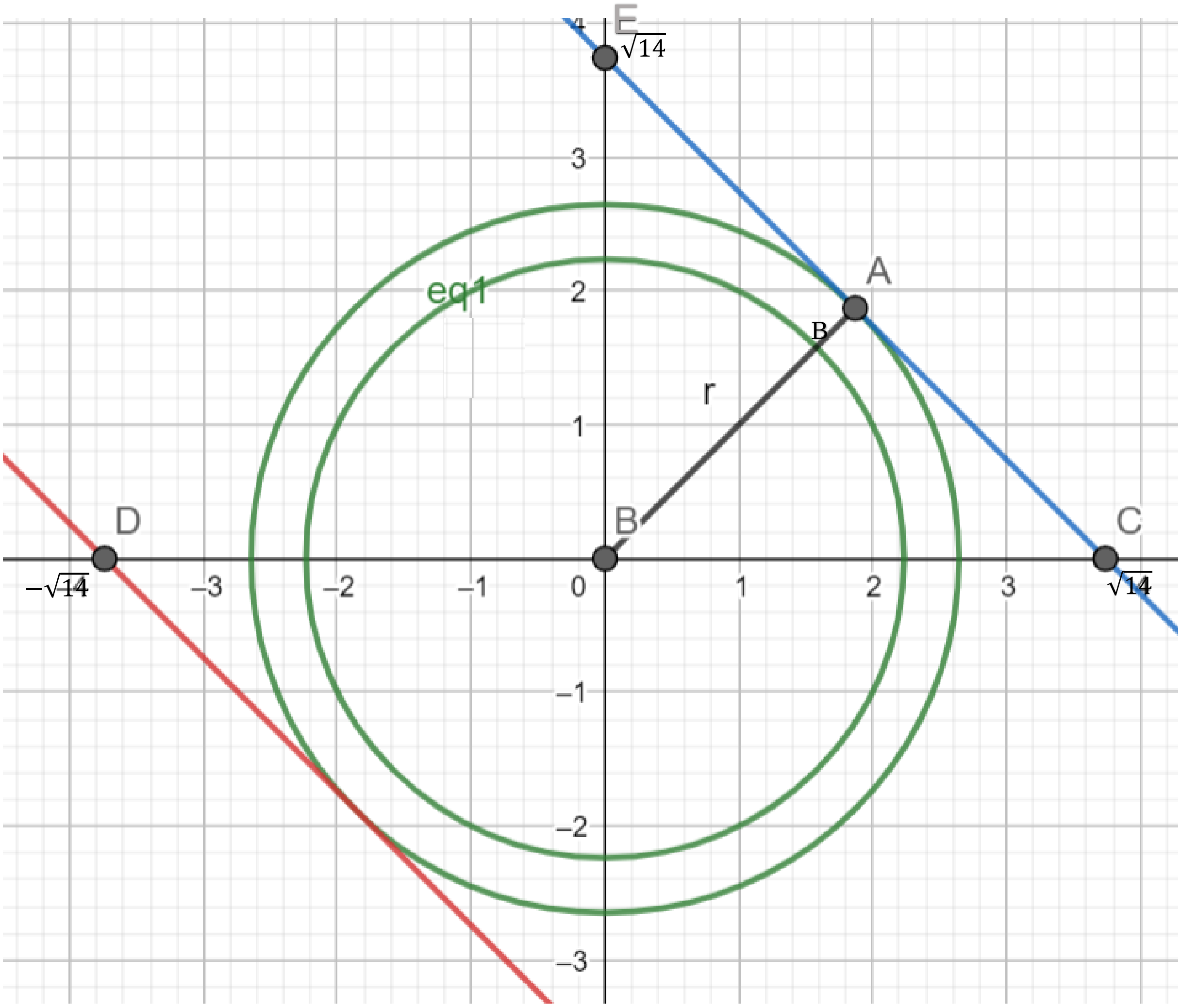

Рисунок 6 – График к примеру 16

Данная система будет иметь ровно два решения, если окружность будет касаться двух параллельных прямых, это будет выполнимо при

$$r = \frac{1}{2} \cdot CE = \sqrt{7}.$$

Найдем значение параметра a:

$$\sqrt{2(a+1)} = \sqrt{7};$$

$$2(a+1) = 7 \Rightarrow a = \frac{5}{2}.$$

Ответ: система имеет ровно 2 решения при $a = \frac{5}{2}$.

Рассмотрим метод решения задач *относительно параметра*.

Ранее мы рассматривали параметр как неизвестное, но фиксированное число. Учащиеся должны понимать, что по факту параметр – это переменная, причем равноправная. Рассмотрим еще один метод решения задач с параметрами, будем решать относительно параметра.

Пример 18. Найди все значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_{1-x}(a-x+2)=2$$

имеет хотя бы один корень, принадлежащих промежутку [-1;1).

Решение. Найдем область допустимых значений и запишем равносильную систему:

$$\begin{cases} 1-x>0, \\ 1-x\neq 1, \\ a-x+2=(1-x)^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1, \\ x\neq 0, \\ a=x^2-x-1. \end{cases}$$

Можно заметить, что параметр a выразился через переменную x. В системе координат xOa построим график функции $a=x^2-x-1$, учитывая, что $x<1, x\neq 0$ (рисунок 7).

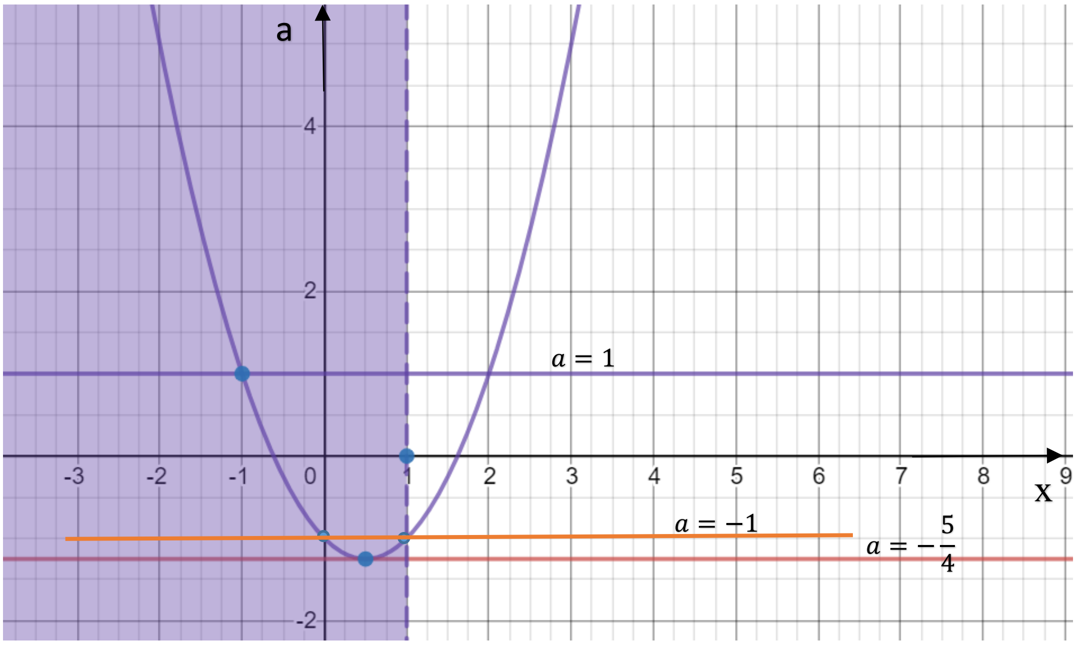

Рисунок 7 – График к примеру 17

По графику мы можем проследить, что уравнение имеет два корня на промежутке $[-1;1)$ при $-\frac{5}{4}\leq a<-1$ и один корень при $-1\leq a\leq 1$.

Ответ: $a\in[-\frac{5}{4};1)\cup(-1;1]$.

Рассмотрим следующий пример. Решим его двумя способами.

Пример 19. Вариант ЕГЭ – 2019 год.

При каких значениях параметра a уравнение

$$(a + 1 - |x - 1|)(a + x^2 - 4x) = 0$$

имеет 4 различных корня?

1. Решение аналитическим способом относительно параметра.

Учащиеся должны помнить, что произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю. Далее будем решать два уравнения, используя равносильный переход.

$$a + 1 - |x - 1| = 0; \ (1)$$

$$x^2 - 4x + a = 0. \qquad (2)$$

Анализируя уравнения (1) и (2) можно сказать, что они будут иметь по 2 различных корня, если $a + 1 > 0$ для уравнения (1) и $4 - a > 0$ для (2).

Общим решением будет промежуток $-1 < a < 4$.

Найдем корни уравнения (1):

$$\left[\begin{array}{l} x - 1 = a + 1, \\ x - 1 = -a - 1. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = a + 2, \\ x = -a. \end{array}\right.$$

Подставим найденные корни в уравнение (2).

При $x = a + 2$:

$$(a + 2)^2 - 4(a + 2) + a = 0;$$

$$a^2 + 4a + 4 - 4a - 8 + a = 0;$$

$$a^2 + a - 4 = 0.$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 = 17.$$

$$a_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}; a_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}.$$

При $x = -a$:

$$(-a)^2 - 4(-a) + a = 0;$$

$$a^2 + 5a = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = 5. \end{array}\right.$$

Подходя к ответу, мы должны исключить значение параметра a из промежутка $(-1;\ 4)$, так как при этих значениях параметра будут совпадать корни уравнений (1) и (2), а по условию мы должны найти значение параметра, при которых исходное уравнение будет иметь 4 корня.

Ответ: при $a \in (-1;0) \cup \left(0;\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2};4\right)$.

2. Решение графическим методом.

Строим графики функций (1) и (2) и плоскости xOa (рисунок 8). При данном методе решения уравнения необходимо повторить с учащимися построение графиков функций со смещениями. В частности график функции $a = |x-1| - 1$ получается из графика $a = |x|$ сдвигом на 1 вниз и на 1 вправо.

Графиком функции $a = -x^2 + 4x$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Необходимо повторить с обучающимися построение графика параболы, нахождение точек пересечения с осью Ox и вершины параболы. В нашем случае вершиной параболы будет являться точка (2,4), точки пересечения графика с осью Ox: (0,0), (4,0).

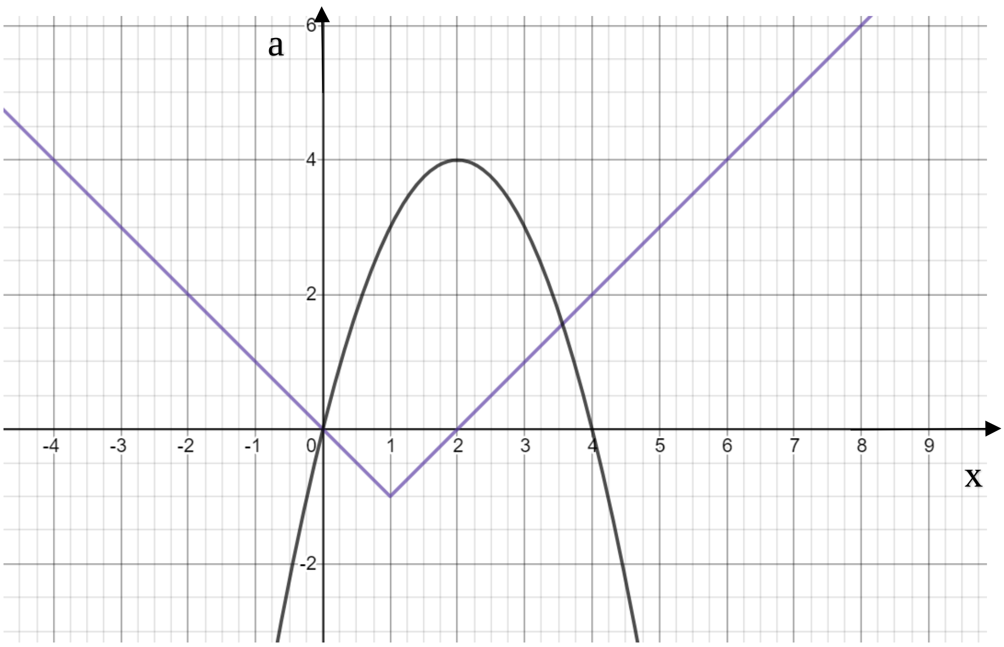

Рисунок 8 – График к примеру 19

По графику легко заметить, что при $-1 < a < 4$ прямые, параллельные оси Ox, будут пересекать два графика в четырех точках (за исключением точек пересечения графиков), что удовлетворяет условиям нашей задачи.

Найдем координаты точки пересечения графиков:

$$|x-1|-1=-x^2+4x;$$

$$\text{При } x>1: x-2=-x^2+4x;$$

$$x^2-3x-2=0.$$

$$D=9+4*2=17.$$

$$x_1=\frac{3-\sqrt{17}}{2}<1;\ x_2=\frac{3+\sqrt{17}}{2}>1.$$

Если $x=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$, то $a=\left|\frac{3+\sqrt{17}}{2}-1\right|-1=\left|\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right|-1=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$.

Мы получили точку пересечения графиков функций: $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2};\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$. Если $a\in\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2};4\right)$ или $a\in\left(0,\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$, то графики также пересекаются в четырех точках.

Ответ: $a\in(-1;0)\cup\left(0;\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2};4\right)$.

2.3 Электронный образовательный ресурс «Задачи с параметром»

Перед нами стояла следующая цель: создание единого образовательного информационного пространства по теме «Задачи с параметром» для его дальнейшего внедрения в образовательный процесс.

Этапы создания:

1. Анализ Интернет-ресурсов по теме работы.
2. Выбор платформы сайта.
3. Создание каркаса, разметки, выбор дизайна.
4. Поиск и включение методического и дидактического материала.
5. Публикация на хостинге.

Перед началось работы мы выполнили комплексный анализ электронных образовательных ресурсов по теме выпускной квалификационной работы. В процессе поиска удалось заметить, что отдельные сайты демонстрируют материал по конкретным темам, нет общей систематизации материала и возможности проверки знаний учащимися. Как правило, это небольшая часть теоретического материала, подкрепленная несколькими стандартными примерами. А часть для самопроверки представляет собой набор задач и нет возможности сравнить ответы учащихся с правильными. Попадая на такие электронные страницы, школьник анализирует представленный набор задач, не выполняя самопроверку усвоенного материала.

Современный электронный ресурс должен отвечать следующим положениям:

– создавать условия и механизмы для повышения качества получения образования;

– разнообразить формы самостоятельной работы учащихся;

– служить источником совершенствования навыков исследовательской деятельности, сохраняя мотивацию при самостоятельном и классном обучении;

– быть удобным и эргономичным в использовании.

Выбирая платформу для создания сайта, мы остановились на платформе WordPress, которая представляет собой свободное программное обеспечение с дополнительными платными функциями. Данное ПО является бесплатным и удобным инструментом для создания сайта благодаря доступному интерфейсу и блочной конструкции. Программа написана на языке PHP, использует сервер базы данных — MySQL. Стоит отметить, что многие учебные заведения выбирают для своего сайта платформу WordPress.

Обучающий электронный ресурс располагается по адресу: http://s9514890.beget.tech/.

На рисунке 9 можно наблюдать главную страницу ресурса.

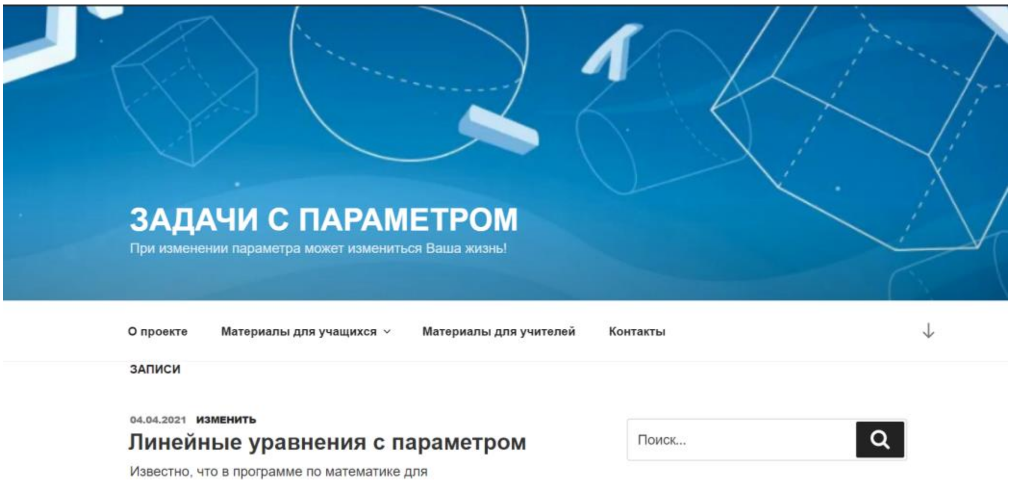

Рисунок 9 – Главная страница ЭОР

Вверху страницы установлено удобное меню. Здесь представлены ряд разделов для более быстрой ориентации по ресурсу. «Материалы для учащихся», где находятся задания в порядке увеличения сложности. Предложенный теоретический материал охватывает необходимые определения, алгоритм решения, замечания. Практический материал по каждой теме представляет набор заданий из 10 штук, в которых представлены все виды задач данного типа (рисунок 10). Подробное решение с пояснением и замечаниями поможет ученику глубже анализировать материал, устанавливать причинно-следственные связи. На странице «Материалы для учителя» можно найти составленные контрольные работы и ответы. Данный материал можно скачать.

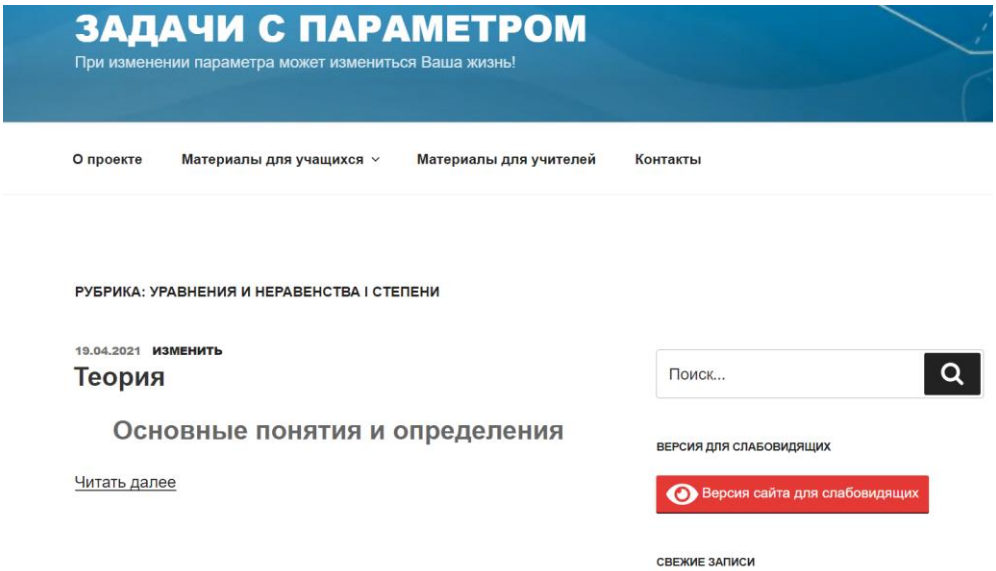

Рисунок 10 – Материал для учащихся

На странице «Контакты» можно найти информацию об авторе (рисунок 11).

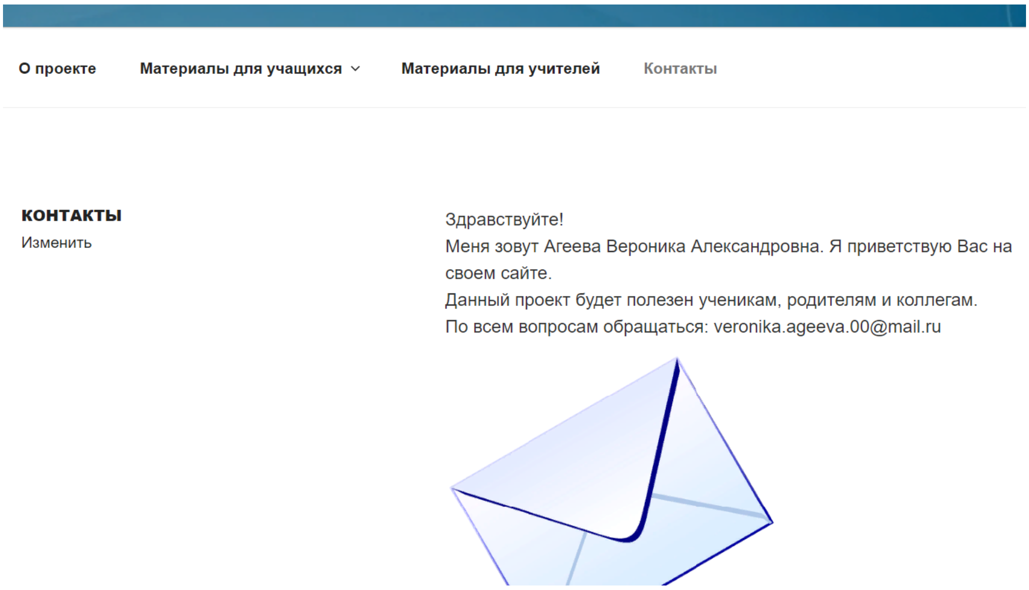

Рисунок 11 – Страница «Контакты»

Внизу страницы располагается форма обратной связи (рисунок 12).

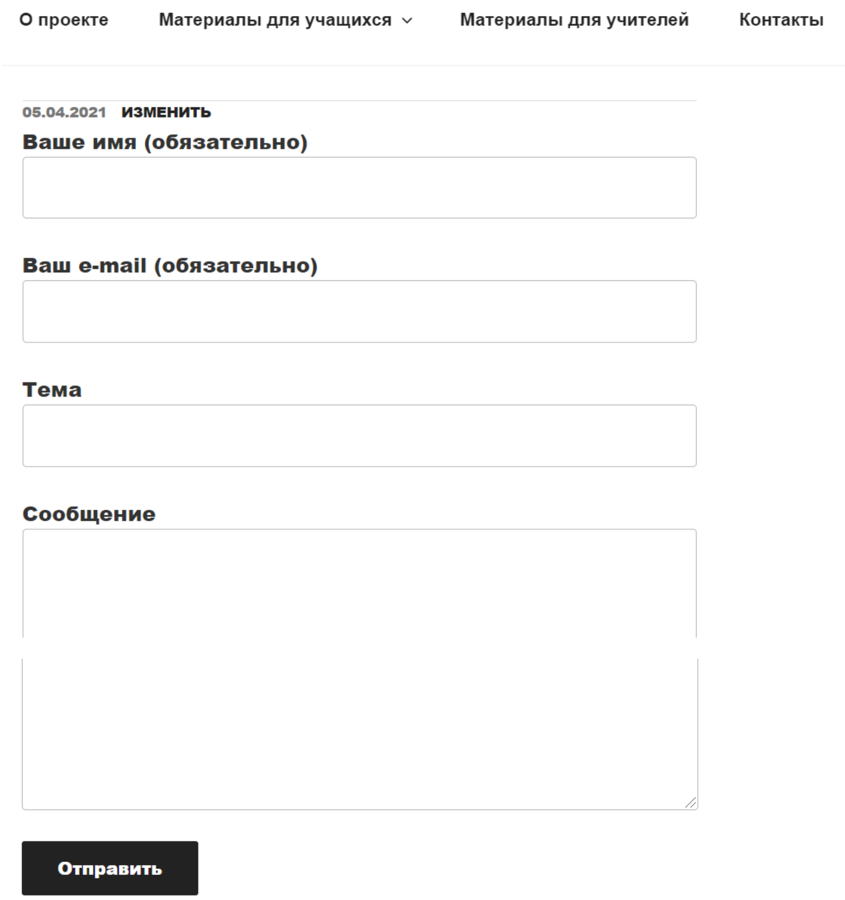

Рисунок 12. Страница обратной связи

Выделим ряд преимуществ, которыми обладает созданный электронный образовательный ресурс:

1. Прост в реализации. За счет четкой структуры учащийся или педагог может с легкостью ориентироваться по сайту. Окно поиска поможет найти необходимый материал.

2. Разграничивает материал для учащихся и педагогов. Удобен в использовании как во время урока, так и для печати конкретных заданий.

3. Нацелен на развитие исследовательских навыков обучающихся. За счет комбинации заданий ученик всегда может найти нужный фрагмент из ранее пройденного материала. Установлены конструкции для самостоятельного изучения графиков функции. За счет интерактивный преобразований ученик может в режиме реального времени может вводить функции и рассматривать их расположение, а режим анимации объектов поможет рассмотреть все возможные варианты значений уравнения или неравенства при определенном параметре.

4. Предложены разные типы заданий: рассмотренные примеры, встроенное тестирование с ответами и задачи для самостоятельного решения. Данный материал поможет всесторонне изучить тему.

5. Эргономичный дизайн. Цветовая гамма подобрана в соответствии с основными принципами теории цвета.

6. Плагин для слабовидящих поможет сделать обучение более доступным.

В настоящее время сайт находится на этапе разработки. Планируется увеличение теоретического и дидактического материала. Отдельным пунктом будет выделена подготовка к единому государственному экзамену, рассмотрев типы задач последних лет. В будущем планируется активное применение электронного образовательного ресурса на уроках математики, на факультативных курсах и при подготовке обучающихся к олимпиадам, а также к ОГЭ и ЕГЭ.

2.4 Описание опыта использования электронного образовательного ресурса

Базой для проведения апробации электронного образовательного ресурса была выбрана МБОУ «СОШ № 121 г. Челябинска». Для проведения опыта были выбраны учащиеся 10Б класса (16 человек). Опыт проходил на факультативных занятиях «Решение задач повышенной сложности по математике».

В течение двух месяцев в процесс обучения были внесены следующие изменения:

– учащимся были разъяснены такие понятия, как цель, объект и предмет исследования, гипотеза, которые были раскрыты на конкретном примере;

– был сделан акцент на приоритет исследовательской деятельности в современном образовании;

– на основе стандартных заданий было проведено знакомство с таким видом задач, как задачи с параметром;

– было рассмотрен созданный ранее электронный образовательный ресурс «Задачи с параметром» и его возможности дидактические возможности;

– был сделан акцент на задаче №18 из единого государственного экзамена.

Перед нами стояло несколько задач по реализации параметрических задач и внедрении исследовательской деятельности. Основную роль в получении исследовательских навыков сыграл созданный электронный образовательный ресурс.

Ученикам 10 класса были проведены 7 уроков на основе выше сформулированных постулатов, после чего последовала контрольная работа. В Таблице 1 представлен порядок проведения уроков в соответствии с темами.

Таблица 1 – Количество исследовательских занятий по темам

Тема урока	Число проведенных исследовательских занятий
1. «Линейные уравнения с параметром»	1
2. «Линейные неравенства с параметром»	1
3. «Квадратные уравнения с параметром»	1
4. «Квадратные неравенства с параметром»	1
5. «Степенные уравнения и неравенства с параметром»	1
6. «Функции и их свойства. Графики функций», задание №22 из основного государственного экзамена	1
7. Обобщающий урок	1
8. Контрольная работа	1

В рамках опыта учащихся было решено разделить на две группы: первая группа посещала уроки и готовилась к контрольной работе самостоятельно (на основе классной и заданной домашней работы), вторая группа, помимо посещения уроков, имела доступ к электронному образовательному ресурсу для самостоятельной подготовки к урокам.

Пример контрольной работы можно найти в Приложении 1.

Заметим, что в следствие карантина десятиклассники 2021 года не сдавали основной государственный экзамен по математике.

Рассмотрим таблицу результатов по итогам контрольной работы (Таблица 2), где наглядно можно проследить правильность решения каждого задания учениками.

Таблица 2 – Правильность выполнения учащимися каждого задания

Номер задания	Ученики 10 класса														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15	16
№1	+	+	+	+	–	+	+	–	+	–	–	+	+	+	+
№2	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	–
№3	+	+	+	+	+	–	–	+	+	–	+	+	+	–	+
№4	+	–	+	+	–	–	–	+	+	+	+	–	+	–	+
№5	+	+	–	+	+	+	–	–	–	+	+	–	+	–	–
№6	+	+	+	+	+	–	–	–	–	+	+	+	–	+	–
№7	+	–	–	+	–	–	–	–	–	–	+	+	–	–	–
Оценка ученика	5	4	4	5	3	3	2	3	3	3	4	4	4	3	2

Контрольная работа обучающихся оценивалась по следующим критериям:

– отметка «5» выставлена 12,5% выполненных работ. Выставлялась в случае, если все задания решены правильно, шаги решения были верными и ответ к каждой задачам был грамотно оформлен;

– отметка «4» выставлена 31% выполненных работ. Выставлялась в том случае, если задача решена полностью, все шаги присутствовали, но один-два из них могли быть неверными, либо ответ был получен в следствие одной арифметической ошибки или описки, отличный от верного, ответ не был правильно оформлен;

– отметка «3» выставлена 37,5% выполненных работ. Выставлялась, если задача была решена не полностью, но задача была правильно разбита на подзадачи, решение содержало несколько правильных этапов, шагов, рассуждений;

– отметка «2» выставлена 12,5% выполненных работ. Выставлялась, если работа не содержала ни один из вышеперечисленных критериев.

Ученикам под номерами 1-6 был предоставлен доступ к разработанному образовательному ресурсу. При его изучении школьники имели возможность не только изучить представленный материал, решать предложенные задания, но и проявить свои исследовательские и поисковые навыки благодаря динамичности и интерактивности сайта.

Из Таблицы 1 мы видим, что лучший результат показали ученики, работающие с электронным образовательным ресурсом: средняя оценка учеников, работавших с сайтом, составила 4,0; ученики, которые самостоятельно готовились к контрольной работе получили в среднюю отметку 2,8.

Данные, приведенные в таблице, наводят на мысль о том, что систематическое решение исследовательских задач с параметром положительно сказывается на результативности обучающихся за счет самостоятельного изучения электронного образовательного ресурса для лучшего развития исследовательских навыков.

Выполним анализ каждого задания и укажем наиболее часто встречающиеся ошибки и неточности для их дальнейшего устранения. Рассмотрим Таблицу 3, в которой представлены номера заданий и процентное выполнение каждого из них.

Таблица 3 – Процент правильного выполнения заданий контрольной работы

Номер задания	Процент правильно выполненного задания
№1	75%
№2	94%
№3	75%
№4	63%
№5	50%
№6	63%
№7	25%

Исходя из представленной статистики можно сказать, что с задачей 1 учащиеся справились неплохо. Незначительные ошибки были допущены при записи ответа или при группировке слагаемых. Можно уверенно говорить, что учащиеся освоили алгоритм решения линейных уравнений с параметром.

Со второй задачей учащиеся справились. Только у одного ученика были вычислительные ошибки. Это говорит о том, что ребята владеют умением применять графические методы решения задач и знания, полученные ранее.

Основной трудностью при выполнении задания 3 стало раскрытие скобок по формулам сокращенного умножения, а также работа с нахождением корней дискриминанта при неизвестном параметре. Даже найдя корни квадратного уравнения, ученики уже записывали ответ, не рассмотрев конкретные случаи при разном значении параметра.

Задание 4, аналогично заданию 3, но в квадратном уравнении добавился коэффициент с параметром при старшей степени. Многие ученики не справились с формулой дискриминанта.

При решении степенной функции с параметром в задании 5, учеников вызвала трудность сама запись задания. Ребята не смогли сгруппировать слагаемые относительно x и привести ответ к нормальному виду.

Рассмотрим задачи 6 и 7, которые относятся к заданию 22 из основного государственного экзамена. Исходя их статистики можем сделать вывод, что с этими заданиями лучше справились те учащиеся, кто имел доступ к обучающему Интернет-ресурсу. Задание 7 оказалось самым сложным из предложенных. Можно сказать, что учащимся не хватило умений самому строить графическую модель. В дальнейшем обучении будем стараться развивать исследовательские навыки.

После проведения контрольной работы и работы наш ошибками было, ученикам предстояло пройти анкетирование (см. Приложение 2). Его цель заключалась в необходимости проведения рефлексии по итогам проведенных занятий и контрольной работы, а также в сборе обратной связи по использованию нашего электронного образовательного ресурса.

На вопрос «Сталкивались ли вы ранее с параметрическими задачами такого типа?» положительный ответ дали только 12,5% учащихся (2 человека). Мы можем предположить, что такой результат был получен в следствии отмены ОГЭ в 2020 году и в использовании УМК под редакцией Г. В. Дорофеева, где параметрическим задачам уделяется мало внимания.

Также учащиеся проанализировали основные ошибки, допущенные в процессе выполнения контрольной работы, произвели рефлексию. Ученики 1-6 отметили функционал сайта и удобство подготовки к контрольной работе, учащиеся 7-16 проявили интерес к ресурсу, задавали вопросы и изучали после проведения эксперимента. Также от обучающихся мы получили необходимую информацию, что бы они хотели видеть электронном образовательном ресурсе для лучшей подготовки к заданиям такого вида. Ребята отметили, что хотели бы видеть разбор заданий №18 из единого государственного экзамена за последние несколько лет. В свою очередь наша идея заключалась в последовательном изучении параметрических заданий с повышением сложности и развитии исследовательских навыков школьников, благодаря чему учащиеся смогут самостоятельно изучать необходимый материал и постигать более значимые вершины.

В процессе полученного педагогического опыта, опираясь на теоретическую и методическую базу работы, мы сформировали и выделили перечень рекомендаций, посвященных данному вопросу:

1. Необходимо осуществлять постепенный ввод элементов исследовательской деятельности при решении параметрических задач, убедившись, что учащиеся верно решают задачи определенного типа без параметров. При изучении новой темы имеет место показать лишь одно или два маленьких задания, которые будут решены всем классом и не вызовут особых затруднений. При закреплении темы можно в ходе урока предлагать ученикам более сложные задачи с параметром, не потратив на них более одной четвертой части урока. В профильных классах возможно задавать решение аналогичных параметрических задач на дом, а на факультативах можно использовать данные задачи в ходе актуализации знаний, закрепления сведений и углубления материала.

2. В ходе урока важную часть занимает вербальная и невербальная поддержка учеников со стороны педагога. Учителю необходимо задавать наводящие вопросы, заранее решать материал. Возможность использования разных форм работы на уроке: фронтальный опрос, групповая или парная работа. Педагог должен мотивировать развитие интереса к исследовательской деятельности и словесно поощрять учеников.

3. Ученики должны самостоятельно исследовать и выполнять задания, опираясь на ранее полученный опыт и наводящие вопросы учителя. Учитель не должен выдвигать гипотезы и делать выводы вместо учеников.

4. Учащиеся в обязательном порядке должны знать алгоритм решения задач с параметром, планировать решение задачи, разбивая её на подзадачи, а также внимательно читать условия задачи и грамотно записывать ответ. В конце исследования, полученные результаты ученика должны

подвергнуться критике и проверки на правильность. А другие учащиеся могут предложить свой, более рациональный способ решения.

5. Ученики должны осознать факт развития их личности, что будет мотивировать на дальнейшее изучение программы. Урок необходимо завершить рефлексией, во время которой каждый ученик должен точно сформулировать достигнутый на уроке результат.

6. На уроке должна присутствовать научная терминология, даже если он и самый простой. В процессе урока должны звучать подобные фразы: «цель нашего исследования – выяснить», «необходимо разбить задачу на подзадачи следующим образом: …», «полученный нами результат говорит о том, что …», «в ходе нашего исследования можно сделать следующий вывод: …».

Выводы по главе 2

Параметры – непростые задания, которые встречаются в олимпиадах, конкурсах и выпускных экзаменах. Не все ученики берутся за решение таких задач. Рассмотрев и проанализировав каждый тип уравнений, выделим следующее:

1. Параметрические задачи считаются более технически сложными в своей реализации, так как они безусловно способствуют более глубокому пониманию школьного курса математики за счет овладения различными методами решения.

2. Формирование логического мышления и навыков решения таких задач происходит поэтапно, стоит вводить задачи с параметром уже в средней школе, к примеру, на факультативных занятиях.

3. Необходимо чаще проверять теоретические знания обучающихся, сразу же применяя их на практике. К примеру, задания с логарифмами требуют глубокие знания свойств логарифма и области допустимых значений. В этом у учащихся могут возникнуть наибольшие трудности.

4. Стоит познакомить обучающихся со всеми видами задач с параметрами вплоть до 10 класса. В выпускном классе следует сделать упор на 4 типа заданий, о которых сказано в пункте 1.1.

Необходимо учитывать, что решение данных заданий относится к категории «Ученик получит возможность». Поэтому стоит помнить, что лишь небольшая часть обучающихся сможет освоить задания такого рода.

5. Параметрические задачи способствуют процессу развития предметных компетенций учеников:

– анализировать функции, находить область определения;

– при решении уравнений и неравенств применять метод группировки слагаемых и приводить подобные слагаемые, использовать формулы сокращенного умножения и др.;

– выполнять построение и исследование простейших математических моделей;

– осуществлять действия с геометрическими фигурами и графиками.

На сегодняшний день, подготовка учащихся к выполнению задач с параметрами в условиях общеобразовательной школы представляется трудным и кропотливым процессом. Возникает необходимость вариативности математического образования в целом средствами серьезной кружковой работы, факультативами, подготовкой к олимпиадам. Своей задачей мы видим создание электронного образовательно ресурса как средство дидактической поддержки преподавателей и заинтересованных учащихся.

Изучив необходимый теоретический, методический и дидактический материал, мы создали электронный образовательный ресурс, наполнив его полезным материалом для учащихся и учителей. Нам удалось его апробировать путем проведения эксперимента в МБОУ «СОШ №121 г. Челябинска». Результаты исследования показали, что учащиеся, использовавшие дополнительные возможности ресурса, выполнили работу более качественно.

Также нам удалось выполнить анализ контрольной работы, представленной в Приложении 1 и выделить ряд ошибок учащихся для дальнейшей коррекции программы.

Благодаря анкетированию, представленному в Приложении 2, мы собрали мнение об электронном образовательном ресурсе и расширили его дидактические возможности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе создания выпускной квалификационной работы нами были решены все поставленные задачи и получены следующие результаты:

1. Изучены учебно-методическая, математическая и историческая литература по теме исследования, проанализированы методические особенности организации исследовательской деятельности учащихся.
2. Произведен анализ учебников и пособий по математике средней школы, включающих задачи с параметрами, которые отвечают федеральным государственным образовательным стандартам.
3. Рассмотрены и представлены наиболее распространенные (стандартные) приемы и методы решений параметрических задач, подобраны основные виды задач с параметрами и приведены их решения.
4. Создан и апробирован электронный образовательный ресурс по теме «Задачи с параметром», сформирована база заданий для лучшего развития исследовательских компетенций.

В ходе анализа апробации курса в рамках педагогической практики в МБОУ «СОШ №121 г. Челябинска» была подтверждена гипотеза, что обучение учащихся решению задач с параметрами с использованием электронного образовательного ресурса позволяет повысить интерес к математике, помогает развивать исследовательские навыки, а также логическое и алгоритмическое мышление. Также по итогам исследования мы заметили повышение мотивации учеников к дальнейшему изучению задач с параметрами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Апайчева, Л. А.** Алгоритмизация решения задач с параметрами / Л. В. Айпачева, Л. Е. Шувалова. – Текст: электронный // Инновационная наука. – 2016. – № 10 (3). – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/algoritmizatsiya-resheniya-zadach-s-parametrami (дата обращения: 28.12.2020).

2. **Амелькин, В. В.** Задачи с параметрами. / В. В. Амелькин, В. Л. Рабцевич. – Текст: электронный // Справочное пособие по математике. – Минск: ООО «Асар». – 2004. – 464 с.

3. **Андреева, Г. М.** Методология научного исследования. Учебник для высших учебных заведений / Г. М. Андреева. – Текст: непосредственный // 5-е изд., испр. и доп. – Москва: Аспект Пресс. – 2007. – 363 с.

4. **Горбачев, В. И.** Общие методы решения уравнений и неравенств с параметрами не выше второй степени / В.И. Горбачев. – Текст: непосредственный // Математика в школе. – 2000. – № 2. – С. 61-68.

5. **Горелов, С. В.** Основы научных исследований: учебное пособие / С. В. Горелов, В. П. Горелов, Е. А. Григорьев. – Текст: электронный // под ред. В. П. Горелова. – 2-е изд., стер. – Москва; Берлин: Директ-Медиа. – 2016. – 534 с. : ил., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=443846 (дата обращения: 18.05.2021). – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-4475-8350-7.

6. **Горностаев, О. М.** Задачи с параметрами в школьном курсе математики / О. М. Горностаев, К. В. Горбачевская. – Текст: непосредственный // Молодой ученый. – 2020. – № 25 (315). – С. 385-388. – URL: https://moluch.ru/archive/315/72002/ (дата обращения: 18.04.2021).

7. **Григорян, К. М.** Графический метод решения модуль содержащих задач с параметрами / К. М. Григорян – Текст: электронный // Проблемы Науки. – 2019. – №9 (142). – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/graficheskiy-metod-resheniya-modul-soderzhaschih-zadach-s-parametrami (дата обращения: 18.04.2021).

8. **Ермизина, Ю. А.** Пути развития познавательного интереса у подростков / Ю. А. Ермизина. – Текст: непосредственный // Молодой ученый. – 2016. – № 9 (113). – С. 1107-1113. – URL: https://moluch.ru/archive/113/29369/ (дата обращения: 15.05.2021).

9. **Здоровенко, М. Ю.** Использование различных методов решения задач с параметром на Едином государственном экзамене по математике / М. Ю. Здоровенко, Н. А. Зеленина, М. В. Крутихина. – Текст: непосредственный // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 8 (август). – С. 139-150. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16176.htm (дата обращения: 18.04.2021).

10. **Качалова, Г. А**. Методический анализ школьных учебников по алгебре (7-9 классов) в контексте содержательно-методической линии «Задачи с параметрами» / Г. А. Качалова. – Текст: электронный // Молодой ученый. – 2013. – № 2 (49). – С. 376-378. – URL: https://moluch.ru/archive/49/6261/ (дата обращения: 15.05.2021).

11. **Локоть, В. В.** Задачи с параметрами и их решение: Тригонометрия: уравнения, неравенства, системы. 10 класс. / В. В. Локоть. – Текст: непосредственный // 3-изд., испр. и доп. – Москва: АРКТИ. – 2008. – 64 с. (Абитуриент: Готовимся к ЕГЭ).

12. **Лубинская, Т. Н.** Исследовательские умения и навыки как базовые компоненты профессионального становления личности / Т. Н. Лубинская. – Текст: электронный // Вестник ВятГУ. – 2009. – № 2. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/issledovatelskie-umeniya-i-navyki-kak-bazovye-komponenty-professionalnogo-stanovleniya-lichnosti (дата обращения: 15.05.2021).

13. **Лукьянова, Л. А.** Характеристика исследовательских умений учащихся в процессе организации исследовательской деятельности школьников / Л. А. Лукьянова. – Текст: электронный // Известия ВПГУ им. Яковлева. – № 2 (271). – 2016. – С. 15-17.

14. **Макарычев, Ю. Н.** Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций с прил. на электрон. носителе / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова. – Текст: непосредственный // под ред. С. А. Теляковского. – Москва: Просвещение, 2013. – 287 с. : ил. – ISBN 978-5-09-022881-7.

15. **Мерзляк, А. Н**. Алгебра: 8 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Текст: непосредственный // Москва: Вентана-Граф. – 2013. – 256 с. : ил. – ISBN 978-5-360-04345-4.

16. **Мерзляк, А. Н.** Алгебра: 9 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Текст: непосредственный // Москва: Вентана-Граф. – 2014. – 304 с. : ил. – ISBN 978-5-360-05308-8.

17. **Мирошин, В. В.** Существенные признаки понятия «параметр» / В. В. Мирошин. – Текст: электронный // Математика в школе. – 2010. – № 7. – С. 19-22.

18. **Мордкович, А. Г.** Алгебра. 8 класс. В 2ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, Л. А. Александрова, Т. Н. Мишустина. – Текст: непосредственный // под ред. А. Г. Мордковича. – 12-е изд., испр. и доп. – Москва: Мнемозина. – 2010. – 271 с. : ил. – ISBN 978-5-346-01428-7.

19. **Мордкович, А. Г.** Алгебра. 8 класс. В 2ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, Л. И. Звавич, А. Р. Рязоновский, Л. А. Александрова. – Текст: непосредственный // под ред. А. Г. Мордковича. – 11-е изд., испр. и доп. – Москва: Мнемозина. – 2013. – 344 с. : ил. – ISBN 978-5-346-02484-2.

20. **Мухамадиярова, Г. Ф.** Анализ разных подходов к определению понятия «исследовательские умения» / Г.Ф. Мухамадиярова. – Текст: электронный // Человек. Общество. Образование: сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф.: в 2 ч. Ч. I. – Уфа : РИЦ Баш ГУ. – 2010. – С. 107-110.

21. **Острикова, Е. А.** Психолого-педагогические основы формирования исследовательских умений и навыков школьников / Е. А. Острикова. – Текст: электронный // Молодой ученый. – 2012. – № 10 (45). – С. 358-361. – URL: https://moluch.ru/archive/45/5408/ (дата обращения: 06.04.2021).

22. **Поддьяков, А.Н**. Методологические основы изучения и развития исследовательской деятельности / А. Н. Поддьяков. – Текст: непосредственный // Исследовательская деятельность учащихся в современном образовательном пространстве / Под ред. А.С. Обухова. – Москва: НИИ школьных технологий. – 2006. – С. 51-58.

23. **Савенков, А.И**. Развитие исследовательских умений школьников / А.И. Савенков. – Текст: электронный // Школьный психолог. – 2008. – № 8. – С. 92-106.

24. **Середенко, П.В.** Развитие исследовательских умений и навыков младших школьников в условиях перехода к образовательным стандартам нового поколения: монография / П. В. Середенко. – Текст: электронный // Южно-Сахалинск: Изд-во СахГУ. – 2014. – 208 с.

25. **Сластенин, В.А.** Педагогика: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / В. А. Сластенин, И. Ф.Исаев, Е. Н. Шиянов. – Текст: электронный // под ред. В. А. Сластенина. – 11-е изд., стер. – Москва: Издательский центр «Академия». – 2012. – 608 с. – (Сер. Бакалавриат). ISBN 978-5-7695-9408-3.

26. **Сорокин, А. Г.** Исследовательская деятельность обучающихся в контексте задач ФГОС ООО / А. Г. Сорокин. – Текст: электронный // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2014. – Т. 25. – С. 71–75. – URL: http://e-koncept.ru/2014/55258.htm (дата обращения: 17.04.2021).

27. **Ястребинецкий Г. А.** Задачи с параметрами / Г. А. Ястребинецкий. – Текст: электронный // Книга для учителя. – Москва: Просвещение. – 1986. – 127 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Контрольные работы

Контрольная работа по теме

«Решение уравнений с параметром»

Вариант 1

Задание 1. Решить уравнение:

$$3 - a^2x + a - 8ax - 15x = 0.$$

Задание 2. При каком значении a прямые $3x - 5y = 10$ и $2x + ay = 6$ пересекаются в точке, принадлежащей оси ординат?

Задание 3. При каких значениях параметра a уравнение имеет два совпавших корня?

$$x^2 + (2a + 6)x - 3a + 9 - 0.$$

Задание 4. Найти все значения параметра а, для которых квадратное уравнение не имеет корней:

$$(a - 1)x^2 + 2(2a + 1)x + 4a + 3 = 0.$$

Задача 5. $3^{(a^2+3a-3)x} = 3^{a^2-4a+3}$

Задача 6. Постройте график функции $y = \frac{x^4-13x^2+36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях параметра c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Задача 7. При каких отрицательных значениях k прямая $y = kx - 4$ имеет с параболой $y = x^2 + 2x$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки и постройте данные графики в одной системе координат.

Контрольная работа по теме

«Решение уравнений с параметром»

Вариант 2

Задача 1. Решить уравнение:

$$a(4x - a) = 12x - 9.$$

Задача 2. При каком значении a прямые $6x - 6y = 7$ и $ax - 7y = 15$ пересекаются в точке, принадлежащей оси абсцисс?

Задача 3. При каких значениях параметра b уравнение имеет два совпавших корня?

$$x^2 - 2bx + 2b + 3 = 0$$

Задача 4. Найти все значения параметра a, для которых квадратное уравнение имеет два различных корня:

$$(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + 4a + 3 = 0.$$

Задача 5. Решите уравнение: $2^{a^2+10a+21x} = 2^{2a^2+a-15}$.

Задача 6. Постройте график функции $y = \frac{(x+4)(x^2+3x+2)}{x+1}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Задача 7. Найдите все значения k, при каждом из которых прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = x^2 + 4$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Анкета

Уважаемый участник опроса!

Ответь, пожалуйста, на несколько вопросов.

(полученные данные помогут наиболее достоверно отразить результаты нашего исследования)

1. Важны ли исследовательские навыки в современном мире? Где они могут пригодиться?

____

____

____

____

2. Встречались ли Вам ранее задачи с параметрами (в учебнике, в пособиях, на олимпиадах)? Если «да», то где?

____

____

3. Удовлетворены ли Вы своей оценкой за контрольную работу? Как вы думаете, в чем причина того, что Вы ее получили?

____

____

4. Какое задание показалось самым трудным и почему?

____

____

5. Укажите по шкале от 1 до 5 степень удовлетворенности собственной работой на уроках «Решение задач повышенной сложности по математике».

____

6. Оцените предложенный Вам цифровой образовательный ресурс. В чем его преимущества/недостатки? Чем он удобен/неудобен?

____

____

7. Что бы Вы хотели видеть на сайте? Какие задания, темы необходимо добавить?

8. Будете ли Вы дальше развивать свои исследовательские навыки? (при решении задач с параметром в частности)

Благодарим за Ваши ответы и желаем успехов в учебе!