МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика обучения решению иррациональных уравнений и неравенств

Выпускная квалификационная работа по направлению

44.03.01 Педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата

«Математика»

Форма обучения заочная

Проверка на объем заимствований:
83 % авторского текста
Работа рекомендована к защите
«2» июля 2021 г.
и. о. зав. кафедрой математики и МОМ
_______________ Шумакова Е.О.

Выполнила:
Студентка группы ЗФ-513-087-5-1
Горбылева Анастасия Сергеевна

Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук, доцент
Ахкамова Юлия Абдулловна

Челябинск
2021

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика обучения решению иррациональных уравнений и неравенств

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.03.01 Педагогическое образование
Направленность программы бакалавриата
«Математика»
Форма обучения заочная

Проверка на объем заимствований:
83 % авторского текста
Работа рекомендована к защите
«___» ___________ 2021 г.
и. о. зав. кафедрой математики и МОМ
_______________ Шумакова Е.О.

Выполнила:
Студентка группы ЗФ-513-087-5-1
Горбылева Анастасия Сергеевна
Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук, доцент
Ахкамова Юлия Абдулловна

Челябинск

2021

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Математика – одна из важнейших составляющих современного среднего образования в России. Изучение предмета математики, получаемое в общеобразовательной школе, является основой общего образования. Она учит логически мыслить, анализировать, обобщать, принимать правильные решения в нестандартных ситуациях. Математика, и, в частности, алгебра, создает благоприятные условия для развития многих интеллектуальных качеств учащихся, требует творческого подхода к решению различных проблем.

Одним из больших и важных тематических разделов в математике являются иррациональные уравнения и неравенства. В начале изучения иррациональных уравнений в основной школе вводятся понятия иррационального числа, арифметического корня. Первые представления о числе появляются у детей еще до начала обучения школы. В процессе изучения математики у учащихся формируется понятие числа и развиваются вычислительные навыки, необходимые в практической деятельности. Иррациональные числа и действия над ними завершают формирование концепции чисел в начальной школе, развиваются и определяют основу арифметической линии в старшей школе и, наконец, обобщаются вместе с комплексными числами в теории чисел при изучении математических дисциплин в высших учебных заведениях [21].

Как показывает практика, тема «Иррациональные уравнения и неравенства» является одной из нелегких и трудно усваиваемых на уроках математики. Это можно объяснить тем, что в большинстве случаев отсутствует четкий алгоритм решения, помимо этого, при решении уравнений и неравенств данного вида приходится делать значительное количество алгебраических преобразований, что часто приводит к ошибкам, которые обычно связаны с потерей или приобретением ошибочных корней.

Вся имеющаяся информация по данной тематике весьма разрозненна и не систематизирована, что вызывает определённые сложности при изучении. Поэтому целесообразно уделить этой теме отдельное внимание, рассмотрев ее на внеурочной деятельности или консультациях. Этим и обусловлена актуальность данной работы.

Следовательно, объектом исследования является процесс обучения алгебре и основам математического анализа в средней школе, предметом – методика обучения учащихся решению иррациональных уравнений и неравенств.

Целью исследования является разработка внеурочных мероприятий для учащихся 10 классов, которые поспособствуют глубокому усвоению темы, а также систематизируют, расширят и обобщат знания по теме.

Гипотеза, которая выдвигается в данной работе, состоит в том, что применение разработанных внеурочных мероприятий

1) позволит учащимся решать иррациональные уравнения и неравенства на сознательной основе, выбирать наиболее рациональный способ решения, применять разные методы решения;

2) поспособствует формированию прочных навыков решения иррациональных уравнений и неравенств и повысит уровень сдачи единого государственного экзамена (ЕГЭ).

Разработанные внеурочные мероприятия для обобщающего повторения методов решения иррациональных уравнений и неравенств позволят вывести на более высокий уровень подготовку к ЕГЭ по математике. Обучающиеся научатся выбирать наиболее оптимальный метод решения для каждого вида таких уравнений и неравенств, осознанно применять различные приемы решения, в том числе те, которые не рассматриваются в школьных учебниках математики.

На основании выдвинутых цели и гипотезы данного исследования, можно выделить следующие задачи:

– обзор актуальных на сегодняшний день материалов по алгебре и началам математического анализа для анализа представленной в них методики решения иррациональных уравнений и неравенств;

– систематизация теоретического материала статей и учебно-методической литературы по данной тематике. Описание типов иррациональных уравнений и неравенств и методов их решения;

– разработка мероприятий для внеурочной деятельности на отработку методов решения иррациональных уравнений и неравенств с подбором примеров для демонстрации излагаемой теории.

Данная работа включает в себя: введение, три главы основной части, заключение и список использованных источников.

Во введении обоснована актуальность темы, определены предмет и объект исследования, поставлены цели и задачи для ее достижения.

Первая глава посвящена обзору актуальных на сегодняшний день материалов по алгебре и началам математического анализа.

Во второй главе рассмотрены основные понятия и формулы, которые нужно знать для успешного решения иррациональных уравнений и неравенств.

В третьей главе представлен план разработанных занятий для внеурочной деятельности по теме «Иррациональные уравнения и неравенства» для подготовки обучающихся 10 классов к ЕГЭ.

1 ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Приказом Министерства просвещения РФ от 20 мая 2020 г. № 254 утвержден федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность [18].

Перечень включает учебники, допущенные к использованию при реализации обязательной части основной образовательной программы, и учебники, рекомендуемые к использованию при реализации части основной образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений [18].

В данном разделе проанализируем изложение материала по теме «Иррациональные уравнения и неравенства» в школьных учебниках алгебры для 7-9 классов и математики (базовый уровень) для 10-11 классов, рекомендуемые к использованию при реализации обязательной части основной образовательной программы. Перечень представлен в приложении А.

Материал, который связан с данным видом уравнений и неравенств, составляет значительную часть школьного курса «Алгебры и начала математического анализа». Однако, в школьных учебных пособиях задачам 5 на решение иррациональных уравнений и неравенств уделено сравнительно мало внимания. Тема «Иррациональные уравнения и неравенства» осваивается учащимися в 10-11 классе и на ее изучение отводится в целом только 3 часа на базовом уровне, на углубленном уровне на изучение отводится около 6 часов.

В главе 3 параграфе 7 учебника алгебры за 7 класс [1] школьники знакомятся с понятием степеней и их свойствами: определение степени с натуральным показателем; умножение и деление степеней; возведение в степень произведения и степень.

В учебнике алгебры за 8 класс [2] школьники впервые встречаются с иррациональными числами. После изучения материала, предполагается, что учащийся понимает, что множество действительных чисел состоит из рациональных и иррациональных чисел. Материал изложен достаточно хорошо, есть элементы исторической справки, теория подкреплена интересными примерами. В 5 параграфе рассматриваются определение арифметического квадратного корня, его свойства, способы нахождения приближенных значений квадратного корня, функция $y = \sqrt{x}$ и ее график. В этом учебнике авторы разделяют понятия арифметического квадратного корня и корня n-ой степени.

Учебник «Алгебра. 9 класс» [3] является заключительной частью трёхлетнего курса алгебры для общеобразовательных организаций. В главе 5 «Степени и корни» 16 параграф посвящен теме «Иррациональные уравнения и неравенства». Здесь вводится понятие иррациональных уравнений, затем рассматривается алгоритм решения уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = a$, $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$. После этого авторы вводят понятие иррациональных неравенств: к иррациональным неравенствам, так же, как и к иррациональным уравнениям, относят те неравенства, которые содержат переменную под знаком корня или в которых переменная входит в основание степени с дробным показателем [2]. Авторы отмечают, что основная цель при решении иррациональных неравенств состоит в том, чтобы иррациональное неравенство свести к равносильному ему рациональному неравенству или равносильной системе, содержащей рациональные неравенства. Для обоснования равносильности проводимых преобразований приводятся теоремы с доказательствами.

В учебнике 10-11 класса [10] в главе 2 «Степенная функция» рассматривается тема «Иррациональные уравнения и неравенства». Тема «Иррациональные уравнения» вводится в параграфе 9, дается определение иррациональные уравнения, следствие из определения и в конце параграфа приводятся примеры для закрепления изученной темы. Автор тему «Иррациональные неравенства» рассматривается в параграфе 10 и начинает с задач, в ходе которых вводится определение иррациональных неравенств и в конце параграфа даются примеры. После каждого параграфа приведен ряд упражнений, которые имеют разный уровень сложности. По мнению авторов, задачи повышенной сложности в конце учебника содержат богатый материал для подготовки в вузы с высокими требованиями к математической подготовке.

Рассмотрим также популярный учебник Александра Григорьевича Мордковича для 10-11 классов [12], исключенный из федерального перечня. Данное учебное пособие состоит из двух частей: учебника и задачника.

В первой части данного учебного пособия материал, касающийся иррациональных уравнений и неравенств, изучается в главе «Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств», завершающей изучение школьного курса алгебры и начал математического анализа. Здесь уравнения и неравенства рассматриваются с самых общих позиций. С одной стороны, это своего рода обобщение, а с другой – некоторое расширение и углубление знаний.

В первых трех параграфах этой главы подведены итоги изучения уравнений, неравенств.

Использованы следующие термины:

– равносильность уравнений, равносильность неравенств;
– следствие уравнения, следствие неравенства;
– равносильное преобразование уравнения, неравенства;
– посторонние корни (для уравнений);
– проверка корней (для уравнений).

Сформулированы теоремы:

– о равносильности уравнений;
– о равносильности неравенств.

Даны ответы на четыре главных вопроса, связанных с решением уравнений:

1) как узнать, является ли переход от одного уравнения к другому равносильным преобразованием;

2) какие преобразования переводят данное уравнение в уравнение-следствие;

3) как сделать проверку, если она сопряжена со значительными трудностями в вычислениях;

4) в каких случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней и как этого не допустить.

Перечислены возможные причины расширения области определения уравнения, одна из которых – освобождение в процессе решения уравнения от знаков корней четной степени; указаны причины, по которым может произойти потеря корней при решении уравнений. Выделены четыре общих метода решения уравнений.

Что касается иррациональных уравнений, то им в данном учебном пособии уделено достаточно большое внимание. На примере иррационального уравнения показано как решение любого уравнения осуществляется в три этапа: технический, анализ решения, проверка. Также на примере иррационального уравнения показано, как сделать проверку, если проверка корней с помощью их подстановки в исходное уравнение сопряжена со значительными вычислительными трудностями.

Система задач во второй части данного учебного пособия изложена в той же последовательности, что и соответствующий материал в первой части. В параграфе 55 «Равносильность уравнений» изложены различные типы заданий на равносильность и следствие уравнений, в том числе и иррациональных. В параграфе 56 «Общие методы решения уравнений» представлены задания для использования четырех методов, изложенных в I части данного учебного пособия, для решения уравнений. Все задачи в соответствии с ними разбиты на четыре блока, в каждом из которых встречаются иррациональные уравнения. В параграфе 57 «Решение неравенств с одной переменной» изложены различные типы заданий на равносильность и следствие неравенств, в том числе и иррациональных.

Изучив вышеупомянутые учебники по алгебре и алгебре и началам математического анализа, можно сделать вывод, что все они предлагают подробное и последовательное изучение материала. Во всех учебниках объем теоретического материала изложен четко, понятно и логично. Теория сопровождается большим количеством примеров.

Однако преподаватель имеет возможность учитывать уровень математической подготовки класса и проводить занятия разного уровня сложности. В книгах из федерального перечня рекомендуемых учебников задания в основном однотипные, распределить их по уровню сложности достаточно проблематично.

Также можно отметить, что учебники не обобщают и не систематизируют изученный материал. Преимущество этого подхода состоит в том, что он позволяет школьникам проанализировать и вспомнить то, что они узнали в прошлом. Недостатком концентрической конструкции является, конечно, небольшое замедление школьного темпа за счет многократного возврата к одному и тому же материалу. Такая конструкция есть, например, в учебно-методических комплектах от А.Г. Мордкович, исключенные из федерального списка в 2015 году.

Во всех рецензируемых учебниках есть задания, способствующие развитию интеллектуальной мыслительной деятельности, задания с использованием средств наглядности и исследовательского характера.

2 МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

2.1 Иррациональные уравнения и методы их решения

2.1.1 Понятие иррационального уравнения

Иррациональными называются уравнения, в которых переменные или рациональные функции находятся под знаком корня. Примерами таких уравнений могут служить:

$$\sqrt{3x-8}=5;$$

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{x}-2=0;$$

$$\sqrt{x-10}+\sqrt{1-x}=6.$$

Понятие корня уравнения и его решения для иррациональных уравнений определяется так же, как и для рациональных уравнений.

Пусть дана иррациональная функция $y=\sqrt{x}=f(x)$, имеющая переменную х под знаком корня.

Все корни четной степени, входящие в уравнение, являются арифметическими. Другими словами, если подкоренное выражение отрицательно, то корень лишен смысла, если подкоренное выражение равно нулю, то корень так же равен нулю; если подкоренное выражение положительно, то и значение корня положительно.

Все корни нечетной степени, входящие в уравнение, определены при любых действительных значениях подкоренного выражения.

Функции $y=\sqrt[2n]{x}$ и $y=\sqrt[2n+1]{x}$ являются возрастающими на своей области определения.

Используя эти свойства, в некоторых случаях можно установить, что уравнение не имеет решения, не прибегая к преобразованиям.

Пример 1. Докажите, что уравнение не имеет решения.

1) $\sqrt{x^2-3}+1=0 \leftrightarrow \sqrt{x^2-3}=-1$. Арифметический корень не может быть отрицательным числом, поэтому уравнение действительных

решений не имеет.

2) $\sqrt{x-5}+\sqrt{x^2-4}=0$ не имеет действительных решений, т.к. сумма двух неотрицательных выражений равна нулю только если каждое выражение равно нулю, а данные выражения в нуль не обращаются.

3) $\sqrt{x-7}+2=\sqrt{5-x}$. Выражение $\sqrt{x-7}$ определено при $x \geq \geq 7$, а выражение $\sqrt{5-x}$ определено при $x \leq 5$. Следовательно, не существует x, при котором оба выражения имеют смысл, поэтому уравнение решений не имеет.

Одним из стандартных приемов решения иррациональных неравенств является освобождение от радикалов путем возведения обеих частей в соответствующую степень. Но следует помнить, что подобное преобразование не всегда является равносильным. т.е. необходима проверка корней.

При возведении правой и левой части уравнения в нечетную степень мы можем не опасаться получить посторонние корни.

Пример 2. Решим уравнение $\sqrt[3]{3x^2-2x}=x$.

Возведем обе части уравнения в третью степень. Получим равносильное уравнение:

$$3x^2-2x=x^3;$$

Перенесем все слагаемые в одну сторону и вынесем за скобки x:

$$x^3-3x^2+2x=0;$$

$$x(x^2-3x+2)=0;$$

Приравняем каждый множитель к нулю, получим:

$$x_1=0;\ x_2=1;\ x_3=2.$$

Ответ: $x=\{0,1,2\}$.

2.1.2 Причина появления посторонних корней

Решение иррациональных уравнений основано на теореме:

Если $n>0$ – нечетное число $(n=2k+1)$, то уравнения $f^n(x)=$

$= g^n(x)$ и $f(x) = g(x)$ равносильны.

Если $n > 0$ – четное число $(n = 2k)$, то любой корень уравнения $f^n(x) = g^n(x)$ удовлетворяет хотя бы одному из уравнений: $f(x) = g(x)$ и $f(x) = -g(x)$.

Из теоремы следует, что если в ходе решения иррационального уравнения приходилось возводить обе части в степень с четным показателем, то могут появиться «посторонние» корни уравнения.

Итак, что же происходит, каковы причины посторонних корней:

а) за счет возможного расширения область допустимых значений (далее – ОДЗ) исходного уравнения (т.е. ОДЗ полученного уравнения шире ОДЗ исходного уравнения);

б) за счет возведения в четную степень его левой и правой частей, которые равны по абсолютной величине, но одна из них положительна, а другая отрицательна.

2.1.3 Решение иррациональных уравнений путем замены уравнения его следствием

Решение иррациональных уравнений путем замены уравнения его следствием (с последующей проверкой корней) можно производить следующим образом:

1. Найти ОДЗ исходного уравнения.
2. Перейти от уравнения к его следствию.
3. Найти корни полученного уравнения.
4. Проверить, являются ли найденные корни корнями исходного уравнения.

2.1.4 Проверка корней

Проверка корней подстановкой найденного значения в исходное уравнение сама по себе может оказать сложной задачей. Однако, чтобы отделить посторонние корни, не всегда необходимо подставлять найденные корни в данное уравнение. Иногда возможна проверка корней по области допустимых значений (ОДЗ) уравнения.

При решении иррациональных уравнений удобно и полезно следующие утверждения из Таблицы 1:

Таблица 1 – Равносильные уравнения

Уравнения вида	РАВНОСИЛЬНО	Системе / совокупности систем уравнений
$\sqrt{f(x)} = g(x)$		$\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} \cdot g(x) = 0$		$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) - \text{определена}, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) = 0. \end{cases} \end{array}\right.$
$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$		Одной из равносильных систем: $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$ *Выбирается та система, в которой проще неравенство*
$\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)} = 0$		$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Пример 3.

А) $\sqrt{2x+3} = 6 - x \leftrightarrow \begin{cases} 6 - x \geq 0 \\ 2x + 3 = (6 - x)^2 \end{cases}$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6, \\ 2x + 3 = 36 - 12x + x^2; \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6, \\ x = 3; x = 11; \end{cases} \leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: $x = 3$.

Б) $\sqrt{x^2 + 3x - 4} = \sqrt{2x + 2} \leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 \geq 0, \\ x^2 + 3x - 4 = 2x + 2; \end{cases}$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ x^2 + x - 6 = 0; \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ x = 2 \cup x = -3; \end{cases} \leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

2.1.5 Формулы, применяемые при решении иррациональных уравнений

1) $\sqrt[2k]{f}\cdot\sqrt[2k]{g}=\sqrt[2k]{f\cdot g},\ f\geq 0,\ g\geq 0;$

2) $\frac{\sqrt[2k]{f}}{\sqrt[2k]{g}}=\sqrt[2k]{\frac{f}{g}},\ f\geq 0,\ g\geq 0;$

3) $|f|\cdot\sqrt[2k]{g}=\sqrt[2k]{f^{2k}\cdot g},\ g\geq 0;$

4) $\sqrt[2k]{\frac{f}{g}}=\frac{\sqrt[2k]{|f|}}{\sqrt[2k]{|g|}},\ f\cdot g\geq 0,\ g\neq 0;$

5) $\sqrt[2k]{f\cdot g}=\sqrt[2k]{|f|}\cdot\sqrt[2k]{|g|},\ f\cdot g\geq 0.$

Для каждой из формул 1-5 (без учета указанных ограничений) ОДЗ правой ее части может быть шире ОДЗ левой.

Отсюда следует, что преобразования уравнений с формальным использованием формул 1-5 «слева–направо», приводят к уравнению, являющемуся следствием исходного.

В этом случае могут появиться посторонние корни исходного уравнения, поэтому обязательным этапом в решении исходного уравнения является проверка.

Преобразование уравнений с формальным использованием формул 1-5 «справа – налево» недопустимо, так как возможно сужение ОДЗ исходного уравнения, а, следовательно, и потеря корней.

Так, например, если заменить уравнение $\sqrt{(x-3)(4x+4)}=\ 3$ $(\text{ОДЗ}: x\geq 3, x\leq -1)$ уравнением $\sqrt{(x-3)}*\sqrt{(4x+4)}=3$ $(\text{ОДЗ}: x\geq 3)$, то произойдет сужение ОДЗ исходного уравнения и потеря корня $x=-1$.

2.1.6 Решение уравнений с использованием замены переменной

Введение вспомогательной переменной в ряде случаев приводит к упрощению уравнения. Чаще всего в качестве новой переменной используют входящий в уравнение радикал. При этом уравнение становится рациональным относительно новой переменной.

Пример 4. $x^2+3x+\sqrt{x^2+3x+9}=33, x\in R.$

Пусть $y=\sqrt{x^2+3x+9}, y\geq 0$, тогда исходное уравнение примет вид $y^2+y-42=0$, корни которого $y=6$ и $y=-7\notin[0;+\infty)$. Решая уравнение $\sqrt{x^2+3x+9}=6$ получаем $x=3$ и $x=-4{,}5$.

2.1.7 Метод разложения на множители выражений, входящих в уравнение

Теорема. Уравнение $f(x)\cdot g(x)$, определенное на всей числовой оси, равносильно совокупности уравнений $\begin{cases} f(x)=0,\\ g(x)=0.\end{cases}$

Пример 5. $(x+3)\sqrt{x-1}=3\sqrt{x^2-1}.$

При $x\geq 1$ уравнение принимает вид: $\sqrt{x-1}\left(x+3-3\sqrt{x+1}\right)=0$, которое равносильно совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{c}\sqrt{x-1}=0,\\ x+3-3\sqrt{x+1}=0,\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{c}x=1,\\ 9(x+1)=x^2+6x+9,\\ x\geq 1,\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{c}x^2-3x=0,\\ x\geq 1,\\ x=1,\end{array}\right.$$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3,\\ x\geq 1,\\ x=1,\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=3.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\{1,3\}$.

Выделить общий множитель часто бывает очень трудно. Иногда это удается сделать после дополнительных преобразований. В приведенном ниже примере для этого рассматриваются попарные разности подкоренных выражений.

Пример 6.

$$\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-1}-\sqrt{2x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-x+2}=0.$$

Если внимательно посмотреть на уравнение, то можно увидеть, что разности подкоренных выражений первого и третьего, а также второго и четвертого членов этого уравнения равны одной и той же величине

$(-2x-4)$.

В таком случае далее следует воспользоваться тождеством:

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, a\geq 0, b\geq 0, a+b>0.$$

Уравнение примет вид:

$$\frac{-2x-4}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}+\frac{-2x-4}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}=0;$$

или $(2x+4)\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}\right)=0;$

Корень уравнения $(2x+4)$ т.е. число $x=-2$ при подстановке в исходное уравнение дает верное равенство.

Уравнение $\frac{1}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}$ не имеет решений, так как его левая часть положительна в своей области определения.

Ответ: $x=-2$.

2.1.8 Метод выделения полных квадратов при решении иррациональных уравнений

При решении некоторых иррациональных уравнений полезна формула $\sqrt{a^2}=|a|$.

Пример 7. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

Преобразуем уравнение следующим образом:

$$\sqrt{x-1-4\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9}=1;$$

или

$$\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=1;$$

Обозначим $y=\sqrt{x-1}, y\geq 0$ и решим полученное уравнение методом интервалов.

$$|y-2|+|y-3|=1;$$

Разбирая отдельно случаи $y<2; 2\leq y<3; y\geq 3$, находим, что решениями последнего уравнения являются $2\leq y\leq 3$.

Возвращаясь к переменной x, получаем неравенства

$$2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3;$$

$$4 \leq x-1 \leq 9;$$

$$5 \leq x \leq 10.$$

Ответ: $x \in [5; 10]$.

2.1 Иррациональные неравенства и методы их решения

Основным методом решения иррациональных неравенств является метод сведения исходного неравенства к равносильной системе рациональных неравенств или совокупности таких систем. Чтобы избежать ошибок при решении иррациональных неравенств, следует рассматривать только те значения переменной, при которых все входящие в неравенство функции определены, т.е. найти ОДЗ этого неравенства, а затем обоснованно осуществлять равносильный переход на всей ОДЗ или ее частях.

Рассмотрим решение неравенства вида $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$.

Чтобы его решить, нужно обе части неравенства возвести в квадрат и вовремя вспомнить об ОДЗ: подкоренное выражение меньшего из корней должно быть неотрицательным – тогда подкоренное выражение большего корня автоматически будет больше нуля. Таким образом, неравенство вида $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$

Практически все сложные иррациональные неравенства, в конечном итоге сводятся к базовым иррациональным неравенствам двух типов.

Иррациональные неравенства первого типа: $\sqrt{f(x)} < g(x)$.

Заметим, что в левой части неравенства стоит квадратный корень, который принимает только неотрицательные значения, следовательно, чтобы неравенство имело решения, правая часть должна быть положительной.

Получаем первое условие: $g(x) > 0$.

Чтобы решить неравенство, нам нужно обе части возвести в квадрат.

Получаем второе условие: $\sqrt{f(x)} < (g(x))^2$.

Возведение в квадрат может привести к появлению посторонних корней, поэтому не забываем про ОДЗ: подкоренное выражение должно быть неотрицательным.

Получили третье условие: $f(x) \geq 0$.

Итак, неравенство вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} g(x) > 0; \\ \sqrt{f(x)} < (g(x))^2; \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Аналогично, нестрогое неравенство $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0; \\ \sqrt{f(x)} \leq \left(g(x)\right)^2; \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Иррациональные неравенства второго типа: $\sqrt{f(x)} > g(x)$.

Несмотря на то, что это неравенство с виду похоже на неравенство первого типа, оно принципиально от него отличается.

Поскольку в левой части неравенства стоит квадратный корень, левая часть всегда неотрицательна, поэтому

- если $g(x) < 0$, то неравенство $\sqrt{f(x)} > g(x)$ выполняется при любом допустимом значении x, то есть при $f(x) \geq 0$.
- если $g(x) \geq 0$, то мы можем обе части неравенства возвести в квадрат, получим $f(x) > (g(x))^2$, и условие на ОДЗ $f(x) > 0$ будет автоматически следовать из этого неравенства.

Итак, неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности двух систем неравенств:

1. $\begin{cases} g(x) < 0; \\ f(x) \geq 0; \end{cases}$

2. $\begin{cases} g(x) \geq 0; \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases}$

Нестрогое неравенство вида $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ равносильно совокупности:

1. $\begin{cases} g(x) < 0; \\ f(x) \geq 0; \end{cases}$

2. $\begin{cases} g(x) \geq 0; \\ f(x) \geq \left(g(x)\right)^2. \end{cases}$

Рассмотрим примеры решения иррациональных неравенств.

Пример 8. Решим неравенство: $\sqrt{x-2} > -x^2 + x - 2$.

Это неравенство второго типа, оно равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} -x^2 + x - 2 < 0; \\ x - 2 \geq 0; \end{cases}$$

$D = 1^2 - 4(-1)(-2) = 1 - 8 = -7$;

старший коэффициент больше нуля, следовательно, это неравенство верно при любом значении x.

Решением первой системы будет решение ее второго неравенства:

$$x \geq 2.$$

$$\begin{cases} -x^2 + x - 2 < 0; \\ x - 2 \geq (-x^2 + x - 2)^2; \end{cases}$$

$$-x^2 + x - 2 \ \geq 0;$$

очевидно, что это неравенство не имеет решений. Следовательно, и вся вторая система не имеет решений.

Ответ: $x \geq 2$.

Пример 9. Решим неравенство $\sqrt{2x - x^2} < 5 - x$.

Это иррациональное неравенство первого типа, и оно равносильно системе трех неравенств:

$$\begin{cases} 5 - x \geq 0; \\ 2x - x^2 \leq (5 - x)^2; \\ 2x - x^2 \geq 0. \end{cases}$$

Решим каждое неравенство:

1. $5 - x \geq 0 \ \rightarrow x \leq 5;$
2. $2x - x^2 \leq (5 - x)^2 \rightarrow 2x - x^2 \leq 25 - 10x + 25 \rightarrow$

$$2x^2 - 12x + 25 \geq 0;$$

$$D = 144 - 200 < 0;$$

следовательно, это неравенство верно при любом значении x.

3. $2x - x^2 \geq 0,$

$$x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Покажем знак функции в каждом промежутке на рисунке 1.

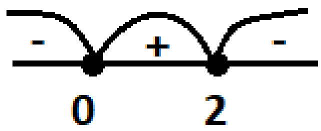

Рисунок 1 – Интервалы для первого уравнения

Совместим решения первого и третьего неравенств системы на одной координатной прямой (рисунок 2):

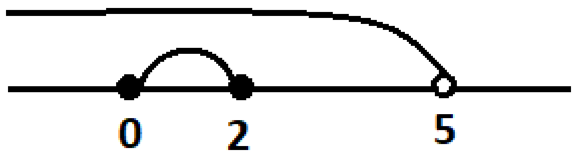

Рисунок 2 – Решение системы

Ответ: $0 \leq x \leq 2$.

Пример 10. Решим неравенство $\sqrt{3x^2 + 5x - 2} \leq 2 + x$.

Решение:

$$\begin{cases} 3x^2 + 5x - 2 \leq (2 + x)^2; \\ 2 + x \geq 0; \\ 3x^2 + 5x - 2 \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом необходимо рассмотреть два квадратных и одно линейное неравенство. Их решение не представляет никаких сложностей.

$$\begin{cases} 2x^2 + x - 6 \leq 0; \\ x \geq -2; \\ 3x^2 + 5x - 2 \geq 0; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 1{,}5; \\ x \geq -2; \\ x \leq -2, x \geq \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

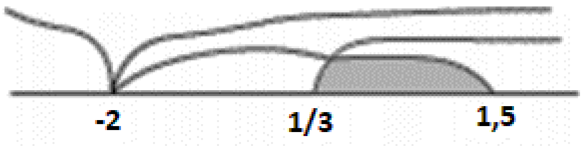

Рисунок 3 – Решение системы уравнений

Объединением этих неравенств, как показано на рисунке 3, будет $\{-2\} \cup \left[\frac{1}{3}; 1{,}5\right]$.

3 РАЗРАБОТКА ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

3.1 Анализ задач ЕГЭ по теме «Иррациональные уравнения»

В ОГЭ не содержатся задания на решение иррациональных уравнений, так как в ОГЭ проверяются умения учеников работать с иррациональными числами, умения упрощать выражение содержащее иррациональное число или находить значение иррационального выражения. ЕГЭ же содержит задания, проверяющие умение решать иррациональное уравнение, задание присутствует как в базовой части, так и в профильной части ЕГЭ.

Рассмотрим основные задачи на решение иррациональных уравнений, используемые в заданиях ЕГЭ.

Тема «Иррациональные уравнения и неравенства» может встречаться в таких заданиях ЕГЭ профильного уровня, как № 5, № 13, № 15.

Задание № 5 профильного уровня ЕГЭ по математике – решение простейшего уравнения: логарифмического, тригонометрического, показательного, в том числе и иррационального.

Примеры были взяты из источников [11, 13, 14, 15, 17, 19, 20].

Пример 1. Найти корень уравнения $\sqrt{25+3x}=4$.

Пример 2. Найти корень уравнения $\sqrt{\frac{7x+41}{17}}=3$.

Пример 3. Найти корень уравнения $\sqrt{\frac{6}{4x-54}}=\frac{1}{7}$.

Пример 4. Найти корень уравнения $\sqrt{-72-17x}=-x^2$.

Пример 5. Найти корень уравнения $\sqrt{6+5x}=x$.

Пример 6. Найти корень уравнения $\sqrt[3]{x-3}=2$.

Пример 7. Найти корень уравнения $\sqrt[5]{x-3}=-2$.

Пример 8. Найти корень уравнения $\sqrt{\frac{1}{15-4x}}=0{,}2$.

Пример 9. Найти корень уравнения $\sqrt[3]{x+2}=-2$.

Проанализировав эти задания ЕГЭ, мы видим, что проверяются знания учеников, в основном, в умении решать простейшие иррациональные уравнения вида $\sqrt{f(x)} = a$.

В задании № 13 необходимо решить уравнение и выполнить отбор корней. В данном задании рассматриваются тригонометрические, показательные, логарифмические, иррациональные и степенные выражения.

Условие задания:

А) решите уравнение;

Б) найдите все корни, принадлежащие промежутку.

Пример 1. А) $\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x} = \sqrt{x-1}$; Б) $[2; 3]$.

Пример 2. А) $\sqrt{2x+6} = 2 + \sqrt{x+1}$; Б) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{151}{10}\right]$.

Пример 3. А) $\sqrt{4x+8} - \sqrt{3x-2} = 1$; Б) $[0; \sqrt{5}]$.

Пример 4. А) $x = \sqrt{9 + x\sqrt{24+x^2}} - 3$; Б) $[-\sqrt{0{,}9}; \sqrt{0{,}1}]$.

Пример 5. А) $\sqrt{x^3 - 4x^2 - 10x + 29} = 3 - x$; Б) $[-\sqrt{3}; \sqrt{30}]$.

Пример 6. А) $\sqrt[4]{\frac{2x+1}{x-1}} + 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{2x+1}} = 3$; Б) $\left[-1; \frac{16}{13}\right]$.

Пример 7. А) $\sqrt[3]{5-2x} = \sqrt{3-x}$; Б) $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Пример 8. А) $\sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} = 4$; Б) $[2\sqrt{3} + 1; 10]$.

Пример 9. А) $\sqrt{x^3 - 4x^2 + 9} - 3 = x$; Б) $\left[-\frac{9}{2}; \frac{7}{5}\right]$.

Либо задания более сложного уровня:

Пример 1. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2$.

Пример 2. $\sqrt{1-4x} + 2 = \sqrt{(2x+1)^2 - 8x}$.

Пример 3. $\sqrt{x^2 - 3x + 1} = |2x-1| - 1$.

Пример 4. $\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{1-x}} = 1$.

Пример 5. $\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}} = \sqrt{x^2-1}$.

Пример 6. $\sqrt{\frac{20+x}{x}} + \sqrt{\frac{20-x}{x}} = \sqrt{6}$.

Пример 7. $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}+1} = \sqrt{1-x^2}$.

Пример 8. $\frac{\sqrt[7]{12+x}}{x} + \frac{\sqrt[7]{12+x}}{12} = \frac{64}{3}\sqrt[7]{x}$.

Пример 9. $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{35}{12}$.

В задании № 15 необходимо решить неравенство (рациональное, показательное, логарифмическое, а также иррациональное).

Если задание № 5 предусматривает только краткую запись ответа, то задания № 13 и № 15 предполагает развернутое решение. Всё это дает возможность отметить, что иррациональные уравнения и неравенства считаются сильным средством глубокого усвоения общих положений теории уравнений и неравенств.

3.2 Тематическое планирование внеурочной деятельности

В ходе выполнения работы был разработан план внеурочных мероприятий по теме «Иррациональные уравнения и неравенства» программы для подготовки к ЕГЭ по математике.

Данный курс призван помочь обучающимся повторить материал темы и повысить уровень владения различными способами, методами и приемами решения иррациональных уравнений и неравенств.

В данном курсе показаны решения как иррациональных уравнений и неравенств стандартного типа, так и повышенной сложности.

Материал курса также способствует развитию мышления и познавательного интереса, повышению уровня математической культуры.

Цель разработанных внеурочных мероприятий − подготовить школьников к экзамену в форме ЕГЭ по теме «Иррациональные уравнения и неравенства».

Также выделим задачи внеурочной деятельности:

– закрепить имеющиеся навыки работы с данным классом уравнений и неравенств;

− ознакомить с ранее неизвестными методами и приемами решения иррациональных уравнений (неравенств);

− научить применять полученные знания при выполнении заданий ЕГЭ;

− выработать навыки самостоятельной работы учеников.

Работа в рамках модуля рассчитана на 7 часов (см. Таблицу 2).

Таблица 2 – Тематическое планирование внеурочной деятельности

№	Тема занятия	Количество часов
1	Решение простейших иррациональных уравнений. Методы решения иррациональных уравнений.	2 часа
2	Решение сложных иррациональных уравнений.	1 час
3	Иррациональные неравенства. Методы решения иррациональных неравенств	2 часа
4	Решение сложных иррациональных неравенств.	1 час
5	Итоговая самостоятельная работа	1 час

3.3 Краткое содержание занятий

Занятие 1. Тема: «Решение простейших иррациональных уравнений. Методы решения иррациональных уравнений».

Цель занятия: рассмотреть методы и закрепить навыки решения иррациональных уравнений стандартного вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ и смешанного вида (иррациональные уравнения, содержащие знак модуля; иррациональные показательные уравнения; иррациональные уравнения, содержащие иррациональность n-ой степени).

Занятие 2. Тема: «Решение сложных иррациональных уравнений».

Цель занятия: рассмотреть методы и закрепить навыки решения иррациональных уравнений на примерах повышенной сложности.

Занятие 3. Тема: «Иррациональные неравенства. Методы решения иррациональных неравенств».

Цель занятия: рассмотреть основные типы неравенств и способы их решения. Большое внимание уделить иррациональным неравенствам стандартного типа $\sqrt{f(x)} < g(x)$ и $\sqrt{f(x)} > g(x)$. Рассмотреть методы решения иррациональных неравенств нестандартного вида, решения иррациональных неравенств с помощью правила знаков при умножении и делении, решение иррациональных неравенств способом группировки; рассмотреть приемы для решения иррациональных неравенств, содержащих два знака иррациональности; иррациональных неравенств заменой.

Занятие 4. Тема: «Решение сложных иррациональных неравенств».

Цель занятия: рассмотреть методы и закрепить навыки решения иррациональных неравенств на примерах повышенной сложности – иррациональные неравенства смешанного вида; иррациональные логарифмические неравенства.

Занятие 5. Тема: «Итоговая самостоятельная работа»

Цель: закрепить полученные знания, проверить качество освоения материала.

Основная литература: [5, 6, 8, 9, 16].

Дополнительная литература: [4].

3.4 Программа внеурочных мероприятий

3.4.1 Решение простейших иррациональных уравнений. Методы решения иррациональных уравнений

Решение иррациональных уравнений стандартного вида.

Иррациональные уравнения стандартного вида можно решить, пользуясь следующим правилом:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \rightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0; \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

Упражнение 1. Решить уравнение $\sqrt{2x-1} = x-2$.

Решение.

$$\sqrt{2x-1} = x-2;$$

$$\left(\sqrt{2x-1}\right)^2 = (x-2)^2;$$

$$2x-1 = x^2-4x+4;$$

$$x^2-6x+5=0;$$

$$D = 36-20 = 16;$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = 1.$$

Проверка:

$x_1 = 5,$	$x_2 = 1,$
$\sqrt{2 \cdot 5 - 1} = 5-2,$	$\sqrt{2 \cdot 1 - 1} = 1-2,$
$3 = 3$	$1 \neq -1$
	$\Rightarrow x_2 = 1$ – посторонний корень

Ответ: $x = 5$.

Упражнение 2. Решить уравнение $x-1 = \sqrt[3]{x^2-x-1}$.

Решение.

$$x-1 = \sqrt[3]{x^2-x-1};$$

$$x^3-3x^2+3x-1 = x^2-x-1;$$

$$x^3-4x^2+4x=0;$$

$$x(x^2-4x+4)=0;$$

$$x=0 \text{ или } x^2-4x+4=0;$$

$$(x-2)^2=0;$$

$$x=2.$$

Ответ: $x = \{0;\ 2\}$.

Упражнение 3. Решить уравнение $x-5\sqrt{x-2}+4=0$.

Решение.

$$x-5\sqrt{x-2}+4=0;$$

$$x+4=5\sqrt{x-2};$$

$$x^2+8x+16=25x-50;$$

$$x^2-17x+66=0;$$

$$x_1 = 11;$$

$$x_2 = 6.$$

Проверка:

$x_1 = 11,$ $\qquad$ $x_2 = 6,$

$11 - 5\sqrt{11-2} + 4 = 0,$ $\qquad$ $6 - 5\sqrt{6-2} + 4 = 0,$

$0 = 0$ $\qquad$ $0 = 0$

Ответ: $x = \{6;\ 11\}$.

Решение иррациональных уравнений смешанного вида.

- Иррациональные уравнения, содержащие знак модуля

Упражнение 4. Решить уравнение $\sqrt{5x-34} = |x-3| - 4$.

Решение.

$\sqrt{5x-34} = |x-3| - 4,$

Учитывая нуль подкоренного выражения, данное уравнение равносильно двум системам:

$$\begin{cases} x \le 3, \\ \sqrt{5x-34} = -x+3-4; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > 3, \\ \sqrt{5x-34} = x-3-4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 3, \\ \sqrt{5x-34} = -x-1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 3, \\ \sqrt{5x-34} = x-7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 3, \\ -x-1 \ge 0, \\ 5x-34 = x^2+2x+1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 3, \\ x-7 \ge 0, \\ 5x-34 = x^2-14x+49; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le -1, \\ x^2 - 3x + 33 = 0 - \textit{корней нет} \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge 7, \\ x^2 - 19x + 83 = 0; \end{cases}$$

$$\varnothing \qquad \begin{cases} x \ge 7, \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{19+\sqrt{29}}{2}, \\ x_2 = \frac{19-\sqrt{29}}{2}\ \textit{посторонний корень} \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $x = \dfrac{19+\sqrt{29}}{2}$.

Упражнение 5. Решить уравнение $\sqrt{|5x-7| - 27} = x - 7$.

Решение.

$$\sqrt{|5x-7|-27} = x-7$$

Учитывая нуль подкоренного выражения, данное уравнение равносильно двум системам:

$$\begin{cases} x \le 7/5, \\ \sqrt{-5x+7-27} = x-7; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > 7/5, \\ \sqrt{5x-7-27} = x-7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 7/5, \\ x-7 \ge 0, \\ -5x-20 = x^2-14x+49; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 7/5, \\ x-7 \ge 0, \\ 5x-34 = x^2-14x+49; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 7/5, \\ x \ge 7, \\ x^2-9x+69 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge 7, \\ x^2-19x+83 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 7/5, \\ x \ge 7, \\ \textit{Корней нет} \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge 7, \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{19-\sqrt{29}}{2} \ \textit{посторонний корень} \\ x_2 = \frac{19+\sqrt{29}}{2}. \end{array} \right. \end{cases}$$

$\emptyset$

Ответ: $x = \frac{19+\sqrt{29}}{2}$.

- Иррациональные показательные уравнения

Упражнение 6. Решить уравнение $49^{1+\sqrt{x-2}} - 344 \cdot 7^{\sqrt{x-2}} = -7$.

Решение.

$49^{1+\sqrt{x-2}} - 344 \cdot 7^{\sqrt{x-2}} = -7;$

ОДЗ: $x-2 \ge 0 \Rightarrow x \ge 2;$

$7^{2+2\sqrt{x-2}} - 344 \cdot 7^{\sqrt{x-2}} + 7 = 0;$

Пусть $7^{\sqrt{x-2}} = t, t > 0;$

$49t^2 - 344t + 7 = 0;$

$t_1 = {}^{1}/_{49};$

$t_2 = 7.$

Сделаем обратную замену:

$7^{\sqrt{x-2}} = {}^{1}/_{49}$;

$7^{\sqrt{x-2}} = 7^{-2}$;

$\sqrt{x-2} = -2$;

$7^{\sqrt{x-2}} = 7$;

$\sqrt{x-2} = 1$;

$x = 3$;

Действительных корней нет.

Ответ: $x = 3$.

Упражнение 7. Решить уравнение $\sqrt[3]{4^{x+2}} = \frac{4}{\sqrt[5]{2}}$.

Решение.

Приведем все степени к одному основанию 2:

$\sqrt[3]{4^{x+2}} = \frac{4}{\sqrt[5]{2}}$;

$\sqrt[3]{4^{x+2}} = 4 \cdot 2^{-\frac{1}{5}}$;

$2^{\frac{2x+4}{3}} = 2^{2-\frac{1}{5}}$, данное уравнение равносильно уравнению:

$\frac{2x+4}{3} = \frac{9}{5}$;

$10x + 20 = 27$;

$10x = 7$;

$x = 0{,}7$;

Ответ: $x = 0{,}7$.

- Иррациональное уравнение, содержащее иррациональность четной степени

Упражнение 8. Решить уравнение $\sqrt{3x-5} - \sqrt{4-x} = 1$.

Решение.

$$\sqrt{3x-5} - \sqrt{4-x} = 1.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат

$$3x - 5 - 2\sqrt{(3x-5)(4-x)} + 4 - x = 1;$$

$$2x - 2 = 2\sqrt{(3x-5)(4-x)};$$

$$x - 1 = \sqrt{(3x-5)(4-x)};$$

$$x^2 - 2x + 1 = (3x-5)(4-x);$$

$$x^2 - 2x + 1 - 12x + 3x^2 + 20 - 5x = 0;$$

$$4x^2 - 19x + 21 = 0;$$

$$x_1 = 3\,, x_2 = \frac{3}{2}.$$

Проверка:

$x_1 = 3;$

$\sqrt{9-5} - \sqrt{4-3} = 1;$

$1 = 1;$

$x_2 = \frac{3}{2};$

$\sqrt{4{,}74-5} - \sqrt{4-1{,}75} \neq 1;$

Ответ: $x = 3$.

- Иррациональное уравнение, содержащее иррациональность нечетной степени

Упражнение 9. Решить уравнение $\sqrt[3]{25+x} + \sqrt[3]{3-x} = 4$.

Решение.

$$\sqrt[3]{25+x} + \sqrt[3]{3-x} = 4.$$

Возведем обе части уравнения в куб

$$25 + x + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{25+x}\right)^2 \left(\sqrt[3]{3-x}\right) + 3\left(\sqrt[3]{25+x}\right)\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^2 + 3 - x = 64;$$

$$3\sqrt[3]{(25+x)(3-x)}\left(\sqrt[3]{25+x} + \sqrt[3]{3-x}\right) = 36,$$

$$\text{но } \sqrt[3]{25+x} + \sqrt[3]{3-x} = 4, \text{значит}$$

$$12\sqrt[3]{(25+x)(3-x)} = \frac{36}{12};$$

$$\sqrt[3]{(25+x)(3-x)} = 3;$$

Возведем обе части уравнения в куб

$$(25+x)(3-x) = 27;$$

$$x^2 + 22x - 48 = 0;$$

$$x_1 = -24, x_2 = 2.$$

Ответ: $x = \{-24; 2\}$

- Иррациональные уравнения, которые решаются заменой

Упражнение 10. Решить уравнение $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} - 2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = 1$.

Решение.

$$\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}-2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}}=1.$$

Пусть $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}=t$, тогда $\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}}=\frac{1}{t}$, где t > 0;

$$t-\frac{2}{t}=1;$$

$$\frac{t^2-t-2}{t}=0;$$

$$t^2-t-2=0;$$

$$t_1=2, t_2=-1 - \text{посторонний корень}$$

Сделаем обратную замену

$$\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}=2.$$

Возведем обе части в квадрат

$$\frac{2x+1}{x-1}=4;$$

$$\frac{-2x+5}{x-1}=0, x\neq 1;$$

$$-2x+5=0;$$

$$x=2{,}5.$$

Проверка

$$\sqrt{\frac{2\cdot 2{,}5+1}{2{,}5-1}}-2\sqrt{\frac{2{,}5-1}{2\cdot 2{,}5+1}}=1;$$

$$2-2\frac{1}{2}=1;$$

$$1=1;$$

Ответ: $x=2{,}5$.

Упражнение 11. Решить уравнение $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6$.

Решение.

$$\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6.$$

Пусть $\sqrt[4]{x^3+8}=t$, значит $\sqrt{x^3+8}=t^2$, где t > 0

$$t^2+t-6=0;$$

$$t_1=-3-\text{посторонний корень};$$

$$t_2=2.$$

Сделаем обратную замену

$$\sqrt[4]{x^3+8}=2.$$

Возведем обе части уравнения в четвертую степень

$$x^3+8=16;$$

$$x^3=8;$$

$$x=2.$$

Проверка

$$\sqrt{2^3+8}+\sqrt[4]{2^3+8}=6;$$

$$6=6.$$

3.4.2 Решение сложных иррациональных уравнений

- Иррациональное уравнение, содержащее двойную иррациональность

Упражнение 1. Решить уравнение $\sqrt[3]{5-\sqrt{x^3+15}}=x$.

Решение.

Возведем обе части уравнения в куб

$$5-\sqrt{x^3+15}=x^3;$$

$$5-x^3=\sqrt{x^3+15};$$

Возведем обе части уравнения в квадрат

$$25-10x^3+x^6=x^3+15;$$

$$x^6-11x^3+10=0.$$

Пусть $x^3=t$, тогда $t^2-11t+10=0 \Rightarrow t_1=10, t_2=1$.

Сделаем обратную замену

$x^3 = 10 \Rightarrow x = \sqrt[3]{10};$

$$\sqrt[3]{5 - \sqrt{\left(\sqrt[3]{10}\right)^3 + 15}} = \sqrt[3]{10};$$

$0 \neq \sqrt[3]{10}$ – посторонний корень;

$x^3 = 1;$

$$\sqrt[3]{5 - \sqrt{(1)^3 + 15}} = \sqrt[3]{1};$$

$1 = 1;$

Ответ: $x = 1$.

- Иррациональные логарифмические уравнения

Упражнение 2. Решить уравнение $lg3 + 0{,}5 \cdot l\,g(x - 28) = lg\sqrt{x + 10}$.

Решение.

$$\lg\left(3\sqrt{x - 28}\right) = lg\sqrt{x + 10}.$$

Учитывая ОДЗ, данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x - 28 > 0; \\ x + 10 > 0; \\ 3\sqrt{x - 28} = \sqrt{x + 10}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 28; \\ x > -10; \\ 9(x - 28) = x + 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 28; \\ 9x - 252 = x + 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 28; \\ x = 32{,}75. \end{cases}$$

Ответ: $x = 32{,}75$.

Упражнение 3. Решить уравнение

$$x^2\, log_6 \sqrt{5x^2 - 2x - 3} - x\, log_{\frac{1}{6}}(5x^2 - 2x - 3) = x^2 + 2x.$$

Решение.

$$\begin{cases} 5x^2 - 2x - 3 > 0; \\ x^2 log_6\sqrt{5x^2 - 2x - 3} + 2x log_6\sqrt{5x^2 - 2x - 3} = x^2 + 2x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x^2 - 2x - 3 > 0; \\ (x^2 + 2x)\left(log_6\sqrt{5x^2 - 2x - 3} - 1\right) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5(x-1)(x+\frac{3}{5}) > 0, \\ x(x+2)\, log_6 \frac{\sqrt{5x^2-2x-3}}{6} = 0; \end{cases}$$

$$log_6 \frac{\sqrt{5x^2-2x-3}}{6} = 0;$$

$$\sqrt{5x^2-2x-3} = 6;$$

$$5x^2-2x-3 = 36;$$

$$5x^2-2x-39 = 0;$$

$$x_1 = -\frac{13}{5}, x_2 = 2;$$

$$\begin{cases} x < -\frac{3}{5} \text{ или } x > 1, \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, (\text{не\_подходит}) \\ x_2 = -2, \\ x_3 = -\frac{13}{5}, \\ x_4 = 3. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $x = \left\{-\frac{13}{5}; -2; 3\right\}$.

3.4.3 Иррациональные неравенства. Методы решения иррациональных неравенств

Неравенства называются иррациональными, если его неизвестное входит под знак корня (радикала).

Иррациональное неравенство вида $f(x) < g(x)$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ (\sqrt{f(x)})^2 < (g(x))^2. \end{cases}$$

Иррациональное неравенство вида $f(x) > g(x)$ равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) \geq 0, \\ (\sqrt{f(x)})^2 > (g(x))^2. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

- Решение иррациональных неравенств стандартного вида

Упражнение 1. Решить неравенство $\sqrt{x-1} < 3 - x$.

Решение.

$$\sqrt{x-1} < 3 - x.$$

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ 3 - x > 0, \\ x - 1 < 9 - 6x + x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ x < 3, \\ x^2 - 7x + 10 > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \leq x < 3, \\ \left[\begin{array}{l} x < 2, \\ x > 5. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $x \in [1; 2)$.

Упражнение 2. Решить неравенство $\sqrt{7+x} \geq 7 - 2x$.

Решение.

$$\sqrt{7+x} \geq 7 - 2x.$$

Данное неравенство равносильно двум системам неравенств:

$$\begin{cases} 7 + x \geq 0, \\ 7 - 2x \geq 0, \\ 7 + x \geq 49 - 28x + 4x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 + x \geq 0, \\ 7 - 2x \geq 0, \\ 4x^2 - 29x + 42 \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [-7; 3{,}5], \\ x \in [2; 5{,}25]. \end{cases}$$

$$x \in [2; 3{,}5].$$

Ответ: $x \in [2; 3{,}5]$.

Упражнение 3. Решить неравенство $\sqrt{x^2 + 4x - 12} < x - 3$.

Решение.

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 12 \geq 0, \\ x - 3 > 0, \\ x^2 + 4x - 12 < x^2 - 6x + 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in -\infty; -6 \cup 2; +\infty), \\ x > 3, \\ 10x < 21; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in -\infty; -6 \cup 2; +\infty), \\ x > 3, \\ x < 2{,}1. \end{cases}$$

Ответ: нет решений.

- Решение иррациональных неравенств нестандартного вида

Упражнение 4. Решить неравенство $\sqrt{3x-2} \geq \sqrt{-x+4}$.

Решение.

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 3x - 2 \geq 0, \\ -x + 4 \geq 0, \\ 3x - 2 \geq -x + 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2/3, \\ x \leq 4, \\ x \geq 3/2. \end{cases}$$

Ответ: $x \in [3/2; 4]$.

Упражнение 5. Решить неравенство $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} > \sqrt{x-2}$.

Решение.

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 2x + 3 > 0, \\ x + 1 \geq 0, \\ x - 2 \geq 0, \\ \sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} > 0, \\ 2x + 3 - 2\sqrt{(2x+3)(x+1)} + x + 1 > x - 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -3/2, \\ x \ge -1, \\ x \ge 2, \\ 2x+3 > x+1, \\ 2(x+3) > 2\sqrt{(2x+3)(x+1)}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 2, \\ x > -2, \\ x+3 > \sqrt{(2x+3)(x+1)}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 2, \\ x^2+6x+9 > (2x+3)(x+1); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 2, \\ x^2-x-6 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 2, \\ x \in (-2;3). \end{cases}$$

Ответ: $x \in [2;3)$.

- Решение иррациональных неравенств с помощью правила знаков при умножении и делении

Упражнение 6. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{5-x} \ge 0$.

Решение.

Учитывая то, что $\sqrt{x^2-16} \ge 0$ и правило знаков при делении данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2-16 \ge 0, \\ 5-x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-16 \ge 0, \\ 5-x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -4] \cup 4; +\infty), \\ x < 5. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty; -4] \cup [4; 5)$.

Упражнение 7. Решить неравенство $(2x - 5)\sqrt{9 - x^2} \geq 0$.

Решение.

Учитывая то, что $\sqrt{9 - x^2} \geq 0$ и правило знаков при делении данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 9 - x^2 \geq 0, \\ 2x - 5 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [-3; 3], \\ x \geq 2,5. \end{cases}$$

Ответ: $x \in [2,5; 3]$.

- Решение иррациональных неравенств способом группировки

Упражнение 8. Решить неравенство

$$2x^2 + \sqrt{x^5} + 3\sqrt{x^3} - 4\sqrt{x} < 8 - 6x.$$

Решение.

$2x^2 + \sqrt{x^5} + 3\sqrt{x^3} - 4\sqrt{x} < 8 - 6x$,

$2x^2 + \sqrt{x^5} + 3\sqrt{x^3} - 4\sqrt{x} - 8 + 6x < 0$, сгруппируем по два слагаемых

$(2x^2 + \sqrt{x^5}) + (3\sqrt{x^3} + 6x) - (4\sqrt{x} + 8) < 0$,

$(2x^2 + x^2\sqrt{x}) + (3x\sqrt{x} + 6x) - (4\sqrt{x} + 8) < 0$,

$x^2(2 + \sqrt{x}) + 3x(\sqrt{x} + 2) - 4(\sqrt{x} + 2) < 0$, вынесем общий множитель за скобку

$(2 + \sqrt{x})(x^2 + 3x - 4) < 0$, учитывая, что $(2 + \sqrt{x}) > 0$ и правило знаков при умножении данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 2+\sqrt{x}>0, \\ x^2+3x-4<0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>0, \\ x\in(-4;1). \end{cases}$$

Ответ: $x \in (0;\,1)$.

- Иррациональное неравенство, содержащее два знака иррациональности

Упражнение 9. Решить неравенство $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}>\sqrt{5-x}$.

Решение.

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 1-x\geq 0, \\ 5-x\geq 0, \\ 4-\sqrt{1-x}>0, \\ 4-\sqrt{1-x}>5-x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\leq 1, \\ x\leq 5, \\ 4>\sqrt{1-x}, \\ x-1>\sqrt{1-x}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\leq 1, \\ 16>1-x, \\ x^2-2x+1>1-x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\leq 1, \\ x>-15, \\ x^2-x>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\in(-15;1], \\ x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty). \end{cases}$$

Ответ: $x\in(-15;0)$.

- Решение иррациональных неравенств заменой

Упражнение 10. Решить неравенство $\sqrt{\dfrac{3}{2+x}}+3\sqrt{\dfrac{2+x}{3}}\le 4$.

Решение.

$$\sqrt{\frac{3}{2+x}}+3\sqrt{\frac{2+x}{3}}\le 4;$$

пусть $\sqrt{\dfrac{3}{2+x}}$ = t, тогда $\sqrt{\dfrac{2+x}{3}}$ = $\dfrac{1}{t}$, $t>0$

$$t-\frac{3}{t}-4\le 0,$$

$$\frac{t^2+3-4t}{t}\le 0,$$

$$f(x)=\frac{t^2-4t+3}{t},1\le t\le 3.$$

Сделаем обратную замену:

$1\le\sqrt{\dfrac{3}{2+x}}\le 3,\Big|$ возведем в квадрат обе части неравенства

$$1\le\frac{3}{2+x}\le 9,$$

$$\frac{1}{9}\le\frac{2+x}{3}\le 1,\Big|*3$$

$$1/3\le 2+x\le 3,\Big|-2$$

$$-1\frac{2}{3}\le x\le 1.$$

Ответ: $x\in\left[-1\dfrac{2}{3};1\right]$.

3.4.4 Решение сложных иррациональных неравенств

- Иррациональные показательные неравенства

Упражнение 1. Решить неравенство $\sqrt{0,8^{x(x-3)}} > 0,64$.

Решение.

$\sqrt{0,8^{x(x-3)}} > 0,64$,

$0,8^{0,5x(x-3)} > 0,8^2$, т.к. $y = 0,8^t \downarrow$, то

$0,5x(x-3) < 2$,

$0,5x^2 - 1,5x - 2 < 0$,

$x^2 - 3x - 4 < 0$,

$f(x) = x^2 - 3x - 4$,

$ОДЗ(f) = x \in R$,

Нули функции: $x_1 = 4$; $x_2 = -1$.

Ответ: $x \in (-1; 4)$.

Упражнение 2. Решить неравенство $4^{\sqrt{x}} - 2^{\sqrt{x}+1} < 2^{\sqrt{x}+4} - 32$.

Решение.

$$4^{\sqrt{x}} - 2^{\sqrt{x}+1} < 2^{\sqrt{x}+4} - 32.$$

ОДЗ: $x > 0$;

$$2^{2\sqrt{x}} - 2^{\sqrt{x}} \cdot 2 < 2^{\sqrt{x}} \cdot 2^4 - 2^5;$$

выполним группировку слагаемых

$$2^{\sqrt{x}}\left(2^{\sqrt{x}} - 2\right) - 2^4\left(2^{\sqrt{x}} - 2\right) < 0;$$

$$\left(2^{\sqrt{x}} - 2\right) \cdot \left(2^{\sqrt{x}} - 2^4\right) < 0;$$

учитывая правило знаков и ОДЗ данное неравенство равносильно 2-м системам:

$\begin{cases} 2^{\sqrt{x}} - 2 < 0, \\ 2^{\sqrt{x}} - 2^4 > 0; \end{cases}$ или $\begin{cases} 2^{\sqrt{x}} - 2 > 0, \\ 2^{\sqrt{x}} - 2^4 < 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 2^{\sqrt{x}} < 2, \\ 2^{\sqrt{x}} > 2^4; \end{cases}$ т.к. $y = 2^t \uparrow$, то $\begin{cases} 2^{\sqrt{x}} > 2, \\ 2^{\sqrt{x}} < 2^4; \end{cases}$ т.к. $y = 2^t \uparrow$, то

$$\begin{cases} \sqrt{x} < 1, \\ \sqrt{x} > 4, \\ x > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{x} > 1, \\ \sqrt{x} < 4, \\ x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1, \\ x > 16. \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 1, \\ x < 16. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (1; 16)$.

- Решение иррациональных логарифмических неравенств

Упражнение 3. Решить неравенство

$$\log_2 \frac{(\sqrt{4x+1})^2 + 15}{x^2+2} + \log_{1/2} \frac{28}{x+5} > 0 .$$

Решение.

$log_2 \frac{(\sqrt{4x+1})^2+15}{x^2+2} + log_{\frac{1}{2}} \frac{28}{x+5} > 0,$ уч. ОДЗ данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 4x+1 \geq 0, \\ \log_2 \dfrac{4(x+4)}{x^2+2} + \log_2 \dfrac{x+5}{28} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 1 \geq 0, \\ log_2 \left(\dfrac{4(x+4)(x+5)}{28(x^2+2)} \right) > log_2 1\,; \ т.к.\, y = log_2 t \uparrow, то \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x+1 \geq 0, \\ \dfrac{(x+4)(x+5)}{7(x^2+2)} > 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x+1 \geq 0, \\ 2x^2 - 3x - 2 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1/4, \\ x \in (-1/2\,; 2). \end{cases}$$

Ответ: $x \in \left[-1/4; 2\right).$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тема, поднятая в выпускной квалификационной работе, является одной из сложных тем школьного курса математики. Многим школьникам сложно решать нестандартные иррациональные уравнения и, особенно, решать иррациональные неравенства.

В ходе выполнения работы был проведен анализ темы «Иррациональные уравнения и неравенства» в школьных учебниках алгебры и алгебры и начал математического анализа. Был сделан вывод, что существует множество различных методов решения иррациональных уравнений и неравенств, и не все из них охватываются школьным курсом. Кроме того, практически во всех программах недостаточно времени уделено закреплению этой темы. Таким образом, мы обнаруживаем, что учащиеся выпускных классов не обладают глубокими и прочными знаниями, отработанными навыками решения задач по данной тематике.

Иррациональные уравнения и неравенства способствуют развитию мышления, способности анализировать, распознавать рациональные пути решения, не забывая об ограничениях. Кроме того, экзаменационные задания (профильный уровень) по математике содержат иррациональные уравнения и неравенства. Для качественного повторения и подготовки к итоговой аттестации составлен план внеурочных занятий на тему «Иррациональные уравнения и неравенства» для подготовки учеников старших классов к ЕГЭ. Этот курс способствует углублению знаний по предмету и систематизирует, расширяет и синтезирует знания по теме.

В рамках данной работы представлен план внеурочных мероприятий; примеры взяты и подробно разобраны не только из школьной программы, но и из вступительных экзаменов в школу А.Н. Колмогорова при МГУ, из сборника задач по математике под редакцией М.И. Сканави. Это значит, что предложенный материал может использоваться для подготовки школьников к ЕГЭ, для обобщающего повторения данной темы, а также в качестве дополнительных заданий при изучении иррациональных уравнений и неравенств на уроках математики.

Таким образом, все задачи данной выпускной квалификационной работы выполнены, цель достигнута. Качественно организованное обобщающее повторение математического материала позволит вывести на более высокий уровень подготовку к ЕГЭ по математике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразовательных организаций / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского – 3-е изд.; Просвещение, 2014. – 256 с.

2. Алгебра. 8 класс: учебник для общеобразовательных организаций / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского – 3-е изд.; Просвещение, 2013. – 287 с.

3. Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных организаций / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского – 3-е изд.; Просвещение, 2018. – 400 с.

4. Алгебра и начала математического анализа. Дидактические материалы. 10 класс: углублённый уровень / М.И. Шабунин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, О.Н. Доброва – 4-е изд.; Просвещение, 2012. – 142 с.: ил. – ISBN 978-5-09-029513-0.

5. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин; под ред. Жижченко А.Б. – 4-е изд.; Просвещение, 2011. – 368 с.: ил. – ISBN 978-5-09-025401-4.

6. Алгебра и начала математического анализа: учебник для 10-11 класса общеобразовательного учреждения / А.Г. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын [и др.]; под ред. А.Н. Колмогорова – 17-е изд.; Просвещение, 2008. – 384 с.

7. **Байдак В. А.** Теория и методика обучения математике: наука, учебная дисциплина: монография / В. А. Байдак. — 3-е изд,, стереотип. — М. : ФЛИНТА, 2016. – 264 с.

8. 3000 конкурсных задач по математике / Е.Д. Кулагин, В.И. Норин, С.Н. Федин [и др.]; 5-е изд., испр.; Айрис-пресс, 2003. – 624 с.

9. **Гусев В.А.** Математика: учебно-справочное пособие / В.А. Гусев, А.Г. Мордкович. – Москва: Астрель, 2013. – 671 с.

10. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных. организаций: базовый и углубленный. Уровни / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева [и др.] – 3-е изд.; Просвещение, 2016. – 463 с.

11. **Мерзляк А. Г.** Алгебраический тренажер: Пособие для школьников и абитуриентов / Под ред. А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир; Илекса, 2007. – 320 с.

12. **Мордкович А.Г.** Алгебра и начала анализа. 10-11 классов: учебник для общеобразовательных. учреждений. – 2-е изд.; Мнемозина, 2001. – 335 с.

13. **Мордкович А. Г.** Алгебра и начала анализа. 10-11 класс: В двух частях. Ч.1: учебник для общеобразовательных учреждений; Мнемозина, 2004. – 315 с.

14. **Никольский С.М.** Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни / С.М. Никольский - 9-е изд.; Просвещение, 2010. – 430 с.

15. Подготовка к ЕГЭ и ОГЭ по математике [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://math100.ru/prof-ege13-3/

16. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / В.К. Егерев, В.В. Зайцев, Б.А. Кордемский [и др.]; под редакцией М.И. Сканави. – 6-е изд.; ООО «Издательство «Мир и образование»: ООО «Издательство «ОНИКС-ЛИТ», 2013. – 608 с.

17. «СДАМ ГИА: РЕШУ ЕГЭ». Образовательный портал для подготовки к экзаменам [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ege.sdamgia.ru/test?theme=275

18. Сообщество учителей-предметников "Учительский портал" Свидетельство о регистрации СМИ: Эл № ФС77-64383 выдано 31.12.2015 г. Роскомнадзором. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.uchportal.ru/docs/federalnyj-perechen-uchebnikov-na-2020-2021-uchebnyj-god

19. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования: утв. приказом Министерства образования и науки РФ от 17 мая 2012 г. N 413 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://docs.edu.gov.ru/document/bf0ceabdc94110049a583890956abbfa/

20. **Черкасов О. Ю.** Математика: Справочник для старшеклассников и поступающих в вузы. Курс подготовки к ГИА, ЕГЭ; АСТ-ПРЕСС, 2014. – 464 с.

21. **Kidron I.** Understanding irrational numbers by means of their representation as non-repeating decimals [Text]/ I. Kidron // First conference of 60 International Network for Didactic Research in University Mathematics, 2016. – PP. 1 – 11.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

ИН – Иррациональные неравенства.

ИУ – Иррациональные уравнения.

ИУН – Иррациональные уравнения и неравенства.

ОДЗ – Область допустимых значений.

ЕГЭ – Единый государственный экзамен.

ОГЭ – Основной государственный экзамен.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Перечень учебников по математике для 10-11 классов

Перечень учебников по алгебре и алгебре и началам математического анализа, рекомендуемых к использованию в 2020-2021 учебном году представлены в таблице А.1.

Таблица А.1 – Перечень учебников по алгебре и алгебре и началам математического анализа на 2020/2021 учебный год

Автор/авторский коллектив	*Наименование учебника*	*Класс*	*Адрес страницы об учебнике на официальном сайте издателя (издательства)*
Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и др./ Под ред. Теляковского С.А.	Алгебра	7	https://catalog.prosv.ru/item/25058
Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и др./ Под ред. Теляковского С.А.	Алгебра	8	https://catalog.prosv.ru/item/25061
Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и др./ Под ред. Теляковского С.А.	Алгебра	9	https://catalog.prosv.ru/item/25062
Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачева М.В. и др.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровни)	10-11	https://catalog.prosv.ru/25056
Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия (базовый и углубленный уровни)	10-11	https://catalog.prosv.ru/item/4976