МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика изучения темы «Треугольник» в процессе подготовки к ЕГЭ

Выпускная квалификационная работа по направлению

44.03.01 Педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата

«Математика»

Форма обучения заочная

Проверка на объем заимствований:
77,74 % авторского текста
Работа рекомендована к защите
«2» июля 2021 г.
и. о. зав. кафедрой математики и МОМ
________ Шумакова Е.О.

Выполнила:
Студентка группы ЗФ-513-087-5-1
Косарева Анастасия Сергеевна
Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры МиМОМ
Шарафутдинова Анна Михайловна

Челябинск
2021

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика изучения темы «Треугольник» в процессе подготовки к ЕГЭ

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.03.01 Педагогическое образование
Направленность программы бакалавриата
«Математика»
Форма обучения заочная

Проверка на объем заимствований:
77,4 % авторского текста
Работа рекомендована к защите
«___» ___________ 2021 г.
и. о. зав. кафедрой математики и МОМ
_______________ Шумакова Е.О.

Выполнила:
Студентка группы ЗФ-513-087-5-1
Косарева Анастасия Сергеевна
Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры МиМОМ
Шарафутдинова Анна Михайловна

Челябинск
2021

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

В математике, одними из самых сложных считаются геометрические задачи. Как научиться решать геометрические задачи, особенно сложные задачи ЕГЭ?

Путь к верному решению геометрической задачи иногда занимает много времени, даже зная ответ задачи, иногда сложно понять, как можно к нему приблизиться и какими путями достигнуть. В геометрии решение задачи иногда закопано глубоко внутри и чтобы его найти, необходимо сделать много маленьких верных шагов. При решении геометрических задач, как правило, алгоритмов нет, поэтому найти наиболее подходящую к данному случаю теорему не так просто. Желательно в каждой теме выработать какие-то общие положения, которые полезно знать всякому решающему геометрические задачи.

К сожалению, такого универсального метода не существует. Но существуют приемы, применимые ко многим задачам. Некоторые из них мы рассмотрим в данной работе.

Объект исследования:

Методы решения задач по теме «Треугольник».

Предмет исследования:

Задачи по теме «Треугольник», Планиметрические задачи, которые встречаются в первой и второй части ЕГЭ, в частности, задания №16.

Цель:

Разработать факультативный курс по решению задач для подготовки к ЕГЭ с использованием различных методов для решения задач по теме «Треугольник».

Задачи:

1. Проанализировать учебную математическую литературу, в том числе школьные учебники, ЕГЭ – задания, пособия для поступающих в вузы, пособия для учителей, пособия для факультативных и элективных курсов.

2. Изучить методы решения планиметрических задач: метод площадей, метод подобия, метод вспомогательных окружностей, метод решения задач с применением свойств четырех замечательных точек.
3. Подобрать задачи, при решении которых используются вышеуказанные методы.
4. Применить рассматриваемые методы при решении геометрических задач ЕГЭ.
5. Разработать факультативный курс по теме «Треугольник» при подготовке к ЕГЭ.

Методы исследования:

Анализ математической, методической и учебной литературы, обработка результатов, конструирование методических материалов.

Структура и объем работы.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, библиографического списка и приложения.

В первой главе изложено теоретическое содержание основных методов решения задач по теме «Треугольник».

Во второй главе приведены примеры решения задач, на подготовительном этапе, задачи повышенной сложности (олимпиадные и задачи при поступлении в ВУЗы) и задачи ЕГЭ разных лет с применением рассмотренных в первой главе методов, разработан факультативный курс по теме «Треугольник» для подготовки к ЕГЭ.

Данная работа имеет практическую значимость, так как при изучении темы «Треугольник» в средней школе, большинство дальнейшее изучаемого материала ссылаются именно на фигуру «Треугольник».

Гипотеза: разработанный факультативный курс дает дополнительные возможности для более углубленного изучения темы «Треугольник» в процессе подготовки к ЕГЭ.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ТРЕУГОЛЬНИК» В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

1.1 История изучения понятия треугольник

С самых античных времен люди начинали проявлять истинный интерес к геометрическим фигурам. Одним из объектов их внимания была фигура – треугольник.

Казалось бы, три вершины и три стороны, но на изучение такой поистине простой и одновременно сложной фигуре потребовались века. Любой многоугольник можно разделить на несколько треугольников, а свойства этой фигуры известны еще с давних пор.

Треугольник – это простейшая плоская фигура, но можно сказать, что вся (или почти вся) геометрия со времен «Начал» Евклида покоится на «трёх китах» – трёх признаках равенства треугольников.

Одни их первых упоминаний о геометрии появляются в математических рукописях Древнего Египта, Вавилона и Древнего Китая. Главным достижением этого периода стало соотношение, позже получившее имя теоремы Пифагора. Простота, обширная применимость– это то, что вызвало такой успех у данной теоремы [15].

Ван дер Варден считает, что вавилоняне произвели открытие между 2000 и 1786 годами до н. э. Общая и более полная теория геометрии треугольников (как плоских, так и сферических) появилась в Древней Греции [3].

Во второй книге «Начал» Евклида теорема 12 представляет собой словесный аналог теоремы косинусов для тупоугольных треугольников. Следующая за ней теорема 13 – один из вариантов теоремы косинусов для остроугольных треугольников. Свойствами, а так же составляющими треугольник (углов, сторон, высот и др.) после Евклида занимались Архимед, Менелай, Клавдий Птолемей. В четвертом веке, уже в Индии начинается рассвет изучения геометрических свойств тел и фигур.

Сочинения индийских математиков показывают, что их авторы были ознакомлены с трудами греческих астрономов и геометров. Чистой геометрией индийцы интересовались не так активно и глубоко, но их вклад в прикладную астрономию и расчётные аспекты тригонометрии очень значителен. В восьмом веке учёные стран Ближнего и Среднего Востока познакомились с трудами древнегреческих и индийских математиков и астрономов. Сабит ибн Курра (деваятый век) и ал-Баттани (десятый век) первыми открыли фундаментальную теорему синусов для частного случая прямоугольного сферического треугольника. Для произвольного сферического треугольника доказательство было найдено (различными методами и, вероятно, они были не связаны друг с другом) Абу-л-Вафой, ал-Худжанди и ибн-Ираком в конце десятого века. В другом трактате ибн Ирака сформулирована и приведено доказательство для теоремы синусов и косинусов треугольника [14].

Фундаментальное изложение тригонометрии плоской и сферической дал математик из Персии ученый астроном Насир ад-Дин ат-Туси в 1260 году. Его «Трактат о полном четырёхстороннике» содержит практические способы решения типичных задач, в том числе труднейших, решённых самим ат-Туси. Так к концу тринадцатого века были открыты базовые теоремы, которые были нужны для работы с треугольниками на практике.

Стремительное развитие тригонометрической теории в Новое время в Европе стало особенно важным, в основном это было нужно и полезно для артиллерии, строительства, оптики и навигации при дальних морских путешествиях. В 1551 году появились 15-значные тригонометрические таблицы Ретика, ученика Коперника, с шагом 10". В начале семнадцатого века, в связи с открытием логарифмов появилась потребность в сложных тригонометрических расчётах. Таблицы Джона Непера,были одними и первых логарифмических таблиц но, они имели только логарифмы тригонометрических функций. В 1860 году Шлёмильх доказал теорему: три прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами его соответствующих высот, пересекаются в одной точке. В 1937 году советский математик С. И. Зетель показал, что эта теорема верна для высот и для любых других чевиан.

Все описанные события и достижения, связанные с фигурой «треугольник» в области геометрии принести ему особое место в геометрии.

Фрэнк Морли внес огромный вклад в развитие изучения фигуры тем, что доказал геометрическое место центров кардиоид, вписанных в треугольник, состоит из девяти прямых, которые, взятые по три, параллельны трём сторонам равностороннего треугольника. Внутренние трисектрисы углов 7 треугольника, прилежащих к одной и той же стороне, попарно пересекающиеся в трёх вершинах равностороннего треугольника – частный случай теоремы, который получил известность. Обобщение этих работ опубликовал Анри Лебег (1940), он ввел n-сектрисы треугольника и изучил их расположение в общем виде. Изучение треугольников продолжалось и дальше, также не останавливается и по сей день.

1.2 Роль и место темы «Треугольник» в школьном курсе математики

В школьном курсе математики теме «Треугольник» уделяется особое внимание и место. В первую очередь это связанно с тем, что с этой фигурой перекликаются многие методы, которые используются при решении задач [16].

Изучение свойств многих фигур, сводятся к изучению их составляющих, которыми часто является именно треугольник. Очень важно не только представлять методику подачи этой темы и ее изложения, но и её специфику, во избежание методических ошибок, которые могут возникнуть при построении курса.

В курсе геометрии VII-IX классов систематически изучаются геометрические фигуры на плоскости, причем большое внимание уделяется многоугольникам, изучению их свойств, рассмотрению величин, характеризующих плоский многоугольник. В решении задач на многоугольники находят применение различные методы. Треугольник –это самый минимальный многоугольник.

Систематическое изучение плоских многоугольников базируется на сформированных в первых трех классах представлениях о простейших геометрических фигурах и служит средством развития логического мышления учащихся. Здесь вводится много определений, доказываются содержательные теоремы, введется работа по формированию понятий "свойство" и "признак". Уже в начальных классах учащиеся с ними ознакомлены и являются хорошим дидактическим средством изучения арифметики.

Основная цель – ввести понятие теоремы, выработать умение доказывать равенство треугольников с помощью изученных признаков, ввести новый класс задач – на построение с помощью циркуля и линейки [14].

Признаки равенства треугольников являются основным рабочим аппаратом всего курса геометрии. Доказательство большей части теорем курса и также решение многих задач проводится по следующей схеме: поиск равных треугольников, обоснование их равенства с помощью какого-то признака, следствия, вытекающие из равенства треугольников. Применение признаков равенства треугольников при решении задач дает возможность постепенно накапливать опыт проведения доказательных рассуждений. На начальном этапе изучения и применения признаков равенства треугольников целесообразно использовать задачи с готовыми чертежами.

Изучение треугольников в соответствии с программой распределено практически по всем классам неполной средней школы. Курс 7 класса – это, по существу, геометрия треугольника.

Треугольник – одна из основных "рабочих" фигур изучаемого в школе курса планиметрии.

Установление цепочек равных треугольников это широко используемый прием доказательства различных геометрических утверждений.

Главная цель изучения признаков равенства треугольников–добиться активного владения им, обратив особое внимание на отработку навыков использования признаков равенства треугольников в решении задач.

Равенство традиционно изучается в курсе планиметрии. Однако трактовка этого понятия, методика введения разные для различных учебников. Так, в учебниках А.Н. Колмагорова и Л.С. Атанасяна равные треугольники – частный случай равных фигур, т.е. фигур, которые можно совместить наложением. Такие понятия, как "совмещение" и "наложение", считаются интуитивно понятными учащимся и в курсе не определяются.

1.3 Некоторые приемы и методы решения задач по теме «Треугольник»

Для того, чтобы решить ту или иную геометрическую задачу, сначала ее оценивают и выбирают путь решения. Существуют некоторые методы, с помощью которых задачи решаются достаточно быстро и понятно.

Мы рассмотрим такие методы как: метод площадей, метод подобия, метод вспомогательных окружностей.

Метод площадей.

Соответственно, в методе площадей, главный объект – площадь. Для некоторых фигур, таких как треугольник, площадь довольно просто выражается через различные комбинации элементов фигуры (треугольника). Прием имеет хорошую эффективность, когда сравниваются различные выражения для площади данной фигуры. В этом случае возникает уравнение, содержащее известные и искомые элементы фигуры, разрешая которое мы определяем неизвестное. Здесь и проявляется основная особенность метода площадей – из геометрической задачи он «делает» алгебраическую, сводя всё к решению уравнения (а иногда системы уравнений) [13]. На рисунке 1 представлен чертеж к задаче 1.

Задача 1.

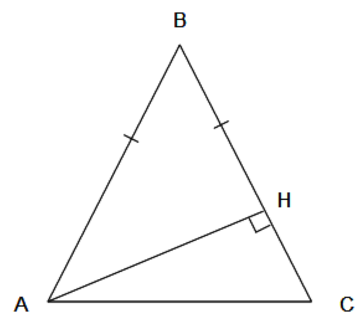


Рисунок 1

В равнобедренном треугольнике сторона основания равна 8, а боковые стороны – 10. Найдите длину высоты, проведенной к боковой стороне.

Дано: ΔABC равнобедренный, $\mathrm{AC} = 8, \mathrm{AB} = \mathrm{BC} = 10.$

Решение:

1. Находим площадь треугольника ABC двумя способами:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot AH = 5AH.$$

2. По формуле Герона.

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

3. Вычислим полупериметр: $p = \frac{AB+BC+CA}{2} = 14.$

4. $S_{\Delta ABC} = \sqrt{14(14-10)(14-10)(14-8)} = \sqrt{14 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6} = 8\sqrt{21}.$

5. Приравняем площади и найдем высоту *AH*:

$$5 \cdot AH = 8\sqrt{21}, AH = \frac{5}{8}\sqrt{21}.$$

Ответ: $1\frac{3}{5}\sqrt{21}$.

Задача 2. Чертеж представлен на рисунке 2.

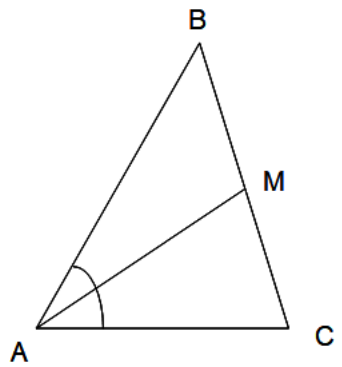


Рисунок 2

(ЕГЭ, 2012) В треугольнике ABC известно, что AB = 8, AC = 6, угол BAC = 60°. Найдите биссектрису AM.

Дано: Δ ABC, AC = 8, AB = 8, ∠BAC = 60º, AM – биссектриса.

Решение:

1. Вычислим площадь треугольника ABC.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = \frac{8 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ}{2} = 12\sqrt{3};$$

2. Также $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABM} + S_{\Delta AMC}$

Найдем площади этих треугольников.

$$S_{\Delta ABM} = \frac{AB \cdot AM \cdot \sin \angle BAM}{2} = \frac{8 \cdot AM \cdot \sin 30^\circ}{2} = 2 \cdot AM.$$

$$S_{\Delta AMC} = \frac{AC \cdot AM \cdot \sin \angle MAC}{2} = \frac{6 \cdot AM \cdot \sin 30^\circ}{2} = \frac{3}{2} \cdot AM.$$

3. Приравняем $12\sqrt{3} = 2 \cdot AM + \frac{3}{2} \cdot AM,$

Из полученного равенства можем найти биссектрису AM треугольника ABC.

$$12\sqrt{3} = 2 \cdot AM + \frac{3}{2} \cdot AM, AM = 12\sqrt{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{24\sqrt{3}}{7}.$$

Ответ: $\frac{24\sqrt{3}}{7}$.

Метод подобия треугольников.

Идея подобия треугольников – это эффективный метод решения большого класса задач на доказательство, построение, вычисление.

Решение элементарных задач на геометрические преобразования – хороший материал для развития пространственного воображения учащихся. Метод подобия заключается в нахождении подобных треугольников, возникших в результате дополнительных построений. Этот метод удобен при доказательстве теорем или при решении задач, если речь идёт об отношениях отрезков в данных задачах. В некоторых случаях можно вообще обойтись без дополнительных построений, поскольку подобные треугольники уже имеются на чертеже. Самое главное – заметить их. Наглядность это одно из преимущество геометрического метода.

Определение: Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого. Число k, равное отношению сходственных сторон подобных треугольников, называется коэффициентом подобия [11].

Задача 3. Чертеж к задаче представлен на рисунке 3.

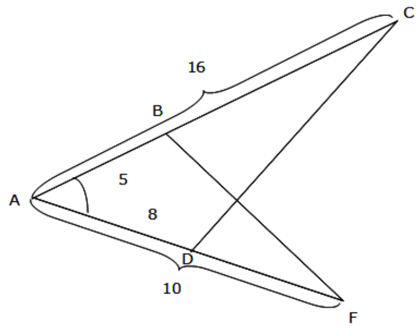


Рисунок 3

На одной из сторон данного угла A отложены отрезки $\mathrm{AB} = 5\text{см}$ и $\mathrm{AC} = 16\text{см}$. На другой стороне этого же угла отложены отрезки $AD = 8\text{см}$ и $AF = 10\text{см}$. Подобны ли треугольники ACD и AFB? Ответ обоснуйте.

Дано: $AD = 8\text{см}$ и $AF = 10\text{см}$, $\mathrm{AB} = 5\text{см}$ и $\mathrm{AC} = 16\text{см}$

Решение.

Рассмотрим треугольники ACD и AFB: ∠A – общий, теперь проверим отношение сторон $\frac{AC}{AF} = \frac{16}{10} = 1{,}6$ и$\frac{AD}{AB} = \frac{8}{5} = 1{,}6$ ⇒ стороны образующие $\angle A$ пропорциональны $\frac{AC}{AF} = \frac{AD}{AB} = 1.6$ ⇒ΔACD подобен треугольнику AFB по второму признаку подобия треугольников. Что и требовалось доказать.

Задача 4. Чертеж представлен на рисунке 4.

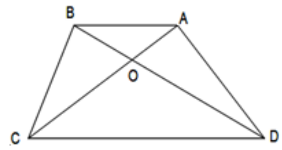


Рисунок 4

В трапеции ABCD сторона BC параллельна AD;
O – точка пересечения диагоналей;$AO = 12$ см, $OC = 15$ см,$BD = 40{,}5$ см. Определите длину отрезков OD и OB.

Дано: ABCD – трапеция,

$AC \cap BD = O, AO = 12$ см, $OC = 15$ см,$BD = 40{,}5$ см

Решение:

1. Рассмотрим треугольники BOC и AOD, они подобны по двум углам: ∠OAD=∠BCO и ∠OBC=∠ODA как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущих AC и BDсоответственно. Следовательно стороны треугольников пропорциональны.

2. $\frac{AO}{OC} = \frac{OD}{OB}$, выражаем OD через OB, учитывая, что $BD = 40{,}5$см. $OD = BD - OB = 40{,}5 - OB$. Подставим все найденные значения в пропорцию.

3. $\frac{12}{15} = \frac{40{,}5 - OB}{OB}$, $\quad 12 \cdot OB = 15 \cdot (40{,}5 - OB)$, $\quad 27 \cdot OB = 607{,}5 \quad OB = 22{,}5$см.

$$OD = 40{,}5 - 22{,}5 = 18 \text{ см.}$$

Ответ: 18 см и 22,5 см.

Метод вспомогательных окружностей.

На уроках геометрии и в учебниках по данному предмету дается не много информации об этом методе. Разобраться в нем не сложно и очень нужно, потому что некоторые задачи решаются им очень быстро. Метод вспомогательной окружности заключается в том, что если геометрическая фигура имеет ряд конкретных признаков, то вокруг неё можно описать окружность, что значительно облегчит решение ряда задач [12].

При решении планиметрических задач, когда требуется установить равенство некоторых углов, очень часто полезным будет описать около треугольника или четырёхугольника окружность, затем связи уже более видны и становятся очевидными [8].

Использование вспомогательной окружности связано с определенными признаками фигуры, рассматриваемой в задаче.

Задача 5. Чертеж представлен на рисунке 5.

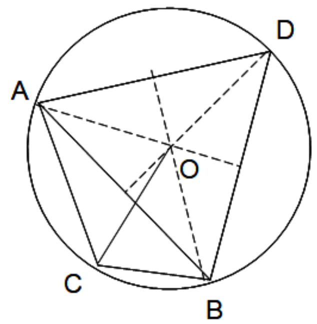


Рисунок 5

На стороне AB треугольника ABC во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник. Найдите расстояние между его центром и вершиной C, если AB = c и $\angle$C = 120°.

Дано: $\triangle$ABC, $\angle C = 120°, AB = c, \triangle ABD$ – равносторонний, O – центр $\triangle ABD$.

Решение:

1. Т.к $\angle C = 120º$, то он опирается на дугу 240º, значит точка C лежит на окружности, описанной возле правильного треугольника $\triangle$ABD и т.к. точка O – центр $\triangle$ABD следовательно OC – радиус описанной

окружности. Сторону правильного треугольника можно выразить через радиус описанной окружности.

2. $c = R \cdot \sqrt{3}$, следовательно $R = \frac{c}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{c}{\sqrt{3}}$.

Задача 6. Чертеж представлен на рисунке 6.

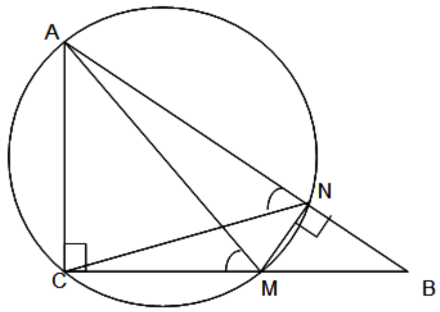


Рисунок 6

Дан прямоугольный треугольник $\triangle ABC, \angle C = 90°$. На катете BC выбрана произвольная точка M. Из точки M проведён перпендикуляр на гипотенузу AB. Докажите, что $\angle ANC = \angle AMC$.

Дано: $\triangle$ABC; $\angle C = 90°$;точка M$\in$BC; $MN \perp AB$.

Доказать, что $\angle ANC = \angle AMC$.

Доказательство.

Вокруг четырёхугольника ACMN можно описать окружность ($\angle ACM + \angle ANM = 180°$).

$\angle ANC$ и $\angle AMC$ опираются на одну дугу AC => эти углы равны, что и требовалось доказать.

1.4 Сравнительный анализ задач на тему «Треугольник», входящих в программу ЕГЭ

В едином государственном экзамене есть ряд задач, в которых не только встречается понятие треугольника, но и все решение задачи сводится к данной фигуре. В экзаменационной работе базового уровня за данные задачи выпускнику можно получить по 1 баллу за каждое задание.

В экзаменационной работе профильного уровня можно получить по 1 баллу за 6-8 задание, 2 балла за 14 задание и 3 балла за 16 задание [10].

Базовый уровень включает в себя:

1. 13. Стереометрия.

2. 15. Планиметрия.

3. 16. Задачи по стереометрии.

Профильный уровень включает в себя:

1. 6. Планиметрия

2. 8. Стереометрия

3. 14. Стереометрическая задача

4. 16. Планиметрическая задача.

Рассмотрим базовую математику.

13 задача в ЕГЭ – относится к разделу «Стереометрия». Это раздел евклидовой геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве. Основными (простейшими) фигурами в пространстве являются точки, прямые и плоскости. В стереометрии появляется новый вид взаимного расположения прямых – скрещивающиеся прямые.

Задачи бывают такие:

1) многогранники: ребра, грани;
2) куб;
3) прямоугольный параллелепипед;
4) призма;
5) пирамида;
6) площадь поверхности составного многогранника;
7) объем составного многогранника;
8) круглые тела [9].

Из перечня основных типов задач можно заметить, что многие базируются на теме «Треугольник», давайте рассмотрим несколько из них.

Задача 7. Чертеж представлен на рисунке 7.

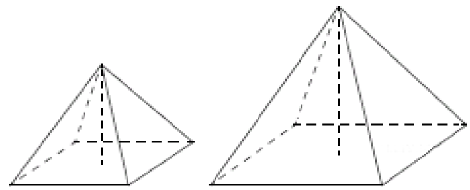


Рисунок 7

Даны две правильные четырёхугольные пирамиды. Объём первой пирамиды равен 16. У второй пирамиды высота в 2 раза больше, а сторона основания в 1,5 раза больше, чем у первой. Найдите объём второй пирамиды.

Дано: $V_1 = 16,\ H_1 > H_2$ в 2 раза, $а_1 > а_2$ в 1,5 раза.

Решение:

1. Вычислим объём пирамиды.

Для этого воспользуемся формулой $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}a^2h$;

2. Следовательно, отношение объёмов пирамид:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{S_2h_2}{S_1h_1} = \frac{(1{,}5a_1)^2 \cdot 2h_1}{a^2h_1} = 4{,}5;$$

3. Значит, объём второй пирамиды: $16 \cdot 4{,}5 = 72$.

Ответ: 72.

Задача 8. Чертеж представлен на рисунке 8.

В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 12 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если ее перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 2 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в сантиметрах.

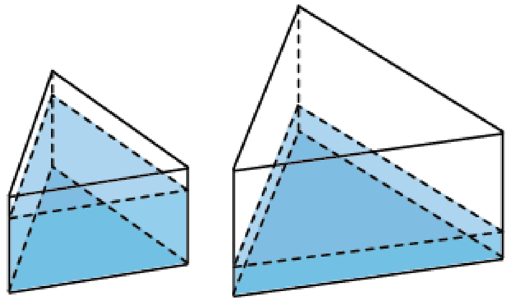


Рисунок 8

Решение:

1. Слова «другой такой же сосуд» означают, что второй сосуд также будет иметь форму правильной треугольной призмы.

2. Тогда в его основании будет лежать правильный треугольник, у которого все стороны в два раза больше, чем у первого.

Тогда площадь этого треугольника $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

3. А сторона увеличилась в 2, значит квадрат стороны в 4 раза, а объем налитой воды не изменился, следовательно, в 4 раза уменьшится высота.

Ответ: 4.

Следующий тип задач №15 Планиметрия—это раздел евклидовой геометрии, изучающий двумерные (одноплоскостные) фигуры, то есть фигуры, которые можно расположить в пределах одной плоскости: треугольники, окружности, параллелограммы и т. д.

Этот раздел включает такие задачи как треугольники и их элементы, четырёхугольники и их элементы, многоугольники, окружность. Задачи с треугольниками здесь часто встречаемые.

Задача 9. Чертеж представлен на рисунке 9.

В треугольнике ABC AB = BC, медиана BM равна 6. Площадь треугольника ABC равна $12\sqrt{7}$. Найдите AB.

Дано: $\angle$ABC, $S_{ABC} = 12\sqrt{7}$, $BM = 6$, AB = BC.

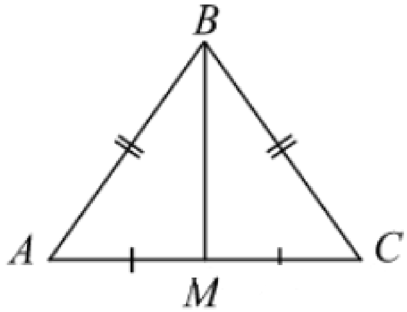


Рисунок 9

Решение:

1. Треугольник ABC — равнобедренный, BM — медиана, значит, BM — высота и биссектриса. Площадь треугольника ABC равна половине произведения высоты на длину стороны, к которой проведена эта высота:

$$AC = \frac{2S_{ABC}}{BM} = 4\sqrt{7}.$$

2. $\mathrm{AM} = \mathrm{MC}$ следует из условия, так как BM – медиана

Значит $\mathrm{AM} = \mathrm{MC} = \frac{1}{2}\mathrm{AC} = 2\sqrt{7}$.

3. Найдём AB по теореме Пифагора из треугольника ABM:

$$AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{4 \cdot 7 + 36} = \sqrt{64} = 8.$$

Ответ: $\mathrm{AB} = 8$.

И следующие задачи №16. Задачи по стереометрии.

Задача 10. Чертеж представлен на рисунке 10.

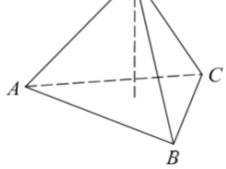


Рисунок 10

Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а высота равна $\sqrt{3}$.

Решение:

1. Объем пирамиды равен $V = \frac{1}{3}Sh$.

Где S – площадь основания, а h – высота пирамиды. Площадь равностороннего треугольника в основании.

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

2. Тогда объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: 0,25.

В заданиях ЕГЭ профильного уровня также содержатся задачи, для успешного решения которых требуется знание темы «Треугольник».

Задачи №6 содержат:

1) решение прямоугольного треугольника;
2) решение равнобедренного треугольника;
3) треугольники общего вида;
4) параллелограммы;
5) трапеция;
6) центральные и вписанные углы;
7) касательная, хорда, секущая;
8) вписанные окружности;
9) описанные окружности.

Задачи №8:

1) куб;
2) прямоугольный параллелепипед;
3) элементы составных многогранников;
4) площадь поверхности составного многогранника;
5) объем составного многогранника;
6) призма;

7) пирамида;

8) комбинации тел;

9) цилиндр;

10) конус;

11) шар.

Наибольшие трудности у учеников возникают при решении задач второй части повышенного уровня сложности. Поэтому остановимся более подробно на рассмотрении задач №14 и №16

14. Стереометрическая задача:

1) расстояние между прямыми и плоскостями;

2) расстояние от точки до прямой и до плоскости;

3) сечения многогранников;

4) угол между плоскостями;

5) угол между прямой и плоскостью;

6) угол между скрещивающимися прямыми;

7) объёмы многогранников;

8) круглые тела: цилиндр, конус, шар.

Рассмотрим решение таких заданий.

Задача 11. Чертеж представлен на рисунке 11.

В правильной треугольной пирамиде MABC боковые рёбра равны 10, а сторона основания равна 12. Точки G и F делят стороны основания AB и AC соответственно так, что AG : GB = AF : FC = 1 : 5.

1. Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MGF является равнобедренным треугольником.

2. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MGF.

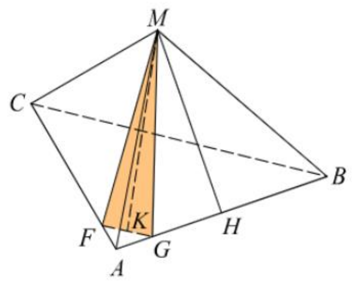


Рисунок 11

Решение: 1. По условию задачи известно, что AG=AF=2. Треугольники AMG и AMF равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда MG=MF.

2. В треугольнике MAB проводим MH высоту боковой грани. Из прямоугольного треугольника AHM находим

$$MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = 8.$$

3. В прямоугольном треугольнике MHG катет HG равен 4. Значит

$$MG = \sqrt{MH^2 + HG^2} = \sqrt{64 + 16} = 4\sqrt{5}.$$

4. Треугольник AGF – равносторонний, тогда GF=AG=2. В треугольнике GMF МК – проведенная высота. Она делит отрезок GF на две равные части. Из прямоугольного треугольника MKG имеем:

$$\text{МК} = \sqrt{MG^2 - GK^2} = \sqrt{79};\ \frac{1}{2} \cdot GF \cdot MK = \sqrt{79}.$$

Следовательно, площадь треугольника GMF равна$\sqrt{79}$.

Ответ: $\sqrt{79}$.

Одна из сложных задач, с которыми сталкиваются ребята на ЕГЭ – это планиметрическая задача №16. Она включает в себя такие варианты задач:

1) многоугольники и их свойства;
2) окружности и системы окружностей;

3) окружности и треугольники;

4) окружности и четырёхугольники.

Задача 12. Чертеж представлен на рисунке 12.

В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке M , причём AM = 5R и CM = 1,5R.

а) докажите, что треугольник ABC прямоугольный;

б) найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей, если известно, что R = 4.

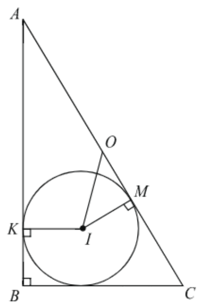


Рисунок 12

Решение:

1. Пусть вписанная окружность касается стороны AB в точке K. Обозначим $BK = x$. Пусть S – площадь треугольника, p – полупериметр.

$$p = 5R + 1{,}5R + x = 6{,}5R + x, S = pR = R(6{,}5R + x);$$

2. С другой стороны, по формуле Герона

$$S = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AC)} = R\sqrt{7{,}5x(6{,}5R + x)};$$

3. Из уравнения $\mathrm{R}(6{,}5\mathrm{R} + \mathrm{x}) = \mathrm{R}\sqrt{7{,}5\mathrm{x}(6{,}5 + \mathrm{x})}$получаем, что R = x. Стороны треугольника ABC равны $6{,}5R, 6R$ и $2{,}5R$, следовательно, этот треугольник прямоугольный с прямым углом при вершине B.

4. Пусть I и O – центры соответственно вписанной и описанной окружностей треугольника ABC. Точка O – середина гипотенузы

$$AC = 6{,}5R = 26, \text{и } OM = CO - CM = 13 - 1{,}5R = 7.$$

5. Тогда $IO = \sqrt{OM^2 + MI^2} = \sqrt{7^2 + R^2} = \sqrt{65}$.

Ответ: $\sqrt{65}$.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОВТОРЕНИЯ И ОБОБЩЕНИЯ ЗНАНИЙ ПО ТЕМЕ «ТРЕУГОЛЬНИК» В ПРОЦЕССЕ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ

2.1 Анализ школьных учебников геометрии

Мной для анализа были взяты три школьных учебника, которые чаще остальных используют для преподавания геометрии:

1. Атанасян, Л.С. Геометрия 7-9 классы. Учебник для общеобразовательных учреждений / Л. С. Атанасяна, В.Ф. Бутузов, С.Б Кадомцева и др. – Москва: Просвещение, 2014.–175с. :ил. – ISBN978-5-09-028109-6.
2. Шарыгин, И.Ф. Геометрия 7-9 классы. Учебник для общеобразовательных учреждений / Шарыгин И.Ф. .– Москва: Просвещение, 2002. – 464 с. : ил. – ISBN978-5-3580-9918-0.
3. Погорелов, А.В. Геометрия. 7-9 классы: учебник для общеобразовательной организаций / А. В. Погорелов. – Москва: Просвещение, 2014. – 240 с.: ил. – ISBN978-5-09-021849-8.

В современной школе обширное распространение получили учебники следующих авторов: Погорелов А.В., Атанасян Л.С., Погорелов А.Б., Шарыгин И.Ф., и др.Учебники А.В. Погорелова и Л.С. Атанасяна и др., предназначены для общеобразовательной школы. Материал для изучения, авторами излагается в более краткой форме, учитывается то, что он должен быть доступен для всех учеников, беря в учет разный уровень восприятия информации и подготовки по предмету. В методической литературе имеются различные отзывы; одни считают, что некоторые учебники непригодны для современной школы, другие же, наоборот, восхищаются особенностью подхода автора к изложению школьного курса геометрии. Одних привлекает строгий аксиоматический подход, других большие возможности для организации мыслительной деятельности учащихся.

Проанализировав три учебника по геометрии Погорелова А.В., Атанасяна Л.С. и Шарыгина И.Ф., выявили следующее:

Атанасян Л.С.:

1. Теоретический материал учебника «Геометрия, 7-9» изложен понятно, доступно и интересно, с учетом психологических особенностей школьников.
2. Книга разбита на 14 глав (13 глав планиметрии и 1 главой начала стереометрии), имеет 2 приложения и снабжена более чем 1000 разнообразных задач разного уровня сложности.
3. В книге присутствуют оригинальные приемы изложения, которые вовлекают школьника в изучение материала.
4. Обширный набор задач.
5. Система задач позволяет развить интерес учащихся к математике с учетом их математической подготовки. Задачи хорошо сформулированы, нередко приводится несколько решений одной и той же задачи.
6. Теоретический материал изложен достаточно систематично и последовательно. Ученики понимают как правильно строить математические рассуждения, при решении задач.
7. Практическая направленность в изучаемом материале.
8. Красочное оформление учебников поможет школьникам лучше изучить геометрический материал.

Погорелов А.В.:

1. Одной из отличительных черт учебника является лаконичное изложение материала.
2. В изложении материала просматривается логическая цепочка указывающая на соответствие материала возрастным особенностям детей.
3. В данном учебнике теоретическая часть объясняется научным языком.

4. Наличие контрольных вопросов к каждому параграфу позволяет закрепить материал и проверить себя.
5. По каждому разделу представлен необходимый набор задач.
6. Решение опорных задач производится в тексте параграфа, автор обращает особое внимание на логику рассуждений и обоснование решения.
7. Некоторые задачи можно решить путем изготовления модели геометрических фигур из реальной жизни.
8. Новое издание учебников наполнено красочными иллюстрациями. Это позволит учащимся образнее представить мир геометрии.

Шарыгин И.Ф.:

1. Учебник реализует авторскую, наглядно-эмпирическую концепцию построения школьного курса геометрии. Это выражается прежде всего в отказе от аксиоматического подхода. Вместо аксиом вводятся основные свойства плоскости, уменьшая роль формально-логических рассуждений.
2. Изучается пространственная геометрия в сочетании с плоской.
3. Методы решения геометрических задач детально рассмотрены и им уделено большое внимание.
4. Задачи по планиметрии решаются и рассматриваются на пространственных объектах, а не только на плоскости.
5. Есть ряд разделов, которые помечены «*», что указывает на задачи повышенной сложности.
6. Достаточно большое количество заданий на повторение и отработку теоретических основ.
7. По завершению изучения материала есть Итоговый тест, который позволяет оценить, как ученик усвоил пройденный материал.

Рассмотрим, как в каждом из учебников вводится тема «Треугольник» на примере сравнительной Таблицы 1.

Таблица 1 – Ведение понятия треугольник в 7 классе

Атанасян Л.С	Шарыгин И.Ф.	Погорелов А.В.
Определение понятия треугольник		
Это геометрическая фигура.	Это важнейшая фигура планиметрии.	"Треугольником называется фигура, которая состоит из трёх точек не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки".
Понятие треугольника вводится конструктивно: как фигура, состоящая из трёх точек и трёх отрезков соединяющих эти точки, оно наглядно и легче воспринимается школьниками. При этом ничего не говорится о плоскости треугольника. Это делается с целью отступления от теоретико-множественной концепции и от определения равных геометрических фигур с помощью отображений, сохраняющих расстояния (перемещений и движений). Определение равенства треугольников даётся через совмещение равных фигур путём наложения.	Понятие треугольника даётся как частный случай многоугольника, но в этом понятии говорится не только о фигуре образованной замкнутой линией, но и о части плоскости ограниченной этой замкнутой линией. Здесь определение треугольника отдельно не рассматривается. Определение равенства треугольников даётся через совмещение равных фигур путём наложения. Но в учебниках со вторым подходом подразумевается, что и плоскости треугольников также совмещаются наложением.	Понятие треугольника вводится конструктивно. В книге Погорелова А.В. даётся следующее определение треугольника: "Треугольником называется фигура, которая состоит из трёх точек не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки". Смысл выражения "отрезок соединяет точки" нигде не объяснён. Хотя об этом и легко догадаться; но смысл слова "попарно" совсем не очевиден для семиклассника. Кроме того, определение существенно зависит от обозначений, чего явно в формулировке не указано. В целом, формулировка воспринимается как тяжеловесная и трудная для понимания.
Определение Равнобедренного треугольника		
Называется равнобедренным, если две его стороны равны.	Называется равнобедренным, если две его стороны равны.	Называется равнобедренным, если две его стороны равны.

Продолжение таблицы 1

В силу того, что Атанасян Л.С. не использует движения плоскости в 7 классе, основой для доказательства свойств равнобедренных треугольников являются признаки равенства треугольников. В доказательстве свойств равнобедренного треугольника пользуется первым признаком равенства треугольников. Признаки равнобедренного треугольника в учебнике не рассматриваются, хотя эти теоремы очень полезные.	Свойства равнобедренного треугольника рассматриваются в одной теореме. Доказательства проводятся с использованием осевой симметрии относительно биссектрисы треугольника и определения равных треугольников. Полностью все признаки рассмотрены.	В силу того, что Погорелов А.В. не используют движения плоскости в 7 классе, основой для доказательства свойств равнобедренных треугольников являются признаки равенства треугольников. Свойства равнобедренного треугольника доказываются с использованием определения треугольника как упорядоченной тройки точек, но ни где не поясняется, что САВ и СВА это разные треугольники, а не один и тот же по-разному обозначенный. Такое доказательство учениками 7 класса понимается довольно трудно. Автор, уклонившись от явной формулировки определения треугольника как ориентированного пути, ставит ученика лицом к лицу с рассуждениями, которые может понять только тот, кто совершенно чётко представляет себе треугольник как ориентированный путь (это хоть и не явное, но обращение к теоретико-множественному подходу, который так тщательно избегается). Поэтому такие доказательства воспринимаются учениками как цирковой фокус. В учебнике приводится один признак (через равенство углов при основании).

Продолжение таблицы 1

Признаки равенства треугольников		
В учебниках применяется один и тот же подход с использованием аксиомы существования треугольника равного данному. Но нигде ссылок на эту аксиому нет. Доказательства проводятся на основе наглядности с помощью наложения и приложения.	В учебниках применяется один и тот же подход с использованием аксиомы существования треугольника равного данному. Но нигде ссылок на эту аксиому нет. Доказательства проводятся на основе наглядности с помощью наложения и приложения.	В учебниках применяется один и тот же подход с использованием аксиомы существования треугольника равного данному. Но нигде ссылок на эту аксиому нет. Доказательства проводятся на основе наглядности с помощью наложения и приложения.
В учебнике аксиомы не являются основой, на которой строится школьный курс геометрии (вместе с тем, в приложении в конце учебника подробно изложен вопрос о системе аксиом в курсе геометрии).Большое преимущество имеет использование в учебнике в качестве основного рабочего аппарата признаки равенства треугольников, а не свойства геометрических преобразований. Такой подход позволяет отработать общие приёмы доказательства теорем. Эти доказательства строятся по схеме: поиск равных треугольников > доказательство предполагаемого равенства > обоснование новых утверждений. Благодаря использованию признаков равенства треугольников легче усваиваются основные теоремы планиметрии (свойства и признаки серединного перпендикуляра, свойства равнобедренного треугольника, и т.п).	В учебнике кроме наложения используются ещё и симметрия, что усложняет доказательства. Доказательство третьего признака проводится с использованием элементов построения. Кроме того, применяется движение называемое переносом, но нигде не указано как оно осуществляется и действительно ли переводит одну точку в другую. Кроме трёх традиционных признаков равенства треугольников приводится ещё один для тупого угла и двух не образующих его сторон. Доказательство вытекает из задачи о не существовании треугольника равного данному, если равны две стороны и не содержащийся между ними угол	В учебнике Погорелова А.В. эта аксиома формулируется, но непосредственно при доказательстве на неё ссылки не делаются. Лишь после доказательства первого признака равенства треугольников проводится подробный разбор его с указанием используемых в доказательстве аксиом.

Рассмотрим таблицу сравнения количества заданий, отведенных на закрепление темы треугольники в учебниках: Погорелова А.В., Атанасяна Л. С. и Шарыгина И.Ф. в виде Таблицы 2.

Таблица 2 – Количество заданий в учебниках

Погорелов А.В.	Атанасян Л.С.	Шарыгин И.Ф.
Глава 1 § 1 П.9 – 10: Контрольные вопросы: Всего:29 (на тему треугольники – 5) Задачи: На построение: 3 Произвольный треугольник: 7 Равнобедренный: - Равносторонний: 1 Прямоугольный: - §3 П.20-27: Контрольные вопросы: Всего:12 (на тему треугольники – 12) Задачи: На построение: 2 Произвольный треугольник: 16 Равнобедренный: 15 Равносторонний: 2 Прямоугольный: - §4 П.29-35: Контрольные вопросы: Всего:20(на тему треугольники – 12) Задачи: На построение: 2 Произвольный треугольник: 13 Равнобедренный: 10 Равносторонний: 3 Прямоугольный:	Глава 2 §1 П.14 – 15: Задачи: На построение: 3 Произвольный треугольник: 9 Равнобедренный: - Равносторонний: - Прямоугольный: - §2 П.16 – 18: Задачи: На построение:5 Произвольный треугольник:8 Равнобедренный: 5 Равносторонний: 1 Прямоугольный: - §3 П.19 – 20: Задачи: На построение: - Произвольный треугольник:17 Равнобедренный: 3 Равносторонний: 1 Прямоугольный: - Вопросы для повторения главы 2: Контрольные вопросы: Всего: 21 на тему треугольники – 9) Задачи: На построение: 8	Глава 3 § П.1 : Контрольные вопросы: Всего:1(на тему треугольники – 1) Задачи: На построение:1 Произвольный треугольник:5 Равнобедренный: 5 Равносторонний: 1 Прямоугольный: - §П.2: Контрольные вопросы: Всего:15 (на тему треугольники) Задачи: На построение:2 Произвольный треугольник:9 Равнобедренный: 3 Равносторонний: 2 Прямоугольный: П.2: Контрольные вопросы: Всего:3(на тему треугольники) Задачи: На построение:2 Произвольный треугольник:4 Равнобедренный: 3 Равносторонний: Прямоугольный:

Продолжение таблицы 2

	Произвольный треугольник: 13 Равнобедренный: 5 Равносторонний: 2 Глава 4 §1,2,3 П.30 – 36: Задачи: На построение: Произвольный треугольник: 19 Равнобедренный: 22 Равносторонний: 2 Прямоугольный: 3 §4 П.37,38: Задачи: На построение: Произвольный треугольник: 1 Равнобедренный: 2 Равносторонний: 1 Прямоугольный: 1 Вопросы для повторения главы 2: Контрольные вопросы всего 20 (на тему треугольники 15). Задачи на построение:10.	

Для наглядного восприятия составили диаграммы количества заданий при закреплении темы треугольники, которые представлены на рисунках 13-17:

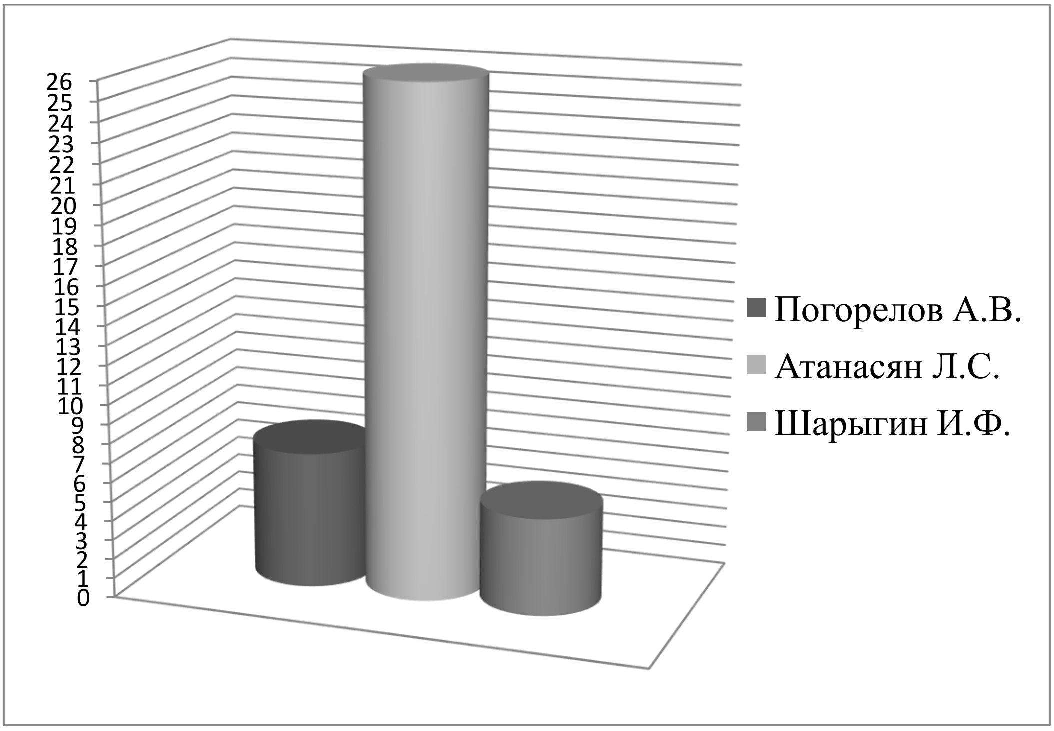


Рисунок 13 – Задачи на просторение

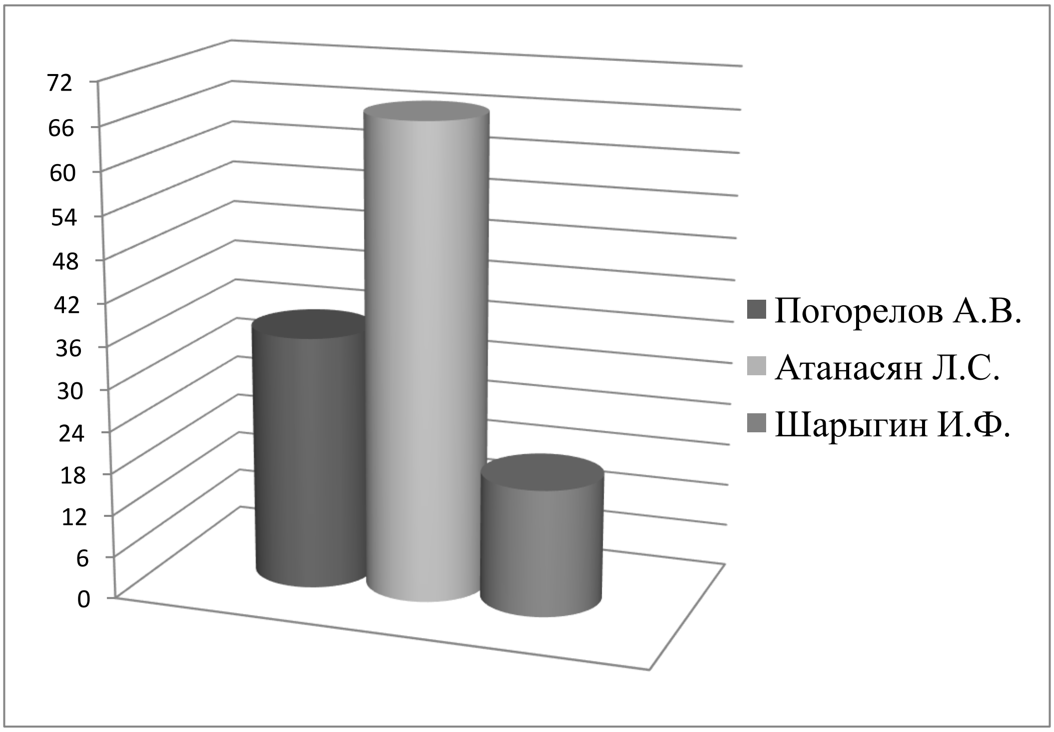


Рисунок 14 – Задачи на произвольный треугольник

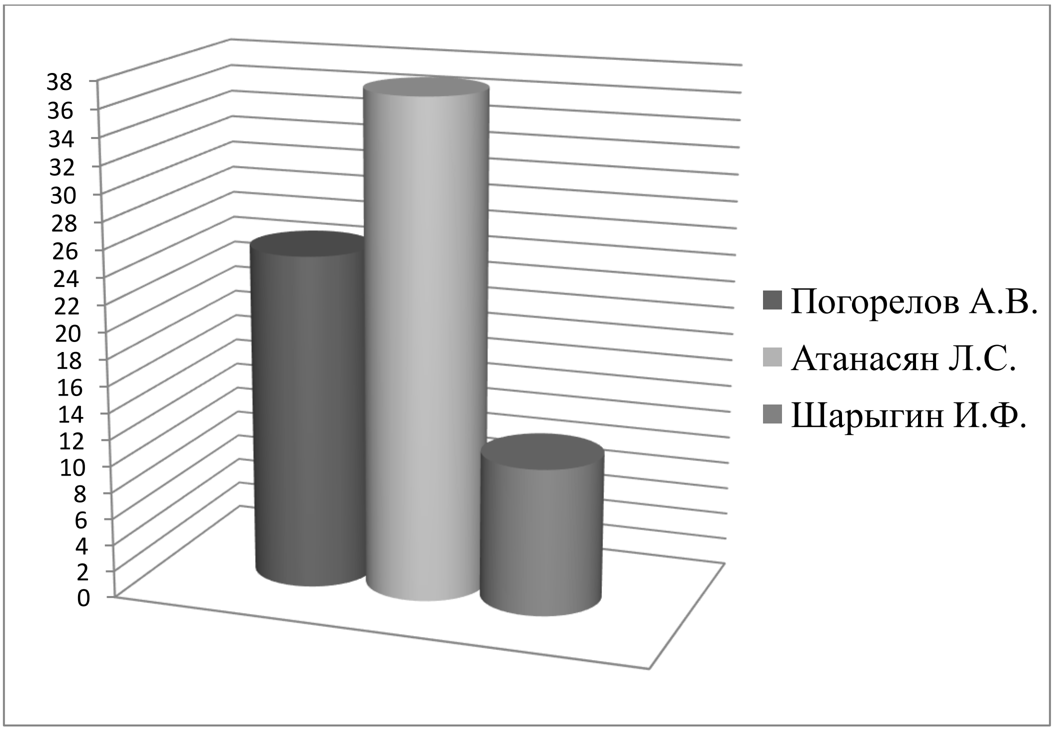


Рисунок 15 – Задачи на равнобедренный треугольник

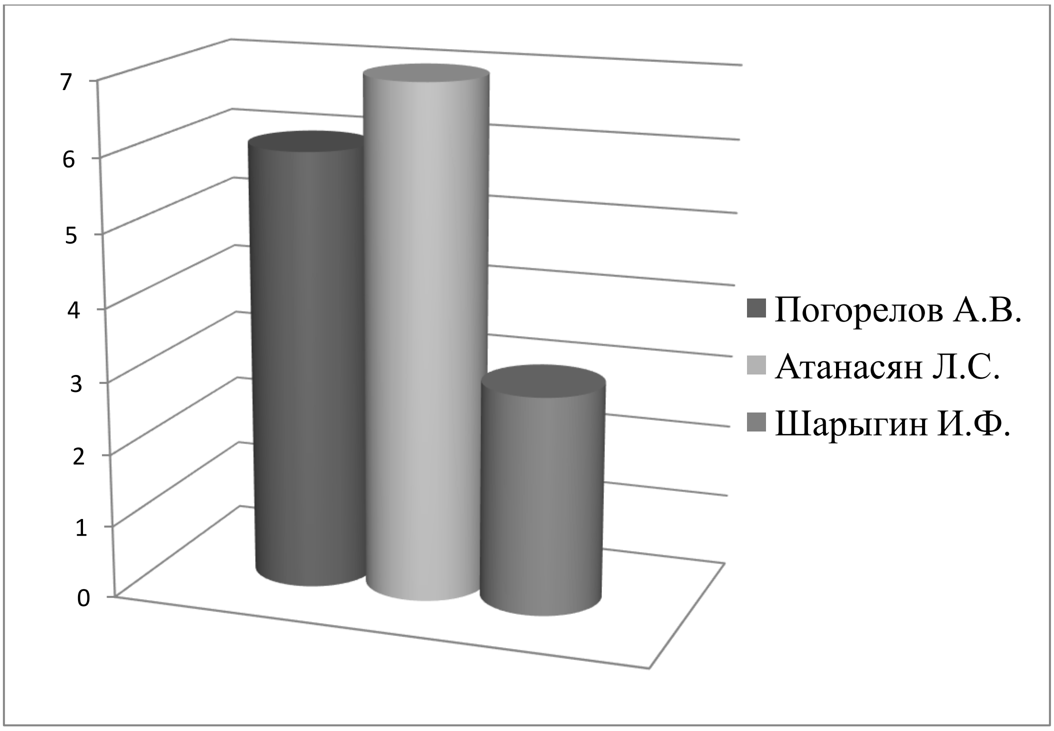


Рисунок 16 – Задачи на равносторонний треугольник

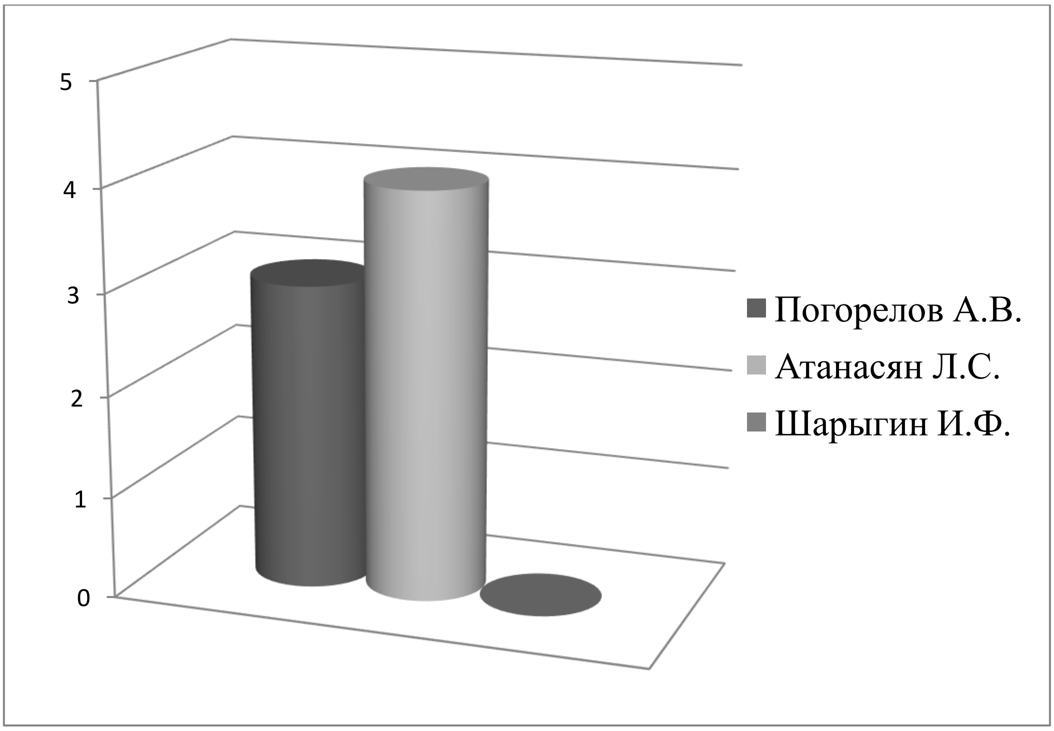


Рисунок 17 – Задачи на прямоугольный треугольник

Из рассмотренных нами трех учебников, Погорелова А.В., Атанасяна Л.С. и Шарыгина И.Ф, с точки зрения правильного построения школьного курса, дифференцированности задач, направленности на отработку теоретического и практического материала, наиболее оптимальным, на мой взгляд, является учебник по геометрии Атанасяна Л.С. Определения, теоремы, доступны пониманию учеников. Правильно построен этап формирования понятий, в нашем случае, понятия треугольник. Разнообразен спектр решаемых задач, есть задачи и практические задания к каждому параграфу, дополнительные задания к каждому параграфу, дополнительные задачи к каждой главе и, наконец, задачи повышенной трудности. Более трудные задачи отмечены *. В конце книги к задачам даны ответы и указания. Уровень задач идет от простого к сложному, это помогает ориентироваться при выборе для решения задач учителю, а также дает ориентир ученику для оценки себя при решении задач. «+» намного больше, чем «-».

Соблюдаются методические требования к определению понятия, такие как: доступность, определение ясное не содержит метафорических выражений, объём определяемого понятия равен объёму определяющего понятия.

2.2 Особенности организации повторения и обобщения знаний по теме «Треугольник» в процессе подготовки к ЕГЭ

Приступая к итоговому повторению и обобщению, необходимо познакомиться с последовательностью, в которой будут рассматриваться вопросы, затем в каждой теме выделить теоретический материал, знание которого необходимо для решения задач. Повторение протекает успешнее, если оно проводится на вариативном материале, с постоянным нарастанием сложности задач.

Целесообразно проводить повторение по следующим этапам:

1) основные теоретические вопросы;
2) устные задачи, которые можно решить за один - два логических шага;
3) более сложные устные задачи;
4) задачи, которые требуют небольших письменных выкладок;
5) задачи среднего уровня сложности;
6) задачи повышенной сложности.

Курс изучения темы «Треугольник» начинается с основных понятий, частей и составляющих. Немного истории и практического применения треугольников в различных сферах помогут вызвать интерес у учащихся

Основным результатом изучения данного пункта следует считать умение распознать и изобразить прямоугольный, остроугольный, тупоугольный, равнобедренный треугольники; знание терминологии, связанной с равнобедренным треугольником. В процессе изучения и уже при решении задач ученики должны понять: в треугольнике не может быть больше одного прямого или одного тупого угла, равнобедренный треугольник может быть и прямоугольным, и остроугольным, и тупоугольным, а вот равносторонний треугольник только остроугольным.

Треугольник – это геометрическая фигура, состоящая из трех точек, которые не лежат на одной прямой и последовательно соединены отрезками.

AB, BC, AC – стороны.

Точки A, B, C – вершины.

На рисунке 18 показаны виды треугольников.

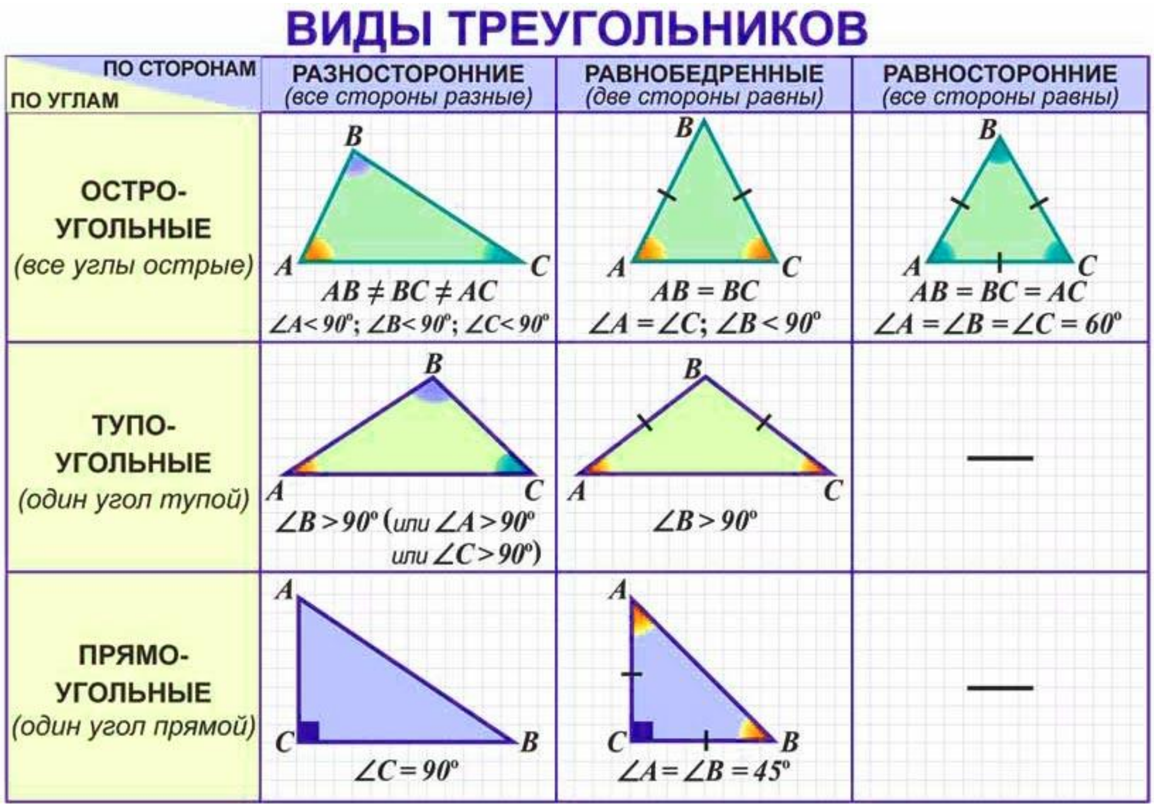


Рисунок 18

Центральное место в геометрии треугольника занимают свойства так называемых «точек и линий». С каждым треугольником связаны четыре точки: точка пересечения медиан, точка пересечения биссектрис, точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам и точка пересечения высот (или их продолжений). Эти четыре точки называются замечательными точками треугольника [18].

Медиана треугольника – это отрезок соединяющий вершину с серединой противоположной стороны

Свойства медиан треугольника:

1. Точка пересечения медиан в треугольнике делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины. Эта точка называется центром тяжести треугольника.

2. Медиана делит треугольник на два треугольника с одинаковой площадью.

3. Треугольник делится тремя своими медианами на шесть равновеликих треугольников.

4. В правильном треугольнике любая медиана является высотой и биссектрисой.

Биссектриса треугольника – это отрезок биссектрисы угла, соединяющий вершину с точкой противоположной стороны [1].

Свойство биссектрисы треугольника.

1. Биссектриса делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилегающим сторонам.

2. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке и являются центром вписанной в нее окружности.

Высота треугольника – это перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону

Серединный перпендикуляр – это прямая, проходящая через середину отрезка (сторона треугольника) и перпендикулярно к нему [1].

Точка пересечения серединных перпендикуляров в остроугольном треугольнике лежит внутри треугольника; в тупоугольном – вне треугольника; в прямоугольном – на середине гипотенузы.

Свойства срединных перпендикуляров треугольника.

1. Любая точка серединного перпендикуляра к стороне равноудалена от концов этой стороны.

2. Любая точка, равноудаленная от концов стороны, лежит на серединном перпендикуляре к ней.

3. Точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника, является центром окружности, описанной около этого треугольника.

Равнобедренный треугольник – это треугольник, у которого две стороны равны, чертеж на рисунке 19.

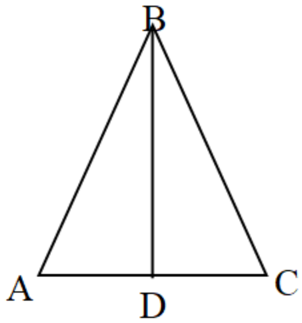


Рисунок 19

Свойства равнобедренного треугольника:

1) углы при основании равны (∟A = ∟C);

2) биссектриса, проведенная из вершины к основанию, будет являться медианой и высотой.

Прямоугольный треугольник – это треугольник, у которого один угол равен 90^{o}.

Свойства прямоугольного треугольника:

1. Сумма острых углов равна 90^{o}.

2. Катет, лежащий напротив угла 30^{o} равен половине гипотенузы.

3. Медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

Теорема Пифагора.

Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Чертеж на рисунке 20. $c^2 = a^2 + b^2$.

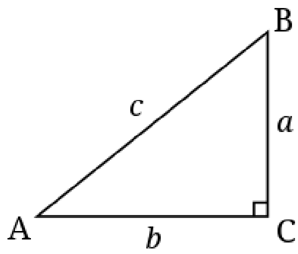


Рисунок 20

В прямоугольном треугольнике АВС, с прямым углом С.

1. Для острого угла В: АС – противолежащий катет; ВС – прилежащий катет.
2. Для острого угла А: ВС – противолежащий катет; АС – прилежащий катет.
3. Синусом (sin) острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.
4. Косинусом (cos) острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.
5. Тангенсом (tg) острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему.
6. Котангенсом (ctg) острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему.
7. Основное тригонометрическое тождество: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
8. В прямоугольном треугольнике синус одного острого угла равен косинусу другого острого угла.
9. Синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы острых равных углов равны.
10. Синусы смежных углов равны, а косинусы, тангенсы и котангенсы отличаются знаками: для острых углов положительные значения, для тупых углов отрицательные значения [2].

Первый признак равенства треугольников.

Теорема (признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними). Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Второй признак равенства треугольников:

Теорема (признак равенства треугольников по стороне и прилежащим к ней углам). Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Третий признак равенства треугольников:

Теорема (признак равенства треугольников по трем сторонам). Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Признаки равенства прямоугольных треугольников.

1. Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.
2. Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то такие треугольники равны.
3. Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и одному углу другого, то такие треугольники равны.
4. Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.

Формулы для нахождения площади треугольника представлены на рисунке 21 [5].

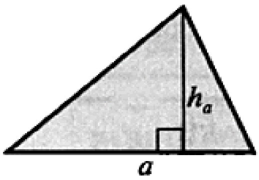
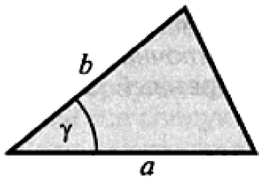
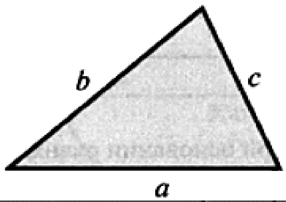
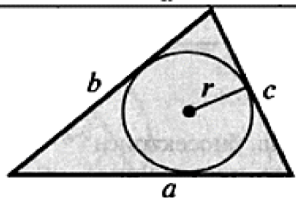
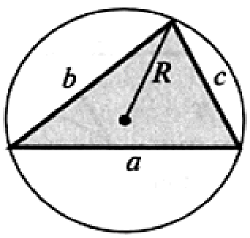
	Через сторону и высоту, проведенную к ней: $S = \frac{1}{2} a h_a$.
	Через две стороны и угол между ними: $S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$.
	**Формула Герона** Через три стороны: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$.
	Через полупериметр и радиус вписанной окружности: $S = pr$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$.
	Через произведение сторон и радиус описанной окружности: $S = \frac{abc}{4R}$.

Рисунок 21

Повторение геометрического материала, как и другого, требует последовательности и времени. Для начала нужно разобраться и усвоить теорию, а затем приступать к практике. Зачастую небольшой пробел в знаниях, в дальнейшем, выливается в сложности со следующими темами. Именно поэтому при изучении стоит повторять пройденный материал и закреплять его. При повторении выносится материал, знакомящий учащихся с ведущими идеями курса, имеющий важное мировоззренческое значение, а также материал, который впоследствии из предмета изучения перерастает в средство изучения другого материала.

2.3 Факультативный курс по теме «Треугольник»

На протяжении веков геометрия служила источником развития не только математики, но и других наук. Законы математического мышления формировались с помощью геометрии. Многие геометрические задачи содействовали появлению новых научных направлений, и наоборот, решение многих научных проблем было получено с использованием геометрических методов. Современная наука и ее приложения немыслимы без геометрии и ее новейших разделов: топологии, дифференциальной геометрии, теории графов, компьютерной геометрии и др. [7].

Огромна роль геометрии в математическом образовании учащихся. Известен вклад, который она вносит в развитие логического мышления и пространственного воображения учеников.

Курс геометрии обладает также чрезвычайно важным нравственным моментом, поскольку именно геометрия дает представление о строго установленной истине, воспитывает требование доказать то, что утверждается в качестве истины.

Одной из самых важных целей преподавания геометрии является формирование и развитие у учащихся пространственных представлений, а также способности и умения производить операции над пространственными объектами. Достижение этой цели важно не только для тех учащихся, которые в дальнейшем посвятят себя техническим профессиям, но и для тех, кто выберет специальности художника, дизайнера, модельера, хирурга, астронома и других [17].

Треугольник является самой распространенной и востребованной фигурой в геометрии. В XIX веке в элементарной геометрии на плоскости было проведено много интересных исследований. Они привели к установлению ряда соотношений в треугольнике, к известным классическим «замечательным точкам». Появилось много новых точек и линий треугольника. Возникла так называемая «Новая геометрия треугольника». Заметим, что изучению треугольника в школьном курсе геометрии посвящены различные разделы в разных классах, с 7 по 9 включительно. Однако полного представления о треугольнике как замечательной геометрической фигуре школьники не получают. Учащиеся изучают основные элементы треугольника (медиана, высота, биссектриса, средняя линия), но немало есть и других элементов у треугольника, которые играют большую роль не только в раскрытии свойств самого треугольника, но и помогают в изучении других геометрических понятий.

Знание всех элементов треугольника и их свойств позволяет значительно упростить процесс решения задач, что также играет немаловажную роль при проведении итоговой аттестации (ЕГЭ). Следует также отметить, что изучение факультативного курса по теме «Треугольники» может способствовать более успешной адаптации учащихся при последующем обучении в вузе.

Необходимость создания этого курса была вызвана следующими причинами.

1. Геометрические понятия и методы, в частности, связанные с понятием треугольника, лежат в основе самых разнообразных разделов современной математики.

2. Геометрия треугольника позволяет в процессе обучения формировать поэтапно не только специальные, но и общие способности обучающегося.

3. Изучение геометрии треугольника, органично сочетающей в себе наглядные представления и строгую логику, может способствовать развитию полноценного диалога наглядно-образного и словесно-логического мышления, сочетания интуиции и логики и т.д.

4. Большое значение приобретает решение математических задач с геометрическим содержанием, в последние годы замечена тенденция увеличения геометрических задач в КИМах ЕГЭ по математике.

5. Одной из задач, стоящих перед профильным обучением, является подготовка учащихся к возможной профессионализации в различных сферах деятельности.

6. Геометрические вопросы и проблемы сопровождают в повседневной жизни каждого современного человека. Поэтому есть необходимость подробнее остановиться именно на изучении геометрии, в частности, геометрии треугольника.

В процессе решения геометрических задач развивается умение выявлять причинно-следственные связи между геометрическими понятиями и их приложениями. Это способствует углублению и систематизации знаний по математике, а также повышению уровня геометрической грамотности старшеклассников [6].

Программа факультативного курса рассчитана на 1 год, на 34 часа (1 час в неделю). Данный курс позволяет расширить представления учащихся о геометрии треугольника, его роли в изучении геометрии, а также закрепить, углубить и обобщить имеющиеся знания и умения по геометрии с помощью решения различных геометрических задач разного уровня сложности.

Цель данного факультативного курса: создать целостное представление о методе треугольника и значительно расширить спектр задач, посильных для учащихся, научить школьников решать и конструировать геометрические задачи с использованием основных метрических соотношений в треугольнике, сформировать средствами метода треугольника компетенции обучающихся, необходимые человеку для полноценной жизни в современном обществе, а также сформировать способность применять знания и умения для разрешения конкретных ситуаций и проблем, возникающих в реальной действительности.

Основные задачи:

Обучающие (формирование познавательных и логических УУД): закрепление и актуализация полученных ранее теоретических знаний;

овладение новыми знаниями, умениями и навыками; приобретение навыков применения метода треугольника для решения задач различного уровня сложности; формирование у учащихся устойчивого интереса к математике, развитие их математических способностей.

Развивающие (формирование познавательных и регулятивных УУД): знакомство учащихся с миром профессий, где необходима математика, перспективами их развития; развитие интеллектуальных навыков, наблюдательности, памяти, воображения, логического и математического стиля мышления, математической культуры, необходимых человеку любой профессии.

Воспитательные (формирование коммуникативных и личностных УУД): эмоциональное и нравственное воспитание личности в процессе обучения; формирование у школьников потребности в самообразовании, самостоятельном добывании знаний, преодолению трудности познания, рефлексии; развитие профессиональных интересов.

Предлагаемый курс является развитием системы ранее приобретенных программных знаний. Содержание программы элективного курса включает теоретический и практический материал. Теоретическое содержание составляют основные понятия, способы решения задач и их обоснование. Практическое содержание – это практикум по решению задач различных типов, разного уровня сложности, в процессе которого в арсенал приемов и методов мышления естественным образом включаются анализ и синтез, индукция и дедукция.

Формирование готовности к профессиональному самоопределению происходит на основе профессионального интереса, который проявляется в старших классах, когда учебно-профессиональная деятельность школьников становится ведущей. Основой для формирования профессионального интереса как необходимого условия профильного обучения является познавательный интерес, его упрочение и специализация [4].

При организации занятий по данному курсу целесообразно использовать лекции, практикумы и консультации. Для воплощения целей и задач курса целесообразно применять технологии, включающие учащихся в активную учебно-познавательную деятельность, обеспечивающие личностное развитие каждого ученика. Например, такие как: лекционно-семинарская система обучения; информационно-коммуникационные технологии; использование исследовательского метода, направленного на развитие логического мышления; деятельностный метод; проблемное обучение, предусматривающее мотивацию к исследованию путем постановки проблемы, обсуждение различных вариантов решения.

Планируемые образовательные результаты:

В результате изучения данного факультативного курса учащиеся должны знать:

– определение понятия треугольника, его элементов;

– свойства основных элементов треугольника;

– виды треугольника, признаки каждого вида треугольника;

– замечательные точки и линии треугольника;

– формулы для вычисления основных геометрических величин в треугольнике.

уметь:

– выполнять грамотный чертеж в соответствии с условием геометрической задачи;

– выделять различные элементы треугольника в зависимости от данных в условии задачи параметров;

– применять необходимые теоретические факты к конкретной геометрической ситуации.

владеть:

– основными принципами математического моделирования;

– навыками выполнения необходимых рисунков и чертежей к решаемым задачам;

– навыками обоснований при решении задач с использованием усвоенных теоретических сведений и необходимой математической символики.

Содержание курса по разделам:

Раздел 1. Треугольник: основные элементы и их свойства

Раздел 2. Прямоугольный треугольник

Раздел 3. Равнобедренный треугольник

Раздел 4. Именные теоремы о треугольнике

Раздел 5. Замечательные точки треугольника

Список задач, разбитых по разделам, которые рекомендуются для изучения в течение данного факультативного курса, представлены в Приложении 1, также по разделам представлено теоретическое содержание (основные понятия, относящиеся к тематике раздела).

Раздел 1. Треугольник: основные элементы и их свойства

Различные определения понятия треугольник. Свойства сторон и углов треугольника. Свойства медиан, высот, биссектрис треугольника. Средняя линия треугольника (различные способы доказательства свойства средней линии треугольника). Равенство треугольников. Подобие треугольников. Площадь треугольника. Решение задач на вычисление площади треугольника. Теорема синусов, теорема косинусов.

Основная цель – обобщить и систематизировать основные теоретические положения с целью создания метода треугольника в качестве средства для решения геометрических задач.

Рассмотрим задачу 17 из Раздела 1.

Пусть AA1 и CC1 – медианы треугольника ABC, AA_1=9 см, CC_1=12 см. Медианы пересекаются в точке O, и угол AOC равен 150°. Найдите площадь треугольника ABC.

Чертеж к задаче представлен на рисунке 22.

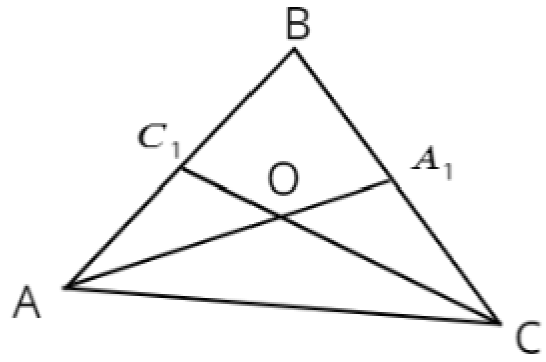


Рисунок 22

Решение:

1) точка O – точка пересечения медиан AA_1 и CC_1, значит

$AO = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$ (см), $CO = \frac{2}{3}CC_1 = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$ (см).

(Медианы треугольника точкой их пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины, из которой они проведены.)

2) $S_{AOC} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot CO \cdot sin150° = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot 4 = 12$ (см^2).

(Площадь треугольника равна половине произведения его сторон, умноженной на синус угла между ними.)

3) $S_{ABC} = 3 \cdot S_{AOC} = 3 \cdot 12 = 36$ (см^2).

(Медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника. Если провести еще одну медиану BB_1, то площадь каждой части, получившейся при пересечении медиан треугольника ABC, будет равна $\frac{1}{6}$ его площади. а так как треугольник AOC содержит 2 таких части, то его площадь равна $\frac{1}{3}$ площади треугольника ABC).

Ответ: 36 см^2.

Раздел 2. Прямоугольный треугольник

Определение, свойства и признаки. Решение задач на вычисление линейных элементов прямоугольного треугольника и площади треугольника. Комбинации прямоугольного треугольника с другими геометрическими фигурами.

Основная цель – обобщить и систематизировать основные теоретические сведения о прямоугольном треугольнике; сформировать умение применять знания о прямоугольном треугольнике при решении различных геометрических задач.

Рассмотрим задачу 7 раздела 2.

Один из внешних углов прямоугольного треугольника равен 135°, а его гипотенуза – $5\sqrt{2}$ см. Чему равны катеты данного треугольника.

Чертеж к задаче 7 представлен на рисунке 23.

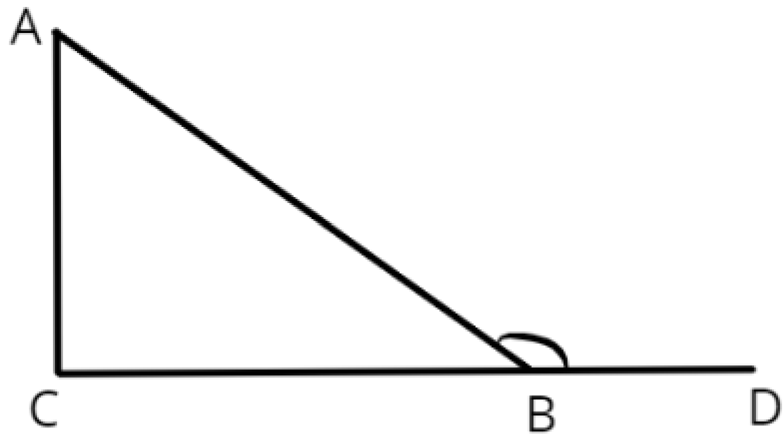


Рисунок 23

Решение:

1) ∠ABD и ∠ABC – смежные углы, поэтому ∠ABC = 180°–∠ABD = 180°–135° = 45°.

2) ΔABC – прямоугольный, значит ∠CAB+∠ABC = 90°.

∠CAB = 90° – 45° = 45°.

3) ∠CAB = ∠ABC = 45°, значит Δ ABC – равнобедренный, поэтому AC=CB.

4) Пусть $AC = CB = x$, тогда по теореме Пифагора имеем:

$$x^2 + x^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2;$$

$$2x^2 = 50;$$

$$x^2 = 25;$$

$$x = \pm 5;$$

$$AC = CB = 5 \text{ (см)}.$$

Ответ: 5 см, 5 см.

Раздел 3. Равнобедренный треугольник

Определение, свойства и признаки. Решение задач на вычисление линейных элементов равнобедренного треугольника и площади треугольника. Комбинации равнобедренного треугольника с другими геометрическими фигурами.

Основная цель – обобщить и систематизировать основные теоретические сведения о равнобедренном треугольнике; сформировать умение применять знания о равнобедренном треугольнике при решении различных геометрических задач.

Рассмотрим задачу 6 Раздела 3.

В треугольнике ABC $AB = BC = 25, AC = 14$. Найдите длину медианы BM.

Чертеж к задаче 6 представлен на рисунке 24.

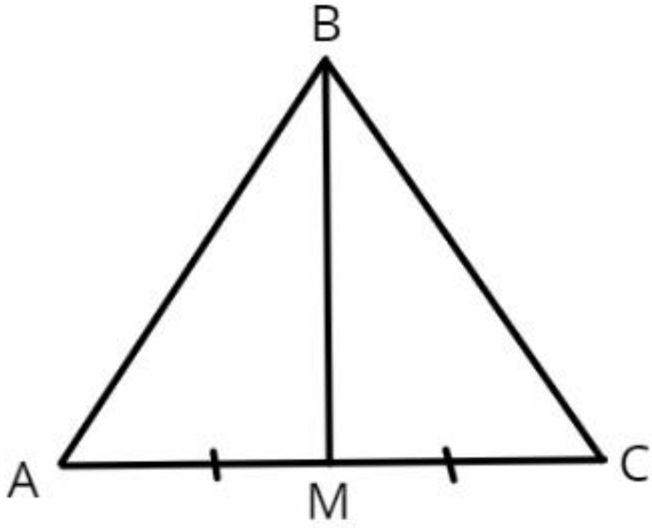


Рисунок 24

Решение:

1. AM – медиана AC, значит $AM = MC = \frac{AC}{2} = \frac{14}{2} = 7$.

2. BM – высота Δ ABC (т.к. в равнобедренном треугольнике медиана является биссектрисой и высотой), значит Δ ABM – прямоугольный.

3. По теореме Пифагора имеем:

$$\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2 = \mathrm{AB}^2;$$

$$7^2 + \mathrm{BM}^2 = 25^2;$$

$$\mathrm{BM} = 24\ (\text{см}).$$

Ответ: 24.

Раздел 4. Именные теоремы о треугольнике

Теорема Чевы. Теорема Менелая.

Основная цель – сформировать представление о треугольнике как объекте исследования для изучения различных новых свойств геометрической фигуры.

Рассмотрим задачу 1 Раздела 4.

В треугольнике ABC на стороне BC взята точка N так, что NC=3BN; на продолжении стороны AC за точку A взята точка M так, что MA=AC. Прямая MN пересекает сторону AB в точке F. Найти отношение $\frac{BF}{FA}$.

Чертеж к задаче 1 представлен на рисунке 25.

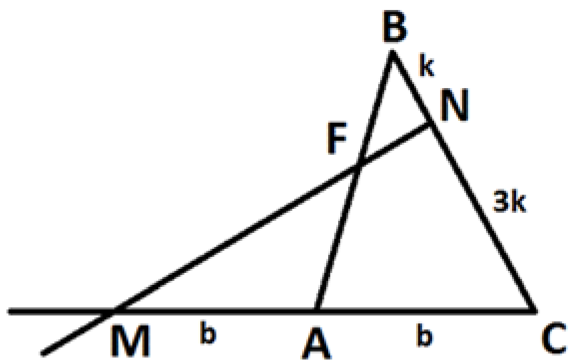


Рисунок 25

Решение:

1. По условию задачи MA=AC, NC=3BN. Пусть MA=AC=b, BN=k, тогда NC=3k.

2. Прямая MN пересекает две стороны треугольника ABC и продолжение третьей.

Согласно теореме Менелая имеем:

$\frac{CN}{NB} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{AM}{MC} = 1$ или $\frac{3k}{k} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{b}{2b} = 1$.

Отсюда получаем, что $\frac{3}{2} \cdot \frac{BF}{FA} = 1$, а значит $\frac{BF}{FA} = \frac{2}{3}$

Ответ. $\frac{2}{3}$.

Раздел 5. Замечательные точки треугольника

Центроид, ортоцентр, центр вписанной окружности в треугольник, центр описанной около треугольника окружности. Точка Брокара. Точка Жергонна. Точка Нагеля.

Основная цель – рассмотреть замечательные точки треугольника, сформировать представление о треугольнике как объекте исследования для изучения различных новых свойств геометрической фигуры.

Рассмотрим задачу 5 раздела 5. Чертеж на рисунке 26.

В треугольнике ABC AC=35, BC=$5\sqrt{15}$, угол равен 90°. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

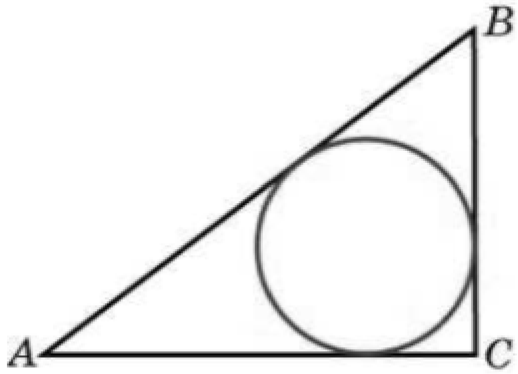


Рисунок 26

Решение: 1. Треугольник ABC – прямоугольный, тогда по теореме Пифагора:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2;$$

$$AB^2 = 35^2 + \left(5\sqrt{15}\right)^2;$$

AB = 40 (см).

2. Так как треугольник ABC прямоугольный, то это означает, что центр окружности находится на середине гипотенузы (по теореме об описанной окружности). Тогда $R = \frac{AB}{2} = \frac{40}{2} = 20$ (см).

Ответ: 20.

Тематическое планирование представлено в Таблице 3.

Таблица 3 – Тематическое планирование.

№	Тема	Кол-во часов
	Входной контроль	1
1	*Треугольник: основные элементы и их свойства*	13
	Различные определения понятия треугольник. Свойства сторон и углов треугольника	1
	Равенство треугольников. Решение задач на равенство треугольников.	1
	Свойства медиан, высот, биссектрис треугольника.	1
	Подобие треугольников. Решение задач на подобие треугольников.	2
	Средняя линия треугольника (различные способы доказательства свойства средней линии треугольника).	1
	Площадь треугольника. Решение задач на вычисление площади треугольника.	2
	Теорема синусов	2
	Теорема косинусов	2
	Промежуточный контроль	1
2	*Прямоугольный треугольник*	4
	Определение, свойства и признаки. Решение задач на вычисление линейных элементов прямоугольного треугольника и площади треугольника.	2
	Комбинации прямоугольного треугольника с другими геометрическими фигурами.	1
	Промежуточный контроль	1
3	*Равнобедренный треугольник*	*4*
	Определение, свойства и признаки. Решение задач на вычисление линейных элементов равнобедренного треугольника и площади треугольника.	2
	Комбинации равнобедренного треугольника с другими геометрическими фигурами.	1
	Промежуточный контроль	**1**
4	*Именные теоремы о треугольнике*	*7*
	Теорема Чевы. Теорема Ван–Обеля. Теорема Понселе. Теорема Лейбница.	2
	Теорема Стюарта. Теорема Жергонна	2
	Теорема Менелая. Теорема Карно.	2
	Промежуточный контроль	1
5	*Замечательные точки треугольника*	*4*
	Центроид, ортоцентр.	1

Продолжение таблицы 3

	Центр вписанной окружности в треугольник, центр описанной около треугольника окружности.	2
	Точка Брокара. Точка Жергонна. Точка Нагеля.	1
	Итоговый контроль	1
	Всего часов	*34*

Способы оценки планируемых результатов: ведущими составляющими контроля выступают приобретенные на занятиях и в самостоятельной деятельности знания, умения и навыки по курсу. В процессе изучения факультативного курса планируются следующие виды контроля: входной, текущий, промежуточный, итоговый.

Входной контроль проводится на первом занятии с целью оценки уровня учебных достижений по теме «Треугольники» и последующей корректировки дальнейшей работы по курсу. Пример работы для проведения входного контроля представлен в Приложении 2.

Текущий контроль: после каждого занятия предлагаются небольшие домашние задания. Основным объектом текущего контроля являются качество выполнения домашнего задания, умение применять нужные формулы и алгоритмы к конкретным задачам. Текущий контроль заключается в сличении способа действия и его результата с заданным эталоном с целью обнаружения отклонения от него и последующей коррекции.

Пример домашнего задания по теме «Подобие треугольников. Решение задач на подобие треугольников».

1. Угол B треугольника ABC в два раза больше угла A. Биссектриса угла B делит сторону AC на части AD = 6 см и CD = 3 см. Найти стороны треугольника ABC. (Ответ: BC = $3\sqrt{3}$ см, AB = $6\sqrt{3}$ см, AC = 9 см).

2. Диагональ AC трапеции ABCD (AB||CD) делит её на два подобных треугольника. Найти площадь трапеции ABCD, если AB = 25 см, BC = 20 см, AC = 15 см (Ответ: 204 см^2).

Промежуточный контроль: проводится после изучения каждой конкретной темы в виде выполнения тестового задания, либо самостоятельной работы с последующей самопроверкой или взаимопроверкой работ друг друга.

Пример промежуточного контроля представлен в Приложении 3.

Итоговый контроль: контрольная работа, обобщающая изученный материал. Примерное содержание данной контрольной работы представлено в Приложении 4.

Таким образом, можно сделать вывод, что реализация данного факультативного курса может повысить интерес обучающихся к изучению математики (геометрии в частности), мотивацию к изучению чего-то нового вне школьной программы и привести к увеличению общего положительного результата как на занятиях математикой, так и на других школьных предметах.

Система практических занятий, включенная в данный курс, формирует уверенное владение базовыми умениями, способность к интеграции знаний из различных областей, владение широким набором приемов и способов решения задач и умение математически грамотно записывать эти решения, способность к решению задач, требующих применений знаний в нестандартных ситуациях, умение моделировать ситуацию, находить рациональные пути решения, что очень важно с практической точки зрения при подготовке к ЕГЭ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы решены поставленные задачи и получены следующие результаты:

1. Были определены функции, цели и роль обучения теме «Треугольник»

2. Проанализирована учебная математическая литература по геометрии.

3. Изучены методы решения планиметрических задач: метод площадей, метод подобия, метод вспомогательных окружностей.

4. Подобрана серия задач, при решении которых используются вышеуказанные методы.

5. Разобраны задачи в ЕГЭ, в которых решение связанно с фигурой треугольник.

6. Разработан факультативный курс по теме «Треугольник» для подготовки к ЕГЭ.

Геометрия играет особо важную роль. Эта роль определяется и относительной сложностью геометрии по сравнению с другими предметами математического цикла, и большим значением этого предмета для изучения окружающего мира. Геометрия, являясь неотъемлемой частью математического образования, имеет целью интеллектуальное и общекультурное развитие учащихся. Развитие учащихся средствами геометрии направлено на достижение научных, прикладных и общекультурных целей математического образования, где общекультурные цели обучения геометрии в первую очередь предполагают всестороннее развитие мышления детей. Геометрия, как учебный предмет, обладает уникальными возможностями для решения главной задачи общего математического образования – целостного развития и становления личности средствами математики.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Александров, А. Д.** Геометрия. 9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / А.Д. Александров, А Л. Вернер, В. И. Рыжик. – Москва: Просвещение, 2014.–175 с.: ил. – ISBN978-5-09-028109-6.

2. **Александров, А. Д.** Геометрия: учебное пособие для 9 классов с углубленным изучением математики / А.Д. Александров, А Л. Вернер, В. И. Рыжик. – Москва: Просвещение, 2017. – 134 с. – URL: https://11klasov.c om/4326-geometriya-9-klass-metodicheskie-rekomend acii-verner-al-ryzhik-vi.html (дата обращения 11.04.2021). – Текст: электронный.

3. **Алтухов, В. Л.** О перестройке мышления: философско-методологические аспекты / В. Л. Алтухов, В.Ф. Шапошников. – Москва: Просвещение, 1990. – 63 с. – URL: https://search.rsl.ru/ru/rec ord/01001387941 (дата обращения 27.07.2021). – Текст: электронный.

4. **Асмолов, А. Г.** Формирование универсальных учебных действий в основной школе : от действия к мысли. Система заданий: пособие для учителя / А. Г. Асмолов, Г. В. Бурменская, И. А. Володарская. – 2-е изд. – Москва: Просвещение. – 2010. – 159 с. – URL: http://s_poshin.isk.edu54.ru/w p-content/uploads (дата обращения: 07.07.2021). – Текст: электронный.

5. **Бутузов, В. Ф.** Геометрия. 7 класс : учеб. для общеобразовательных учреждений / В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, В. В. Прасолов. – Москва: Просвещение. – 2010. – 127 с. – URL: https://search.rsl.ru/ru/ record/05656553941 (дата обращения 27.06.2021). – Текст: электронный.

6. **Гусев, В. А.** Практикум по решению математических задач: Геометрия / В. А. Гусев. – Москва: Просвещение, 1985. – 198 с. – URL: https://11klasov.com/8417-praktikum-po-jelementarnoj-matematike-geometrija-

gusev-va-litvinenko-vn-mordkovich-ag.html (дата обращения 21.06.2021).– Текст: электронный.

7. **Давыдов, В.В.** Проблемы развивающего обучения / В. В Давыдов. – Москва: Педагогика, 1986. – 160 с. – URL: Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения: опыт теоретического и экспериментального психологического исследования. (grsu.by) (дата обращения 18.08.2021). – Текст: электронный.

8. **Исаева, М. А.** Векторный метод решения планиметрических задач в школьном курсе геометрии / М. А. Исаева Новая наука. – 2016. – № 3 (69). С. 74–78. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=25601251 (дата обращения 15.08.2021). – Текст: электронный.

9. **Лященко, Е. И.** Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: учебное пособие для студентов физико-математической специальности педагогических вузов / Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т. Ф. Кириченко – под редакцией Е.И.Лященко. – Москва: Просвещение, 1988. – 223 с. ISBN 5-09-000600-8.

10. **Мельникова, Н. Б.** Дидактические материалы по геометрии: 9 класс: к учебнику Л.С. Атанасяна и [др.], «Геометрия. 7 – 9 классы» / Н. Б. Мельникова, Г. А. Захарова. – Москва: Экзамен, 2013. – 143 с. – URL: https://11klasov.com/13746-didakticheskie-materialy-po-geometrii-9-klass-k-uchebniku-atanasjana-ls-melnikova-nb-zaharova-ga.html (дата обращения 15.08.2021). – Текст: электронный.

11. **Мерзляк, А. Г.** Геометрия: 9 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. Б. Полонский. – Москва.: Вентана-Граф, 2014. – 240 с.: ил. – ISBN 978-5-360-04345-4.

12. **Метельский, Н. В.** Дидактика математики: общая методика и ее проблемы : учебное пособие для вузов / Н. В. Метельский. – Москва: Издательство БГУ, 1982. – 256 с. – URL: https://www.mathedu.ru/text/met

elskiy_didaktika_matematiki_1982/p0/ (дата обращения 15.08.2021). – Текст: электронный.

13. **Погорелов, А. В.** Геометрия. 7-9 классы: учебник для общеобразовательной организаций / А. В. Погорелов. – Москва: Просвещение, 2014. – 240 с. : ил. – ISBN978-5-09-021849-8.

14. **Саранцев, Г. И.** Общая методика преподавания математики: учебное пособие для студентов математических спец. Педагогических вузов и университетов / Г. И. Саранцев. – Саранск: Тип. «Красный Октябрь», 1999. – 208 с. : ил. – ISBN 5-09-010148-5.

15. Современные проблемы школьного математического образования. Материалы научно-практических конференций учителей математики и преподавателей вузов. – Текст: непосредственный // Пермский государственный педагогический университет. – Пермь. – 2002. – 190 с.

16. **Талызина, Н. Ф.** Педагогическая психология: учебное пособие для средних педагогических заведений. – Москва: Академия, 2001.

17. **Федеральный Государственный Образовательный Стандарт** Основного Общего Образования, утвержденный приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от «17» декабря 2010 г. № 1897.– URL: http://standart.edu.ru/catalog.aspx?CatalogId=2588 (дата обращения: 09.07.2021). – Текст: электронный.

18. **Шарыгин, И. Ф.** Геометрия 7 – 9 классы. Учебник для общеобразовательных учреждений / Шарыгин И. Ф. – Москва: Просвещение, 2002. – 464 с. : ил. – ISBN978-5-3580-9918-0.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Рекомендуемые задачи

РАЗДЕЛ 1. ТРЕУГОЛЬНИК: ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ИХ СВОЙСТВА

Тема: Различные определения понятия треугольник. Свойства сторон и углов треугольника

Теоретическая часть

Теорема об углах треугольника.

Сумма внутренних углов треугольника равна 180°.

Теорема о внешнем угле треугольника.

Внешний угол треугольника равен сумме двух не смежных с ним внутренних углов.

Практическая часть

1. В треугольнике ABC угол A=112°. Внешний угол при вершине B равен 170°. Найдите угол C.
2. Углы треугольника относятся как 1:7:12. Найдите больший из них.
3. В треугольнике ABC угол A=80°. Внешний угол при вершине B равен 164°. Найдите угол C.
4. Угол между биссектрисой и медианой прямоугольного треугольника, проведенными из вершины прямого угла, равен 14. Найдите меньший угол этого треугольника. Ответ дайте в градусах.
5. Найдите углы треугольника, если его стороны из точки пересечения серединных перпендикуляров видны под углами 110º, 150º, 100º.
6. В треугольнике ABC $\angle B=90°$, CC_1– биссектриса, CC_1= 16 см, BC_1=8 см. Найдите внешний угол при вершине A.

Тема: Равенство треугольников. Решение задач на равенство треугольников.

Теоретическая часть

Первый признак равенства треугольников.

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны.

Второй признак равенства треугольников.

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам второго треугольника, то треугольники равны.

Третий признак равенства треугольников.

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого, то треугольники равны.

Практическая часть

1. В ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, $AC=A_1C_1$, $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$, $AC=10$см, AC на 5 см меньше AB, но на 3 см больше BC. Найдитепериметр$\Delta A_1B_1C_1$.
2. В окружности с центром в точке O проведены диаметры ML и NK. Докажите, что $\Delta OMN = \Delta OKL$.
3. Прямые AD и BC пересекаются в точке O, причем $AO = DO$, $\angle BAO = \angle CDO$, $\angle ACO = 55°$, $\angle ABO = 30°$. Найдите $\angle ACD$.
4. Докажите признаки равенства прямоугольных треугольников:

а) по двум катетам;

б) по катету и гипотенузе;

в) по катету и прилежащему острому углу;

г) по гипотенузе и острому углу.

5. Докажите равенство треугольников:

а) по двум сторонам и медиане, выходящим из одной вершины;

б) по медиане и двум углам, на которые разбивает эта медиана угол треугольника.

Тема: Свойства медиан, высот биссектрис треугольника

Теоретическая часть

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую сторону.

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину этого угла с точкой на противолежащей стороне.

Практическая часть

1. Периметр треугольника ABC равен 40 см. Стороны AC=15 см и AB=9 см. Найдите BD и DC, если AD – биссектриса угла BAC.

2. В треугольнике ABC высоты AA1 и CC1 пересекаются в точке H. Найдите высоту, проведённую к стороне AC, если HA_1=6 см, BA_1=8 см, AH=11 см.

3. В треугольнике ABC с углом B, равным 48°, проведены биссектрисы AL и CM, которые пересекаются в точке O. Найдите угол AOC в градусах.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL, при этом отрезки AL и LC равны соответственно 7 и 5. Найдите длину стороны AB, если сторона BC равна 6.

5. В треугольнике ABC с периметром 36 проведена биссектриса BL, при этом отрезки AL и LC равны соответственно 7 и 5. Найдите длину стороны BC.

6. В прямоугольном треугольнике ABC с острым углом 26° проведены высота BH и медиана BM. Найдите угол HBM в градусах.

7. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E. Докажите, что углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.

8. В прямоугольном треугольнике ABC (угол C равен 90°) медианы пересекаются в точке O, OB = 10 см, BC = 12 см. Найдите гипотенузу треугольника.

9. В треугольнике ABC ∠B=90°, CC_1 – биссектриса, CC_1= 16 см, BC_1=8 см. Найдите внешний угол при вершине A.

Тема: Подобие треугольников. Решение задач на подобие треугольников.

Теоретическая часть

Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны, а соответствующие стороны пропорциональны.

Отношение соответствующих сторон подобных треугольников называется коэффициентом подобия.

Теорема. Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Признаки подобия треугольников.

Два треугольника подобны, если:

1. Два угла одного из них соответственно равны двум углам другого.

2. Две стороны одного из них соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы между этими сторонами равны.

3. Три стороны одного из них соответственно пропорциональны трем сторонам другого.

Практическая часть

1. Треугольники ABC и MKE подобны, причём AB:KM=BC:EK=AC:EM, ∠A=40°, ∠E=56°. Чему равен угол B.

2. Площади двух подобных треугольников равны 50 дм^2 и 32 дм^2, сумма их периметров равна 117 дм. Чему равен периметр большего треугольника.

3. Площади подобных треугольников равны 16 см^2 и 25 см^2. Одна из сторон первого треугольника равна 2 см. Чему равна сходственная ей сторона другого треугольника.

4. Прямая, параллельная стороне АС треугольника АВС, пересекает стороны АВ и ВС в точках K и M соответственно. Найдите АС, если $BK: KA = 3: 4, KM = 18$.

5. Медианы треугольника MNK пересекаются в точке О. Через точку О проведена прямая, параллельная стороне МК и пересекающая стороны MN и NK в точках A и B соответственно. Найдите длину МК, если длина отрезка равна 12 см.

Тема: Средняя линия треугольника

Теоретическая часть

Средней линией треугольника называют отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

Теорема. Средняя линия треугольника параллельна не пересекающейся с ней стороне треугольника и равна половине этой стороны.

Практическая часть

1. Периметр треугольника ABC равен 2. Найдите периметр треугольника CDE, где DE-средняя линия треугольника ABC.

2. Периметр треугольника ABC равен 12. Найдите периметр треугольника FDE, вершинами которого являются середины сторон треугольника ABC.

3. Периметр треугольника ABC равен 4. Найдите периметр треугольника CDE, где DE-средняя линия треугольника ABC.

Тема: Площадь треугольника

Теоретическая часть

Пусть a, b, c – стороны треугольника; α, β, γ – противолежащие им углы; h_a– высота, проведенная к прямой, содержащей сторону a; R – радиус описанной окружности; r – радиус вписанной окружности; p – полупериметр.

Формулы площади треугольника:

$$S = \frac{1}{2} a h_a,$$

$$S = \frac{1}{2} ab\ sin\gamma,$$

$$S = pr,$$

$$S = \frac{abc}{4R},$$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Формула Герона).

Практическая часть

1. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (2; 2), (8; 10), (8; 8).

2. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и гипотенуза равны соответственно 6 и 10.

3. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, а основание равно 6. Найдите площадь этого треугольника.

4. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 10, а один из острых углов равен 45º. Найдите площадь треугольника.

5. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и гипотенуза равны соответственно 36 и 39.

6. Пусть AA_1 и CC_1 – медианы треугольника ABC, AA_1=9 см, CC_1=12 см. Медианы пересекаются в точке O, и угол AOC равен 150°. Найдите площадь треугольника ABC.

7. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (0;0), (10;7), (7;10).

8. В треугольнике ABC известно, что AB = 6, BC = 4, AC = 8. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D. Через точки A, D и C проведена окружность, пересекающая сторону BC в точке E. Найдите площадь треугольника ADE.

Тема: Теорема синусов

Теоретическая часть

Пусть a, b, c – стороны треугольника; α, β, γ – противолежащие им углы; R – радиус описанной окружности.

Теорема синусов.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Практическая часть

1. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 2, а угол при вершине равен 120°. Найдите диаметр описанной окружности.

2. Дан треугольник ABC, в котором AC =$\sqrt{2}$, BC = 1,∠ABC = 45°. Найдите угол BAC.

3. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника с острым углом 30°, если известно, что биссектриса, проведенная из вершины прямого угла, равна a.

4. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 13, 14, 15.

5. Стороны треугольника равны 1 и 2, а угол между ними равен 60°. Через центр вписанной окружности этого треугольника и концы третьей стороны проведена окружность. Найдите ее радиус.

Тема: Теорема косинусов.

Теоретическая часть

Пусть a, b, c – стороны треугольника; α – угол, противолежащий стороне a. Тогда $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\,\alpha$.

Практическая часть

1. Стороны треугольника равны 5, 8, 10. Верно ли, что треугольник остроугольный?

2. Сумма квадратов двух сторон треугольника больше квадрата третьей стороны. Докажите, что против третьей стороны лежит острый угол.

3. Дан равносторонний треугольник со стороной a. Найдите отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, делящей противоположную сторону в отношении 2:1.

4. Одна из сторон треугольника вдвое больше другой, а угол между этими сторонами равен 60°. Докажите, что треугольник прямоугольный.

5. Сторона треугольника равна $2\sqrt{7}$, а две другие стороны образуют угол в 30° и относятся как $1:2\sqrt{3}$. Найдите эти стороны.

РАЗДЕЛ 2. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Теоретическая часть

Теорема Пифагора. Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.

Средним геометрическим (средним пропорциональным) двух неотрицательных чисел называется квадратный корень из произведения этих чисел.

Теорема. Каждый катет прямоугольного треугольника есть среднее геометрическое гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.

Теорема. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу.

1. В треугольнике АВС угол С равен 90°, ВС=3. Найдите АВ.
2. В треугольнике АВС угол С равен 90°, СН – высота, АВ=49. Найти АН.
3. В треугольнике АВС угол С равен 90°, СН – высота, АВ=25. Найти АН.
4. В треугольнике АВС угол В прямой, АВ= 12 см, ВС=16 см, К – середина стороны АС. Из точки К опущен перпендикуляр КЕ к стороне ВС. Найдите длину КЕ.

5. В треугольнике ABC угол C равен 90°. Катеты треугольника равны 20 и 15. Найдите длину BK проекции катета BC на гипотенузу.

6. В прямоугольном треугольнике ABC с острым углом 66° проведены высота BH и медиана BM. Найдите угол HBM в градусах.

7. Один из внешних углов прямоугольного треугольника равен 135°, а его гипотенуза – $5\sqrt{2}$ см. Чему равны катеты данного треугольника.

8. В прямоугольном треугольнике ABC угол A равен 40°, угол B равен 90°, а в треугольнике MNK углы M, N, K относятся как 5:9:4, BC=10 см, NM=15 см. Чему равно отношение AC к KM.

РАЗДЕЛ 3. РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Теоретическая часть

Треугольник называется равнобедренным, если у него две стороны равны. Эти стороны называются боковыми сторонами. Третья сторона называется основанием.

Треугольник называется равносторонним (правильным), если все его стороны равны.

Свойства равнобедренного треугольника.

1. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

2. Медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является его биссектрисой и высотой.

Признак равнобедренного треугольника.

Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

Практическая часть

1. Периметр равнобедренного треугольника равен 10, основание 4. Найдите боковую сторону.

2. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен 24°. Чему равен угол при вершине треугольника.

3. В треугольнике ABC AC=BC, AB=5, высота AH=2. Найдите $\sin\angle A$.

4. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, а основание равно 6. Найдите площадь этого треугольника.

5. В треугольнике ABC AB=BC, а высота AH делит сторону BC на отрезки BH=18 и CH=18. Найдите $\cos\angle B$.

6. В треугольнике ABC AB = BC = 25, AC = 14. Найдите длину медианы BM.

7. Высота равностороннего треугольника равна $13\sqrt{3}$. Найдите его периметр.

8. В треугольникеABCAC=BC, AB=15, высота AH=3. Найдите sin∠A.

РАЗДЕЛ 4. ИМЕННЫЕ ТЕОРЕМЫ О ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Теоретическая часть

Теорема Менелая. Если на сторонах AB и BC треугольника ABC обозначены соответственно точки C_1 и A_1, а на продолжении стороны AC – точка B_1, удовлетворяющие соотношению $\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=1$, то эти три точки лежат на одной прямой.

Теорема Чевы. Если на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC соответственно обозначены произвольные точки A_1, B_1, C_1,то для того, чтобы отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$.

Практическая часть

1. Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

2. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

3. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

4. В треугольнике ABC на стороне BC взята точка N так, что NC=3BN; на продолжении стороны AC за точку A взята точка M так, что

MA=AC. Прямая MN пересекает сторону AB в точке F. Найти отношение $\frac{BF}{FA}$.

5. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1,A_1 и B_1 соответственно, причём $AC_1:C_1B = 8:3$, $BA_1:A_1C = 1:2$, $CB_1:B_1A = 3:1$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D.

а) окажите, что ADA_1B_1– параллелограмм;

б) найдите CD, если отрезки AD и BC перпендикулярны, AC = 28, BC = 18.

РАЗДЕЛ 5. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Теоретическая часть

Окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (называемой центром окружности).

Расстояние от точек окружности до ее центра называется радиусом окружности. Отрезок, соединяющий любую точку окружности с центром, также называют радиусом. Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется хордой. Диаметром окружности называется хорда, проходящая через центр.

Теорема. Около любого треугольника можно описать единственную окружность.

Центр описанной окружности треугольника – точка пересечения серединных перпендикуляров его сторон.

Теорема. Вокруг любого треугольника можно описать окружность, причем только одну.

Центр вписанной окружности треугольника – точка пересечения биссектрис треугольника.

Практическая часть

1. Сторона равностороннего треугольника равна 6 см. Найдите радиус описанной окружности.

2. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках M, K и P. Найдите углы треугольника ABC, если углы треугольника MKP равны 52°, 56° и 72°.

3. В треугольнике MNK отрезки MN=6 см, MK=8 см, NK=10 см. Докажите, что MK - отрезок касательной, проведённой из точки K к окружности с центром N радиуса 6 см.

4. В треугольнике ABC AC=4, BC=3, угол C равен 90°. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

5. В треугольнике ABC AC=35, BC=$5\sqrt{15}$, угол равен 90°. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

6. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Найдите градусную меру угла C треугольника ABC, если угол AOB равен 27°.

7. Докажите, что прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания вписанной окружности, пересекаются в одной точке, называемой точкой Жергона.

8. Докажите, что прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания вневписанных окружностей, пересекаются в одной точке, называемой точкой Нагеля.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Пример работы для проведения входного контроля

Вариант 1

1. Дано: AO = BO, CO = DO, CO = 5 см, BO = 3 см, BD = 4 см. Найти периметр ΔCAO.
2. В равнобедренном треугольнике ABC точки K и M являются серединами боковых сторон AB и BC соответственно. BD – медиана треугольника. Докажите, что ΔBKD = ΔBMD.
3. Даны неразвернутый угол и отрезок. На сторонах данного угла постройте точки, удаленные от вершины угла на расстояние, равное половине данного отрезка.
4. Прямая MK разбивает плоскость на две полуплоскости. Из точек M и K в разные полуплоскости проведены равные отрезки MA и KB, причем ∠AMK = ∠BKM. Какие из высказываний верные?

а) ΔAMB = ΔAKB; б) ∠AKM = ∠BMK; в) ΔMKA = ΔKMB; г) ∠AMB = ∠KMB.

Вариант 2

1. Дано: AB = CD, BC = AD, AC = 7 см, AD = 6 см, AB = 4 см. Найти периметр ΔADC.
2. В равнобедренном ΔABC точки K и M являются серединами боковых сторон AB и BC соответственно. BD — медиана треугольника. Докажите, что ΔAKD = ΔCMD.
3. Дан неразвернутый угол и отрезок. На биссектрисе данного угла постройте точку, удаленную от вершины угла на расстояние, равное данному отрезку.
4. Прямая AB разбивает плоскость на две полуплоскости. Из точек A и B в разные полуплоскости проведены равные отрезки AD и BC, причем ∠BAD= ∠ABC. Какие из высказываний верные?

а) ΔCAD = ΔBDA; б) ∠DBA = ∠CAB; в) ∠BAD = ∠BAC; г) ∠ADB = ∠BCA.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Пример работы для проведения промежуточного контроля по разделу «Равнобедренный треугольник»

Вариант 1

1. В треугольнике ABC $\angle A = 70°$, $\angle C = 55°$.

а) докажите, что треугольник ABC – равнобедренный, и укажите его основание.

б) отрезок BM – высота данного треугольника. Найдите углы, на которые она делит угол ABC.

2. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них.

а) докажите, что $\triangle AOC = \triangle BOD$,

б) найдите $\angle OAC$, если $\angle ODB = 20°$, $\angle AOC = 115°$

3. В равнобедренном треугольнике с периметром 64 см одна из сторон равна 16 см. Найдите длину боковой стороны треугольника.

Вариант 2

1. В треугольнике ABC $\angle A = 100°$, $\angle C = 40°$.

а) докажите, что треугольник ABC – равнобедренный, и укажите его боковые стороны,

б) отрезок CK – биссектриса данного треугольника. Найдите углы, которые она образует со стороной AB.

2. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них.

а) докажите, что $\triangle AOD = \triangle BOC$,

б) найдите $\angle OBC$, если $\angle ODA = 40°$, $\angle BOC = 95°$.

3. В равнобедренном треугольнике с периметром 80 см одна из сторон равна 20 см. Найдите длину основания треугольника.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Пример работы для проведения итогового контроля

1. Сторона AB треугольника ABC больше стороны AC, а $\angle A = 40^\circ$. Точка D лежит на стороне AB, причем BD = AC. Точки M и N – середины отрезков BC и AD соответственно. Найдите угол BNM.

2. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция второго катета на гипотенузу равна 16. Найдите гипотенузу и второй катет.

3. В треугольник ABC вписан ромб DECF так, что вершина E лежит на отрезке BC, вершина F лежит на отрезке AC и вершина D лежит на отрезке AB. Найдите сторону ромба, если BC = 12, AC = 6.

4. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, равен 11. Найдите гипотенузу c этого треугольника. В ответе укажите $c \cdot (\sqrt{2}7 - 1)$.

5. В треугольнике ABC точка D на стороне BC и точка F на стороне AC расположены так, что BD:DC=3:2, AF:FC=3:4. Отрезки AD и BF пересекаются в точке P. Найдите отношение AP:PD.