МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Тема выпускной квалификационной работы

«Методика обучения решению геометрических задач координатным методом»

Выпускная квалификационная работа по направлению

44.03.01 Педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата

«Математика»

Форма обучения заочная

Проверка на объем заимствований:
78% авторского текста
Работа рекомендована к защите
«2» июля 2021 г.
и. о. зав. кафедрой математики и МОМ
________ Шумакова Е.О.

Выполнила:
Студентка группы ЗФ-513-087-5-1
Яхина Екатерина Вячеславовна
Научный руководитель: доцент,
канд. пед. наук, доцент кафедры МиМОМ
Винтиш Татьяна Юрьевна

Челябинск
2021

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Тема выпускной квалификационной работы

«Методика обучения решению геометрических задач координатным методом»

Выпускная квалификационная работа по направлению

44.03.01 Педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата

«Математика»

Форма обучения заочная

Проверка на объем заимствований:
78% авторского текста
Работа рекомендована к защите
«___» ___________ 2021 г.
и. о. зав. кафедрой математики и МОМ
_______________ Шумакова Е.О.

Выполнила:
Студентка группы ЗФ-513-087-5-1
Яхина Екатерина Вячеславовна
Научный руководитель: доцент,
канд. пед. наук, доцент кафедры МиМОМ
Винтиш Татьяна Юрьевна

Челябинск
2021

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Введение в современную систему образования федеральных государственных образовательных стандартов в значительной степени изменило и сам процесс обучения. Так, одним из отличительных признаков является увеличение роли самостоятельной работы студентов и школьников, и как следствие, необходимости разработки технологии организации самостоятельной работы студентов и школьников, в рамках реализации ФГОС [1].

Особого внимания требуют вопросы, связанные с вычислением расстояний и углов в пространстве применительно к конкретной фигуре. Они остаются трудными для большинства обучающихся, причем, даже в тех достаточно типичных ситуациях, которые используются в задачах повышенного уровня [2]. Задачи такого характера всегда присутствуют в вариантах ЕГЭ. Но решаемость таких задач не велика, так как материал по планиметрии усваивается не так прочно, как хотелось бы. Так же обучающиеся затрудняются с выбором системы координат, что немаловажно для решения задач такого уровня. Этим и определяется актуальность выбранной темы.

Проблема исследования: выявление методических особенностей обучения школьников координатному методу решения стереометрических задач.

Объект исследования: процесс обучения школьников геометрии.

Предметом данного исследования выступает методика обучения учащихся координатному методу решения стереометрических задач.

Целью исследования является выделение методических особенностей применения метода координат при решении геометрических задач, разработка факультативного курса по применению «Метода координат к решению стереометрических задач в условиях ЕГЭ».

Реализация цели достигается путем решения следующих задач:

1. Анализ учебной и методической литературы для выделения и формирования основных задач по заданной теме, как средства организации самостоятельной работы и промежуточного оценивания знаний у школьников и студентов базового уровня.

2. Выделение и представление методических приемов, как средства систематизации, обобщения и удобного восприятия задач по заданной теме.

3. Разработка факультативного курса для учащихся старших классов.

Гипотеза: использование особенностей координатного метода при обучении решению стереометрических задач способствует повышению качества обучения геометрии и эффективности в решении заданий ЕГЭ.

Для достижения целей работы, проверки гипотезы и решения поставленных выше задач, был использован метод анализа документов, таких как программа по математике, учебные пособия, методические материалы, касающиеся метода координат.

ГЛАВА 1. МЕТОД КООРДИНАТ, КАК ОСНОВНОЙ МЕТОД АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1.1 История возникновения координат на плоскости. Суть метода

История возникновения координат и системы координат начинается очень давно. Первоначально идея метода координат возникла еще в древнем мире в связи с потребностями астрономии, географии, живописи. Древнегреческого ученого Анаксимандра Милетского считают составителем первой географической карты. Он четко описывал широту и долготу места, используя прямоугольные проекции.

Более чем за 100 лет до н.э греческий ученый Гиппарх предложил опоясать на карте земной шар параллелями и меридианами и ввести теперь хорошо известные географические координаты: широту и долготу и обозначить их числами.

Идея изображать числа в виде точек, а точкам давать числовые обозначения зародилась в далекой древности. Первоначальное применение координат связано с астрономией и географией, с потребностью определять положение светил на небе и определенных пунктов на поверхности Земли, при составлении календаря, звездных и географических карт. Следы применения идеи прямоугольных координат в виде квадратной сетки (палетки) изображены на стене одной из погребальных камер Древнего Египта.

Основная заслуга в создании современного метода координат принадлежит французскому математику Рене Декарту. До наших времен дошла такая история, которая подтолкнула его к открытию. Занимая в театре места, согласно купленным билетам, мы даже не подозреваем, кто и когда предложил ставший обычным в нашей жизни метод нумерации кресел по рядам и местам. Оказывается, эта идея осенила знаменитого философа, математика и естествоиспытателя Рене Декарта (1595–1650) – того самого, чьим именем названы прямоугольные координаты. Посещая парижские театры, он не уставал удивляться путанице, перебранкам, а подчас и вызовам на дуэль, вызываемыми отсутствием элементарного порядка распределения публики в зрительном зале. Предложенная им система нумерации, в которой каждое место получало номер ряда и порядковый номер от края, сразу сняла все поводы для раздоров и произвела настоящий фурор в парижском высшем обществе.

Научное описание прямоугольной системы координат Рене Декарт впервые сделал в своей работе «Рассуждение о методе» в 1637 году. Поэтому прямоугольную систему координат называют также – Декартова система координат. Кроме того, в своей работе «Геометрия» (1637), открывшей взаимопроникновение алгебры и геометрии, Декарт ввел впервые понятия переменной величины и функции. «Геометрия» оказала огромное влияние на развитие математики. В декартовой системе координат получили реальное истолкование отрицательные числа.

Вклад в развитие координатного метода внес также Пьер Ферма, однако его работы были впервые опубликованы уже после его смерти. Декарт и Ферма применяли координатный метод только на плоскости. Координатный метод для трехмерного пространства впервые применил Леонард Эйлер уже в 18 веке.

Суть метода координат заключается в следующем: задав на плоскости систему координат, мы каждую точку плоскости можем охарактеризовать парой действительных чисел, ее координатами, а геометрические фигуры задавать аналитическими условиями (уравнением, неравенством, системой уравнений или неравенств). Это позволяет переводить геометрические задачи на алгебраический язык.

Основным понятием в школьном курсе геометрии является формирование понятия уравнения фигуры на плоскости.

Под уравнением фигуры на плоскости относительно заданной системы координат понимают уравнение с двумя переменными x и y, которые удовлетворяют двум условиям:

1) координаты любой точки, принадлежащей данной фигуре, уравнению удовлетворяют;

2) координаты любой точки, не принадлежащей фигуре, уравнению не удовлетворяют.

Для примера выведем уравнение окружности радиуса с центром в заданной прямоугольной системе координат (рисунок 1.1).

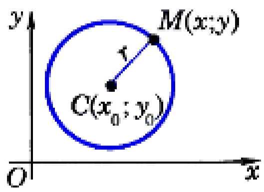


Рисунок 1.1 – Окружность в прямоугольной системе координат

Пусть точка M имеет координаты (x, y). Расстояние от произвольной точки M до точки C (x_0, y_0) вычисляется по формуле:

$$MC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Если точка M лежит на данной окружности, то MC = r или $MC^2 = r^2$ т.е. координаты точки удовлетворяют уравнению.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Если же точка M (x; y) не лежит на данной окружности, то $MC^2 \neq r^2$ и, значит, координаты точки M не удовлетворяют данному уравнению. Следовательно, в прямоугольной системе координат уравнение окружности радиуса с центром в точке C (x_0, y_0) имеет вид:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

При изучении фигур методом координат Атанасян в своем учебнике выделяет две задачи:

1) по геометрическим свойствам данной фигуры найти ее уравнение;
2) обратная задача: по заданному уравнению фигуры исследовать ее геометрические свойства.

Задачи на отыскание множества точек плоскости реализуют обе цели изучения метода координат, которые предлагает автор.

В школьном курсе метод координат дает возможность строить доказательства и решать задачи более рационально, чем исключительно геометрическими способами. При решении задач методом координат может возникнуть одна геометрическая сложность. Одну и ту же задачу можно аналитически по-разному представить в зависимости от выбора системы координат. Выбрать более подходящую систему координат позволит лишь достаточный опыт.

1.2 Анализ школьных учебников

Хорошо известно, что, как бы ни строился школьный курс геометрии, в нем обязательно присутствуют различные методы доказательства теорем и решения задач. Среди таких методов важное место занимают такие методы, как метод геометрических преобразований, метод координат, векторный метод. Сами эти методы тесно связаны между собой. В зависимости от концепции, раскрываемой авторами учебников геометрии для средней школы, тот или иной метод может занимать доминирующее значение. Так в учебнике [22] активную роль играет метод координат, который весьма плодотворен.

В школьной программе по математике методу координат уделяется сравнительно мало внимания. В разделе «Цели изучения курса геометрии» говорится: «При доказательстве теорем и решении задач… применяются геометрические преобразования, векторы и координаты». Следовательно, программа не ставит целью изучение метода координат как метода решения задач. В программе говорится, что «в результате изучения курса геометрии учащиеся должны уметь использовать координаты для решения несложных стандартных задач». Ни слова не говориться об овладении учащимися методом координат для доказательства теорем и решении задач. Упор делается на «несложные стандартные задачи», тогда как метод координат лучше проявляет свои достоинства при решении нестандартных и довольно сложных (если не решать их другими способами) задач.

В соответствии с программой по математике для средней общеобразовательной школы координаты впервые появляются в 5 классе. При этом, ребята знакомятся с изображением чисел на прямой и координатами точек. Причем введение этих понятий в учебниках различно. Так в учебнике [3] в пятом параграфе первой главы рассматривается координатный луч, с его помощью в дальнейшем происходит сравнение натуральных и дробных чисел, а также иллюстрация действий сложения и вычитания над натуральными числами. С понятием координатной прямой авторы учебника [4] знакомят учащихся в 6 классе. В учебнике же [6] нет определения «координатный луч». Авторы в начале 5 класса вводят понятие координатной прямой, хотя, до изучения отрицательных чисел, которое происходит в 6 классе, работа идет только с правой частью координатной прямой, представляющей собой координатный луч. Это не совсем удобно, так как могут возникнуть не нужные пока вопросы о другой части этой координатной прямой. В целом, учебники [3], [4] содержат больше заданий, связанных с определением координатного луча, (координатной прямой, а затем и координатной плоскости) и чаще обращаются к нему для введения других понятий или рассмотрения действий над числами, чем учебники [6], [7].

Согласно программе в геометрии координаты изучаются в следующем объеме: «Координатная плоскость. Формула расстояния между двумя точками плоскости с заданными координатами. Уравнение прямой и окружности» [24].

Так, в учебнике [2] координатам посвящена отдельная глава в 9 классе. Причем этот материал изучается после изучения темы «Векторы», но до изучения скалярного произведения векторов. На рассмотрение темы отводиться 18 часов. В данном учебнике метод координат выделен в отдельную главу, в которой изучаются координаты вектора, уравнение окружности и прямой, решаются простейшие задачи в координатах. В этой главе дается понятие метода координат как метода изучения геометрических фигур с помощью средств алгебры. Школьники учатся решать задачи путем введения системы координат. Автор ставит целью научить школьников владеть методом координат не только в применении к задачам на построение фигур по их уравнению, но и при решении задач на доказательство, а также для вывода геометрических формул.

В отличии от других школьных учебников по геометрии в учебнике [22] координаты заняли одно из центральных мест. Они вводятся начиная с 8 класса после изучения тем «Четырехугольники» и «Теоремы Пифагора». На изучение темы отводится 19 часов. Сразу, после рассмотрения основных понятии, связанных с введением координат на плоскости, уравнений окружности и прямой, с учащимися изучаются такие вопросы, как пересечение двух окружностей, пересечение прямой и окружности, определение синуса, косинуса и тангенса любого угла от 0° до 180°. Это и есть первые приложения метода координат, с которыми знакомятся учащиеся.

В курсе алгебры, исходя из уравнения $y=f(x)$, где $f(x)$ заданная функция, строили кривую, определяемую этим уравнением, т. е. строили график функции $y=f(x)$. Таким образом, шли как бы «от алгебры к геометрии». При изучении метода координат в геометрии мы выбираем обратный путь: исходя из геометрических свойств некоторых кривых, выводим их уравнение, т. е. идем как бы «от геометрии к алгебре». В 8 классе по учебнику [22] и в 9 по учебнику [2] рассматривается уравнение прямой и окружности. При этом обращается внимание на общее понятие «уравнение фигуры»: «Уравнением фигуры на плоскости в декартовых координатах называется уравнение с двумя неизвестными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки фигуры. И обратно: любые два числа, удовлетворяющие данному уравнению, являются координатами некоторой точки фигуры» [22]. Уравнение фигуры на плоскости в общем виде можно записывать так: $F(x,y)=0$, где $F(x,y)$ функция двух переменных x и y.

Учебник [28] реализует авторскую концепцию построения школьного курса геометрии, в нем больше внимания по сравнению с традиционными учебниками уделяется методам решения геометрических задач. Метод координат по данному учебнику является предпоследней темой 9 класса. При его изучении учащиеся знакомятся с декартовыми координатами на плоскости, рассматривают два уравнения «плоских линий: прямой и окружности», которые в дальнейшем будут необходимы при решении задач.

В процессе этого отрабатываются некоторые умения, необходимые для решения задач координатным методом. Следует отметить, что в учебнике сравнительно небольшой теоретический материал по данной теме. Так, например, единственной доказанной формулой (причем только для одного случая, когда $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$), если не считать уравнений линий, является формула расстояния между точками. В отличие от учебников [22] и [2] формула середины отрезка в теоретическом материале не рассматривается, хотя в практических заданиях присутствует задача «Рассмотрим на координатной прямой точки $A(-2,5)$ и $B(4,3)$. Найти координаты точки M, если M – середина AB», таким образом, учащимся предлагается самим вывести формулу координат середины отрезка, рассматривая данный конкретный случай и используя понятия координат и формулу расстояния между точками.

Автор не предлагает учащимся как такового понятия фигуры, но подробно рассматривает уравнения «плоских линий», которые понадобятся учащимся при решении задач. Это уравнения окружности и прямой.

А после изучения векторов рассматривается параграф «Координатный метод», в котором на примере двух разобранных задач, в одной из которых рассматривается окружность Аполлония, а в другой обращается внимание на выбор системы координат, учащимся предлагается ряд задач, решаемых данным методом. Это довольно сложные задачи, в основном связанные с нахождением геометрического места точек.

Автор данного учебника признает, что «координатный метод является одним их самых универсальных методов», но отмечает, что «метода на все случаи жизни нет».

1.3 Возможности метода координат для формирования УУД

В наше время – время новых технологий и компьютеров – обучение детей должно принять иное направление. Все чаще дети стали задавать вопрос не «Почему?», а «Зачем?». Зачем это учить, если можно посмотреть в сети Интернет? Сложность этого века технологий заключается в безмерно большом количестве информации, которую люди видят, но не умеют перерабатывать и использовать. В связи с этим перед педагогом встает новая очень важная цель: научить ребенка жить в мире информации и делать правильный выбор. Встает проблема самостоятельного усвоения учащимися новых знаний, умений и навыков, которую педагоги должны контролировать и вести в нужном направлении. Быстрый темп развития технологий требует ускоренного совершенствования образовательного пространства, определения целей образования, учитывающих государственные, социальные и личностные потребности и интересы. Универсальные учебные действия дают большие возможности для достижения данной потребности.

В широком смысле слова «универсальные учебные действия» (далее

– УУД) означают саморазвитие и самосовершенствование благодаря сознательной социальной деятельности и активного получения опыта.

Качество знаний, освоенных учащимися, зависит от разнообразия и характера применяемых универсальных учебных действий. Совместно с проявлением активных и целенаправленных действий учащихся формируются, применяются и улучшаются получаемые знания, умения и навыки.

Овладение УУД приводит к освоению познавательной, эстетической и нравственной культуры, использованию полученных знаний, умений и навыков в практической деятельности учащихся, а также в их жизни.

Основные функции УУД:

- обеспечение возможностей обучающегося самостоятельно осуществлять деятельность учения, ставить учебные цели, искать и использовать необходимые средства и способы их достижения, контролировать и оценивать процесс и результаты деятельности;
- создание условий для гармоничного развития личности и её самореализации на основе готовности к непрерывному образованию; обеспечение успешного усвоения знаний, формирования умений, навыков и компетентностей в любой предметной области.

Рассмотрим более подробно универсальные учебные действия.

1. Регулятивные учебные действия.

Данные учебные действия позволяют регулировать процесс получения знаний умений и навыков. Благодаря им появляется возможность планировать работу учащихся, определять цели обучения, что способствует успешному усвоению знаний. Регулятивные действия контролируют и корректируют деятельность учащихся и позволяют давать оценку успешности усвоения.

Для формирования регулятивных универсальных учебных действий используются приемы контроля, самопроверки и взаимопроверки заданий.

В процессе работы ребёнок учится самостоятельно определять цель своей деятельности, планировать её, самостоятельно двигаться по заданному плану, оценивать и корректировать полученный результат.

Учащимся могут быть предложены задания с преднамеренными ошибками, поиск информации в предложенных источниках, взаимоконтроль, различные контрольные опросы по заданной теме.

Для выполнения таких заданий можно вместе с детьми составить алгоритм действий или правила проверки, отбор и структурирование информации, необходимой для ее решения, построение моделей изучаемого предмета.

Учащимся предлагаются различные типы заданий, позволяющие самостоятельно построить ход рассуждений, проанализировать все необходимое для их решения, применить логические рассуждения и достичь определенной цели.

2. Коммуникативные учебные действия.

Данные действия направлены на формирования умений работать как друг с другом, так и с учителем. Они обеспечивают возможность сотрудничать, работать в команде, формируют умение слушать друг друга и понимать, принимать совместные решения и выполнять совместную работу. Также действия направлены на умелое распределение ролей, взаимоконтроль и поддержку друг друга, умение договариваться и выражать свои мысли.

Учащимся предлагаются задания на работу в команде, в которых может быть распределение ролей. Данные действия активно проявляются в проектных работах, направленных на исследование и достижение совместного результата.

Для формирования учебно-познавательной компетенции на уроках математики применяются различные технологии в зависимости от типа урока. Формирование и развитие УУД на уроках математики происходит с помощью различных видов заданий.

Пример 1. Математика, 6 класс. Координаты на плоскости.

Задание выполняется в парах. Каждый в прямоугольной системе координат по точкам делает рисунок (звезда, кораблик, флаг и т.д.). Далее ученики меняются своими рисунками и записывают координаты каждой точки рисунка.

Обратное задание: каждому даются координаты точек, необходимо построить их в прямоугольной системе координат и соединить. В результате должен получиться какой-то рисунок.

Работа учащегося:

Построить рисунок в прямоугольной системе координат по точкам с координатами: (−3,5; 0,5), (−2,5; 0,5), (−1,5; 3,5), (0,5; 3,5), (0,5; −0,5), (1; −0,5), (1; 0), (1,5; 0), (5,5; 4), (5,75; 4), (6,75; 5), (5,5; 5), (5,5; 8), (8,5; 5), (7,25; 5), (6,25; 4), (6,5; 4), (4,5; 2), (6; 0)(6,5; 0), (6,5; −1.5), (6; −1,5), (6; −2), (5,5; −2,5), (4,5; −2,5), (4; −2), (4; −1,5), (0; −1,5), (0; −2), (−0,5; −2,5), (−1.5; −2,5), (−2; −2), (−2; −1.5), (−3,5; −1.5), (−3,5; 0,5).

Решение представлено на рисунке 1.2:

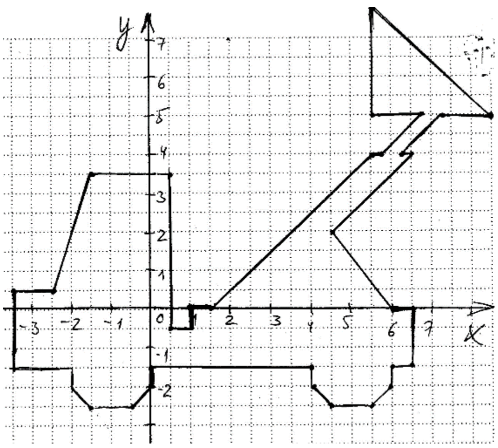


Рисунок 1.2 – Решение примера 1

В ходе данной работы формируются универсальные учебные действия:

▪ познавательные: самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели; умение строить модель; контроль процесса и оценка результатов деятельности.

- регулятивные: определение последовательности промежуточных целей с учетом конечного результата; составление плана и последовательности действий; контроль в форме сравнивания результата с заданным эталоном с целью обнаружения отклонений и отличий от эталона; внесение необходимых дополнений и коррективов в план и способ действия в случае расхождения с эталоном; выделение и осознание учащимся того, что уже усвоено и что еще подлежит усвоению; осознание качества и уровня усвоения; способность к волевому усилию.

- коммуникативные: планирование учебного сотрудничества с учителем и сверстниками.

Пример 2. Геометрия, 9 класс. Метод координат.

«Составить карточку для одноклассника по теме «Уравнение окружности» и решение для последующей проверки» (рисунок 1.3)

Работа учащегося:

Карточка:

Построить окружности по заданным уравнениям:
$x^2 + y^2 = 9$; $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$; $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$; $(x - 1)^2 + y^2 = 4$; $x^2 + (y + 2)^2 = 2$

Рисунок 1.3 – Карточка с заданием

Укажите координаты центра окружности и радиус.

В ходе данной работы формируются универсальные учебные действия:

- познавательные: выделять тип задач и способы их решения; осуществлять поиск необходимой информации, которая нужна для решения задач; обосновывать этапы решения учебной задачи; производить анализ и преобразование информации; создавать и преобразовывать схемы необходимые для решения задач.

▪ регулятивные: планировать, контролировать и выполнять действие по заданному образцу, правилу, с использованием норм; планировать результаты своей деятельности и предвещать свои ошибки.

▪ коммуникативные: желание вступать в контакт с окружающими; знание норм и правил, которым необходимо следовать при общении с окружающими; умение организовывать общение, включающее умение слушать собеседника.

В ходе разбора задач, решаемых методом координат, были выделены ряд действий, применяемых на каждом шаге решения. Анализируя эти действия, удалось найти их соответствие с универсальными учебными действиями. Это соответствие представлено в Таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Соответствие УУД и действий, применяемых при решении задач методом координат

№	Действия, применяемые при решении задач методом координат	УУД
1	Умение оптимально выбирать систему координат.	Умение создавать модели для решения учебных задач.
2	Умение определять координаты заданных точек.	Умение осознанно выбирать наиболее эффективные.
3	Умение находить координаты середины отрезка.	Умение применять знаки и символы для решения учебных задач.
4	Умение находить расстояние между двумя точками.	Умение применять знаки и символы для решения учебных задач.
5	Умение переводить геометрическую задачу на аналитический язык	Умение строить логические рассуждения.
6	Умение выполнять алгебраические преобразования.	Умение применять знаки и символы для решения учебных задач.
7	Умение выделять за уравнением конкретный геометрический образ.	Умение делать выводы, смысловое чтение.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ И ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КООРДИНАТ В ГЕОМЕТРИИ

2.1 Этапы решения задач координатным методом

С помощью метода координат, можно решать задачи двух видов:

1. Пользуясь координатами, можно истолковать уравнения и неравенства геометрически и таким образом применять геометрию к алгебре и анализу. Графическое изображение функции первый пример такого применения координатного метода.

2. Задавая фигуры уравнениями и выражая в координатах геометрические соотношения, мы применяем алгебру к геометрии. Например, можно выразить через координаты основную геометрическую величину – расстояние между точками.

Решение задач, как алгебраических, так и геометрических сводится к выполнению определенного алгоритма, состоящего из III основных этапов:

1) перевести задачу на координатный (аналитический) язык;

2) преобразовать аналитическое выражение;

3) обратный перевод, то есть перевести с координатного языка на язык, в терминах которого сформулирована задача.

Рассмотрим решение алгебраической задачи координатным методом, используя данный алгоритм (задачи на составление уравнения фигуры).

Задача №1. Сколько решений имеет система уравнений.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = x^2. \end{cases}$$

Решение:

I этап: выявить характеристическое свойство данных фигур, иначе говоря, требуется найти, количество точек пересечения фигур, заданных уравнениями.

Уравнение $x^2 + y^2 = 1$. это есть уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $r = 1$, а уравнение $y = x^2$ – уравнение параболы.

II этап: выбрать на плоскости прямоугольную систему координат, построить окружность и параболу; найти точки их пересечения.

Ш этап: записать характеристическое свойство фигуры на языке координат, то есть количество точек пересечения окружности и параболы.

Теперь решим геометрическую задачу, используя данный метод (геометрические задачи, которые решаются аналитическим методом).

Задача №2. Даны две точки. Найдите множество точек, для каждой из которых расстояния от двух данных точек равны.

Решение.

I этап. Обозначим точки через A и B. Введем прямоугольную систему координат с началом в точка A. (формируется умение оптимального выбора системы координат). Отсюда следует, что $AB = a$, тогда в данной системе точки имеют следующие координаты $A\ (0,0)$ и $B\ (a,0)$. Обозначим произвольную точку так, чтобы выполнялось условие $AM = MB$ $(AM^2=MB^2)$. Точка M имеет координаты $M\ (x,y)$. Используем формулу расстояния от одной точки до другой, получаем $\mathrm{AM}^2 = x^2 + y^2$, $MB^2 =$ $= (x-a)^2 + y^2$. Тогда $x^2 + y^2 = (x-a)^2 + y^2$ – уравнение окружности.

II этап осуществим преобразование данного выражения, в результате получим соотношение: $x = \frac{a}{2}$.

III этап осуществим обратный перевод с языка уравнения на геометрический язык. Данное уравнение – это уравнение прямой, параллельному оси Oy и стоящей от точки А на расстояние $d = \frac{a}{2}$, то есть серединного перпендикуляра к отрезку AB.

2.2 Суть координатного метода

Сущность метода координат как метода решения задач состоит в том, что, задавая фигуры уравнениями и выражая в координатах различные геометрические соотношения, мы можем решать геометрическую задачу средствами алгебры. Обратно, пользуясь координатами, можно истолковывать алгебраические и аналитические соотношения и факты геометрически и таким образом применять геометрию к решению алгебраических задач.

Метод координат – это универсальный метод. Он обеспечивает тесную связь между алгеброй и геометрией, которые, соединяясь, дают «богатые плоды», какие они не могли бы дать, оставаясь разделенными.

В отношении школьного курса геометрии можно сказать, что в некоторых случаях метод координат дает возможность строить доказательства и решать многие задачи более рационально, красиво, чем чисто геометрическими способами. Метод координат связан, правда, с одной геометрической сложностью. Одна и та же задача получает различное аналитическое представление в зависимости от того или иного выбора системы координат. И только достаточный опыт позволяет выбирать систему координат наиболее целесообразно.

2.3 Задачи, обучающие координатному методу

Для разработки методики формирования умения применять координатный метод важно выявить требования, которые предъявляет логическая структура решения задач мышлению решающего. Координатный метод предусматривает наличие у обучающихся умений и навыков, способствующих применению данного метода на практике. Проанализируем решение нескольких задач. В процессе этого анализа выделим умения, являющиеся компонентами умения использовать координатный метод при решении задач. Знание компонентов этого умения позволит осуществить его поэлементное формирование.

Задача №1. В треугольнике ABC: $AC = b, AB = c, BC = a,$

BD – медиана. Докажите, что $BD^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}.$

Выберем систему координат так, чтобы точка A служила началом координат, а осью *Ox* – прямая AC (рисунок 2.1).

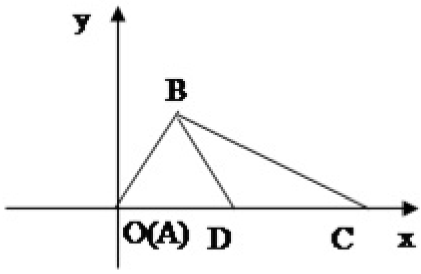


Рисунок 2.1 – Изображение к задаче № 1

(умение оптимально выбирать систему координат, т. е. так, чтобы наиболее просто находить координаты данных точек).

В выбранной системе координат точки A, C и D имеют следующие координаты: A (0,0), D ($\frac{b}{2}$,0) и C(b,0) (умение вычислять координаты заданных точек). Обозначим координаты точки B через x и y. Тогда используя формулу для нахождения расстояний между двумя точками, заданными своими координатами, получаем:

$x^2 + y^2 = c^2$, $(x-b)^2 + y^2 = a^2$ (умение находить расстояние между двумя точками, заданными координатами).

По той же формуле $BD^2 = (x - \frac{b}{2})^2 + y^2$. (2)

Используя формулы (1) находим x и y. Они равны:

$$x = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b} \ ;$$

$$y = \sqrt{c^2 - \frac{(c^2 - a^2 + b^2)}{4b^2}} ;$$

Далее, подставляя x и y в формулу (2), находим

$$BD^2 = \left(\frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b} - \frac{b}{2}\right)^2 + c^2 - \frac{(c^2 - a^2 + b^2)}{4b^2} \ ;$$

$$BD^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$$

(умение выполнять преобразования алгебраических выражений).

Задача №2. Найти множество точек, для каждой из которых разность квадратов расстояний от двух данных точек есть величина постоянная.

Обозначим данные точки через A и B. Выберем систему координат так, чтобы ось Ox совпадала с прямой AB, а началом координат служила точка A (умение оптимально выбирать систему координат).

Предположим $AB = a$, тогда в выбранной системе координат $A(0,0)$, $B(a,0)$ (умение находить координаты заданных точек).

Точка $M\ (x, y)$ принадлежит искомому множеству тогда только тогда, когда $AM^2 - MB^2 = b^2$, где b – постоянная величина (умение переводить геометрический язык на аналитический, составлять уравнения фигур).

Используя формулу расстояний между двумя точками, получаем:

$$AM^{\,2} = x^2 + y^2;$$

$$MB^{\,2} = (x-a)^2 + y^2;$$

$$AM^2 - BM^2 = 2ax - a^2 = b;$$

(умение вычислять расстояние между точками, заданными координатами), или $x = \frac{b+a^2}{2a}$. Данное уравнение является уравнением прямой, параллельной оси Oy и отстоящей от точки A на расстояние $d = \frac{|b+a^2|}{2a}$ (умение видеть за уравнением конкретный геометрический образ).

Нетрудно видеть, что и для решения этой задачи необходимо овладение перечисленными выше умениями. Кроме того, для решения приведенной задачи, а также и других задач важно умение «видеть за уравнением» конкретный геометрический образ, которое является обратным к умению составлять уравнения конкретных фигур.

Выделенные умения являются основой при решении и более сложных задач.

Задача №3. В трапеции меньшая диагональ перпендикулярна основаниям. Найти большую диагональ, если сумма противоположных углов равна π/2, а основания равны a и b.

Направим оси координат по меньшей диагонали и одному из оснований (рисунок 2.2) (умение оптимально выбирать систему координат).

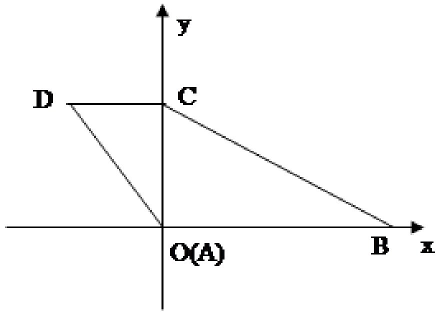


Рисунок 2.2 – Изображение к задаче №3

Тогда точка A имеет координаты *(0,0)*, точка B – *(a, 0)*, точка C – *(0, c)*, точка D – *(b, c)* (умение находить координаты заданных точек).

Пусть $\alpha = \angle ABC$ и $\beta = \angle ADC$ острые углы в трапеции $ABCD$, тогда их сумма равна $\frac{\pi}{2}$. Для вычисления длины большей диагонали BD надо найти значение с. Его можно вычислить 2 способами. Первый – из прямоугольного треугольника ABC по формуле $tg\alpha = \frac{CO}{AB}$ находим $c = a \cdot tg\,\alpha$. Второй способ из прямоугольного треугольника ACD: $c = -b \cdot tg\,\beta$. Отсюда получили, что $c = a \cdot tg\,\alpha = -b \cdot tg\,\beta$ (1)

Из равенства (1) находим отношение $\frac{b}{a}$: оно равно $tg^2\alpha$, так как $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Выразим $tg\alpha$. Он равен $\sqrt{-\frac{b}{a}}$, исходя из этого, пользуясь зависимостью (1), получаем $c = \sqrt{-ab}$ (умение выразить недостающие координаты через уже известные величины).

Далее воспользовавшись координатной формулой расстояния между двумя точками, найдем длину BD (умение вычислять расстояние между точками, заданными координатами).

Она равна $\sqrt{a^2 - b^2 - 3ab}$.

Итак, компонентами умения применять координатный метод в конкретных ситуациях являются следующие умения:

1) переводить геометрический язык на аналитический для одного типа задач и с аналитического на геометрический для другого;

2) строить точку по заданным координатам;

3) находить координаты заданных точек;

4) вычислять расстояние между точками, заданными координатами;

5) оптимально выбирать систему координат;

6) составлять уравнения заданных фигур;

7) видеть за уравнением конкретный геометрический образ;

8) выполнять преобразование алгебраических соотношений.

Данные умения можно отработать на примере следующих задач, формирующих координатный метод:

1) задачи на построение точки по ее координатам;

2) задачи на нахождение координат заданных точек;

3) задачи на вычисление расстояния между точками, заданными координатами;

4) задачи на оптимальный выбор системы координат;

5) задачи на составление уравнения фигуры по ее характеристическому свойству;

6) задачи на определение фигуры по ее уравнению;

7) задачи на преобразование алгебраических равенств.

2.4 Примеры определения фигур уравнениями

Уравнение фигуры в прямоугольной системе координат на плоскости – это уравнение с двумя переменными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки фигуры.

И обратно: любые два числа, удовлетворяющие этому уравнению, являются координатами некоторой точки фигуры.

Другими словами, уравнение фигуры F в декартовой системе координат на плоскости – это уравнение с двумя неизвестными x и y, для которого выполняются два условия:

1. Координаты любой точки фигуры F удовлетворяют этому уравнению.

2. Любая пара чисел (x, y), которая удовлетворяет данному уравнению фигуры, принадлежит этой фигуре (является координатами некоторой точки этой фигуры).

Уравнение фигуры на плоскости в общем виде можно записать так: $F(x, y) = 0$. Приведем примеры.

Любая прямая в декартовых координатах XOY имеет уравнение вида: $ax + by + c = 0$, где a, b, c – некоторые числа, причем хотя бы одно из них не равно нулю. Данное уравнение называется общим уравнением прямой.

Уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ определяет на плоскости пустое множество. Неравенство $x^2 + y^2 + 1 < 0$ определяет на плоскости также пустое множество. Неравенство $x^2 + y^2 + 1 > 0$ определяет всю плоскость.

Уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ определяет на плоскости окружность с центром в начале координат и радиуса r = 1. Неравенство $x^2 + y^2 - 1 < 0$ $(x^2 + y^2 - 1 > 0)$ определяет на плоскости внутреннюю (внешнюю) область окружности с центром в начале координат и радиуса $r = 1$.

2.5 Виды задач, решаемых координатным методом

Применяя метод координат, можно решать задачи двух видов.

1. Пользуясь координатами, можно истолковать уравнения и неравенства геометрически и таким образом применять геометрию к алгебре и анализу. Графическое изображение функции первый пример такого применения метода координат.

2. Задавая фигуры уравнениями и выражая в координатах геометрические соотношения, мы применяем алгебру к геометрии. Например, можно выразить через координаты основную геометрическую

величину – расстояние между точками.

В связи с усилением роли координатного метода в изучении геометрии особенно актуальной становиться проблема его формирования. Наиболее распространенными среди планиметрических задач, решаемых координатным методом, являются задачи следующих 2 видов:

1) на обоснование зависимостей между элементами фигур, особенно между длинами этих элементов;

2) на нахождение множества точек, удовлетворяющих определенным свойствам.

Примером задач первого вида может служить следующая:

В треугольнике *ABC*, *AB* = *c*, *AC* = *b*, *BC* = *a*, *BD* – медиана. Доказать, что $BC^2 = \frac{a^2+c^2}{2} + \frac{b^2}{4}$.

Задача. Найти множество точек, для каждой из которых разность квадратов расстояний от двух данных точек есть величина постоянная» - является примером задач второго вида.

Решения этих задач были разобраны выше.

Несмотря на недостатки метода координат такие как наличие большого количества дополнительных формул, требующих запоминания, и отсутствие предпосылок развития творческих способностей учащихся, некоторые виды задач трудно решить без применения данного метода. Поэтому изучение метода координат необходимо, однако более детальное знакомство с этим методом целесообразно проводить на факультативных занятиях. Далее приведем ряд задач для факультативов.

Пример 1. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки, взятой на диаметре окружности, до концов любой из параллельных ему хорд постоянна.

Решение:

Введем прямоугольную систему координат с началом в центре окружности. Пусть хорда МР параллельна оси *Ox*, а точка *A* принадлежит диаметру (рисунок 2.3). Обозначим расстояние *OA* через a, а расстояние от точки *P* до оси *Ox* через b. Тогда точка *A* имеет координаты (*a, 0*).

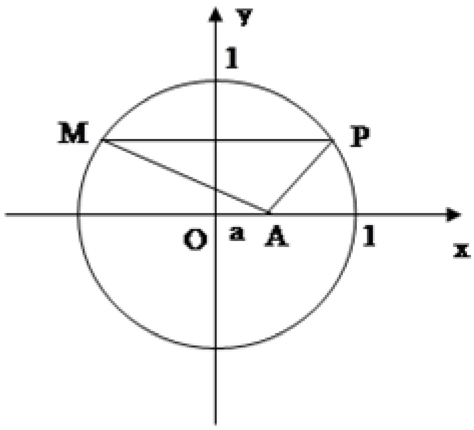


Рисунок 2.3 – Изображение к примеру 1

Точки *P* и *M* принадлежат окружности с центром в начале координат и радиусом равным 1, следовательно их координаты удовлетворяют уравнению данной окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Используя это уравнение, находим координаты точек P ($\sqrt{1-b^2}; b$) и *M* ($-\sqrt{1-b^2}; b$). Необходимо доказать, что $AM^2 + AP^2$ не зависит от переменной b. Найдем AM^2 и AP^2 используя формулу нахождения расстояния между двумя точками по их координатам: $d =$ $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Они соответственно равны $(\sqrt{1-b^2+a})^2 +$ $+b^2$ и $(\sqrt{1-b^2-a})^2 + b^2$, а их сумма после приведения подобных равна $2a^2 + 2$. Это число не зависит от переменной b, что и требовалось доказать.

Пример 2. Доказать, что сумма квадратов длин сторон четырехугольника равна сумме квадратов длин его диагоналей, сложенной с учетверенным квадратом расстояния между серединами диагоналей. (Теорема Эйлера)

Решение:

Введем прямоугольную систему координат как показано на рисунке 2.4.

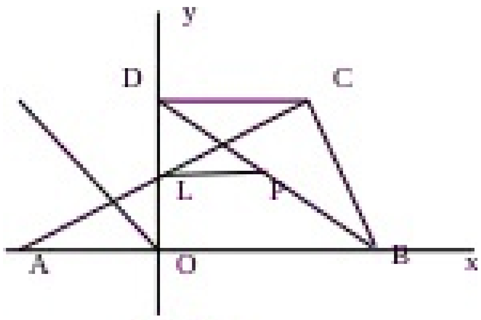


Рисунок 2.4 – Изображение к примеру 2

Пусть точки A, B, C и D имеют координаты (0,0), (d,0), (c,d) и (0,d) соответственно. Следовательно, координаты точек L и P есть $\left(\frac{a+c}{2},\frac{d}{2}\right)$ и $\left(\frac{b}{2},\frac{d}{2}\right)$. Найдем квадраты длин отрезков, с помощью формулы нахождения расстояния между точками по их координатам.

$$AD^2 = a^2 + d^2;\ BC^2 = (c-b)^2 + d^2;\ DC^2 = c^2;\ AB^2 = a^2 + b^2;$$

$$AC^2 = (c-a)^2 + d^2;\ BD^2 = b^2 + d^2;\ LP^2 = \left(\frac{b}{2} - \frac{c+a}{2}\right)^2.$$

Запишем выражение, которое необходимо доказать, используя найденные нами значения.

$$a^2 + d^2 + (c-b)^2 + d^2 + c^2 + a^2 + b^2 = (c-a)^2 + d^2 + b^2 + d^2 +$$
$$+4\left(\frac{b}{2} - \frac{c+a}{2}\right)^2.$$

Раскроем скобки, приведем подобные и получим верное равенство *0 = 0*. Значит, сумма квадратов длин сторон четырехугольника равна сумме квадратов длин его диагоналей, сложенной с учетверенным квадратом расстояния между серединами диагоналей.

Пример 3. Диаметры *AB* и *CD* окружности перпендикулярны. Хорда *EA* пересекает диаметр *CD* в точке *К*, хорда *EC* пересекает диаметр *AB* в точке *L*. Докажите, что если *CK:KD* так же как 2:1, то *AL:LB* так же как 3:1.

Решение:

Введем прямоугольную систему координат, направив оси по данным диаметрам *AB* и *CD* (рисунок 2.5).

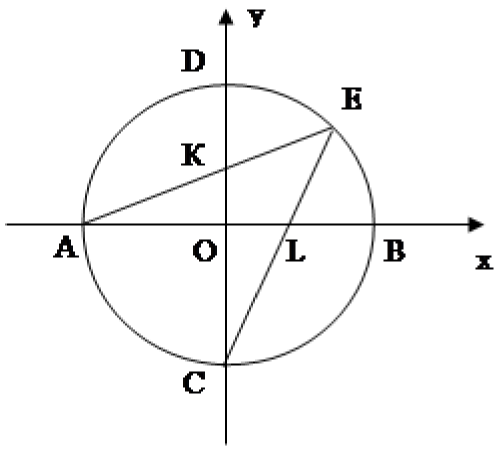


Рисунок 2.5 – Изображение к примеру 3

Радиус окружности будем считать равным 1. Тогда точки *A, B, C, D* будут иметь координаты (-1,0), (1,0), (0,-1), (0,1) соответственно. Так как *CK:KD* = 2:1, то точка К имеет координаты (0, $\frac{1}{3}$). Найдем координаты точки E как точки пересечения прямой *AK*, имеющей уравнение $y = \frac{1}{3}(x+1)$ и окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 1$. Получаем, что точка *E* имеет координаты ($^4/_5$; $^3/_5$). Точка L – это точка пересечения прямых *CE* и оси абсцисс, значит ординаты точки *L* равна 0.

Найдем абсциссу точки *L*. Прямая *CE* задана уравнением $y = 2x - 1$. Она пересекает ось *Ox* в точке ($^1/_2$;0). Отсюда координаты точки L ($^1/_2$; 0). Найдем отношение *AL:LB*. Оно равно трем, что и требовалось доказать.

ГЛАВА 3. ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС ПО ПРИМЕНЕНИЮ МЕТОДА КООРДИНАТ К РЕШЕНИЮ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ

ЗАДАЧ В УСЛОВИЯХ ЕГЭ

3.1 Пояснительная записка

Геометрия – это раздел математики, являющийся носителем собственного метода познания мира, с помощью которого рассматриваются формы и взаимное расположение предметов, развивающих пространственные представления, изобразительно-графические умения, приемы конструктивной деятельности, формируют геометрическое мышление.

В развитии геометрии большое значение имело применение алгебры к решению геометрических задач, которое со временем переросло в отдельную науку – аналитическую геометрию.

Координатно-векторный метод позволяет упростить решение задачи, избежать представление сложных геометрических преобразований.

С помощью данного факультатива можно расширить базовый курс по геометрии.

Умение решать стереометрические задачи координатным методом позволит справиться школьнику с решением задачи № 14 на ЕГЭ.

При решении стереометрических задач наиболее удобен координатный метод, хотя учащиеся редко используют его.

Во-первых, в школе в полном объёме необходимый теоретический материал не изучается.

Во-вторых, в учебниках школьной геометрии мало задач, решаемых координатным методом.

Вопрос этот является важным как для математического развития учащихся, так и для формирования у школьников умения применять этот метод в физике, технике.

Координатный метод позволяет с помощью формул и введенных координат пространства решать стереометрические задачи. Метод упрощает работу, связанную с чертежом, тем самым облегчает ее решение.

Факультативный курс рассчитан на 28 часов.

Цель курса – расширение, систематизация знаний учащихся о координатном методе решения стереометрических задач.

Задачи:

– познакомить с теоретическими сведениями по данной теме;

– учить сравнивать, анализировать, применять знания на практике;

– повысить математическую культуру;

– развивать интерес учащихся к математике;

– совершенствовать практические умения и навыки при решении задач координатным методом;

– создание условий для качественной подготовки к сдаче ЕГЭ.

Форма итогового контроля – выполнение практического задания

Формы и методы обучения – лекция, деловая игра, применение информационно-коммуникационных технологий, практические занятия, кейс-технологии.

3.1.1 Содержание изучаемого курса

Тема № 1. Основные понятия (2ч)

Суть и преимущество координатного метода решения задач. Введение прямоугольной системы координат. Рассмотреть преимущество координатного метода на примере решения одной задачи (решить разными способами). Оптимальный выбор системы координат для различных многогранников (призма, пирамида, куб, прямоугольный параллелепипед).

Тема № 2. Вычисление расстояний в пространстве (11ч)

Расстояние между точками (формула расстояние между точками в координатной форме). Координаты середины отрезка. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой (через определитель третьего порядка). Расстояние от точки до плоскости (формула). Расстояние между параллельными плоскостями (формула). Каноническое уравнение прямой. Определитель второго порядка. Расстояние от точки до прямой в координатной форме. Векторное и смешанное произведение векторов. Расстояние между прямыми в координатной форме.

Тема № 3. Вычисление углов в пространстве (6ч)

Скалярное произведение векторов. Угол между векторами, прямыми (формула). Нормальный вектор плоскости. Направляющий вектор прямой. Угол между плоскостями. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Тема № 4. Вычисление площадей и объёмов (8ч)

Формулы для вычисления объёма параллелепипеда, тетраэдра в координатной форме. Формулы для вычисления площадей в координатной форме.

3.1.2 Учебно-тематический план

Учебно-тематический план факультативного курса представлен в Таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Учебно-тематический план

№ п.п.	Тема	Кол-во часов	Форма занятия
	Основные понятия (2 ч)		
1.	Суть и преимущество координатного метода решения задач	1	лекция
2.	Оптимальный выбор прямоугольной системы координат для различных многогранников	1	Лекция, исследовательская работа, практикум
	Вычисление расстояний в пространстве (11 ч)		
3.	Расстояние между точками	1	Лекция, самостоятельная работа

Продолжение таблицы 3.1

4.	Уравнение плоскости.	3	Лекция, практикум
5.	Расстояние от точки до плоскости,	2	Лекция, практикум

	между параллельными плоскостями		
6.	Расстояние от точки до прямой	2	Лекция, практикум
7.	Расстояние между скрещивающимися прямыми	3	Лекция, практикум
	Вычисление углов в пространстве (6 ч)		
8.	Угол между прямыми	1	Самостоятельная работа
9.	Угол между прямой и плоскостью	2	Лекция, практикум
10.	Угол между плоскостями	3	Лекция, практикум
	Вычисление площадей и объёмов (8 ч)		
11.	Вычисление площадей и объёмов	3	Лекция, практикум
12.	Решение задач вариантов ЕГЭ	5	практикум
13.	Итоговое занятие	1	Зачетная работа

3.1.3 Ожидаемые результаты изучения курса

В процессе обучения учащиеся научатся выбирать оптимально систему координат, находить координаты точек, необходимых для решения задачи, применять необходимые формулы для нахождения расстояний и углов в пространстве, составлять уравнение фигуры по её характеристическому свойству и за уравнением видеть конкретный геометрический образ, находить площади и объёмы многогранников.

3.2 Разработка занятий курса

3.2.1 Урок 1. Уравнение плоскости

Образовательные:

- научить составлять уравнение плоскости;
- совершенствование умений переводить задачу с геометрического на аналитический язык и наоборот.

Развивающие:

- развитие познавательных способностей, творческих способностей, креативности личных качеств;
- развитие памяти, внимания.

Воспитательные:

- создать условия, обеспечивающие воспитание интереса к изучению математики.

Оборудование: раздаточный материал, справочник.

Ход урока

I. Организационный момент: Проверка готовности к уроку.

II. Мотивация к учебной деятельности: Создание проблемной ситуации.

III. Изучение нового материала.

В задачах ЕГЭ профильной математики часто требуется найти угол между прямой и плоскостью, расстояние между скрещивающимися прямыми. Для решения этих задач надо уметь выводить уравнение плоскости.

Задача нашего урока научиться составлять уравнение плоскости.

В общем случае уравнение плоскости имеет вид

$Ax + By + Cz + D = 0,$ где $A, B, C, D, -$ числовые коэффициенты.

Если найдем $A, B, C, D,$ то мы сможем записать уравнение плоскости.

Плоскость однозначно задается тремя точками в пространстве. Значит надо найти координаты трёх точек, лежащих в этой плоскости, а потом подставить их значения в общее уравнении плоскости.

Например, пусть даны три точки $M(x_1; y_1; z_1), N(x_2; y_2; z_2), L(x_3; y_3; z_3)$.

Подставим координаты этих точек в уравнение плоскости:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0, \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0. \end{cases}$$

Получилась система из трёх уравнений, но неизвестных четыре: A, B, C, D.

Если наша плоскость не проходит через начало координат, то коэффициент $D = 1$, если же плоскость проходит через начало координат, то $D = 0$.

Можно каждое уравнение плоскости поделить на D, от этого уравнение не изменится, но вместо D будет стоять 1, а остальные коэффициенты будут в D раз меньше.

Теперь получили три уравнения и три неизвестных, можно решать систему.

Решив систему, найдём коэффициенты A, B, C, D и, подставив их в общее уравнение, получим уравнение плоскости, проходящей через заданные точки M, N, L.

Пример:

Пусть дан единичный куб (рисунок 3.1), и надо записать уравнение плоскости BCD_1.

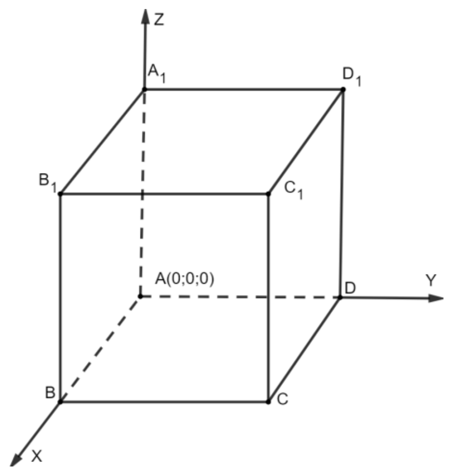


Рисунок 3.1 – Изображение единичного куба

Решение:

1. Ставить начало координат надо в точку, которая не принадлежит данной плоскости BCD_1, самая удобная будет точка A.

2. Находим координаты точек B, C, D_1:

$$B(1;0;0), C(1;1;0), D_1(0;1;1).$$

Запишем уравнение плоскости в общем виде:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0, \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0. \end{cases}$$

Пояснение: так как плоскость BCD_1 не проходит через начало координат, то коэффициент $D = 1$. Коэффициент D – это коэффициент смещения плоскости относительно начала координат.

$$\begin{cases} A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + 1 = 0, \\ A \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 0 + 1 = 0, \\ A \cdot 0 + B \cdot 1 + C \cdot 1 + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A + 1 = 0, \\ A + B + 1 = 0, \\ B + C + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A = -1, \\ B = 0, \\ C = -1. \end{cases}$$

Подставим найденные значения в уравнение плоскости:

$$-1 \cdot x + 0 \cdot y + (-1) \cdot z + 1 = 0,$$

В итоге получаем $-x - z + 1 = 0$ – уравнение плоскости (BCD_1).

Ответ: $-x - z + 1 = 0$.

Решение по теме урока

Задача №1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $K(1; 2; 3), P(0; 1; 0), L(1; 1; 1)$.

Решение:

Так как плоскость (KPL) не проходит через начало координат, то коэффициент D в уравнении плоскости равен 1.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} A \cdot 1 + B \cdot 2 + C \cdot 3 + 1 = 0, \\ A \cdot 0 + B \cdot 1 + C \cdot 0 + 1 = 0, \\ A \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 1 + 1 = 0, \end{cases} \begin{cases} A + 3C - 1 = 0, \\ B + 1 = 0, \\ A + C = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{2}, \\ B = 0, \\ C = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Подставим найденные значения коэффициентов в общее уравнение плоскости.

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z + 1 = 0.$$

Ответ:

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z + 1 = 0.$$

Домашнее задание:

1) выучить теоретический материал по теме урока, знать уравнение плоскости, решить задачу;

2) составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2;0;1)$, $N(0;1;1), K(2;1;0)$.

Решение:

Уравнение плоскости имеет вид: $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A, B, C, D -$ числовые коэфициенты.

Т.к. искомая плоскость не проходит через начало координат, то коэффициент $D = 1$.

Т.к. плоскость проходит через точки M, N, K, то их координаты удовлетворяют уравнению данной плоскости.

Составим систему уравнений и найдем коэффициенты A, B, C:

$$\begin{cases} 2A + C + 1 = 0, \\ B + C + 1 = 0, \\ 2A + B + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{4}, \\ B = -\dfrac{1}{2}, \\ C = -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Уравнение плоскости, проходящей через данные точки, будет записано в виде.

$$-\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z + 1 = 0.$$

Ответ:

$-\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z + 1 = 0 -$ уравнение искомой плоскости.

Итог урока

Подберите выражение, соответствующее вашему восприятию урока: слышал краем уха, хлопал ушами, шевелил мозгами, считал ворон, работал, не покладая рук и т.д.

3.2.2 Урок 2. Расстояние от точки до плоскости

Образовательные:

• научить находить расстояние между точкой и плоскостью;

• совершенствование умений и навыков при решении систем уравнений с тремя неизвестными.

Развивающие:

• логического мышления;

• развитие умения нестандартного подхода к решению задач.

Воспитательные:

• пробудить интерес к самостоятельному решению задач.

Оборудование: раздаточный материал, справочник.

Ход урока

Организационный момент

Всем, всем добрый день!

Поиграем в игру «Микрофон настроения». Выразите в микрофон своё настроение, с которым вы пришли на урок. Что хотите получить от урока?

Актуализация знаний

Метод полного перебора (повторений знаний, необходимых для изучения новой темы).

Просмотр слайдов.

Изучение нового материала.

Зная координаты некоторой точки $M(x_1; y_1; z_1)$ легко найти расстояние до плоскости, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$.

Данное расстояние вычисляется по формуле:

$$\rho = \frac{|A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пример. Найти расстояние от точки $H(1; 2; 0)$ до плоскости, заданной уравнением $2x + 3y - \sqrt{3}z + 4 = 0$.

Решение:

Из уравнения плоскости находим коэффициенты:

$$A = 2, B = 3, C = -\sqrt{3}, D = 4.$$

Подставим данные в формулу нахождения расстояния от точки до плоскости.

$$\rho = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-\sqrt{3}) \cdot 0 + 4|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2}} = \frac{12}{\sqrt{16}} = \frac{12}{4} = 3.$$

Ответ: 3

Решение по новой теме

Задача №1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром равным 2 точка M — середина ребра A_1D_1 (рисунок 3.2).

Найти расстояние от точки C до плоскости AB_1M.

Решение:

Введём систему координат так, что точка A — начало координат, ось OX проходит вдоль ребра AD, OY вдоль ребра AB, а ось OZ вдоль AA_1.

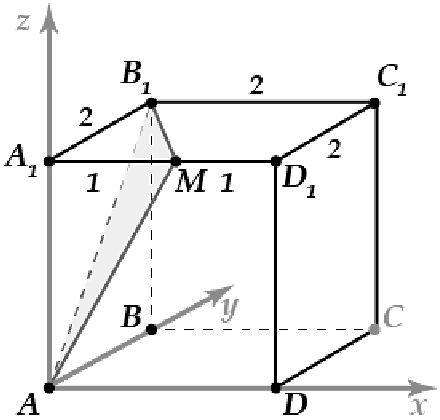


Рисунок 3.2 – Рисунок к задаче 1

Так как заданная плоскость проходит через начало координат, то в уравнении плоскости коэффициент $D = 0$.

Найдём теперь координаты точек A, B_1, M:

$$A(0; 0; 0), B_1(0; 2; 2), M(1; 0; 2).$$

Подставим найденные координаты в уравнение плоскости, получим систему уравнений

$$\begin{cases} A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 0 + D = 0, \\ A\cdot 0 + B\cdot 2 + C\cdot 2 + D = 0, \\ A\cdot 1 + B\cdot 0 + C\cdot 2 + D = 0, \end{cases} \begin{cases} D = 0, \\ B + C = 0, \\ A + 2C = 0. \end{cases}$$

Пусть $C = -1$, тогда $B = 1$, $A = 2$.

Уравнение заданной плоскости будет иметь вид

$$2x + y - z = 0.$$

Определим координаты точки $C(2; 2; 0)$.

Используя формулу нахождения расстояния между точкой и плоскостью, найдём искомое расстояние:

$$\rho = \frac{|2\cdot 2 + 1\cdot 2 + (-1)\cdot 0 + 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

Ответ: $\sqrt{6}$.

Задача №2. В основании четырёхугольной пирамиды *SABCD* лежит прямоугольник *ABCD* со сторонами *AB* = 12 и *BC* = $5\sqrt{3}$. Длины боковых рёбер пирамиды *SA* = 5, *SB* = 13, *SD* = 10.

а) докажите, что *SA* — высота пирамиды.

б) найдите расстояние от вершины *A* до плоскости *SBC*.

Решение:

а) рассмотрим ΔSAB, изображенный на рисунке 3.3:

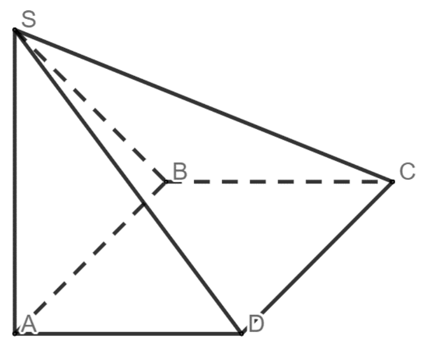


Рисунок 3.3 – Рисунок к задаче 2а

заметим, что $\mathrm{SB}^2 = \mathrm{SA}^2 + \mathrm{AB}^2, 13^2 = 5^2 + 12^2,\ 169 = 25 + 144,$

значит по теореме, обратной теореме Пифагора $\Delta\mathrm{SAB}$ – прямоугольный, т.е. $\mathrm{SA} \perp \mathrm{AB}$.

Теперь рассмотрим $\Delta\mathrm{SAD}$:

Аналогично докажем, что $SA \perp AD$.

Итак, $SA \perp AB$ и $SA \perp AD$, то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости имеем: $SA \perp ABCD$, то SA есть – высота пирамиды.

б) введём систему координат:

A – начало координат, ось *Ox* проходит по ребру *AD, OY* – по ребру *AB, OZ* – по ребру *SA* (рисунок 3.4).

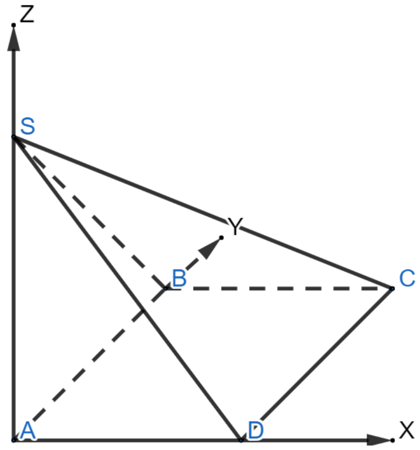


Рисунок 3.4 – Рисунок к задаче 2б

Для того чтобы найти расстояние между точкой и плоскостью надо записать уравнение плоскости SBC и координаты точки A . Так как точка A является началом координат, то её координаты легко определить, $A(0;0;0)$.

Чтобы записать уравнение плоскости, запишем сначала координаты необходимых нам точек:

$$B(0;12;0), C\left(5\sqrt{3};12;0\right), S(0;0;5).$$

Так как плоскость *SBC* не проходит через начало координат, то в уравнении плоскости коэффициент $D = 1$.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} A\cdot 0 + B\cdot 12 + C\cdot 0 + 1 = 0, \\ A\cdot 5\sqrt{3} + B\cdot 12 + C\cdot 0 + 1 = 0, \\ A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 5 + 1 = 0, \end{cases} \begin{cases} 12B + 1 = 0, \\ 5\sqrt{3}A + 12B + 1 = 0, \\ 5C + 1 = 0. \end{cases} \begin{cases} A = 0, \\ B = -\dfrac{1}{12}, \\ C = -\dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Найденные коэффициенты подставим в общее уравнение плоскости, получим

$$-\frac{1}{12}y - \frac{1}{5}z + 1 = 0.$$

Подставим найденные значения в формулу, найдём расстояние от точки A до плоскости SBC

$$\rho = \frac{|0 \cdot 0 + (-\frac{1}{12}) \cdot 0 + (-\frac{1}{5}) \cdot 0 + 1|}{\sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{12}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{169}{144 \cdot 25}}} = \frac{1}{\frac{13}{60}} = \frac{60}{13}.$$

Ответ: $\frac{60}{13}$.

Домашнее задание

a) выучить формулу вычисления расстояния от точки до плоскости;

b) решить задачи:

Задача из ЕГЭ (2015):

В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = \sqrt{5}$ и $BC = 2$. Длины боковых ребер пирамиды равны $SA = \sqrt{7}, SB = 2\sqrt{3},\ SD = \sqrt{11}$.

А) докажите, что SA – высота пирамиды;

Б) найдите расстояние от точки A до плоскости SCD.

Задача. На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 4$, а $B_1Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

А) докажите, что точка M является серединой ребра CC_1;

Б) найдите расстояние от точки C до плоскости APQ.

Итог урока

«Три М». Учащимся надо назвать три момента, которые получились хорошо в процессе урока, и предложить одно действие, которое улучшит их результат на следующем уроке.

3.2.3 Урок 3. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Образовательные:

- научить находить расстояние между точкой и плоскостью;
- совершенствование умений составлять уравнения заданных фигур, видеть за уравнением конкретный геометрический образ.

Развивающие:

- логического мышления;
- развитие абстрактного мышления.

Воспитательные:

- воспитывать познавательную активность.

Оборудование: раздаточный материал, справочник

Ход урока.

Организационный момент

Прозвенел звонок!

Позвал на урок!

Будем мы рассуждать

И друг другу помогать.

Приветствие, проверка присутствующих. Объяснение хода урока. Постановка целей и задач для учащихся.

Актуализация знаний.

Всем, всем добрый день!

Поиграем в игру «Микрофон настроения». Выразите в микрофон своё настроение, с которым вы пришли на урок. Что хотите получить от урока?

Изучение нового материала.

Расстояние между скрещивающимися прямыми - это расстояние от любой точки одной из прямых до параллельной ей плоскости, проходящей через вторую прямую.

Чтобы найти расстояние между скрещивающимися прямыми, то нужно через одну из этих прямых провести плоскость, параллельно второй прямой.

Затем найти уравнение этой плоскости и по формуле расстояния от точки до плоскости найти расстояние между скрещивающимися прямыми.

Точку на прямой можно выбрать произвольно (выбирать ту точку, у которой легче найти координаты).

Пример (Досрочный ЕГЭ, 2018).

Дана правильная призма $ABCFDE$, рёбра которой равны 2. Точка G – середина ребра CE.

а) докажите, что прямые AD и BG перпендикулярны;

b) найдите расстояние между прямыми AD и BG.

Решение: а) решаем задачу координатным методом. Сделаем чертёж и введём систему координат (рисунок 3.5).

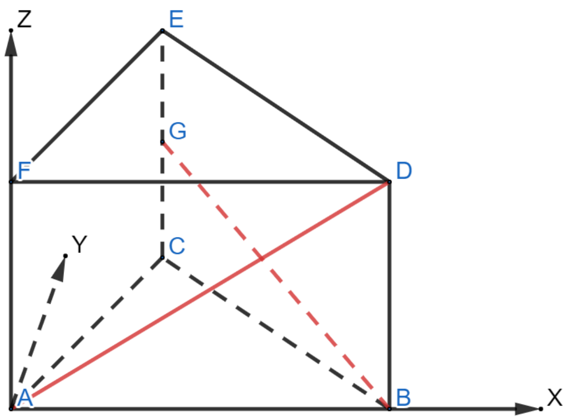


Рисунок 3.5 – Рисунок примеру

Точка A – начало координат. Определим координаты для точек A, B, D, G.

Координаты точки G по осям OX и OY совпадают с координатами точки C (рисунок 3.6):

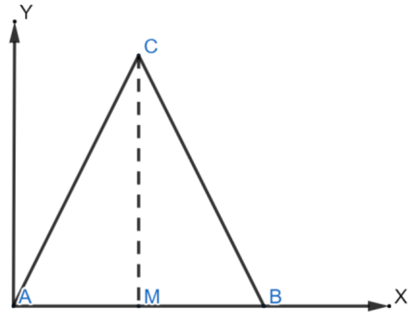


Рисунок 3.6 – Определение координат (пример)

$$A(0;0;0), B(2;0;0), D(2;0;2), G\left(1;\sqrt{3};1\right).$$

Определим теперь координаты векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BG}$:

$$\overrightarrow{AD}(2;0;2), \overrightarrow{BG}\left(-1;\sqrt{3};1\right).$$

Мы определили координаты прямых (векторов). Теперь воспользуемся формулой нахождения косинуса угла между скрещивающимися прямыми

$$\cos\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

вычислим косинус угла для наших прямых

$$\cos\alpha = \frac{2 \cdot (-1) + 0 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2}} = \frac{0}{\sqrt{8 \cdot 5}} = 0,$$

т.к. $\cos\alpha = 0$, то $AD \perp BG$, что и требовалось доказать.

b) для того, чтобы найти расстояние между скрещивающимися прямыми необходимо провести плоскость, проходящую через одну из прямых параллельно другой прямой. Выполним параллельный перенос прямой AD в точку B (рисунок 3.7):

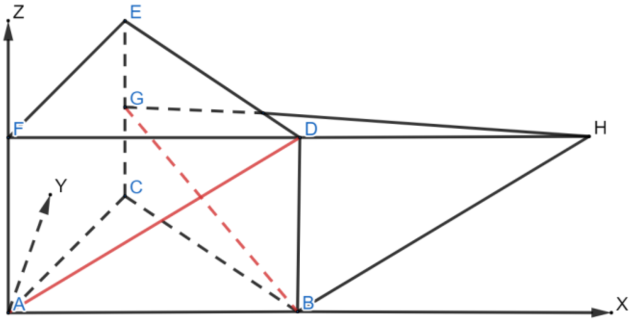


Рисунок 3.7 – Продолжение решения примера

Получим прямую BH. Точка H лежит на продолжении ребра FD, потому что BH, очевидно лежит в плоскости грани ABD, как прямая параллельная AD, и проходящая через точку B.

Искомая плоскость BGH, проходящая через прямую BG, и параллельно прямой AD, будет проходить через три точки: B, G, H. Координаты точек B, G мы знаем. Найдём координаты точки H. Так как $ADHE -$ параллелограмм, то $AB = DH, H(4; 0; 2)$.

Так как плоскость не проходит через начало координат, то коэффициент $D = 1$.

Составим систему и найдем остальные коэффициенты плоскости:

$$\begin{cases} A \cdot 2 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + 1 = 0, \\ A \cdot 1 + B \cdot \sqrt{3} + C \cdot 1 + 1 = 0, \\ A \cdot 4 + B \cdot 0 + C \cdot 2 + 1 = 0, \end{cases} \begin{cases} 2A + 1 = 0, \\ A + \sqrt{3}B + C + 1 = 0, \\ 4A + 2C + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2}, \\ B = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ C = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Уравнение плоскости $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{2}z + 1 = 0$.

Осталось найти расстояние от любой точки прямой AD до найденной плоскости. Это и будет расстояние между скрещивающимися прямыми AD и BG.

$$\rho = \frac{|-0{,}5 \cdot 0 + (-\frac{1}{\sqrt{3}}) \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{6}}} = \sqrt{\frac{6}{5}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{6}{5}}$.

Решение по теме урока

Задача №1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние между прямыми AB_1 и BD_1.

Решение:

Построим куб (рисунок 3.8) и введём систему координат так, чтобы точка D являлась началом координат.

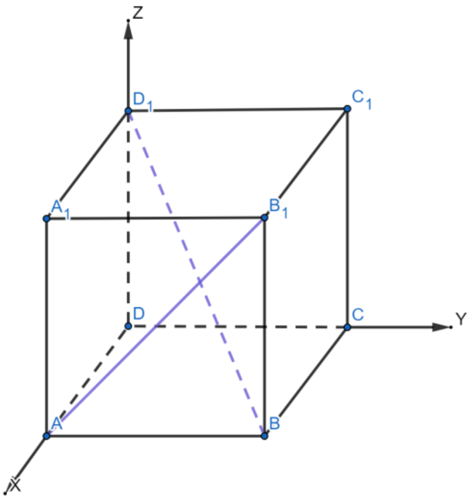


Рисунок 3.8 – Куб с началом координат в точке D

Чтобы найти расстояние между прямыми AB_1 и BD_1 необходимо через одну из них провести плоскость, параллельную другой прямой.

Проведём плоскость через прямую AB_1, параллельную прямой BD_1 (рисунок 3.9). На ребре A_1D_1 отметим его середину точку P. Через точку P проведём прямую, параллельную прямой BD_1. Эта прямая пересекает AB_1 в точке O. Плоскость PAB_1 параллельна прямой BD_1, т.к. PO параллельна BD_1.

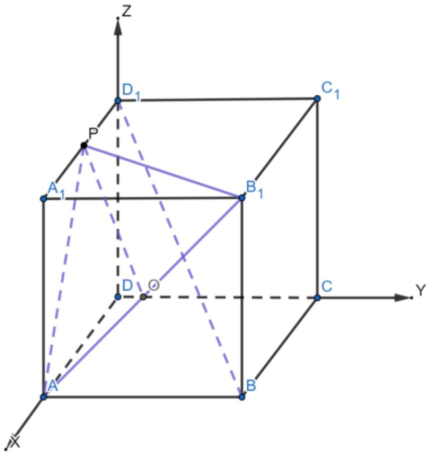


Рисунок 3.9 – Куб, усеченный плоскостью

Определим координаты нужных нам точек:

$$A(1;0;0), P(0{,}5;0;1), B_1(1;1;1), B(1;1;0).$$

Так как плоскость PAB_1 не проходит через начало координат, то $D = 1$. Определим коэффициенты A, B, C в уравнении плоскости, составим систему уравнений и решим её:

$$\begin{cases} A\cdot 1 + B\cdot 0 + C\cdot 0 + 1 = 0, \\ A\cdot 0{,}5 + B\cdot 0 + C\cdot 1 + 1 = 0, \\ A\cdot 1 + B\cdot 1 + C\cdot 1 + 1 = 0, \end{cases} \begin{cases} A + 1 = 0, \\ 0{,}5A + C + 1 = 0, \\ A + B + C + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A = -1, \\ B = \dfrac{1}{2}, \\ C = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Подставим найденные значения в формулу нахождения расстояния от точки до плоскости:

$$\rho = \frac{|-1\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1 + (-\frac{1}{2})\cdot 0|}{\sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Ответ: $\rho(AB_1, BD_1) = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Задача №2. Дана правильная пирамида $MABCD$, где $ABCD$-основание. Ребро основания равно 6, боковое ребро равно 5. Найти расстояние между прямыми AD и MC (рисунок 3.10).

Решение:

Введём систему координат так, что A является началом.

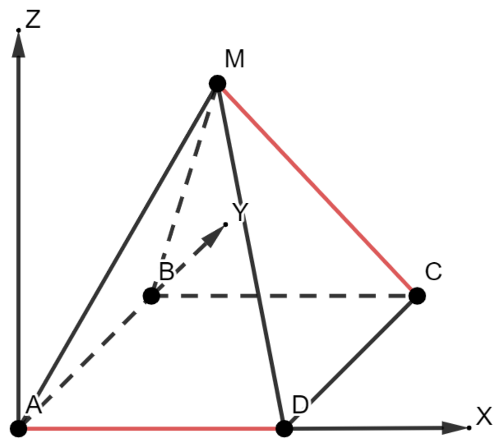


Рисунок 3.10 – Пирамида к задаче №2

Плоскость BMC проходит через прямую MC и параллельна прямой AD, так в плоскости BMC есть прямая $BC||AD$.

Плоскость BMC не проходит через начало координат, значит $D = 1$.

Найдем координаты необходимых точек, через которые проходит плоскость BMC:

$$B(0;6:0), C(6;6;0), M(3;3;6).$$

Составим и решим систему уравнений для определения коэффициентов уравнения плоскости:

$$\begin{cases} A \cdot 0 + B \cdot 6 + C \cdot 0 + 1 = 0, \\ A \cdot 6 + B \cdot 6 + C \cdot 0 + 1 = 0, \\ A \cdot 3 + B \cdot 3 + C \cdot 6 + 1 = 0, \end{cases} \begin{cases} 6B + 1 = 0, \\ 6A + 6B + 1 = 0, \\ 3A + 3B + 6C + 1 = 0, \end{cases} \begin{cases} A = 0, \\ B = -\dfrac{1}{6}, \\ C = -\dfrac{1}{12}. \end{cases}$$

Вычислим расстояние от точки $A(0;0;0)$ до плоскости BMC:

$$\rho = \frac{|0 \cdot 0 + (-\frac{1}{6}) \cdot 0 + (-\frac{1}{12}) \cdot 0 + 1|}{\sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{12}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{144}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{12}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ: $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

Домашнее задание

Выучить определение скрещивающихся прямых, решить задачи.

Задача №1. Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти расстояние между прямыми A_1C и BD.

Задача №2. Правильная треугольная пирамида $DABC$, все рёбра которой равны а. Найти расстояние между прямыми AK и $BD,$ где $K -$ середина BC.

Задача №3. Правильная призма, ребро основания равно 4, а боковое ребро равно 2. Найти расстояние от прямой AC_1 до прямой $A_1K,$ где $K -$ середина $B_{!}C_1$.

Рефлексия

Заполнить Таблицу 3.2.

Таблица 3.2 – Анкета для рефлексии

«+»	«-»	интересно
всё, что понравилось на уроке	всё, что показалось бесполезным, скучным и не увлекательным	что привлекло, заставило задуматься и вызвало новые вопросы

3.2.4 Урок 4. Угол между плоскостями

Образовательные:

- научить находить угол между плоскостями;
- совершенствование умений и навыков определения координат точек, умения выполнять преобразования алгебраических выражений;

Развивающие:

- развитие вычислительных навыков;
- развитие индивидуальных особенностей учащихся.

Воспитательные:

- создать на уроке условия, обеспечивающие воспитание аккуратности и внимательности при выполнении работ с чертёжными инструментами.

Оборудование: компьютер, проектор, экран (для демонстрации презентации по данному уроку).

Ход урока

Организация урока

Приветствие, проверка к готовности учащихся к уроку.

Актуализация знаний

Повторение знаний, полученных на предыдущих уроках.

Метод перехода с возвратом.

Изучение нового материала

Иногда в задачах по стереометрии просят найти угол между плоскостями.

В этом случае необходимо найти уравнения этих плоскостей и воспользоваться формулой.

Пусть даны уравнения плоскостей:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1 = 0.$$

Тогда угол между плоскостями можно найти по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{|A \cdot A_1 + B \cdot B_1 + C \cdot C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}.$$

Иногда в задаче не даны уравнения плоскостей. Значит надо найти координаты трёх точек, которые однозначно определяют плоскость и вычислить значения коэффициентов уравнения плоскости.

Пример. Найти угол между плоскостями, заданные уравнениями:

$$3x + 2y + 3z - 6 = 0,$$

$$x - y + 2z + 1 = 0.$$

Решение: Исходя из уравнений плоскостей, запишем коэффициенты:

$$A = 3, B = 2, C = 3, A_1 = 1, B_1 = -1, C_1 = 2.$$

Подставим значения коэффициентов в формулу для нахождения угла между плоскостями:

$$\cos\alpha = \frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{7}{\sqrt{22 \cdot 6}} = \frac{7}{\sqrt{4 \cdot 33}} = \frac{7}{2\sqrt{33}} =$$

$$= \frac{7\sqrt{33}}{66}.$$

Ответ: $\cos\alpha = \frac{7\sqrt{33}}{66}$.

Решение по теме урока

Задача №1. Дана четырехугольная пирамида, все ребра которой равны, причем основание является квадратом. Найдите: cosα, где α – угол между ее смежными боковыми гранями.

Решение:

Пусть $SABCD$– данная пирамида (S– вершина), ребра которой равны 2 (представлена на рисунке 3.11). Следовательно, все боковые грани представляют собой равные равносторонние треугольники. Найдем угол между гранями SAD и SCD.

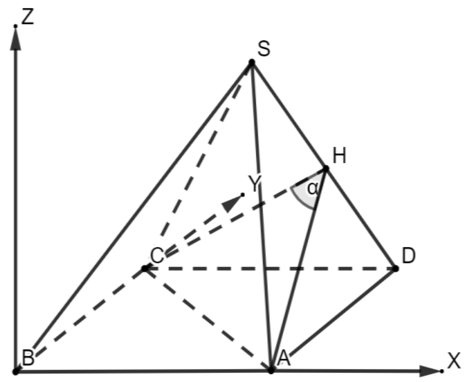


Рисунок 3.11 – Рисунок к задаче 1

Введём координатную плоскость так, что точка $B -$ начало координат. Найдём координаты необходимых нам точек:

$S(1;1;2),\ C(0;2;0),\ D(2;2;0),\ A(2;0;0).$

Так как плоскости не проходят через начало координат, то коэффициент $D = 1$.

Найдём остальные коэффициенты для уравнения плоскости SAD:

$$\begin{cases} A\cdot 2 + B\cdot 0 + C\cdot 0 + 1 = 0, \\ A\cdot 2 + B\cdot 2 + C\cdot 0 + 1 = 0, \\ A\cdot 1 + B\cdot 1 + C\cdot 2 + 1 = 0, \end{cases} \begin{cases} 2A + 1 = 0, \\ 2A + 2B + 1 = 0, \\ A + B + 2C + 1 = 0, \end{cases} \begin{cases} A = -\frac{1}{2}, \\ B = 0, \\ C = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Вычислим теперь коэффициенты для плоскости SCD:

$$\begin{cases} A_1 \cdot 0 + B_1 \cdot 2 + C_1 \cdot 0 + 1 = 0, \\ A_1 \cdot 2 + B_1 \cdot 2 + C_1 \cdot 0 + 1 = 0, \\ A_1 \cdot 1 + B_1 \cdot 1 + C_1 \cdot 2 + 1 = 0, \end{cases} \begin{cases} 2B_1 + 1 = 0, \\ 2A_1 + 2B_1 + 1 = 0, \\ A_1 + B_1 + 2C_1 + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 = 0, \\ B = -\dfrac{1}{2}, \\ C = -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Подставим найденные значения в формулу нахождения угла между плоскостями и вычислим:

$$\cos\alpha = \frac{|-\frac{1}{2}\cdot 0 + 0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} \cdot \sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{5}{16}} =$$

$$= \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Ответ: $\cos\alpha = 0{,}2$.

Задача №2. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 12, а высотой 21, на ребре AA_1 взята точка M, так, что $AM = 8$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1K = 8$. Найти угол между плоскостями D_1MK и CC_1D_1.

Решение:

Выполним построение призмы, отметим данные точки и введём систему координат так, что точка A_1 —начало координат. Построим данные плоскости в призме (рисунок 3.12):

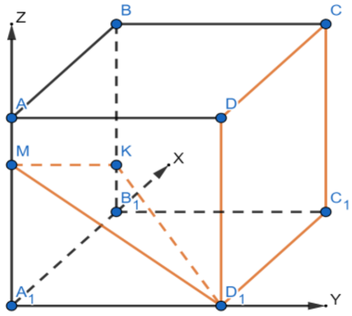


Рисунок 3.12 – Построение призмы

Для того чтобы воспользоваться формулой нахождения угла между плоскостями, необходимо составить уравнения плоскостей D_1MK и CC_1D_1. Для этого определим координаты точек, которые будут однозначно задавать плоскость.

(D_1MK): $D_1(0;12;0), M(0;0;13), K(12;0;8)$.

Так как (D_1MK) не проходит через начало координат, то коэффициент $D=1$.

Составим систему уравнений и найдём коэффициенты плоскости:

$$\begin{cases} B\cdot 12+1=0, \\ C\cdot 13+1=0, \\ A\cdot 12+C\cdot 8+1=0, \end{cases} \begin{cases} 12B+1=0, \\ 13C+1=0, \\ 12A+8C+1=0, \end{cases} \begin{cases} A=-\dfrac{5}{12\cdot 13}, \\ B=-\dfrac{1}{12}, \\ C=-\dfrac{1}{13}. \end{cases}$$

Запишем уравнение плоскости с найденными коэффициентами:

$$-\frac{5}{12\cdot 13}x-\frac{1}{12}y-\frac{1}{13}z+1=0,$$

умножим полученное уравнение на $(-12\cdot 13)$, получим

$$5x+13y+12z-12\cdot 13=0, \qquad a=5, b=13, c=12.$$

Теперь рассмотрим плоскость CC_1D_1 и запишем её уравнение:

(CC_1D_1): $C(12;12;21), C_1(12;12;0), D_1(0;12;0)$.

Составим систему уравнений и найдём коэффициенты плоскости:

$$\begin{cases} A_1\cdot 0+B_1\cdot 12+C_1\cdot 0+1=0, \\ A_1\cdot 12+B_1\cdot 12+C_1\cdot 0+1=0, \\ A_1\cdot 12+B_1\cdot 12+C_1\cdot 12+1=0, \end{cases} \begin{cases} 12B_1+1=0, \\ 12A_1+12B_1+1=0, \\ 12A_1+12B_1+12C_1+1=0, \end{cases} \begin{cases} A_1=0, \\ B=-\dfrac{1}{12}, \\ C=0. \end{cases}$$

Запишем уравнение плоскости с найденными коэффициентами:

$$-\frac{1}{12}y+1=0,$$

умножим полученное уравнение на (-12), получим

$$y-12=0, \qquad a_1=0, b_1=1, c_1=0.$$

Найденные значения подставим в формулу и найдём искомый угол:

$$\cos\alpha=\frac{|5\cdot 0+13\cdot 1+12\cdot 0|}{\sqrt{5^2+13^2+12^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+0^2}}=\frac{13}{13\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Так как } \cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{то } \alpha=45^0.$$

Ответ: 45^0.

Домашнее задание

Знать формулу нахождения угла между плоскостями;

знать и понимать алгоритм решения задач на нахождение угла между плоскостями; решить задачи:

Задача №1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между плоскостями (AD_1E)и (D_1FC), где E и F −середины рёбер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно.

Задача №2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, рёбра которой равны 4, найдите косинус угла между плоскостями ABC_1 и AB_1C_1.

Итог урока

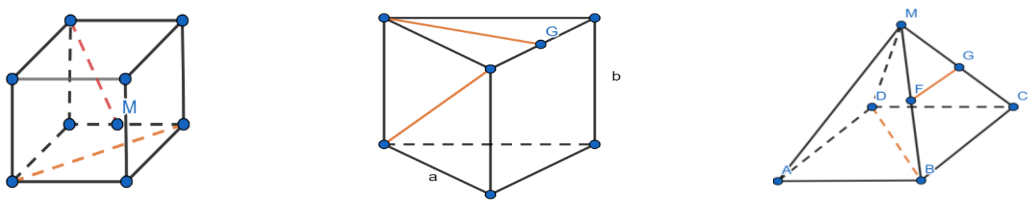
- Сегодня на уроке я повторил……
- Сегодня на уроке я научился……
- Сегодня мне необходимо ещё поработать над…

3.2.5 Урок 5. Контрольная работа

Цель: проверить знания и умения учащихся по изученному материалу.

Вариант 1

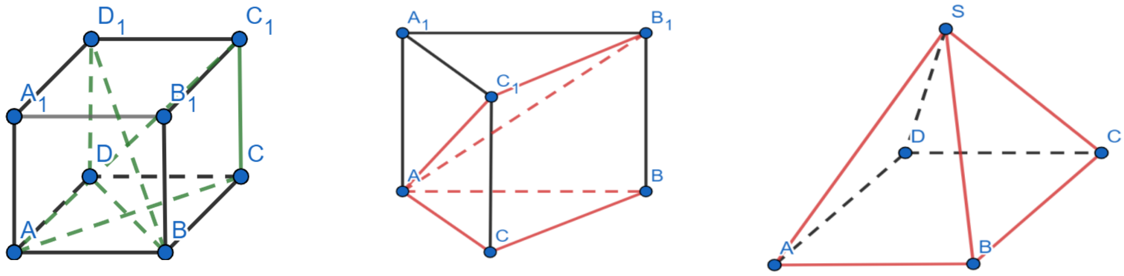
Задание №1. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми (рисунок 3.13 *а,б,в*).



А) Б) В)

Рисунок 3.13 – Рисунки к заданию 1: а) ребро куба равно a, M −середина ребра; б) правильная призма; в) правильная пирамида, ребро a $FG||BC, MG = GC$

Задание №2. Найти угол между плоскостями (рисунок 3.14 *а,б,в*).



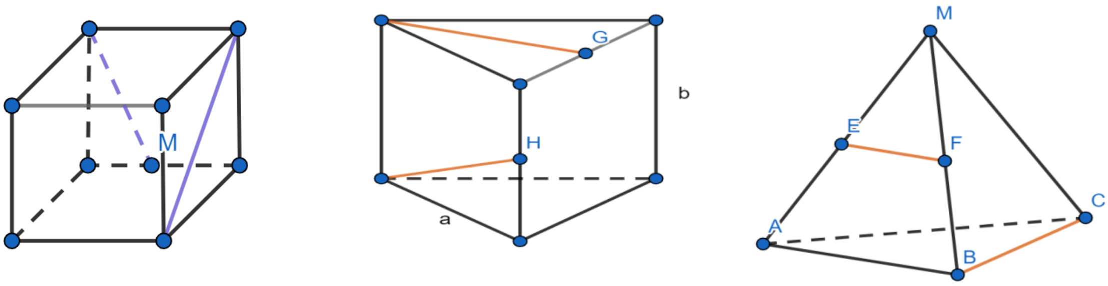
А)   Б)   В)

Рисунок 3.14 – Рисунки к заданию 1: а) ребро куба равно 1; б) правильная призма; в) правильная пирамида, ребро 1

Задание №3 (ЕГЭ 2016). На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 4$, а $B_1Q = 3$. Найти расстояние от точки C до плоскости APQ.

Вариант 2

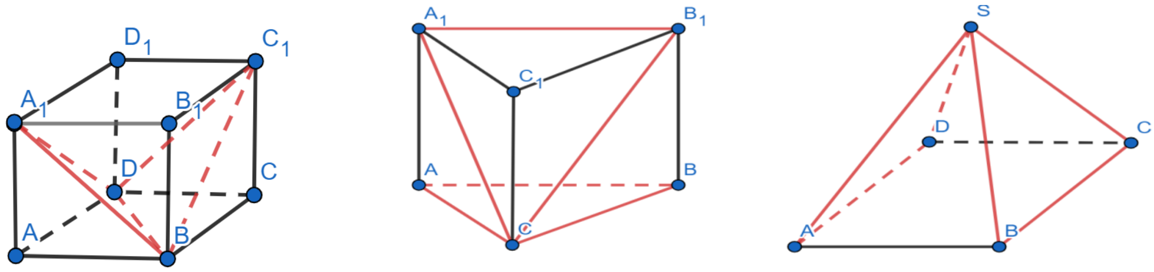
Задание №1. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми (рисунок 3.15 *а,б,в*).



А)   Б)   В)

Рисунок 3.15 – Рисунки к заданию 1: а) ребро куба равно a, M –середина ребра; б) правильная призма, M, H –середины; в) правильная пирамида, ребро a $EF||AB, ME = AE$

Задание №2. Найти угол между плоскостями (рисунок 3.16 *а,б,в*).



А) Б) В)

Рисунок 3.16 – Рисунки к заданию 1: а) ребро куба равно 1; б) правильная призма; в) правильная пирамида, ребро 1

Задание №3 (ЕГЭ 2016). В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 12$, а высота призмы равна 2. На рёбрах B_1C_1 и АB отмечены точки P и Q соответственно, причём $PC_1 =$ $= 3,$ а $AQ = 3$. Найти расстояние от точки B до плоскости A_1PQ.

3.2.6 Рекомендованная литература

1. **Александров А.Д.,** Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия для 10-11 классов – Москва: Просвящение, 1999
2. **Атанасян Л.С. и др.** Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. – Москва: Просвящение, 2010
3. **Ершова А.П., Голобородько В.В.** Самостоятельные и контрольные работы. Геометрия 10-11. –Москва: Илекса, 2010.
4. **Литвиненко В.Н.** Многогранники. Задачи и решения. – Москва: Вита – Пресс, 1995.
5. **Понтрягин Л.С.** Метод координат. – Москва: Наука, 1987.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель данной работы была направлена на изучение методики обучения решению геометрических задач координатным методом в старших классах средней школы и разработку факультативного курса по применению «Метода координат к решению стереометрических задач в условиях ЕГЭ» рассчитанный на выпускников, которые желают углубить свои знания, качественно подготовиться к сдаче ЕГЭ.

Подведя итоги данной исследовательской работы, можно сказать, что при подготовке к экзаменам факультативные занятия занимают важное место в обучении.

Они решают две главные задачи: во-первых, развитие интереса, углубление знаний, совершенствование знаний и умений по математике; во-вторых, организация свободного времени учащихся с целью их общего развития.

Апробация измерительного материала, была проведена на площадке школа № 37 в городе Златоуст на протяжении всего учебного года. Поставленные цели и задачи факультативного курса были реализованны. Перспективно продолжить использование данного факультативного курса в школьной программе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Автономова, Т. В**. Основные понятия и методы школьного курса геометрии: книга для учителя / Т.В. Автономова, Б. И. Аргунов. – Москва: Просвещение, 1988. – 127 с.
2. Геометрия для 7-9 классов средней школы / В. Ф. Бутузов, С. Д. Кадомцев, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина. – Москва : Просвещение, 1992. – 335 с.
3. **Виленкин, Н. Я**. Математика: учебник для 5 классов средней школы / Н.Я. Виленкин, А. С. Чесноков, С. И Шварцбурд. – Москва : Просвещение, 1989. – 304 с.
4. Математика : учебник для 6 кл. общеобразоват. учреждений / Н.Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И Шварцбурд. – Москва : Мнемозина, 2001. – 304 с.
5. **Гельфанд, И. М**. Метод координат / И. М. Гельфанд. – Москва : Наука, 1973. – 7 с.
6. **Дорофеев, Г. В**. Математика: учебник для 5 классов общеобразоват. учреждений / И. Ф. Шарыгин, С. Б. Суворова. – Москва : Просвещение, 2000. – 368 с.
7. **Дорофеев, Г. В**. Математика: учебник для 6 кл. общеобразоват. учеб. заведений / Г.В. Дорофеев, И. Ф. Шарыгин, С. Б. Суворова. – Москва : Дрофа, 1998. – 416 с.
8. **Петерсон, Л. Г.** Изучение координат в III – IV кл. / Л. Г. Петерсон // Математика в школе. – 1983. – № 4.
9. **Мищенко, Т. М.** Индивидуальные карточки по геометрии для 7–9 кл. / Т. М. Мищенко // Математика в школе. – 2001. – № 8.
10. **Бощенко, О. В.** Итоги работы в 7 кл. по учебнику Шарыгина И. Ф. 7–9 / О.В. Бощенко // Математика в школе. – 2002. – № 5.
11. **Лудина, Г. Б.** К изучению перемещений на координатной плоскости / Г.Б. Лудина // Математика в школе. – 1983. – № 2.

12. К началу обучения геометрии 1–7 кл. // Математика в школе. – 1983. – № 6.

13. **Лускина М. Г**. Факультативные занятия по математике в школе: Методические рекомендации / М. Г. Лускина, В. И. Зубарева. – Киров ВГПУ, 1995.

14. **Лященко, Е. И.** Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: учебное пособие для студентов физико – математической специальности педагогических институтов / Е. И. Лященко, К. В. Зобкова, Т. Ф. Кириченко. – Москва. : Просвещение, 1988. – 233 с.

15. **Савин, А. П.** Метод координат / А. П. Савин // Квант. – 1977. – № 9.

16. Методика преподавания математики в средней школе: частная методика: учебное пособие для студентов педогогических институтов по физико – математической специальности / В. И. Мишин, А. Я. Блох, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев. – Москва , 1987. – 416 с.

17. **Никольская, И. Л**. Факультативный курс по математике: учебное пособие для 7-9 классов средняя школа / И. Л. Никольская. – Москва : Просвещение, 1991. – 383 с.

18. Новые компьютерные технологии. Координатная плоскость // Математика – Приложение к газ. «Первое сентября». – 2004. – № 29.

19. Нужна ли школе XXI века геометрия /И. Шарыгин // Математика – Приложение к газ. «1 сентября». – 2004. – № 12.

20. **Атанасян, Л.С.** О конкретном учебнике геометрии для 7–9 кл. / Л.С. Атанасян // Математика в школе. – 1989. – № 1.

21. **Феоктистов, И. Е.** Обсуждение одного учебника / И. Е Феоктистов // Математика в школе. – 2001. – № 5.

22. **Погорелов, А. В**. Геометрия для 7–11 классов средней школы / А. В. Погорелов. – Москва: Просвещение. – 1990. – 384 с.

23. **Понтрягин, Л. С**. Знакомство с высшей математикой. Метод координат / Л. С. Понтягин. – Москва. Наука. – 1987. – 128 с.

24. Программа по математике для средней школы – Москва: Просвещение. – 1998. – 205 с.

25. **Саранцев, Г. И**. Упражнения в обучении математике / Г. И. Саранце. – Москва: Просвещение. – 1995. – 240 с.

26. **Сикорский, К. П.** Дополнительные главы по курсу математики. учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 7–8 классов / К. П. Сикорский. – Москва: Просвещение. – 1974. – 315 с.

27. Упражнения по теме «Координатная плоскость» / О.А. Леонова // Математика в школе. – 2001. – № 10.

28. **Шарыгин, И. Ф**. Геометрия 7–9 кл.: учебник для общеоразовательных учебных заведений / И.Ф. Шарыгин. – Москва. Дрофа. – 2000. – 368 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Примеры решения стереометрических задач координатным методом из реальных ЕГЭ

Задача № 1. ЕГЭ 2016 (профильная математика)

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите расстояние от точки B до плоскости FB_1C_1.

Решение:

Для решения этой задачи введём координаты, пусть точка A – начало координат (рисунок А.1*)*.

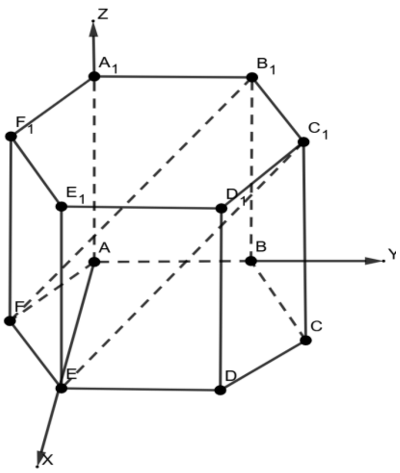


Рисунок А.1 – Правильная шестиугольная призма
(задача №1)

Воспользуемся формулой нахождения расстояния от точки до плоскости

$$\rho = \frac{|A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Сначала составим уравнение плоскости FB_1C_1. *Определим координаты точек:*

$$F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right), \qquad B_1(0; 1; 1), \qquad C_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}; 1\right).$$

Так как плоскость FB_1C_1 не проходит через начало координат, то коэффициент $D = 1$.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + B \cdot (-\frac{1}{2}) + C \cdot 0 + 1 = 0, \\ A \cdot 0 + B \cdot 1 + C \cdot 1 + 1 = 0, \\ A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + B \cdot \frac{3}{2} + C \cdot 1 + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{3}A - 2B + 2 = 0, \\ B + C + 1 = 0, \\ \sqrt{3}A + 3B + 2C + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ B = 1, \\ C = -2. \end{cases}$$

Уравнение плоскости $(\mathrm{FB_1C_1})$ имеет вид

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}x + y - 2z + 1 = 0.$$

Подставим координаты точки $B(0;1;0)$ и найденные коэффициенты плоскости, найдём искомое расстояние

$$\rho = \frac{\left|-\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 1\right|}{\sqrt{(-\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{16}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ**:** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача № 2. ЕГЭ 2017 (профильная математика)

Сечением прямоугольного параллелепипеда $\mathrm{ABCDEFA_1B_1C_1D_1}$ плоскостью α, содержащей прямую $\mathrm{BD_1}$ и параллельной прямой AC, является ромб (рисунок А.2*)*.

а) докажите, что грань ABCD — квадрат.

б) найдите угол между плоскостями α и $\mathrm{BCC_1}$, если $\mathrm{AB} = 4$, $\mathrm{AA_1} = 6$.

Решение:

а) построим сечение, содержащее прямую $\mathrm{BD_1}$ и параллельное прямой AC.

Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелепипеда,

$BD_1 \cap CA_1 = O$, O — середина диагонали BD_1.

В плоскости ACC_1 через точку O проведем прямую MN, параллельную AC. Точка M лежит на ребре AA_1, точка N лежит на ребре CC_1.

Мы построили искомое сечение. Это четырехугольник BMD_1N, который по условию является ромбом.

Так как BMD_1N — ромб, то $MN \perp BD_1$. Так как $MN \perp BD_1$ и $MN || AC$, то $AC \perp BD_1$. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $AC \perp BD$, а это значит, что $ABCD$ — прямоугольник, диагонали которого перпендикулярны, является квадратом.

б) для решения второй части задачи введём координаты, пусть точка D начало координат, а координатные оси проходят по трём измерениям параллелепипеда.

Составим уравнения для плоскостей (BMD_1N) и (BCC_1).

(BMD_1N): $B(4; 4; 0)$, $N(0; 4; 3)$, $D_1(0; 0; 6)$.

Так как плоскость не проходит через начало координат, то $D = 1$.

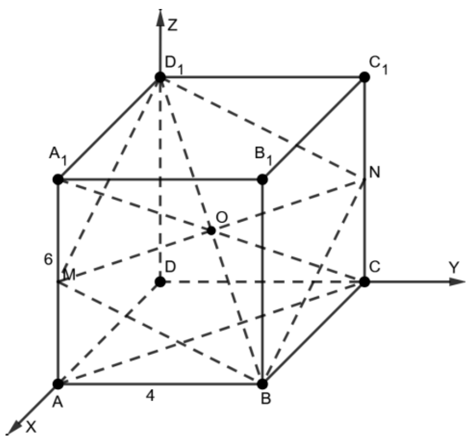


Рисунок А.2 – Прямоугольный параллелепипед (задача №2)

Составим и решим систему уравнений и запишем уравнение плоскости (BMD_1N):

$$\begin{cases} A\cdot 4 + B\cdot 4 + C\cdot 0 + 1 = 0, \\ A\cdot 0 + B\cdot 4 + C\cdot 3 + 1 = 0, \\ A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 6 + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 4A + 4B + 1 = 0, \\ 4B + 3C + 1 = 0, \\ 6C + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{8}, \\ B = -\dfrac{1}{8}, \\ C = -\dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

$$-\frac{1}{8}x-\frac{1}{8}y-\frac{1}{6}z+1=0| \cdot (-24)$$

$$3x+3y+4z-24=0 - \text{уравнение плоскости } (BMD_1N).$$

Теперь составим уравнение плоскости (BCC_1).

(BCC_1): $B(4;4;0)$, $C(0;4;0)$, $C_1(0;4;6)$.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} A\cdot 4+B\cdot 4+C\cdot 0+1=0, \\ A\cdot 0+B\cdot 4+C\cdot 0+1=0, \\ A\cdot 0+B\cdot 4+C\cdot 6+1=0, \end{cases} \quad \begin{cases} 4A+4B+1=0, \\ 4B+1=0, \\ 4B+6C+1=0, \end{cases} \quad \begin{cases} A=0, \\ B=-\frac{1}{4}, \\ C=0. \end{cases}$$

$$-\frac{1}{4}y+1=0| \cdot (-4)$$

$$y-4=0 - \text{уравнение плоскости } (BCC_1).$$

Подставим найденные значения коэффициентов плоскостей в формулу

$$\cos\alpha=\frac{|A\cdot A_1+B\cdot B_1+C\cdot C_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},$$

$$\cos\alpha=\frac{|0\cdot 3+1\cdot 3+0\cdot 4|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{3^2+3^2+4^2}}=\frac{3}{\sqrt{34}}=\frac{3\sqrt{34}}{34}.$$

Ответ: $arccos\frac{3\sqrt{34}}{34}$.

Задача № 3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ длина основания равна $2\sqrt{3}$, а высота $-2\sqrt{5}$. Найдите расстояние между серединами противоположных рёбер пирамиды (рисунок А.3).

Решение:

На примере этой задачи проиллюстрируем применение метода координат. В правильных треугольных пирамидах три взаимно перпендикулярных направления – это направления ребра нижнего основания, высоты к этому ребру в основании и высоты пирамиды. Примем за начало координат точку O – центр основания пирамиды, оси направим, как показано на рисунке.

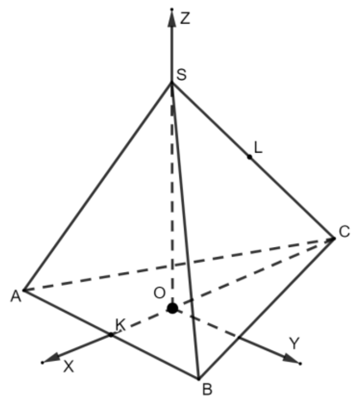


Рисунок А.3 – Правильная треугольная пирамида
(задача №3)

Высота KC основания ABC равна:

$$KC^2 = BC^2 - BK^2, KC^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 12 - 3 = 9, KC = 3.$$

Так как $O-$ точка пересечения медиан треугольника ABC, то $CO{:}\,OK = 2{:}\,1$. Тогда если $CK = 3,$ то $CO = 2, OK = 1$. Определим теперь координаты точек:

$$K(1; 0; 0), \qquad C(-2; 0; 0), \quad S\left(0; 0;\ 2\sqrt{5}\right).$$

Точка L является серединой отрезка SC, координаты середины отрезка находятся, как полусуммы координат концов:

$$x_L = \frac{0-2}{2} = -1; \quad y_L = \frac{0+0}{2} = 0, \quad z_L = \frac{2\sqrt{5}+0}{2} = \sqrt{5},$$

$$L\left(-1; 0; \sqrt{5}\right).$$

Расстояние между точками находим по формуле:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Подставим координаты точек в формулу и найдём искомое расстояние:

$$LK^2 = (-1-1)^2 + (0-0)^2 + \left(\sqrt{5} - 0\right)^2 = 4 + 5 = 9, \qquad KL = 3.$$

Ответ: 3.

Задача № 4. ЕГЭ 2016 (основная волна).

В правильной треугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания $AB = 6$, а боковое ребро $AA_1 = 3$. На ребре B_1C_1 отмечена точка L так, что $B_1L = 1$. Точки K и $M -$ середины рёбер AB и A_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L (рисунок А.4).

а) докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) найдите объём пирамиды, вершина которой точка M, а основание пирамиды – сечение данной призмы плоскостью γ.

Решение:

Введём координатную плоскость. За начало координат возьмём точку $H -$ середина AC, а оси x, y, z направим, так как показано на чертеже. Построим заданное сечение.

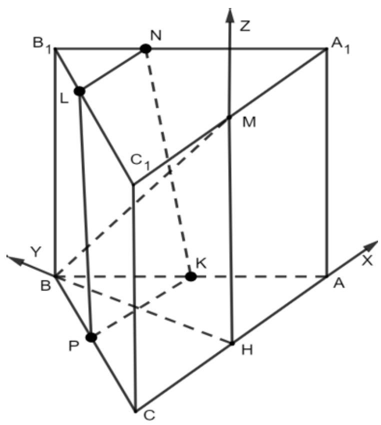


Рисунок А.4 – Правильная треугольная призма

(задача №3)

а) плоскость γ может быть задана точками L, P, K. Определим координаты этих точек.

Координаты $x, y,$ точки K найдём как координаты середины отрезка:

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2}, \qquad y_K = \frac{y_A + y_B}{2}, \qquad x_K = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2},$$

$$y_K = \frac{0 + 3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \qquad K\left(\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}; 0\right).$$

У точки P только первая координата отличается знаком от координат точки K,

$P\left(-\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}; 0\right)$.

Для того чтобы определить координаты точки L, надо использовать формулу деления отрезка в заданном отношении:

По условию $B_1L: LC_1 = 1:5$, L – внутренняя точка отрезка B_1C_1, откуда следует, что $\lambda = \frac{1}{5}$.

$$x_L = \frac{x_{B_1} + \lambda x_{C_1}}{1+\lambda}, \qquad y_L = \frac{y_{B_1} + \lambda y_{C_1}}{1+\lambda},$$

$$x_L = \frac{0 + \frac{1}{5}\cdot(-3)}{1+\frac{1}{5}} = -\frac{1}{2}, \qquad y_L = \frac{3\sqrt{3} + \frac{1}{5}\cdot 0}{1+\frac{1}{5}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}, \quad z_L = \frac{3 + \frac{1}{5}\cdot 3}{1+\frac{1}{5}} = 3,$$

$$L\left(-\frac{1}{2}; \frac{5\sqrt{3}}{2}; 3\right).$$

Координаты точек, определяющие однозначно плоскость γ нашли. Общее уравнение плоскости имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, так как плоскость γ не проходит через начало координат, то $D = 1$. Составим систему уравнений, подставляя поочерёдно вместо x, y, z координаты точек L, P, K:

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}A + \frac{3\sqrt{3}}{2}B + 1 = 0, \\ \frac{3}{2}A + \frac{3\sqrt{3}}{2}B + 1 = 0, \\ -\frac{1}{2}A + \frac{5\sqrt{3}}{2}B + 3C + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 0, \\ B = -\frac{2}{3\sqrt{3}}, \\ C = \frac{2}{9}. \end{cases}$$

Умножим обе части полученного уравнения на $(-9\sqrt{3})$, получим уравнение плоскости γ:

$6y - 2\sqrt{3}z - 9\sqrt{3} = 0$. Вектор нормали для данной плоскости имеет координаты $\vec{n}(0; 6; -2\sqrt{3})$.

Найдём координаты вектора $\overrightarrow{BM}(0;-3\sqrt{3};3)$. Если вектор $\overrightarrow{BM}$ умножить на число $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, то получим вектор нормали $\vec{n}$ плоскости γ, т.е. $\vec{n}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\overrightarrow{BM}$. Таким образом, $\overrightarrow{BM}$ коллинеарен вектору нормали плоскости γ, значит прямая $BM\perp\gamma$.

б) объём пирамиды вычисляется по формуле

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot h, \text{где } h-\text{высота пирамиды.}$$

Мы рассматриваем пирамиду $MLNKP$, где M — вершина, а $LNKP$ — основание (рисунок А.5).

Основанием пирамиды является трапеция, площадь трапеции находим по формуле:

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot h, \text{где } a,b-\text{основания трапеции, а } h-\text{её высота.}$$

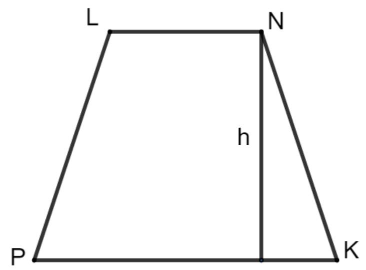


Рисунок А.5 – Трапеция (задача № 3)

Чтобы найти длины оснований трапеции, воспользуемся формулой расстояние между точками:

$$d^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2.$$

Подставим координаты нужных нам точек и найдём основания трапеции:

$$LN^2=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2+(3-3)^2=1,\qquad LN=1,$$

$$PK^2=\left(-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+(0-0)^2=9,\qquad PK=3,$$

$$NK^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (3-0)^2 = 13.$$

Так как трапеция равнобедренная, и зная длины её оснований, и боковой стороны найдём высоту по теореме Пифагора:

$$h^2 = NK^2 - \left(\frac{PK - LN}{2}\right)^2 = 13 - \left(\frac{3-1}{2}\right)^2 = 13 - 1 = 12, \qquad h = 2\sqrt{3}.$$

Найдём площадь основания пирамиды:

$$S_{PLNK} = \frac{1+3}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Чтобы найти высоту пирамиды, найдём расстояние от точки до плоскости по формуле:

$$\rho = \frac{|A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Уравнение плоскости знаем, координаты точки $M(0;0;3)$ подставим значения и вычислим

$$\rho = \frac{|6 \cdot 0 + (-2\sqrt{3}) \cdot 0 + (-9\sqrt{3}) \cdot 3|}{\sqrt{6^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2}} = \frac{27\sqrt{3}}{\sqrt{48}} = \frac{27\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{27}{4}.$$

Находим объём пирамиды:

$$V_{MLNKP} = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{27}{4} = 9\sqrt{3}.$$

Ответ: $V_{MLNKP} = 9\sqrt{3}$ куб. ед.

Задача №5. (ЕГЭ 2016, основная волна.) В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 16, а высота равна 4. На ребрах AB, CD и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причем $AM = DN = 4$, $AK = 3$ (рисунок А.5).

а) докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

б) найдите расстояние от точки M до плоскости SBC.

Решение:

Пусть точка $O -$ центр основания пирамиды. Введём систему координат так, что точка O — начало координат.

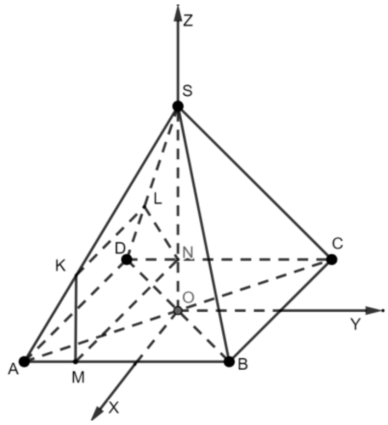


Рисунок А.5 – Правильная четырехугольная пирамида
(задача № 5)

а) для доказательства параллельности плоскостей, составим сначала уравнения этих плоскостей. Для начала определим координаты точек, которые однозначно задают эти плоскости.

Составим уравнение плоскости SBC, для этого определим координаты точек S, B, C:

$$S(0;0;4),\ \ B(8;8;0),\ \ C(8;-8;0).$$

Составим систему уравнений, подставляя поочерёдно значения координат точек в общее уравнение плоскости. Так как плоскость не проходит через начало координат, то в общем уравнении плоскости коэффициент $D = 1$. Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} 8A + 8B + 1 = 0, \\ -8A + 8B + 1 = 0, \\ 4C + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 0, \\ B = -\dfrac{1}{8}, \\ C = -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Запишем уравнение плоскости:

$$0 \cdot x - \frac{1}{8}y - \frac{1}{4}z + 1 = 0| \cdot (-8),$$

$y + 2z - 8 = 0 -$ уравнение плоскости SBC.

Теперь необходимо составить уравнение плоскости MNK. Для этого необходимо определить координаты точек M, N, K. Для определения координат точки K сделаем плоский чертёж (рисунок А.6).

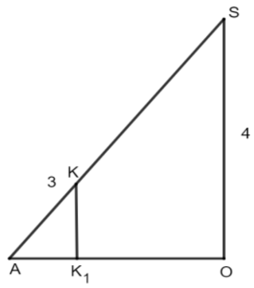


Рисунок А.6 – Чертеж (задача № 5)

Так как $O -$ центр основания пирамиды, то $AO = 8\sqrt{2}$. По теореме Пифагора в треугольнике AOS, найдём гипотенузу AS:

$$AS = \sqrt{AO^2 + SO^2}, \quad AS = \sqrt{\left(8\sqrt{2}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{128 + 16} = \sqrt{144} = 12, \; AS = 12.$$

$\triangle AKK_1 \backsim \triangle ASO,$ то $AK{:}AS = KK_1{:}SO$ и $AK_1{:}AO = KK_1{:}SO,$

$3{:}12 = KK_1{:}4, \qquad KK_1 = 1$ и $AK_1{:}8\sqrt{2} = 1{:}4, \qquad AK_1 = 2\sqrt{2}.$

Так как $AO = 8\sqrt{2},$ а $AK_1 = 2\sqrt{2},$ то $K_1O = AO - AK_1,\; K_1O = 8\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ (рисунок А.7).

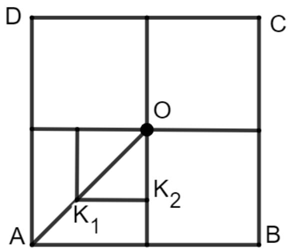


Рисунок А.7 – чертеж (задача №5)

Так как , $K_1O = 6\sqrt{2},$ а $OK_2 = K_1K_2,$ то $K_1K_2 = 6,$ тогда точка $K_1(6; -6)$.

Теперь можно записать координаты точки $K(6; -6; 1)$.

Так как $AM = 4,$ тогда точка $M\ (8; -4; 0),$ точка $N(-8; -4; 0)$.

Составим систему уравнений и запишем уравнение плоскости MNK:

$$\begin{cases} 8A-4B+1=0, \\ -8A-4B+1=0, \\ 6A-6B+C+1=0, \end{cases} \quad \begin{cases} A=0, \\ B=\dfrac{1}{4}, \\ C=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Запишем уравнение плоскости:

$$0\cdot x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z+1=0|\cdot(4),$$

$y+2z+4=0-$ уравнение плоскости MNK.

Рассмотри уравнения плоскостей

$$(SBC): y+2z-8=0, (MNK): y+2z+4=0.$$

Так как $A=A_1, B=B_1, C=C_1, D\neq D_1$, то данные плоскости параллельны.

б) выполним вторую часть задания, найдём расстояние от точки до плоскости. Уравнение плоскости SBC знаем $(y+2z-8=0)$, координаты точки $M(8:-4:0)$.

Используя формулу расстояния от точки до плоскости, вычислим требуемое расстояние

$$\rho(M,SBC)=\frac{|0\cdot 8+1\cdot(-4)+2\cdot 0-8|}{\sqrt{0^2+1^2+2^2}}=\frac{12}{\sqrt{5}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ: $\rho(M,SBC)=\boldsymbol{\frac{12\sqrt{5}}{5}}$**.**

Задача № 6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ ребро основания равно 6, высота равна 8. Точка K – середина бокового ребра SB. Найдите расстояние от середины ребра SF до плоскости AKC (рисунок А.8).

Решение**:**

Введём систему координат как показано на рисунке.

Для составления уравнения плоскости AKC определим и запишем координаты точек A, K, C:

$$A(-3\sqrt{3};\ -3;0), \qquad C(0;6;0), \qquad K\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};4\right).$$

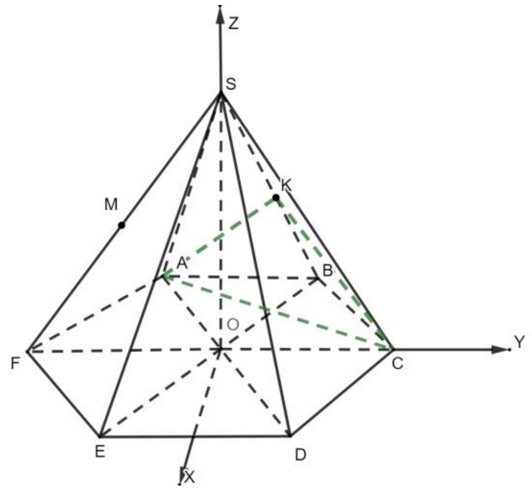


Рисунок А.8 – Правильная шестиугольная пирамида (задача №6)

Теперь необходимо найти коэффициенты для уравнения плоскости. Составим систему уравнений, подставляя в общее уравнение плоскости поочерёдно координаты точек A, K, C и решим её:

$$\begin{cases} -3\sqrt{3}A - 3B + 1 = 0, \\ -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}A + \dfrac{3}{2}B + 4C + 1 = 0, \\ 6B + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}, \\ B = -\dfrac{1}{6}, \\ C = 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение плоскости:

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot x - \frac{1}{6}y + 1 = 0 | \cdot \left(6\sqrt{3}\right),$$

$3x - \sqrt{3}y + 6\sqrt{3} = 0 -$ уравнение плоскости AKC .

Теперь определим координаты середины ребра $SF -$ точки M:

$$M(\,0;\ -3; 4).$$

Знaя уравнение плоскости и координаты точки, воспользуемся формулой расстояния от точки до плоскости, вычислим искомое расстояние:

$$\rho = \frac{|A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\rho(M, AKC) = \frac{|3 \cdot 0 + \left(-\sqrt{3}\right) \cdot (-3) + 0 \cdot 4 + 6\sqrt{3}|}{\sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}} = \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 4{,}5.$$

Ответ**:** 4,5.

Задача № 7. Точка $E-$ середина ребра BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти площадь сечения куба плоскостью D_1AE, если ребро куба равно 4 (рисунок А.9).

Решение:

Построим заданное сечение куба и введём систему координат с началом в точке D, ось x проходит через ребро AD, ось y проходит через ребро CD, а ось z через ребро DD_1. Определим координаты вершин этого сечения:

$$A(4; 0; 0), \qquad E(4; 4; 2), \qquad D_1(0; 0; 4), \;\; F(2; 4; 4).$$

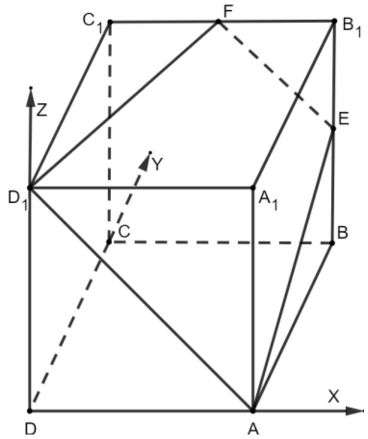


Рисунок А.9 – Куб (задача № 7)

Сечение $AEFD_1$ является равнобедренная трапеция (рисунок А.10):

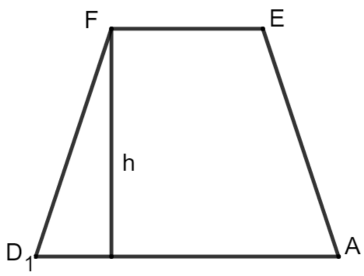


Рисунок А.10 – Равнобедренная трапеция (задача № 7)

Площадь трапеции вычисляется по формуле:

$$S_{AEFD_1} = \frac{FE + AD_1}{2} \cdot h, \text{где } h - \text{высота трапеции.}$$

Найдём длины оснований как расстояние между точками:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

$$EF = \sqrt{(2-4)^2 + (4-4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2},$$

$$AD_1 = \sqrt{(0-4)^2 + (0-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}.$$

Длины оснований трапеции определили, теперь найдём длину высоты трапеции для этого воспользуемся формулой вычисления расстояния от точки до прямой:

Уравнение прямой AD_1: $\frac{x-4}{-4} = \frac{y}{0} = \frac{z}{4}$, из уравнения запишем значения коэффициентов $a = -4, b = 0, c = 4$.

$$d(F, AD_1) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 2-0 & 4-0 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 4-0 & 4-4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2-0 & 0 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 4^2}} = 3\sqrt{2},$$

Итак, $h = 3\sqrt{2}$.

Можно вычислить площадь сечения:

$$S_{AEFD_1} = \frac{2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{2} \cdot 3\sqrt{2} = 18.$$

Ответ: 18.

Задача № 8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1. Найдите расстояние от точки C до прямой A_1B_1 (рисунок А.11).

Решение:

Пусть начало координат будет в точке A, прямая AB — ось x, прямая AE — ось y, а прямая AA_1 — ось z.

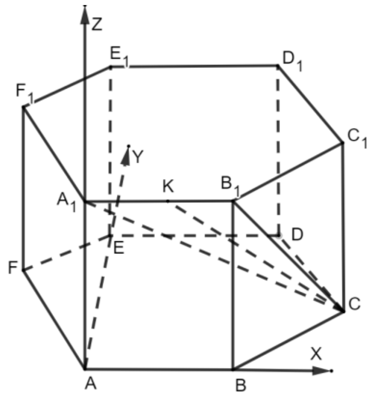


Рисунок А.11 – Призма (задача № 8)

Рассмотрим треугольник CB_1A_1, в котором. Определим координаты вершин данного треугольника (рисунок А.12):

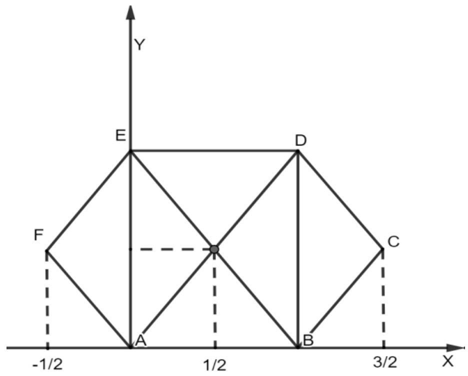


Рисунок А.12 – Координаты (задача № 8)

$$C\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right), A_1(0;0;1), \qquad B_1(1;01;).$$

По формуле, расстояние между точками

$$d^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2,$$

найдём

$$A_1C=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-0\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2+(0-1)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}+1}=\sqrt{4}=2.$$

По теореме косинусов для треугольника CB_1A_1 найдём косинус угла A_1B_1C:

$$cos\measuredangle(A_1B_1C)=\frac{A_1B_1^2+B_!C^2-A_1C^2}{2A_1B_1\cdot B_1C}=\frac{1+2-4}{2\cdot 1\cdot\sqrt{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

Зная косинус угла, найдём синус этого же угла

$$sin\angle(A_1B_1C) = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{7}{8}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}.$$

Найдём искомое расстояние, используя определение синуса

$$CK = B_1C \cdot sin\angle(A_1B_1C),\ \ CK = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Задача № 9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $AA_1 = 3, AD = 8,$ а $AB = 6$. Найти угол между плоскостью AA_1D и прямой EF, проходящей через середину рёбер AB и B_1C_1 (рисунок А.13).

Решение:

Введём систему координат так, что точка $B -$ начало координат, ось x проходит через ребро AB, ось $y - BC$, а ось $z - BB_1$.

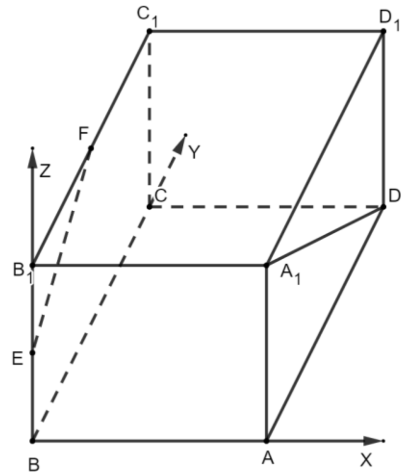


Рисунок А.13 – Параллепипед (задача №9)

Три точки однозначно определяют плоскость, подставим значения координат этих точек в общее уравнение плоскости и решим систему из трёх уравнений:

$$A(6;0;0),\qquad D(\ 6;8;0),\qquad A_1(6;0;3),$$

$$\begin{cases} 6A+1=0, \\ 6A+8B+1=0, \\ 6A+8B+3C+1=0, \end{cases}\qquad \begin{cases} A=-\frac{1}{6}, \\ B=0, \\ C=0. \end{cases}$$

$$-\frac{1}{6}x+1=0| \cdot (-6),$$

$$x-6=0 - \text{уравнение плоскости } ADD_1.$$

Определим координаты прямой EF, если $F(0;4;3)$, $E(3;0;0)$, то $EF(-3;4;3)$.

По формуле

$$\sin\varphi=\frac{|A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

находим угол между прямой и плоскостью

$$\sin\angle(EF,ADD_1)=\frac{|-3\cdot 1+4\cdot 0+3\cdot 0|}{\sqrt{(-3)^2+4^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+0^2}}=\frac{3}{\sqrt{34}}=\frac{3\sqrt{34}}{34}.$$

Ответ: $\arcsin(\frac{3\sqrt{34}}{34})$.

Задача № 10.

В правильной треугольной призме *ABCA'B'C'* сторона основания *AB* равна 6, а боковое ребро *AA'* равно 3. На ребре *AB* отмечена точка *K* так, что *AK* = 1. Точки *M* и *L* — середины рёбер *A'C'* и *B'C'* соответственно. Плоскость γ параллельна прямой *AC* и содержит точки *K* и *L*.

Докажите, что прямая *BM* перпендикулярна плоскости γ.

Решение:

Построим сечение призмы плоскостью γ. Введём систему координат, как показано на рисунке (рисунок А.14).

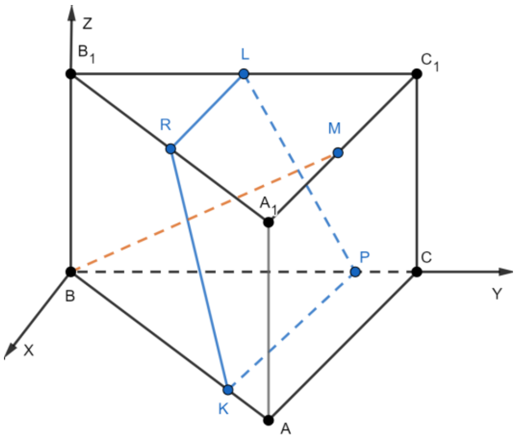


Рисунок А.14 – Правильная треугольная призма
(задача №10)

Составим уравнение плоскости γ, для этого определим координаты точек, которые однозначно определяют эту плоскость:

$$P(0;5;0),\quad L(0;3;3),\quad K\left(\frac{5\sqrt{3}}{2};\frac{5}{2};0\right).$$

Подставим поочерёдно координаты этих точек в общее уравнение плоскости и решим полученную систему уравнений, определив коэффициенты плоскости (так как плоскость не проходит через начало координат, то D=1):

$$\begin{cases} 5B+1=0, \\ 3B+3C+1=0, \\ \frac{5\sqrt{3}}{2}A+\frac{5}{2}B+1=0, \end{cases} \quad \begin{cases} A=-\frac{1}{5\sqrt{3}}, \\ B=-\frac{1}{5}, \\ C=-\frac{2}{15}. \end{cases}$$

Подставим найденные значения коэффициентов, запишем уравнение плоскости:

$$-\frac{1}{5\sqrt{3}}x-\frac{1}{5}y-\frac{2}{15}z+1=0|\cdot(-15\sqrt{3}),$$

$$3x+3\sqrt{3}y+2\sqrt{3}z-15\sqrt{3}=0 - \text{уравнение плоскости } \gamma.$$

Составим уравнение прямой BM, для этого сначала запишем координаты точек B и M:

$$B(0;0;0;),\quad M\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{9}{2};3\right).$$

Подставим значения координат в общее уравнение прямой:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0};$$

$$\frac{x}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}=\frac{y}{\frac{9}{2}}=\frac{z}{3}-\text{ уравнение прямой } BM.$$

Определим угол между прямой BM и плоскостью γ по формуле:

$$sin\alpha=\frac{A\cdot a+B\cdot b+C\cdot c}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$sin\alpha=\frac{3\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}+3\sqrt{3}\cdot\frac{9}{2}+2\sqrt{3}\cdot 3}{\sqrt{3^2+3^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2+3^2}}=\frac{24\sqrt{3}}{24\sqrt{3}}=1.$$

Так как $sin\alpha=1$, то угол между прямой BM и плоскостью γ равен 90^0, т.е. прямая BM перпендикулярна плоскости сечения, что и требовалось, доказать.