МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика изучения темы «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры основной школы

Выпускная квалификационная работа по направлению 44.03.01 Педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата «Математика»

Форма обучения заочная

Проверка на объем заимствований:
61 % авторского текста

Работа рекомендована к защите
«5» июня 2022 г.

зав. кафедрой математики и МОМ
______ Елена Альбертовна Суховиенко

Выполнила:
Студентка группы ЗФ-513-087-5-1
Огурцова Анна Александровна

Научный руководитель:
к.ф-м.н., доцент кафедры МиМОМ
Екатерина Олеговна Шумакова

Челябинск
2022

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность данной работы заключается в том, что, несмотря на создание новых методических комплексов обучения, разработанных согласно требованиям ФГОС, большинство учебников по математике для основной школы недостаточно ориентированы на использование проблемного обучения в целях формирования универсальных учебных действий.

Содержание темы многочлены является основой для изучения курса алгебры, поэтому очень важна активизация деятельности учащихся при её изучении, чему способствует реализация технологий проблемного обучения. В основной школе содержание материала в курсе алгебры группируется вокруг понятий «одночлен» и «многочлен», учащиеся овладевают навыками преобразований целых и дробных выражений, содержащие не только цифры, но и буквы, получают представления об операции извлечения корня, знакомятся с понятием уравнения, овладевают алгоритмами решения задач с несколькими неизвестными, изучают формулы сокращенного умножения. Без систематизированных знаний по теме «Одночлены и многочлены» трудно представить, как можно выполнять математические операции, не владея понятийным аппаратом по данной теме.

В связи с тем, что на данный момент большое внимание уделяется образовательной функции математики, существует множество различных подходов к структуре изучаемых курсов, школьные программы и учебники разнообразны, реализация учебной программы по математике необходимо начинать именно с анализа методических особенностей изучения конкретной темы. Поэтому требуется обратить внимание на методику обучения теме «Одночлены и многочлены», которая закладывает основы для изучения линии тождественных преобразований на протяжении всего курса математики в основной школе. Объект исследования – курс алгебры основной школы. Предмет исследования – методика изучения темы «Одночлены и многочлены».

Цель исследования: выявить методические особенности изучения темы «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры основной школы и разработать систему задач по теме исследования.

Задачи исследования:

- ознакомиться с историей появления многочленов;
- рассмотреть определения и свойства понятий «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры основной школы;
- выявить цели обучения теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры и общие требования к знаниям обучающихся по теме «Одночлены и многочлены»;
- провести анализ теоретического и задачного материала в учебниках различных авторов;
- изучить формы, методы, средства и методика обучения теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры основной школы;
- исследовать системы задач по теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры основной школы.

Методы исследования: анализ, синтез, обобщение.

Гипотеза исследования: можно предположить, что если придерживаться методических рекомендаций и разработать систему задач для усвоения темы, то получиться сформировать основные математические представления о многочленах и позволит избежать ошибок при выполнении аналогичных упражнений более высокого уровня сложности.

Теоретической основой послужили работы Алимова Ш.А., Баума И.В., Васильевой Г.Л., Виленкина Н.Я., Галямовой Э.Х., Колягина Ю.М., Кудряшовой С. В., Макарычева Ю.Н., Муравина Г.К., Сабировой Э.Г. и др.

Структура данной работы: состоит из введения, двух глав, заключения и списка использованной литературы.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ В ТЕМЕ «ОДНОЧЛЕНЫ И МНОГОЧЛЕНЫ» ПО АЛГЕБРЕ

1.1 История появления многочленов

Рассматривая разложение многочленов на множители, возникает вопрос: «А как это было у древних?» Ни у древних египтян, ни у древних вавилонян в алгебре не было букв. У древних греков величины обозначались не буквами или числами, а отрезками прямых. Они говорили не «a^2», а «квадрат на отрезке», не «ab», а «прямоугольник, содержащийся между отрезками a и b» [2].

Еще в начале XVI века, когда постепенно познавались глубины математики, а теорем было не так уж и много, математики пытались сформулировать теорию о многочленах.

К середине XIX века одной из центральных проблем в алгебре была задача по нахождению формул корней уравнений вида $P(x) = 0$, в котором $P(x)$ является многочленом. Данная задача была решена в полном объеме в работах известнейших математиков, которые занимались этой проблемой в начале XIX века, это такие ученые как: Э. Галуа (1811-1832), Н. Абель (1802-1829), также П. Руффини (1765-1822).

Итальянские математики еще в XVI веке нашли формулы, с помощью которых можно было решить уравнение третьей и четвертой степени. Абелем и Руффини было доказано то, что, начиная с пятой степени, используя общую формулу, кроме действий сложения и умножения, лишь извлечение корней, не существует. Галуа открыл закономерности в поведении корней, которые приложимы к каждому конкретному уравнению и создал теорию групп [9].

В это же время К. Гауссом была доказана основная теорема алгебры, которая утверждает, что всякий многочлен всегда имеет хотя бы один корень (возможно, являющийся не вещественным, а комплексным числом). После фундаментальных работ по теории многочленов Гаусса и других математиков, проблема вычисления корней многочленов переместилась из алгебры в теорию функций и теорию приближенных вычислений (численных методов) [22].

Гаусс не является первооткрывателем основной теоремы алгебры. Первым предложил свою трактовку Альбер де Жирар в 1629 г., но, к сожалению, дальше сформулированного утверждения дело не дошло. На протяжении XVIII века такие известные математики, как: Лагранж, Даламбер, Эйлер и Фонсене всячески пытались создать доказательство к теореме о многочленах, но, к огорчению последних, их трактовки не признавались убедительными.

Общепризнанным доказательством теоремы о многочленах являются работы Карла Фридриха Гаусса. Немец, по происхождению, сын бедных учителей, в дальнейшем стал известным математиком, физиком, астрономом и геодезистом. Работы Гаусса, в частности, в математике принесли огромный вклад в развитие науки. Его, бесспорно, называли «королем математики».

В 1799 г. Карл Фридрих Гаусс привел несколько доказательств основной теоремы алгебры: «Число комплексных корней многочлена равно степени многочлена (при подсчете числа корней кратный корень считается столько же раз, сколько и его степень)».

В развитие теории многочленов внесли свой вклад и другие ученые, такие как Огюстен Луи Коши, Эдмон Лагерр, Франсуа Эдуард Анатоль Люк и многие другие.

Роль многочленов резко изменилась в XX веке, в связи с расширением практического применения математики для решения задач естествознания и механики.

Начиная с XX века, многочлены стали использоваться для новых целей. Нужно было быстро и эффективно передавать информацию. Многочлены содержат в себе символьные исчисления, которые стали использовать как способ передачи данных. Сообщение должно было содержать в себе последовательность символов, которое потом передали по каналу связи. Однако, при передаче информации могли возникнуть ошибки. Поэтому была предложена идея кодирования сообщения, которую успешно используют и на данный момент [30].

1.2 Цели обучения теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры

Тема «Одночлены и многочлены» входит в линию тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы. Данная линия является одной из основных содержательных линий курса математики. Тождественные преобразования выражений изучаются, начиная с начальных классов, и продолжаются в течение всего курса алгебры [4].

Символы играют неотъемлемую роль в интеграции новых знаний. Изучение математики опирается на интенсивное использование различных типов букв для представления переменных, знаков для чисел, формул и алгоритмов [49]. Поэтому, изучение темы «Одночлены и многочлены» так важно при изучении линии тождественных преобразований в школьном курсе алгебры.

В федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования (утвержденный приказом Минобрнауки России от 17 декабря 2010 г. № 1897) (ФГОС ООО) [41] отмечено, что результаты изучения предметной области «Математика» должны отражать:

- формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления;
- овладение символьным языком алгебры, приёмами выполнения тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств; умения моделировать реаль-

ные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат;

- развитие умений работать с учебным математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию), точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений;
- формирование представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления.

В учебном пособии по методике преподавания математики Г.И. Саранцева выделены три основные цели обучения математике: воспитательные, общеобразовательные и практические. «Воспитательные цели обучения математике направлены на формирование мировоззрения учащихся, формирование алгоритмического мышления, приобщение к творческой деятельности и культуре общения, воспитание трудолюбия. Общеобразовательные цели обучения математике включают в себя: систему математических знаний, умений и навыков, которыми нужно овладеть учащимся. Данные цели помогают овладеть языком и символикой математики, математическим моделированием, специальными приемами и алгоритмами решения. Практические цели обучения математике направлены на формирование умений: строить математические модели реальных явлений, читать данные с графиков, изучить роль математики в научно-техническом прогрессе, производстве и конструировании» [38, с.29].

О постановке целей обучения в 20 веке задумывался и Б. Блум – профессор педагогики Чикагского Университета. В его фундаментальном труде «Таксономия Образовательных Целей: Сфера познания» предпринята попытка к разделению целей на иерархии, ведь, по мнению Б. Блума: «Цели обучения напрямую имеют зависимость от иерархии мыслительных процессов: запоминание, понимание, применение, анализ, синтез, оценка» [46].

В примерной программе основного общего образования от 8 апреля 2015 года [36, с.86] указывается, что в процессе изучения линии «Тождественные преобразования» выпускник в 7-9 класса в процессе обучения (для использования в повседневной жизни и обеспечения возможности успешного продолжения образования на базовом уровне) научится: Выполнять несложные преобразования для вычисления значений числовых выражений, содержащих степени с натуральным показателем, степени с целым отрицательным показателем. Выполнять несложные преобразования целых выражений: раскрывать скобки, приводить подобные слагаемые. Использовать формулы сокращенного умножения (квадрат суммы, квадрат разности, разность квадратов) для упрощения вычислений значений выражений. Выполнять несложные преобразования дробно-линейных выражений и выражений с квадратными корнями».

В примерной программе основного общего образования от 8 апреля 2015 года в процессе изучения линии «Тождественные преобразования» выпускник получит возможность научиться в 7-9 классах для обеспечения возможности успешного продолжения образования на углубленном уровне: «Свободно оперировать понятиями степени с целым и дробным показателем. Выполнять доказательство свойств степени с целыми и дробными показателями. Оперировать понятиями «одночлен», «многочлен», «многочлен с одной переменной», «многочлен с несколькими переменными», коэффициенты многочлена, «стандартная запись многочлена», степень одночлена и многочлена. Свободно владеть приемами преобразования целых и дробно-рациональных выражений. Выполнять разложение многочленов на множители разными способами, с использованием комбинаций различных приемов. Использовать теорему Виета и теорему, обратную теореме Виета, для поиска корней квадратного трехчлена и для решения задач, в том числе задач с параметрами на основе квадратного трехчлена. Выполнять деление многочлена на многочлен с остатком. Свободно оперировать понятиями тождество, тождество на множестве, тождественное преобразование» [36, с.105].

Таким образом, подводя итог всему выше написанному, можно выделить основные цели обучения линии тождественных преобразований в основной школе – выработать у учащихся умения выполнять действия со степенями с натуральным показателем; складывать, вычитать и умножать многочлены и одночлены; научиться раскладывать многочлены на множители, применяя различные способы, применять формулы сокращённого умножения для преобразования алгебраических выражений.

1.3 Общие требования к знаниям обучающихся по теме «Одночлены и многочлены»

«Основы тождественных преобразований выражений закладывается еще в начальной школе, где главная задача – это познакомить учащихся с алгоритмами арифметических действий, свойствами операций, нуля и единицы. Далее изучение тождественных преобразований выражений рассматривается в 5-6 классе, где основными тождественными преобразованиями выражений в пропедевтическом курсе математики (5-6 классы) являются: законы арифметических действий; вынесение общего множителя за скобки; приведение подобных слагаемых; раскрытие скобок.

В 7 классе учащихся знакомятся с понятием одночлена и многочлена, и на протяжении всего обучения с 7-9 класс эти понятия «пронизывают» множество тем, связанных с тождественными преобразованиями выражений и широко используются при выводе формул, решении уравнений, неравенств и их систем, нахождении значений выражений, исследовании функций» [22, с.15-16].

Нами были рассмотрены следующие учебники и учебные пособия для учащихся общеобразовательных учреждений по алгебре 7-9 классов:

Ш.А. Алимова [1-3], Ю.Н. Макарычева [17-19], А.Г. Мордковича [23-28], Г.К. Муравина [31-33], Т.А. Бурмистровой [5].

Анализируя сборник рабочих программ 7-9 класса Т.А. Бурмистровой [5, с.18] по программе 7, можно сформулировать следующие знания ученика, которыми он должен овладеть при обучении теме «Одночлены и многочлены»: «Что такое одночлен, как привести его к стандартному виду, уметь возводить одночлен в натуральную степень, совершать арифметические действия над одночленами и многочленами, выполнять разложение многочленов на множители с помощью комбинаций различных приемов и сокращать алгебраические выражения, знать формулы сокращенного умножения и уметь применять их для преобразований целых выражений в многочлен, и использовать их для разложения многочленов на множители».

Далее рассмотрим требования к уровню подготовки учащихся 8 классов по учебникам авторов, рассмотренных выше. Тема «Одночлены и многочлены» в данном классе уже используется как навык для решения новых задач. Учащиеся уже знакомы с понятиями «одночлен и многочлен», данная тема играет здесь пропедевтический характер при изучении и освоении нового материала.

Анализируя учебники алгебры 8 класса для общеобразовательных учреждений данных авторов, можно сделать вывод, что учащиеся должны научиться:

- выполнять основные арифметическое действия с многочленами;
- выполнять разложение многочленов на множители с помощью различных приемов;
- выполнять тождественные преобразования выражений;
- решать квадратные уравнения методом разложения на множители, методом вынесения полного квадрата;
- раскладывать на множители квадратный трехчлен.

Так как действия с рациональными дробями главным образом опираются на действия с многочленами, то перед изучением данной темы следует уделить внимание повторению темы преобразования целых выражений. Учащиеся должны понимать, что операцию деления одночленов и многочленов всегда можно представить в виде дроби.

Линия тождественных преобразований продолжается изучаться и в 9 классе. На основе полученных знаний, вводятся методы решения выражений, уравнений и неравенств. Рассмотрим требования к уровню подготовки учащихся 9 классов по учебникам авторов, рассмотренных выше. Проводя анализ школьных учебников алгебры, можно выделить, какие знания учащиеся должны освоить по окончанию обучения в 9 классе: «Решать уравнения третьей и четвертой степени с помощью разложения на множители и введение вспомогательных переменных. Решать простейшие системы уравнений второй степени с двумя переменными. Решать текстовые задачи с помощью таких систем. Выполнять основные действия со степенями с целыми показателями, с многочленами и с алгебраическими дробями. Решать дробные рациональные уравнения, сводя их к целым уравнениям. Выполнять разложение многочленов на множители; выполнять тождественные преобразования» [5].

Таким образом, основными требованиями к знаниям и умениям обучающихся на базовом уровне по теме «Одночлены и многочлены» в общеобразовательной школе являются:

- умение выполнять несложные преобразования для вычисления значений числовых выражений;
- умение преобразовывать целые выражения: раскрывать скобки, приводить подобные слагаемые;
- знать формулы сокращенного умножения и уметь применять их для упрощения вычислений значений выражений;
- умение оперировать понятиями «многочлен» и «одночлен»;
- знать правила сложения, вычитания, умножения многочленов.

Рассмотрим учебники для учащихся классов с углубленным изучением алгебры.

В учебнике Макарычева Ю.Н. «Дополнительные главы к школьному учебнику» [20] 8 класс, автор приводит главу III. «Рациональные выражения», где рассматривает:

- приемы преобразования целого выражения в многочлен;
- возведение двучлена в степень;
- квадрат суммы нескольких слагаемых;
- приемы разложения многочлена на множители.

Для решения многих задач нужно хорошо уметь приводить некоторое целое выражение в многочлен стандартного вида» [20].

В учебниках Н.Я. Виленкина «Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики» для 8–9 классов автор рассматривается некоторые вопросы, которые не раскрываются в учебниках различных авторов учебников для общеобразовательных учреждений:

- формула квадрата суммы нескольких слагаемых;
- деление многочлена на многочлен с остатком;
- теорема Безу. Корни многочлена;
- симметрические многочлены от двух переменных;
- наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух одночленов и многочленов. Алгоритм Евклида;
- схема Горнера для нахождения корней многочлена.

В учебнике Н.Я. Виленкина раскрывается понятие «корня многочлена» в 8 классе, а в учебниках базового уровня данное понятие вводится лишь Г.К. Муравиной в 9 классе» [7-8].

Обучаясь по учебникам для углубленного уровня изучения алгебры, помимо основных знаний и умений по теме «Одночлены и многочлены», которыми учащиеся овладевают на базовом уровне изучения алгебры, они должны знать: определение «Корень многочлена», «Теорему Безу», «Формула квадрата суммы нескольких слагаемых». Учащиеся должны владеть умениями: раскладывать многочлены на множители различными методами, делить многочлен на многочлен с остатком, уметь пользоваться алгоритмом Евклида для нахождения НОД и НОК многочленов, строить схему Горнера для нахождения корней многочлена.

ГЛАВА 2. АНАЛИЗ МАТЕРИАЛА ТЕМЫ «ОДНОЧЛЕНЫ И МНОГОЧЛЕНЫ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ И РАЗРАБОТКА РЕКОМЕНДАЦИЙ

2.1 Анализ теоретического и задачного материала в учебниках различных авторов

Рассмотрев учебники для общеобразовательных учреждений 7-9 классов и учебные пособия к ним разных авторских коллективов по теме «Одночлены и многочлены» нами была выделена главная цель обучения данной теме: «Подготовить учащихся к «изучению тождественных преобразований многочленов» (приведение их к стандартному виду)» [32, с.12].

Нами были рассмотрены следующие учебники и учебные пособия для учащихся общеобразовательных учреждений по алгебре 7-9 классов Ш.А. Алимова [1-3], Ю.Н. Макарычева [17-19], А.Г. Мордковича [23-28], Г.К. Муравина, О.В. Муравиной [31-33].

В учебниках алгебры Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [31], Ю.Н. Макарычева [18] для 7 класса вводится понятие одночлена и многочлена только после определения тождества и тождественного преобразования и изучения свойств степени, а в учебниках А.Г. Мордковича [23] и Ш.А. Алимова сразу после изучения свойств степени. Стоит отметить, что в учебнике Ш.А. Алимова нет отдельного параграфа «Тождества», как в учебниках других авторов.

Определение. «Одночленом называют алгебраическое выражение, которое представляет собой произведение чисел и переменных, возведенных в степени с натуральным показателем» [23, с.39]. Понятие многочлена авторы данных учебников вводят через понятие одночлена.

Определение. «Многочленом называют сумму одночленов» [23, с.53].

В учебнике алгебры А.Г. Мордковича для 7 класса понятия одночлена и многочлена и действия, совершаемые над ними, изучаются более подробно (56 часов). Автор приводит дополнительные параграфы, которые в учебниках Г.К. Муравина и О.В. Муравиной, Ю.Н. Макарычева отдельно не рассматриваются.

Стоит отметить, что Ш.А. Алимов вводит понятие «Алгебраической дроби» уже в 7 классе, сразу после изучения темы «Многочлены», а другие авторы – лишь в 8 классе.

Если рассматривать § 20 «Деление многочлена на одночлен», в учебнике А.Г. Мордковича [23], то информация в нем излагается в параграфах «Сокращение алгебраических дробей» и «Разложение многочленов на множители».

На основании данного анализа учебников алгебры 7 класса можно сделать вывод о том, что авторы учебников [1; 17; 23; 31], рассмотренных выше, вводят понятие «одночлен» после изучения темы «Степень и ее свойства». Так же в этом параграфе указанные авторы вводят такие определения, как: «стандартный вид одночлена», «коэффициент одночлена», «степень одночлена», «подобные одночлены».

В учебнике алгебры Г.К. Муравина и О.В. Муравиной для 8 класса [32] изучение линии «Тождественных преобразований» продолжается в главе «Рациональные выражения» и связано с обучением темам «Формулы сокращенного умножения», «Дробные выражения», «Степень с целым показателем».

В учебниках А.Г. Мордковича [25] и Ю.Н. Макарычева [18] для 8 класса изучение линии «Тождественных преобразований» продолжается в главах «Алгебраические дроби», где выполняют алгебраические действия с дробями, что тесно связано с обучением арифметических действий над одночленами и многочленами.

В учебнике алгебры Г.К. Муравина и О.В. Муравиной для 9 класса [33] знания и умения, полученные учащимися при обучении теме «Одночлены и многочлены», углубляется при изучения тем: «Корни многочленов», «Квадратные уравнения и уравнения, сводимые к квадратным», «Целые корни многочленов с целыми коэффициентами», «Разложение квадратного трехчлена на множители».

Таким образом, анализ учебников алгебры 7-9 классов показал, что большое внимание в них уделяется изучению линии «Тождественные преобразования», в ходе которой применяются умения и знания по теме «Одночлены и многочлены».

В учебнике Н.Я. Виленкина для 8 класса [7] раскрываются «операции над многочленами, формулы сокращенного умножения, а так же рассматриваются вопросы, которых нет в учебниках для общеобразовательных учреждений 7 классов: формула разложения на множители разности степеней, формула квадрата суммы нескольких слагаемых, теорема Безу, деление многочлена на многочлен с остатком, симметрические многочлены от двух переменных, корни многочлена, НОД и НОК одночленов» [7].

В учебнике Н.Я. Виленкина для 9 класса обучение начинается с повторения тем, изучаемых в 8 классе, далее с учащимися рассматривают темы: «Схема Горнера, НОД и НОК многочленов, алгоритм Евклида» [8].

Стоит обратить внимание, что понятие «корня многочлена» в учебниках для общеобразовательных учреждений вводится лишь в учебнике Г.К. Муравина, О.В. Муравиной [33] в 9 классе. В учебниках для углубленного изучения алгебры данное понятие вводится лишь в учебнике Н.Я. Виленкина в 8 классе.

Таким образом, для того, чтобы понять, по какому же учебнику данному учителю будет удобнее строить свой урок, сначала надо определить индивидуальные особенности всех учащихся класса, после этого разрабатывать различные варианты как индивидуальной, так и коллективной работы на уроке.

В методическом пособии для учителей А.Г. Мордковича говорится о реализации принципа «крупных блоков»: его суть в том, что если имеется возможность изучить какой-либо раздел курса алгебры в определенном классе компактно, то этим стоит воспользоваться. Так, в курсе 7 класса компактно излагается раздел, связанный с преобразованием целых выражений, начиная со степеней с натуральными показателями и заканчивая разложением многочленов на множители.

Автор утверждает, что «при изучении темы «Одночлены. Арифметические операции над одночленами» учащиеся будут учиться изучать «слоги», а не «буквы». Эту мысль нужно четко донести до сознания учащихся, чтобы они понимали, зачем изучается этот раздел математики, видеть, что каждая следующая тема – это логическое продолжение предыдущей» [29, с.41]. Так, например, при изучении темы «Сложение подобных членов», внимание учащихся обращается на тот факт: а что если не все одночлены подобные и среди них окажутся неподобные? Что же делать, если мы пришли к выражению, представляющему собой сумму неподобных одночленов? Ну и тут математики нашли выход: такую сумму они назвали многочленом. Аналогичная ситуация возникает при изучении параграфа «Операция деления одночлена на одночлен», где впервые упоминается, но не определяется понятие дроби.

Многообразие задач в курсе линии «Тождественные преобразования», в частности темы «Одночлены и многочлены» в учебниках 7 класса Ю.Н. Макарычева [17], Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [31], А.Г. Мордковича [23], Ш.А. Алимова и Ю.М. Колягина [1] можно разделить на такие типы задач:

I. Применение понятий «одночлен», «многочлен», «степень многочлена»; «стандартный вид многочлена».

II. Применение свойств степени с натуральным показателем при преобразовании одночленов.

III. Выполнение арифметических операций над одночленами и многочленами (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня одночленов и многочленов).

IV. Применение формул сокращенного умножения для преобразования выражений и их вычислений.

V. Разложение многочленов на множители различными способами (вынесение множителя за скобки, способ группировки и др.).

Данные типы задач (I-IV) являются типовыми, при изучении темы «Одночлены и многочлены» в 7 классе.

Так же, имеют место быть задачи, для решения которых нужно владеть знаниями по теме «Одночлены и многочлены», которые не входят в состав типовых задач, выделим их:

VI. Применение действий с многочленами при решении различных задач.

В учебнике Ш.А. Алимова и Ю.М. Колягина рациональные дроби начинают изучаться в 7 классе, поэтому в его учебнике можно выделить отдельный тип задач, для решения которых нужно также хорошо владеть знаниями по теме «Одночлены и многочлены» уметь применять их:

VII. Преобразование рациональных выражений.

Нужно заметить, что Ю.Н. Макарычев не приводит в параграфах «Одночлен» и «Многочлен» задания на сокращение алгебраических дробей, так как эта тема в его учебниках изучается лишь в 8 классе.

В учебниках Ю.Н. Макарычева, А.Г. Мордковича и Ш.А. Алимова и Ю.М. Колягина по алгебре 7 класса содержится большое количество задач на выполнение арифметических операций над одночленами и многочленами (III тип задач), в отличие от учебника Г.К. Муравина и О.В. Муравиной. В учебнике Ш.А. Алимова и Ю.М. Колягина изучению темы «Одночлены и многочлены» (I, II, III, VI тип задач) и «Разложение многочленов на множители» (IV, V, VI тип задач) посвящены отдельные главы учебника.

Таким образом, анализ задачного материала 7 класса по теме «Одночлены и многочлены» показал, что различия в содержании и распределении задачного материала в рассмотренных выше учебниках различный, но задачи на каждый тип присутствуют в каждом учебнике. Большое внимание уделяется задачам на выполнение арифметических операций над одночленами и многочленами (III тип задач).

В 8 классе изучение линии, связанной с темой «Одночлены и многочлены», у разных авторов немного отличается, поэтому система задач не у всех будет схожа. Для удобства, типы задач разных авторов, которые будут совпадать, будут обозначаться одинаковыми римскими цифрами.

Так, например, множество задач в курсе линии «Тождественные преобразования» в учебнике 8 класса Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [32], где знания по теме «Одночлены и многочлены» углубляются и используются для решения следующих типов задач:

I. Применение понятий одночлена и многочлена и арифметических действий над ними для преобразования рациональных выражений.

II. Применение понятий многочлена и одночлена и действий над ними при решении уравнений, в том числе квадратных уравнений.

III. Применение свойств степени многочленов с целым показателем при выполнении вычислений и преобразования выражений.

Проводя анализ задачного материала учебника 8 класса А.Г. Мордковича [26] по линии «Тождественные преобразования», нужно отметить, что I, II и III типы задач аналогичны учебнику Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [32] и выделяется еще один тип:

IV. Применение понятий одночлена и многочлена и действий над ними при решении неравенств.

В учебнике 8 класса Ю.Н. Макарычева [18] I, II и III типы задач аналогичны как в учебнике Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [32] и А.Г. Мордковича [26], и IV тип задач как у А.Г. Мордковича [26].

В учебниках алгебры 9 класса Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [33] и Ш.А. Алимова и Ю.М. Колягина [3] выделим следующие типы задач, для решения которых нужно владеть знаниями по теме «Одночлены и многочлены», которые не являются типовыми:

I. Применение понятий одночлена и многочлена и действий над ними при решении неравенств и их систем.

II. Нахождение корней многочленов.

В учебниках алгебры 9 класса А.Г. Мордковича [28] и Ю.Н. Макарычева [19] можно выделить следующие типы задач на:

III. Применение действий с многочленами при решении текстовых задач.

IV. Применение знаний о многочленах и одночленах для решения уравнений и их систем.

Нужно заметить, что задачи на применение свойств неравенств в учебнике Ш.А. Алимова и Ю.М. Колягина более сложные, чем в других учебниках. В основном одна часть неравенствах (I тип задач) содержит или степень с рациональным показателем, или возведено в степень больше второй (3-7 степень), что в других учебниках базового уровня не встречается.

Подведем итог по типам задач в учебниках разных авторов: в основном все типы задач у разных авторов одинаковые. Различие состоит в том, в каком классе каждый автор рассматривает данный тип задач и насколько углубленно данная тема изучается в данном классе. К примеру, задачи на преобразование рациональных выражений (не входящие в состав типовых задач) в учебнике Ш.А. Алимова и Ю.М. Колягина был рассмотрен в 7 классе. А авторы учебников Г.К. Муравин и О.В. Муравина, А.Г. Мордкович и Ю.Н. Макарычев вводят этот тип задач лишь в 8 классе. Наиболее развернуто линия «Тождественных преобразований» изучается в учебниках А.Г. Мордковича и Ю.Н. Макарычева, а в учебниках Ш.А. Алимова и Ю.М. Колягина типы задач наиболее сложного уровня, для решения которых нужно обладать наиболее углубленными знаниями по теме «Одночлены и многочлены».

Далее рассмотрим учебники для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики.

В учебнике для 8 класса Н.Я. Виленкина «Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики» [7] раскрываются типы задач, которые есть и в базовых учебниках по алгебре 7 класса (III, IV, V типы) и 9 класса (II тип). Рассмотрим темы, которые раскрываются лишь в данном учебнике.

Для изучения данных вопросов нужно владеть знаниями по теме «Одночлены и многочлены»:

1. Формула квадрата суммы нескольких слагаемых.

Для любого n имеем: $(a_1 + a_2 + \cdots a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2a_1a_2 + +2a_1a_3 + \cdots + 2a_{n-1}a_n$.

2. Деление многочлена на многочлен с остатком.

3. Теорема Безу. Корни многочлена. Приведем пример на применение теоремы Безу.

4. Симметрические многочлены от двух переменных.

5. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух одночленов.

В учебнике для 9 класса Н.Я. Виленкина «Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики» [8]. раскрываются следующие вопросы, примеры и указания:

1. Схема Горнера для нахождения корней многочлена.

2. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное многочленов. Алгоритм Евклида.

В 9 классе в учебнике Н.Я. Виленкина изучение углубленного материала по теме «Одночлены и многочлены» продолжается, захватывая темы: «Корни многочленов», «Деление многочлена на многочлен с остатком», «Теорема Безу. Корни многочленов» на повторение, так как данные темы уже рассматривались в 8 классе. Добавляются новые разделы: «Схема Горнера», «Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное многочленов. Алгоритм Евклида».

2.2 Формы, методы, средства и методика обучения теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры основной школы

«Если говорить о личностно-ориентированном подходе обучения математике, о творческой деятельности при обучении, то выявляется основная проблема – недостаточность времени обучения математике в общеобразовательной школе. Чтобы правильно организовать учебный процесс, нужно хорошо понимать, какие формы, методы и средства обучения использовать для изучения данного материала» [13, с.66].

Ю.М. Колягин в книге «Методика преподавания математике в средней школе» дает определение методу обучения: «Метод обучения – это способ передачи знаний учащимся и способ организации познавательной и практической деятельности учащихся, направленный на усвоение ими знаний, умений, навыков, на овладение ими методами познания, на формирование личности» [14, с.207].

Автор утверждает, что методы обучения целесообразно классифицировать по виду деятельности: то есть различать методы преподавания (деятельность учителя) и методы изучения (деятельность учащихся).

Итак, при обучении теме «Одночлены и многочлены» целесообразнее применять следующие методы обучения: работа с книгой, упражнения и выполнение самостоятельных работ, так как они способствуют формированию у учащихся теоретических знаний, обогащают их практическими навыками решения и выполнения самостоятельных работ и применение полученных знаний при дальнейшем изучении материала.

В книге И.М. Чередова «Формы учебной работы в средней школе» выделяются следующие формы обучения: фронтальные, групповые и индивидуальные формы учебной работы [43, с.15].

В книге «Методика преподавания математике в средней школе» Ю.М. Колягина утверждается, что: «Формами обучения математики являются способы организации учебного процесса. К общим формам обучения относятся: классно-групповая, классно-урочная, лабораторная, практическая» [14, с.211].

Рассмотрим опыт работы учителя Ю.М. Поскребалова [35] на уроке закрепления и отработки навыков по теме «Многочлены» в 7 классе, где используется фронтальная форма обучения, так как на данном уроке помимо повторения и обобщения знаний по теме «Многочлены», учащиеся поговорят о такой важной проблеме как здоровье и правильном режиме дня. Например, задания выполняются у доски одним учащимся, остальные решают у себя в тетрадях и сравниваются с доской.

Задание: вычислите значения выражения:

а) $4a(a-2)+7a(2a+3)-3a(4a-5)-12a+21$, при $a=-1$;

б) $2x(x-y)+3y(x-y)+\frac{1}{3}xy+1$, при $x=-3, y=-2$;

в) $3c(2c-1)-3c(5-4c)-c(c+1)+6c-9$, при $c=-1$.

И узнайте:

- в какое время у человека наивысшая работоспособность;
- в какое время у человека наибольшее утомление;
- когда необходимо прекращать всякую деятельность.

А.Н. Грудачева на уроке обобщения и закрепления пройденного материала по теме «Многочлены и действия над ними» в 7 классе [10] использует в начале урока групповую форму работы с учащимися, где учащимся предлагается решить кроссворд, для повторения теоретического материала. Кроссворд решают группами устно, и потом участники из разных групп дают свои ответы.

Согласно данным определениям и опыту учителей, стоит сделать вывод, что при обучении теме «Одночлены и многочлены» целесообразнее совмещать в современной общеобразовательной практике организационные формы: фронтальная, групповая и индивидуальная. Так как при фронтальном обучении учитель управляет учебной деятельностью всего класса, работает над единой задачей. Такая форма работы преимущественно используется при объяснении нового материала. При индивидуальной форме работы каждый ученик работает самостоятельно: темп его работы определяется степенью целеустремленности и усвоения знаний. Чаще такой вид работы лучше использовать при самостоятельных работах и на уроке закрепления знаний. Групповая форма работы прекрасно подойдет для актуализации знаний на уроках, или же для отработки и закрепления полученных знаний, так как деление на группы способствует соперническому духу между учащимися групп, и ученики стараются как можно быстрее найти правильный ответ на задачу.

В собрании сочинений «Вопросы теории и истории психологии» Л.С. Выготский приводит следующие средства обучения: речь, схемы, письмо, различные условные обозначения, чертежи на доске и др. [9, с.103].

Ю.М. Колягин в книге «Методика преподавания математике в средней школе» отмечает, что на уроке учителю следует стараться подкреплять любую задачу соответствующей наглядностью: модели, макеты, карточки, наглядные пособия, слайды [14, с.287]. Например, настенные таблицы по математике удобно использовать для решения задач. С одной стороны их многократное использование способствует запоминанию материала, а с другой – быстро вспомнить необходимую информацию.

В журнале «Математика в школе» в статье «Об опыте работы с правилами в теме «Многочлены»» В.В. Крючковой [15] предлагается использовать такие методы обучения: записи на доске и заготовленные заранее плакаты, чтобы показать учащимся, что операции сложения и умножения многочленов должны удовлетворять известным для чисел переместительному, сочетательному и распределительному закону умножения.

Эти законы записываются при помощи переменных:

а) $b + a = a + b$;

б) $b \cdot a = a \cdot b$;

в) $b + (a + h) = (b + a) + h$;

г) $b \cdot (a \cdot h) = b \cdot a \cdot b \cdot h$;

д) $b \cdot (a + h) = b \cdot a + b \cdot h$.

«На основании этих законов, представленные на плакате, учащиеся сами пытаются выяснить, как получаются правила нахождения произведения многочленов, рассматривая 4 случая: произведение одночленов, произведение одночлена на сумму одночленов, произведение суммы одночленов на одночлен, произведение многочленов, отличных от одночленов» [15].

Из опыта работы учителя Ю.М. Поскребалова [35] на уроке повторения и обобщения в 7-м классе по теме "Многочлены", предлагается использовать плакат по теме «Многочлены».

Из опыта работы учителя математики И.Г. Салаховой [37] на обобщающем уроке по теме «Формулы сокращенного умножения» в 7 классе автором используются разработанные карточки, где нужно для каждого выражения из левого столбца подобрать ему тождественно равное в правом столбце, для активизации знаний на уроке (Таблице 1). В своей книге Д. Даунинг [45], а также Т. Фатма [48] и П. Томпсон в своих статьях [47], указывают на то, что любая новая информация, полученная на уроках, закрепленная наглядными рисунками, схемами, таблицами, справочниками, способствует более качественному и быстрому усвоению материала.

Таблица 1 — Карточка по теме «Формулы сокращенного умножения»

1) $x^3 + y^3$;	1) $y - x$;
2) $y^2 - x^2$;	2) $x - 2y^2$;
3) $(x - y)(x + y)$;	3) $(y - x)(y + x)$;
4) $-(x - y)$;	4) $x + y^3$;
5) $x^2 - 2xy + y^2$;	5) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$;
6) $x^2 - 4xy + 4y^2$;	6) $x^2 + 2xy + y^2$;
7) $x + y^2$;	7) $x - y^2$;
8) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$;	8) $x + y^3$;
9) $(x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$;	9) $x^3 + y^3$.

На основании данных определений подведем итог, что на уроке алгебры для изучения темы «Одночлены и многочлены» можно использовать следующие средства обучения: таблицы с формулами сокращенного умножения для более быстрого и удобного усвоения материала; наглядные материалы (карточки, плакаты), где представлены алгоритмы выполнения арифметических операций над одночленами и многочленами, различные презентации.

В учебном пособии Н.М. Епифановой «Методика преподавания алгебре основной школы» [12, с.42] выделены два подхода к изучению линии тождественных преобразований: «В алгебраическом подходе большое внимание уделяется буквам и операциям над буквенными выражениями. На выражение смотрят в общем виде, не предполагая, какие цифры скрываются под данными буквами. При этом все преобразования выражений основываются на правилах и свойствах действий. В функциональном походе понимается, что все буквы это отдельные переменные, а тождественные преобразования опираются равенство значений функций при всех допустимых значениях переменной».

В курсе лекций Г.Н. Васильевой «Методика изучения математики в основной школе» [6, с.7] приводятся рекомендации, при изучении линии тождественные преобразования по теме «Одночлены и многочлены:

1) рассматривать на множестве одночленов лишь операцию умножения;

2) не выделять отдельно тему деление многочленов, рассмотрев его при изучении темы «Рациональные дроби»;

3) тождественно явными считать два целых рациональных выражения, если их значения совпадают при одинаковых значениях входящих в них переменных;

4) тождественные преобразования выполнять на основе законов арифметических операций, считать их основными аксиомами для выполнения преобразований.

Я.И. Груденов в своей книге «Совершенствование методики работы учителя математики» [11], отмечает приемы, которые способствуют сознательному усвоению учащимися темы «Одночлены и многочлены»:

1. Чтобы запомнить материал, его необходимо понять и осознать. Если учащиеся повторяют на уроках одни и те же формулировки, но не приводят конкретные примеры, то материал может не усвоиться ими. Рассмотрим это на примере введения понятий одночлена и многочлена. Приводя примеры учащимся следующего типа: $17b^2c, 5xyz, 8a^2b^2c$ и задавая вопрос «что это за выражения?», часто можно услышать типичную ошибку в ответах, что данные выражения − это многочлены. Так как учащиеся предполагают, если данное выражение состоит из нескольких различных переменных, то оно является многочленом, забывая об определении многочлена: «многочленом называют алгебраическое выражение, представленное в виде суммы нескольких одночленов», не замечая, что данные выражения не представлены суммой нескольких членов. Так же одной из ошибок учащихся является, что часто действительные числа они не относят к одночленам. Например, число 5 можно записать в виде $5x^0$, где сразу становится видно, что действительное число является одночленом. Поэтому полезно использовать задания, где учащимся нужно определить, является ли данное выражение одночленом и многочленом.

Пример: установите, какие из данных выражений являются многочленами, а какие одночленами:

а) $7x + 5y$ – многочлен;

б) $7x^2 - 5y^2$ – многочлен;

в) $8x$ – одночлен;

г) $0{,}13xy^2$ – одночлен.

2. Изучаемый материал можно запомнить непроизвольно, если систематически проводить над ним активную мыслительную деятельность. «Например, при изучении формул сокращенного умножения, учителя часто не могут добиться того, чтобы учащиеся запомнили формулировки

этих формул. Для устранения этой проблемы, на уроке рекомендуется читать данное правило из учебника, при выполнении соответствующих заданий [11, с.26]

3. При подборе заданий, на отработку изученного материала, нужно чтобы один вид заданий был в различных словесных интерпретациях. Это нужно, чтобы при дальнейшем обучении, формулировка задания не вводила учащихся в непонимание требований и применения изученных свойств. Рассмотрим это на примере формулы разности квадратов $a^2 - -b^2 = (a+b)(a-b)$. В первом случае, приводя данный пример в теме «разложение многочленов на множители», проводя пропедевтический этап изучения темы «формулы сокращенного умножения», мы будем трактовать это задание как: разложение многочлена на множители, представляющего собой разность двух неотрицательных выражений. Данную трактовку можно использовать для заданий: разложения многочленов на множители вида $a - b$, где $a \geq 0, b \geq 0$.

4. На начальном этапе изучения темы следует приводить примеры решений при выполнении арифметических операций над одночленами и многочленами с подробными записями и обоснованиями, заранее оговаривая требования к записи решения. Применяя привило умножения степеней, при приведении одночленов и многочленов к стандартному виду, на начальном этапе изучения темы, желательно, чтобы учащиеся расписывали решение подробно. Например: $6a^2bn \cdot 2ab^4n^2 = 12a^3b^5n^3$. Данная запись на начальном этапе изучения данной темы весьма затруднительна. Не все могут понять, как при умножении двух одночленов получились данные цифры. Рекомендуется расписать подробно, основываясь на свойство степени: $6a^2bn \cdot 2ab^4n^2 = 6a^2b^1n^1 \cdot 2a^1b^4n^2 = 6 \cdot 2 \cdot a^{2+1} \cdot b^{1+4} \cdot n^{1+2} =$ $=12a^3b^5n^3$.

Это делается для того, чтобы такие частные примеры как:

$b^2 \cdot b^2 = b \cdot b \cdot b \cdot b = b^4$ не вводили учащихся в заблуждение, что нужно перемножить показатели степеней, а основание оставить прежним.

5. При обучении теме «Разложение многочлена на множители с помощью формул сокращенного умножения», для наглядности и правильности решения следует приводить параллель между тождествами и числовыми равенствами. Данный факт полезно использовать для проверки правильности разложения на множители. Например, одной из самой распространенной ошибкой является применение формулы квадрат суммы: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, что является грубой ошибкой. Возьмем за $a = 2, b = 3$ и подставим в данное тождество : $(2+3)^2 = 2^2 + 3^2$ или – это неверно.

6. Использовать средства наглядности, такие как: макеты, таблицы, схемы, условные обозначения и так далее.

7. Выполняя разложение на множители различными способами, важно провести внимательный анализ выражения, найти более рациональные пути его разложения, выявить более правильные пути решения. Например, в учебнике алгебра 7 класс Ю.Н. Макарычева в параграфе «Разложение разности квадратов на множители» приводится задание, где нужно представить в виде произведения $(2x+y)^2 - (x-2y)^2$. «Кто-то из учащихся скажет, что данные выражения нужно разложить по формулам: сумма и квадрат разности двух выражений, а кто-то, при внимательном анализе выражения, увидит формулу разности квадратов двух выражений» [17, с.154]. Полезнее выполнить разложение на множители обеими способами, чтобы показать, что воспользовавшись формулой разность квадратов двух выражения, вычисления будут короче.

8. Обязательно нужно контролировать действия учащихся за выполнением заданий. Это нужно делать, как и учителю, так и ученикам. Большое значение в усвоении учащимися знаний, это находить свои ошибки и исправлять их.

Если ученик совершил ошибку, не нужно торопиться указывать ему на нее в явном виде, лучше использовать следующий педагогический способ:

1) попросить перечитать еще раз текст задачи (вдруг учащийся упустил что-то важное);

2) сверить записи в тетради, в учебнике и на доске, вдруг это ошибка состоит лишь в неправильном переписывании условия;

3) вспомнить правило, формулу, свойства и проверить правильность их использования для решения данного задания;

4) провести решение задания в обратном порядке, если это возможно;

5) объяснить ученику его ошибку, объяснить ее сущность привести контрпример [11].

Такой способ выяснения собственных ошибок и вычислений способствует выработке привычке у учащихся самостоятельно контролировать свою деятельность на уроке. Рассмотрим методические рекомендации авторов учебников алгебры для 7 классов для общеобразовательных учреждений: Ш.А. Алимова [1], и Ю.Н. Макарычева [17] и сделаем выводы, что:

1) изучение понятий «Одночлен и многочлен» начинается с введения определения степени с натуральным показателем и ее свойства. Свойства степени с натуральным показателем находят применение при умножении одночленов и возведении одночленов в степень;

2) важно выработать умение выполнять арифметические операции над одночленами многочленами и умение раскладывать многочлены на множители. Учащиеся должны понимать, что сумму, разность, произведение многочленов всегда можно представить в виде многочлена;

3) серьезное внимание следует уделить разложению многочленов на множители с помощью вынесения за скобки общего множителя и с помощью группировки;

4) также важно выработать умение применять формулы сокращенного умножения в преобразованиях целых выражений в многочлены и в разложении многочленов на множители [1; 17].

Таким образом, нами были выявлены и разработаны:

1. Методические приемы, которые способствуют сознательному усвоению учащимися темы «Одночлены и многочлены».

2. Рассмотрены методические рекомендации, как избежать совершения ошибок.

3. Рассмотрены методические рекомендаций авторов учебников алгебры для 7 классов для общеобразовательных учреждений: Ш.А. Алимова и Ю.Н. Макарычева.

4. Раскрыты алгебраический и функциональный подход к изучению линии тождественных преобразований по теме «Одночлены и многочлены».

2.3 Системы задач по теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры основной школы

Чтобы составить систему задач, обратимся к источникам различных авторов. В учебном пособии Е.И. Лященко [16] автором выделяются следующие особенности системы задач на усвоение понятия и его определения:

«1) задачи должны отражать практическую значимость изучаемого понятия и его важность для дальнейшего изучения новых тем;

2) в начале урока должны быть задачи на актуализацию новых знаний;

3) задачи должны отражать существенные признаки изучаемого понятия;

4) при решении задач, учащиеся должны сами уметь распознавать новое вводимое понятие;

5) в системе упражнений должны присутствовать задачи, которые помогают усвоить текст изучаемого определения;

6) в задачах должна содержаться символика, напрямую связанная с изучаемым понятием;

7) задачи должны способствовать установлению свойств данного понятия».

В учебном пособии З.П. Матушкиной отмечается, что одни авторы выдвигают дидактические требования к системе задач: научность, систематичность, последовательность и т. д.

Другие авторы конкретизируют требования к системе задач в зависимости от цели ее создания: для сознательного и прочного усвоения понятия, для усвоения формулировок теорем и их доказательств. З.П. Матушкина выделяет критерии к системе текстовых задач, которые так же можно отнести к системе задач по теме «Одночлены и многочлены»:

1. Задача должна быть по изучаемой теме, числовой материал должен соответствовать программе по математике.

2. Сложность задач должна варьироваться от уровня знаний учащихся.

3. Формулировка задач должна быть понятной и краткой для лучшего понимания учащимися.

4. Построение задач должно начинаться с более простого уровня сложности и переходить к наиболее сложным задачам [21].

Учитывая рассмотренные требования к системе задач и упражнений, нами будут составлены системы задач по темам: «Одночлены. Арифметические операции над одночленами», «Многочлены. Арифметические операции над многочленами», «Разложение многочленов на множители» для учащихся 7 классов для школ с базовым уровнем изучения математики.

2.3.1 Система задач на тему «Одночлены. Арифметические операции над одночленами»

Задача 1 [17, с.51].

Представьте в стандартном виде одночлен:

а) $-3aabb(-4a^m)$;

в) $0{,}01x^{n+1}y \cdot 501xy^n$;

б) $-0{,}8xy^mx^2y^n$;

г) $-a^3baa^m \cdot (-0{,}1)a^3$.

Решение: а) $-3aabb(-4a^m) = (-3) \cdot (-4)a^{2+m}b^2 = 12a^{m+2}b^2$.

Ответ: $12a^{m+2}b^2$.

Задача 2 [31, с.109].

Приведите к стандартному виду одночлен и определите, какая у него степень:

1) $6xxbxxbb \cdot 5xbx$;

2) $2\frac{2}{3}k^2n \cdot \left(-\frac{3}{16}\right)kn^6$;

3) $\frac{3}{8}aaab^4ac \cdot 1{,}6c^2$;

4) $-\frac{1}{2}c^4y^5 \cdot 0{,}9c^2xy$;

5) $-2{,}4p^5 \cdot (-2{,}5)np^2$;

6) $2\frac{5}{11}a^6bc^2 \cdot \frac{22}{27}ab^3$;

7) $1\frac{5}{7}axy^7 \cdot \frac{7}{12}x^4y$;

8) $-0{,}6x^9p^6 \cdot 11\frac{1}{9}x^7y^3p$».

Решение: 5) $-2{,}4p^5 \cdot (-2{,}5)np^2 = \big(-2{,}4 \cdot (-2{,}5)\big) \cdot (p^5 \cdot p^2) \cdot n = 6 \cdot p^{5+2} \cdot n = 6p^7n$.

Степень $7 + 1 = 8$.

Ответ: степень 8.

Задача 3 [24, с.110].

Выполните деление:

а) $18a^{12} : (6a^4)$;

б) $24b^{10} : (6b^{10})$;

в) $12a^7y^4 : (6a^2y^3)$;

г) $6b^5x^3 : (3b^3x^2)$.

Решение: г) $6b^5x^3 : (3b^3x^2) = 2b^2x$.

Ответ: $2b^2x$.

Задача 4 [24, с.102].

Вместо символа * поставьте такой одночлен, чтобы получилось верное равенство:

а) $5a^2b^3 + * = 13a^2b^3$;

б) $-12x^3 - * = -24x^3$;

в) $7{,}4pq - * = 4pq$;

г) $* + -0{,}5m^2n = 1{,}7m^2n$.

Решение: в) $7{,}4pq - * = 4pq$; $* = 3{,}4pq$.

Ответ: $3{,}4pq$.

Задача 5 [31, с.110].

Представьте, если возможно, в виде квадрата или куба одночлена:

1) $16a^2b^4$;

2) $9x^6y^2$;

3) $8c^6x^9$;

4) $-27a^{12}b^6$;

5) $64a^6b^6$;

6) $-64a^6b^6$.

Решение: 2) $9x^6y^2 = 3^2x^{3\cdot 2}y^2 = (3x^3y)^2$.

Ответ: $(3x^3y)^2$.

Задача 6 [24, с.102].

Выполните действия:

а) $20y - 12y - y - 2y$;

б) $\frac{2a^2}{3} - \frac{a^2}{3}$;

в) $30x^2 - 15x^2 - 7x^2$;

г) $\frac{3}{4}a^2b - \frac{1}{4}a^2b$.

Решение: а) $20y - 12y - y - 2y = (20 - 12 - 1 - 2) \cdot y = 5y$.

Ответ: $5y$.

Задача 7 [24, с.100].

Приведите выражение к одночлену стандартного вида и укажите коэффициент и буквенную часть:

а) $7a \cdot 3b \cdot 4c$;

б) $15q \cdot 2p^2 \cdot 4r^5$;

в) $8u^4 \cdot 4v^3 \cdot (-2w^5)$;

г)$-\frac{1}{2}c^{12} \cdot 2d^{18} \cdot s^{10}$.

Решение: г) $-\frac{1}{2}c^{12} \cdot 2d^{18} \cdot s^{10} = -s^{10}c^{12}d^{18}$;

1 – коэффициент, $s^{10}c^{12}d^{18}$ – буквенная часть.

Ответ: 1 – коэффициент, $s^{10}c^{12}d^{18}$ – буквенная часть.

Задача 8 [24, с.106].

Выполните умножение:

а) $7x^2 \cdot 5x^2 \cdot 6x^3$;

б) $\frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{1}{3}b^3 \cdot \frac{1}{6}c^4$;

в) $71x^2y^3z^8 \cdot 2xyz$;

г) $54c^2d^2f^3 \cdot cd^3f$.

Решение: в) $71x^2y^3z^8 \cdot 2xyz = (71 \cdot 2)x^{2+1}y^{3+1}z^{8+1} = 142x^3y^4z^9$.

Ответ: $142x^3y^4z^9$.

Задача 9 [24, с.106].

Возведите одночлен в указанную степень:

а) $(3a^2c)^2$;

б) $(-\frac{1}{3}xy^2)^4$;

в) $(-0{,}2c^3d)^4$;

г) $(-\frac{1}{2}abc)^5$.

Решение: а) $(3a^2c)^2 = 3^2 \cdot (a^2)^2 \cdot c^2 = 9a^4c^2$.

Ответ: $9a^4c^2$.

Задача 10 [24, с.111].

Упростите выражение:

а) $\frac{(-4x^2y^3)^3\cdot(-5x^2y^4)^2}{(-10x^3y^5)^0}$;

б) $\frac{(-2a^3x^5)^4\cdot(-9a^3x^5)^2}{(-6a^4x^7)^0}$.

Решение: б) $\frac{\left(-2a^3x^5\right)^4\cdot\left(-9a^3x^5\right)^2}{(-6a^4x^7)^0} = \frac{(-2)^4\cdot(a^3)^4\cdot(x^5)^4\cdot(-9)^2\cdot(a^3)^2\cdot(x^5)^2}{(-6)^0\cdot(a^4)^0\cdot(x^7)^0} =$

$$= 1296a^{18}x^{30}.$$

Ответ: $1296a^{18}x^{30}$.

Отметим, что нами представлены задачи по теме «Одночлены. Арифметические операции над одночленами» : № 1, 2 – на отработки понятия стандартный вид одночлена; № 3, 6, 7 – на выполнение арифметических операций над одночленами; № 4, 5 – на отработку понятия «подобные одночлены»; № 8, 9 – на возведение одночлена в натуральную степень; № 10 – на деление одночлена на одночлен. При подборе заданий на отработку арифметических операций над одночленами (сложение, вычитание, деление, умножение) больше подходит учебник А.Г. Мордковича, так как у данного автора выделены в учебнике отдельные параграфы на данные темы, в отличие от других.

2.3.2 Система задач на тему «Многочлены. Арифметические операции над многочленами»

Задача 11 [31, с.119].

Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида и определите его степень:

а) $1 - 3a + (a^2 + 2a)$;

б) $y^2 - 5y + (-2y^2 + 5y + 1)$;

в) $a^2 + 15a + 14 - (a^2 + 15a - 14)$;

г) $2x^2 - 5x + (-x + 14)$;

д) $p^2 + 2p + 7 - (p^2 + 3p + 18)$;

е) $9k^3 + 13k^2 - (8 - 7k + 12k^2)$.

Решение: д) $(p^2 + 2p + 7) - (p^2 + 3p + 18) = p^2 + 2p + 7 - p^2 - 3p -$ $-18 = (p^2 - p^2) + (2p - 3p) + (7 - 18) = 0 \cdot p^2 - p - 11 = -p - 11.$

Степень = 1.

Ответ: степень = 1.

Задача 12 [24, с.115].

Приведите многочлен к стандартному виду и найдите его значение:

а) $a^3b + a^2b - 3ab^2 + 2a^2b + 2ab^2$, при $a = -1, b = 2$;

б) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y^2 + 0{,}3x - x + \frac{5}{9}y^2,$ при $x = 5, y = \frac{3}{4}$;

в) $m^4 - 3m^3n + m^2n^2 - m^3n - 4m^2n^2$, при $m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{3}$;

г)$6p^2q - 5pq^2 + 5p^3 + 2pq^2 - 8p^3 - 3p^2q$, при $p = -2, q = 0{,}5$.

Решение: а) $a^3b + a^2b - 3ab^2 + 2a^2b + 2ab^2 = a^3b + 3a^2b + 2ab^2 -$ $-3ab$;

При $a = -1;\ b = 2; (-1)^3 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)^2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot 2^2 - 3 \cdot (-1) \cdot 2 =$ $= -2 + 6 - 8 + 6 = 2.$

Ответ: 2.

Задача 13 [24, с.117].

Найдите $p_1(x) + p_2(x)$, если:

а) $p_1(a) = 2a + 5;\ p_2(a) = 3a - 7$;

б) $p_1(a) = 7 - 2a;\ p_2(a) = -1 - 5a$;

в) $p_1(a) = 3a - 4;\ p_2(a) = 11 - 3a$;

г) $p_1(a) = -4 - 3a;\ p_2(a) = 7 - 8a$.

Решение: г) $p_1(a) = -4 - 3a;\ p_2(a) = 7 - 8a;\ P(a) = -4 - 3a + 7 - 8a =$ $= -11a + 3.$

Ответ: $-11a + 3$.

Задача 14 [17, с.132].

Какой многочлен в сумме с многочленом $5x^2 - 3x - 9$ тождественно равен:

а) 0;

б) 18;

в) $2x-3$;

г) x^2-5x+6.

Решение: б) $5x^2-3x-9+M=18$; $M=18-(5x^2-3x-9)=18-$ $-5x^2+3x+9=-5x^2+5x+6$; $M=-5x^2+3x+27$.

Ответ: $M=-5x^2+3x+27$.

Задача 15 [17, с.132].

Учащимся была предложена задача: «Найдите значение выражения $(7a^3-6a^2b+5ab^2)+(5a^3+7a^2b+3ab^2)-(10a^3+a^2b+$ $+8ab^2)$, при $a=-0{,}25$». Один из учеников сказал, что в задаче не хватает данных. Прав ли он?

а) обсудите друг с другом, в каком случае ученик окажется прав.

б) выполните преобразования.

в) сделайте вывод.

Решение: а) Ученик окажется прав, если переменная b сократится.

б) $(7a^3-6b^2a+5ab^2)+(5a^3+7a^2b+3ab^2)-(10a^3+a^2b+$ $+8ab^2)=7a^3+5a^3-10a^3-6a^2b+7a^2b-a^2b+5ab^2+3ab^2-$ $-8ab^2=2a^3$: при $a=-0{,}25\to 2a^3=2x(-0{,}015625)=-0{,}03125$.

в) Ученик был не прав.

Задача 16 [17, с.147].

Запишите в виде многочлена выражение:

а) $(x^2+y)(x+y^2)$;

б) $(m^2-n)(m^2+2n^2)$;

в) $(4a^2+b^2)(3a^2-b^2)$;

г) $(5x^2-4x)(x+1)$;

д) $(a-2)(4a^3-3a^2)$;

е) $(7p^2-2p)(8p-5)$.

Решение: е) $(7p^2-2p)(8p-5)=56p^3-35p^2-16p^2+10p=56p^3-$ $-51p^2+10p$.

Ответ: $56p^3-51p^2+10p$.

Задача 17 [24, с.124].

Найдите значение выражения:

а) $(\text{a} - 1)(a - 2) - (a - 5)(a + 3)$, при $a = -8$;

б) $(\text{a} - 3)(a + 4) - (a + 2)(a + 5)$, при $a = -\frac{1}{6}$;

в) $(\text{a} - 7)(a + 4) - (a + 3)(a - 10)$, при $a = -0{,}15$;

г) $(\text{a} + 2)(a + 5) - (a + 3)(a + 4)$, при $a = -0{,}4$.

Решение: а) $(\text{a} - 1)(a - 2) - (a - 5)(a + 3) = a^2 - 3a + 2 - a^2 + 2a + {} +15 = 17 - a$;

При $a = -8; 17 - (-8) = 17 + 8 = 25$.

Ответ: 25.

Задача 18 [31, с.134].

Докажите, что при всех натуральных значениях n значение выражения: делится на 12;

1) $n(n + 22) - (n - 2)(n + 12)$ делится на 12;

2) $(n + 8)(n + 9)$ делится на 24.

Решение: 2) $(n + 8)(n + 9) - n(n - 7) = n \cdot n + 8 \cdot n + 9 \cdot n + 8 \cdot 9 - n \cdot {} \cdot n - n \cdot (-7) = n^2 + 8n + 9n + 72 - n^2 + 7n = 0 \cdot n^2 + 24n + 72 = {} = 24n + 72 = 24 \cdot (n + 3)$ делится на 24 (так как есть множитель 24).

Что и требовалось доказать.

Задача 19 [24, с.132].

Выполните деление многочлена на одночлен:

а) $(a - ab): a$;

б) $(x - xy): (-x)$;

в) $(-m - mn): m$;

г) $(-c + cd): (-c)$.

Решение: г) $(-c + cd): (-c) = 1 - d$.

Ответ: $1 - d$.

Задача 20 [24, с.135].

Выясните, какой из данных многочленов может быть частным от деления многочлена $42x^5y^4 + 56x^4y^2$ на некоторый одночлен. Найдите делитель, если он существует:

а) $21x^4y^3 + 18x^3y^6$; $5{,}25xy^3 + 7y^6$; $6x^4y^3 + 8x^3y$;

б) $6x^3y^3 + 8x^2y^6$; $42xy + 56y^2$; $21x^2y^3 + 28xy$;

в) $42x^2y + 56x$; $21x^3y^3 + 28x^3y$; $4{,}2x^4y^2 + 5{,}6x^3$;

г) $5{,}25xy^3 + 14xy^6$; $10{,}5x^2y^3 + 14xy$; $6x^3y + 8x^2$.

Решение: а) $21x^4y^3 + 18x^3y^6$; $5{,}25xy^3 + 7y^6$; $6x^4y^3 + 8x^3y$;

Нет; нет; $7y$.

Ответ: нет; нет; $7y$.

Отметим, что нами представлены задачи по теме «Многочлены. Арифметические операции над одночленами»: № 11,12 – задачи на закрепление определения стандартного вида многочлена; № 13-15 – задачи на сложение и вычитание многочленов; № 16-18 – задачи на выполнение умножения многочлена на многочлен; № 19, 20 – задачи на деление многочлена на одночлен. При подборе заданий на отработку арифметических операций над многочленами (сложение, вычитание, умножение, деление многочлена на одночлен) удобнее использовать учебники А.Г. Мордковича и Ю.Н. Макарычева, так как арифметические действия над многочленами разбиты отдельно по параграфам, а в других учебниках они находятся в одной главе «Многочлены», т.е. не систематизированы, как в данных учебниках.

2.3.3 Система задач на тему «Разложение многочленов на множители»

Задача 21 [24, с.140].

Разложите многочлен на множители:

а) $15c(a + b) + 8(b + a)$;

б) $4a(x + y) - 9b(y + x)$;

в) $n(2a+1)+m(1+2a)$;

г) $11p(c+8d)-9(8d+c)$.

Решение: а) $15c(a+b)+8(b+a)=(15c+8)(a+b)$.

Ответ: $(15c+8)(a+b)$.

Задача 22 [24, с.142].

Найдите значение выражения:

а) $ax-2a-3x+6$, если $a=1{,}5; x=3{,}5$;

б) $2a+b+2a^2+ab$, если $a=-1; b=998$;

в) $7by+4b-14y-8$, если $y=\frac{5}{28};\ b=\frac{2}{7}$;

г) $5ab-7b+5a^2-7a$, если $a=3{,}7; b=-3{,}7$.

Решение: г) $5ab-7b+5a^2-7a$,

Если $a=3{,}7; b=-3{,}7$,то $5\cdot 3{,}7\cdot(-3{,}7)-7\cdot(-3{,}7)+5\cdot 3{,}7^2-7\cdot 3{,}7=$

$$=0.$$

Ответ: 0.

Задача 23 [31, с.129].

Вычислите рациональным способом:

а) $34\cdot 3{,}4+6{,}6\cdot 34$;

б) $123\cdot 89-89\cdot 23$;

в) $\frac{8}{7}\cdot\frac{11}{13}+\frac{11}{13}\cdot\frac{6}{7}$;

г) $\frac{13}{17}\cdot\frac{11}{8}-\frac{3}{8}\cdot\frac{13}{17}$.

Решение: б) $123\cdot 89-89\cdot 23=89\cdot(123-23)=89\cdot 100=8900$.

Ответ: 8900.

Задача 24 [24, с.142].

Разложите многочлен на множители:

а) $3a+3+na+n$;

б) $6mx-2m+9x-3$;

в) $ax+3x+4a+12$;

г) $2mx-3m+4x-6$.

Решение: г) $2mx - 3m + 4x - 6 = (2x - 3)(m + 2)$.

Ответ: $(2x - 3)(m + 2)$.

Задача 25 [31, с.137].

Представьте многочлен в виде произведения двух трехчленов:

а) $a(a + b + c) + b(-a - b - c) - 2a - 2b - 2c$;

б) $x(x + z - y) + y(y - x - z) + (x - y + z)$» .

Решение: а) $a(a + b + c) + b(-a - b - c) - 2a - 2b - 2c = a(a + b + {}$ ${}+c) - b(a + b + c) + (-2a - 2b - 2c) = a(a + b + c) - b(a + b + c) -$ $-2(a + b + c) = (a + b + c)(a - b - 2)$.

Ответ: $(a + b + c)(a - b - 2)$.

Задача 26 [31, с.137].

Найдите значение выражения, предварительно разложив его на множители:

1) $77{,}3 \cdot 13 + 8 \cdot 37{,}3 - 77{,}3 \cdot 8 - 13 \cdot 37{,}3$;

2) $56{,}2 \cdot 29 + 60{,}3 \cdot 41 + 43{,}8 \cdot 29 + 39{,}7 \cdot 41$.

Решение: 2) $56{,}2 \cdot 29 + 60{,}3 \cdot 41 + 43{,}8 \cdot 29 + 39{,}7 \cdot 41 = (56{,}2 \cdot 29 + {}$ ${}+43{,}8 \cdot 29) + (60{,}3 \cdot 41 + 39{,}7 \cdot 41) = 29 \cdot (56{,}2 + 43{,}8) + 41 \cdot{}$ ${}\cdot (60{,}3 + 39{,}7) = 29 \cdot 100 + 41 \cdot 100 = 100 \cdot (29 + 41) = 100 \cdot 70 = 7000$.

Ответ: 7000.

Задача 27 [31, с.152].

Разложите на множители:

1) $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2ab + 2cd$;

2) $x^2 - y^2 + a^2 - b^2 + 2ax - 2by$;

3) $a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - 2ad - 2bc$;

4) $a^2b^2 - a^2c^2 - b^2d^2 + c^2d^2 + 4abcd$.

Решение: 3) $a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - 2ad - 2bc = (a^2 - 2ad + d^2) + {}$ ${}+(-b^2 - c^2 - 2bc) = (a - d)^2 - (b^2 + c^2 + 2bc) = (a - d)^2 - (b + c)^2 =$ $= \big(a - d - (b + c)\big)\big(a - d + (b + c)\big) = (a - d - b - c)(a - d + b + c)$.

Ответ: $(a - d - b - c)(a - d + b + c)$.

Задача 28 [24, с.148].

Замените символы * такими знаками, чтобы выполнялось равенство:

а) $b^2 - 20b + * = (* - 10)^2$;

б) $* - 42pq + 49q^2 = (3p - *)^2$;

в) $25a^2 + * + \frac{1}{4}b^2 = (* + \frac{1}{2}b)^2$;

г) $0{,}01b^2 + * + 100c^2 = (0{,}1b + *)^2$.

Решение: г) $0{,}01b^2 + *_1 + 100c^2 = (0{,}1b + *_2)^2$; $(0{,}01b + *_2)^2 = 0{,}01b^2 + $ $+ 0{,}2b \cdot *_2 + *_2 + *_2^2$; $*_2 = 10c$, $*_1 = *_2 \cdot 0{,}2b = 10c \cdot 0{,}2b = 2bc$.

Ответ: $*_1 = *_2 \cdot 0{,}2b = 10c \cdot 0{,}2b = 2bc$.

Задача 29 [31, с.152].

Представьте выражение в виде разности квадратов и разложите на множители:

а) $a^2x^2 - 2abx + b^2 - c^2$;

б) $p^2 + k^2y^2 + 2kpy - x^2$.

Решение: б) $p^2 + k^2y^2 + 2kpy - x^2 = (p^2 + k^2y^2 + 2kpy) - x^2 = (p + $ $+ ky)^2 - x^2 = (p + ky - x)(p + ky + x)$.

Ответ: $(p + ky - x)(p + ky + x)$.

Задача 30 [24, с.149].

Разложите многочлен на множители:

а) $4m^3 - 4n^3$;

б) $13a^3 + 13b^3$;

в) $15c^3 + 15d^3$;

г) $21s^3 - 21t^3$.

Решение: г) $21s^3 - 21t^3 = 21(s^3 - t^3) = 21(s - t)(s^2 + st + r^2)$.

Ответ: $21(s - t)(s^2 + st + r^2)$.

Задача 31 [24, с.150].

Разложите многочлен на множители:

а) $x^3 + 8y^3 + x^2 + 4xy + 4y^2$;

б) $8p^3 - q^3 + 4p^2 - 4pq + q^2$.

Решение: а) $x^3 + 8y^3 + x^2 + 4xy + 4y^2 = (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) +$ $+(x + 2y)^2 = (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2 + x + 2y)$.

Ответ: $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2 + x + 2y)$.

Задача 32 [24, с.151].

Пусть $x_1 + x_2 = 5, x_1x_2 = -3$.

Вычислите:

а) $x_1^4 + x_2^4$;

б) $(x_1 - x_2)^2$;

в) $x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^3$;

г) $x_1^2x_2^4 + x_1^4x_2^2$.

Решение: в) $x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^3 = x_1^2x_2^2 \cdot (x_1 + x_2) = 9 \cdot 5 = 45$.

Ответ: 45.

Отметим, что нами представлены задачи по теме «Разложение многочленов на множители»: № 21-23 – задачи на вынесение общего множителя за скобки; № 24-26 – задачи на применение способа группировки; № 27-29 – задачи на разложение многочлена с помощью формул сокращенного умножения; № 30-32 – задачи на разложение многочлена на множители с помощью комбинации различных приемов.

Для составления системы задач по теме наиболее удобнее использовать учебники А.Г. Мордковича и Г.К. Муравина. Так как в данных учебниках представлен наиболее большой набор заданий на разложение многочленов на множители с помощью способа группировки, вынесения общего множителя за скобки и формул сокращенного умножения, и данные задания разбиты по соответственным параграфам. В учебнике А.Г. Мордковича, в отличие от других авторов, отдельно представлен параграф на разложение многочлена на множители с помощью комбинации различных приемов.

Таким образом, в данном параграфе было рассмотрено:

1. Основные требования к системе задач авторов: Е.И. Лященко, З.П. Матушкиной.

2. Разработаны системы задач для 7 классов по темам «Одночлены. Арифметические операции над одночленами», «Многочлены. Арифметические операции над многочленами», «Разложение многочленов на множители».

2.3.4 Анализ задач для подготовки к ОГЭ

Проводя анализ демонстративных вариантов для подготовки ОГЭ, нами были выделен набор задач из тестовой части (8, 9) и развернутой части (20), в которых встречаются задания на применение понятий по теме «Одночлены и многочлены». В данном наборе задач имеются некоторые типы задач, выделенные нами в 7 классе для решения которых нужно хорошо владеть знаниями по теме «Одночлены и многочлены».

Такие как:

- разложение многочленов на множители с помощью способов группировки, формул сокращенного умножения;
- выполнять деление многочленов, производить операцию умножения одночлена на многочлен, выносить общий множитель за скобки. Выделим типы задач ОГЭ по теме «Одночлены и многочлены».

Задача 1 [34].

Найдите значения выражения:

$2x+3y-3z$, при $x=1, y=-0{,}4$ и $z=1{,}2$.

Решение: если $x=1, y=-0{,}4$ и $z=1{,}2$, то получим $2\cdot 1+3\cdot(-0{,}4)-$ $-3\cdot 1{,}2=-2{,}8$.

Ответ: $-2{,}8$.

Задача 2 [34].

Найдите значения выражения:

$\frac{2c-4}{cd-2d}$, при $c=0{,}5$ и $d=5$.

Решение: $\frac{2c-4}{cd-2d} = \frac{2(c-2)}{d(c-2)} = \frac{2}{d}$.

Если $c = 0{,}5$ и $d = 5$, то получим $\frac{2}{5} = 0{,}4$.

Ответ: $0{,}4$.

Задача 3 [34].

Найдите значения выражения:

$\left(\frac{1}{5a} + \frac{1}{7a}\right) \cdot \frac{a^2}{4}$, при $a = 7{,}7$.

Решение: $\left(\frac{1}{5a} + \frac{1}{7a}\right) \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{7+5}{35a} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{12a^2}{35 \cdot 4a} = \frac{3}{35}a$.

Если $a = 7{,}7$, то получим $\frac{3}{35} \cdot 7{,}7 = 0{,}66$.

Ответ: $0{,}66$.

Задача 4 [34].

Решите уравнение:

$$(x-2)(x-3)(x-4) = (x-3)(x-4)(x-5)$$

Решение:

Заметим, что в левой и правой частях есть два одинаковых множителя. Перенесем произведение из правой части в левую и вынесем общие множители за скобку: $(x-2)(x-3)(x-4) = (x-3)(x-4)(x-5) \Leftrightarrow (x-3)(x-4)\big((x-2)-(x-5)\big) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-4) \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=4. \end{array}\right.$

Ответ: $\{3; 4\}$.

Задача 5 [34].

Разложите на множители:

$x^2y + 1 - x^2 - y$.

Решение: $x^2y + 1 - x^2 - y = x^2y - x^2 - y + 1 = x^2(y-1) - (y-1) = (y-1)(x^2-1) = (y-1)(x-1)(x+1)$.

Ответ: $(y-1)(x-1)(x+1)$.

Задача 6 [34].

Решите уравнение:

$x^3 + 4x^2 = 9x + 36 \Leftrightarrow x^2(x+4) - 9(x+4) = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x^2 -$

$-9) = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = -4, x = -3, x = 3.$

Ответ: $-4, -3,\ 3.$

Задача 7 [34].

Решите уравнение:

$x^3 = x^2 - 7x + 7.$

Решение: перенесем все члены в левую часть и разложим ее на множители:

$$x^3 - x^2 + 7x - 7 = 0;$$

$$x^2(x-1) + 7(x-1) = 0;$$

$$(x-1)(x^2+7) = 0.$$

$x^2 + 7 > 0$ при всех значениях x, поэтому $x - 1 = 0$. Значит, $x = 1$.

Ответ: 1.

Задача 8 [34].

Найдите значения выражения:

$(x-3) \cdot \frac{x^2-6x+9}{x+3}$, при $x = -21$.

Решение: преобразуем выражение:

$$(x-3) \cdot \frac{x^2-6x+9}{x+3} = (x-3) \cdot \frac{x+3}{(x-3)^2} = \frac{x+3}{x-3}.$$

Если $x = -21$, то получим $\frac{-21+3}{-21-3} = \frac{-18}{-24} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$

Ответ: $0{,}75.$

Итак, нами было выделено несколько типовых вида задач, встречающиеся в 7 классе, и несколько типов задач, встречающиеся в основном государственном экзамене (ОГЭ), непосредственно связанные с темой «Одночлены и многочлены».

Чтобы успешно справиться с данными заданиями из тестовой части необходимо знать:

- линейные и квадратные уравнения,
- целые и рациональные выражения,
- квадратные неравенства.

Развернутой части:

- алгебраические выражения,
- неравенства и их системы,
- уравнения и их системы.

Учащиеся должны уметь выполнять арифметические операций над одночленами и многочленами, знать методы разложения многочленов на множители (чаще встречается метод группировки и вынесение общего множителя за скобки). Так же необходимо знать формулы сокращенного умножения, использовать понятия многочлена и одночлена для преобразования рациональных выражений, при решении неравенств и их систем, знать свойства степени многочленов с целым показателем

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были выполнены все задачи, поставленные перед нами, а также достигнута цель. Ознакомлены с историей появления многочленов, рассмотрены определения и свойства понятий «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры основной школы, выявлены цели обучения теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры и общие требования к знаниям обучающихся по теме «Одночлены и многочлены». Проведен анализ теоретического и задачного материала в учебниках различных авторов, изучены формы, методы, средства и методика обучения теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры основной школы, исследованы системы задач по теме «Одночлены и многочлены» в курсе алгебры основной школы.

Проведен логико-математический анализ темы «Одночлены и многочлены» темы, выделено, что он включает в себя: знание учащимися понятий: «одночлен», «многочлен», «степень многочлена», «стандартный вид многочлена», формулы сокращенного умножения и свойства степени с натуральным показателем, умение выполнять арифметические операций над одночленами и многочленами, раскладывать многочлены на множители.

Выявлены основные цели обучения теме «Одночлены и многочлены»: научиться выполнять арифметические операции над одночленами и многочленами, раскладывать многочлены на множители различными способами и применять формулы сокращённого умножения для преобразования алгебраических выражений и их вычислений.

Выявлены основные требования к уровню подготовки учащихся 7-9 классов по учебникам для общеобразовательных учреждений следующих авторов: Ш.А. Алимов, Ю.Н. Макарычев, А.Г. Мордкович, Г.К. Муравин. Выявлены основные требования к уровню подготовки для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики.

Выполнен анализ содержания теоретического материала по теме исследования в различных учебниках для общеобразовательных учреждений и классов с углубленным изучением математики. Рассмотрено, как различные авторы вводят понятия «одночлен» и «многочлен», какие темы учащиеся должны знать, чтобы успешно сдать ОГЭ в 9 классе.

Выполнен анализ задачного материала по теме «Одночлены и многочлены» в учебниках алгебры 7 класса.

Выявлены основные формы, методы и средства обучения. При обучении теме «Одночлены и многочлены» целесообразнее применять следующие методы обучения: работа с книгой, упражнения и выполнение самостоятельных работ. Целесообразнее совмещать в общеобразовательной практике организационные формы: фронтальная, групповая и индивидуальная. Также удобно использовать такие средства обучения, как: таблицы с формулами сокращенного, карточки, плакаты, различные презентации по теме урока.

Согласно анализу методической литературы, выделены два подхода по обучению теме «Одночлены и многочлены» – это алгебраический и функциональный, способствующие успешному усвоению материала. Нами были выделены методические приемы, способствующие сознательному усвоению учащимися темы «Одночлены и многочлены».

Рассмотрены основные требования к системе задач авторов: Е.И. Лященко, З.П. Матушкиной. Разработаны системы задач по темам: «Одночлены. Арифметические операции над одночленами», «Многочлены. Арифметические операции над многочленами», «Разложение многочленов на множители».

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров [и др.]. – 20-е издание. – Москва : Просвещение, 2014. – 255 с.

2. **Глейзер, Г.И.** 9-10 классы: история математики в школе, пособие для учителей / Г.И. Глейзер. – Москва : Просвещение, 1983. – 351 с.

3. Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров [и др.]. −17-е издание. – Москва : Просвещение, 2012. – 287 с.

4. **Баум, И.В**. Тождественные преобразования выражений / И.В. Баум, Ю.Н. Макарычев // Преподавание алгебры в 6-8 классах. − Москва : Просвещение, 1980. – С. 70—95.

5. **Бурмистрова, Т.А.** Алгебра. Сборник рабочих программ. 7 – 9 классы : пособие для учителей общеобразовательных организация / Т.А. Бурмистрова. – 2-е издание. — Москва : Просвещение, 2014. – 96 с.

6. Васильева, Г.Л. Методика изучения математики в основной школе: курс лекций для организации самостоятельной работы студентов по вопросам частных методик / Г.Л. Васильева. – Пермь : Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2011. – 96 с.

7. Алгебра. 8 класс: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, Г.С. Суворов [и др.]. – Москва : Просвещение, 1998. – 235 с.

8. Алгебра. 9 класс: учебник для учащихся 9 классов с углубленным изучением математики / Н.Я. Виленкин, Г.С.Сурвилло, А.С. Симонов [и др.]. – 7-е издание. – Москва : Просвещение, 2006. – 345 с.

9. **Варпаховский Ф.Л.**, Алгебра / Ф.Л. Варпаховский. –Москва : Просвещение, 1981.- 167 с.

10. Грудачева, А.Н. «Многочлены и действия над ними». Алгебра 7-ой класс. – Режим доступа: открытыйурок.рф/статьи/526363/.

11. **Груденов Я.И.** Совершенствование методики работы учителя математики: книга для учителя / Я.И. Груденов. – Москва : Просвещение, 1990. – 224 с.

12. **Епифанова, Н.М.** Методика обучения алгебре основной школы: учебно-методическое пособие / Н.М. Епифанова, О.П. Шарова. – Ярославль : издательство ЯГПУ имени К.Д. Ушинского, 2006. – 83 с.

13. Кожабаев, К.Г. Актуальные проблемы преподавания математики / К.Г. Кожабаев // Международный журнал экспериментального образования. – 2012. – № 5. – С. 66-68. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=20233051.

14. Методика преподавания математики в средней школы: Частные методики: учебное пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов / Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканин, Е.Л. Мокрушин, В. А. Оганесян [и др.]. – Москва : Просвещение, 1977. – 480 с.

15. **Крючкова, В.В.** Об опыте работы с правилами в теме «Многочлены» / В.В. Крючкова // Математика в школе. – 1984. – № 5. – С. 38–39.

16. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: учебное пособие для студентов физико-математических специальностей педагогических институтов / Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко [и др.]. – Москва : Просвещение, 1988. – 223 с.

17. Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков [и др.]. – Москва : Просвещение, 2013. – 253 с.

18. Алгебра. 8 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков [и др.]. – Москва : Просвещение, 2013. – 284 с.

19. Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков [и др.]. – Москва : Просвещение, 2014. – 268 с.

20. **Макарычев, Ю.Н.** Дополнительные главы к школьному учебнику 8 класса: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк. – Москва : Просвещение, 1998. –203 с.

21. **Матушкина, З.П.** Методика обучения решению задач : учебное пособие / З.П.Матушкина. – Курган : Издательство Курганского государственного университета, 2006. – 154 с

22. **И. В. Проскуряков** Сборник задач по линейной алгебре: 9-е издание. / И.В.Проскуряков – Москва : Лаборатория знаний, 2005. – 383 с.

23. **Мордкович, А.Г.** Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 21-е издание, дополнено – Москва : Мнемозина, 2013. – 175 с.

24. 7 класс. В 2 ч. Ч. 2: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина [и др.]. – 21-е издание – Москва : Мнемозина, 2013. – 268 с.

25. **Мордкович, А.Г.** Алгебра. 8 класс. Часть 1: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 12-е издание, дополнено – Москва : Мнемозина, 2010. – 215 с.

26. 8 класс. Часть 2: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина [и др.]. – 12-е издание – Москва : Мнемозина, 2010. – 271 с.

27. **Мордкович, А.Г.** Алгебра. 9 класс. Часть 1: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 12-е издание – Москва : Мнемозина, 2010. – 224 с.

28. Алгебра. 9 класс. Часть 2: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина [и др.]. – 12-е издание. – Москва : Мнемозина, 2010. – 223 с.

29. **Мордкович, А.Г.** Алгебра. 8 класс : методическое пособие для учителя / А.Г. Мордкович. – Москва : Мнемозина, 2010. – 77 с.

30. **Кострикин А.И.** Введение в алгебру. Основы алгебры: Учебник для Вузов / А.И.Кострикин. — Москва : Физматлит. 1994. — 320 с.

31. **Муравин Г.К.** Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 9-е издание. – Москва : Дрофа, 2013. – 285 с.

32. **Муравин Г.К.** Алгебра. 8 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 15-е издание. – Москва : Дрофа, 2013. – 254 с.

33. **Муравин Г.К.** Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 14-е издание. – Москва : Дрофа, 2014. – 315 с.

34. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. Режим доступа: https://oge.sdamgia.ru.

35. Фестиваль педагогических идей «Открытый урок». Режим доступа: https://urok.1sept.ru.

36. Примерная основная образовательная программа основного общего образования: одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию. Режим доступа: http://минобрнауки.рф/проекты/413/файл/4587/POOP_OOO_reestr_2015_01.

37. Фестиваль педагогических идей «Открытый урок». Режим доступа: https://urok.1sept.ru.

38. **Саранцев, Г.И.** Общая методика преподавания математики: учебное пособие для студентов математических спец. педагогических вузов и университетов / Г.И. Саранцев. – Саранск : Тип. «Красный Октябрь», 1999. – 208 с.

39. **Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования** : утвержден приказом Минпросвещения России от 3 мая 2021 г. №287 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования». – Москва, 2021. — Текст : электронный.