



МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

**Формирование пространственного мышления на уроках  
стереометрии**

**Выпускная квалификационная работа по направлению  
44.04.01 Педагогическое образование**

**Направленность программы магистратуры  
«Математическое образование в системе профильной подготовки»  
Форма обучения заочная**

Проверка на объем заимствований:  
73,37% авторского текста  
Работа рецензирована к защите

«25» ноября 2023г.

И.о. зав. кафедрой МиМOM  
Звягин К.А.

Выполнила:  
Студентка группы ЗФ-313-131-2-1  
Яшкова Анна Андреевна Яш

Научный руководитель:  
канд. пед. наук, доцент Св  
Севостьянова Светлана Анатольевна

Челябинск

2023

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЫШЛЕНИЯ НА УРОКАХ СТЕРЕОМЕТРИИ.....	9
1.1 Сущность, структура пространственного мышления и типы оперирования пространственными образами.....	9
1.2 Роль геометрического материала в формировании пространственного мышления у школьников.....	19
1.3 Особенности использования информационных технологий при изучении геометрии .....	26
Выводы по первой главе.....	35
ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЫШЛЕНИЯ НА УРОКАХ СТЕРЕОМЕТРИИ .....	37
2.1. Система задач для формирования пространственного мышления на уроках геометрии.....	37
2.2. Методический подход к процессу формирования пространственного мышления на уроках стереометрии с применением информационных технологий .....	51
2.3. Организация и результаты опытно-экспериментальной работы.....	67
Выводы по второй главе.....	72
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	74
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	76
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	86

## **ВВЕДЕНИЕ**

Согласно Федеральному закону «Об образовании в Российской Федерации» (от 31.07.2020 N 304-ФЗ) общее образование в стране направлено на развитие личности и приобретение в процессе освоения основных общеобразовательных программ знаний, умений, навыков и формирование компетенции, необходимых для жизни человека в обществе, осознанного выбора профессии и получения профессионального образования. Это находит свое подтверждение в Федеральных государственных образовательных стандартах основного общего и среднего общего образования, согласно которым образование ориентируется на более гибкое и персонализированное обучение, главной целью которого является не просто обучение, а становление личностных характеристик обучающегося, умеющего учиться, осознающего важность образования и самообразования для жизни и деятельности, а также способного применять полученные знания на практике. Обучающийся должен уметь ставить и решать, как жизненные, так и профессиональные задачи, что является одним из важнейших показателей самостоятельной, ценностно-ориентированной и ответственной личности.

Характерной чертой современного развития школьного образования является непрерывный поиск эффективных форм и методов обучения, путей совершенствования образовательного процесса в целом. Это связано с повышением требований, предъявляемых к выпускникам школ, способным грамотно и эффективно действовать в высокоразвитой информационной среде, умеющим адаптироваться в постоянно изменяющихся условиях. Исходя из этого, возникает необходимость повышения качественного уровня обучения, совершенствования методик преподавания школьных дисциплин.

Значительное место в системе формирования интеллектуальной и творческой личности обучающегося отводится изучению геометрии как

дисциплины, обладающей огромным гуманитарным и мировоззренческим потенциалом.

Для достижения высокого уровня геометрической подготовки учащихся необходимо обеспечить возможность приобретения ими фундаментальных знаний, развития пространственного воображения, стремления к самостоятельному изучению нового материала.

Одним из важнейших показателей целостного гармоничного развития обучающегося является уровень овладения плоскими и пространственными представлениями, умение свободно ориентироваться в пространстве и знание основных пространственных понятий. В Федеральном государственном образовательном стандарте (от 17.05.2012 N 413) выделены требования к предметным результатам освоения базового и углубленного курсов математики в 10-11 классах.

Данные требования отражают такие результаты обучения, как:

- владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах;
- сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры;
- применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;
- сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат.

Умение свободно оперировать плоскими и пространственными образами рассматривается как одно из важнейших качеств личности, часть его общего интеллектуального развития. Это то основное умение, которое объединяет разные виды учебной и трудовой деятельности. Овладение научными знаниями, успешная работа во многих видах теоретической и практической деятельности неразрывно связано с умением оперировать геометрическими образами. Выделение из математических объектов

именно пространственных свойств и отношений и отвлечение от всех остальных возможны только путем теоретической абстракции в ходе познавательной деятельности. Пространственное мышление всегда рассматривалось учеными в качестве одной из важнейших составляющих математического мышления, математических способностей.

Однако большинство старшеклассников сталкиваются с проблемой представления пространственных образов: зачастую обучающимся необходима подсказка, чтобы «увидеть» геометрическую фигуру, обучающиеся не понимают взаимосвязей между плоскими и пространственными объектами, не помнят теоретических аспектов, без которых сложно построить ту или иную геометрическую фигуру. Эта проблема у старшеклассников связана с пробелами в знаниях учащихся в основной школе, когда им необходимо научиться «видеть» и запоминать. Педагог ставит перед собой вопрос: как преподавать так, чтобы обучающийся учился не только мыслить геометрическими образами, но и запоминал теоретическую базу настолько крепко, чтобы ее не приходилось каждый раз напоминать, когда возникает необходимость решить ту или иную задачу с использованием давно пройденного материала.

Одним из путей решения проблемы является использование возможностей информационных технологий в практике работы преподавателя.

На сегодняшний день во всем мире широкое развитие получили информационные технологии. Необходимость внедрения новых информационных технологий в учебный процесс не вызывает сомнений.

Появление и широкое распространение технологий мультимедиа и Интернета позволяет использовать информационные технологии в качестве средства общения, воспитания, интеграции в мировое сообщество.

В процессе обучения в школе с помощью информационных технологий ребенок учится работать с текстом, создавать графические объекты и базы данных, использовать электронные таблицы. Ребенок узнает

новые способы сбора информации и учится пользоваться ими, расширяется его кругозор.

При использовании информационных технологий на занятиях повышается мотивация учения и стимулируется познавательный интерес учащихся, возрастает эффективность самостоятельной работы. Компьютер вместе с информационными технологиями открывает принципиально новые возможности в области образования, в учебной деятельности и творчестве учащегося. Образование поистине интегрируется в жизнь на всем ее протяжении.

По данной теме известны исследования многих отечественных и зарубежных специалистов: педагогов, психологов, методистов. Труды таких специалистов, как А. Н. Колмогоров, В. А. Крутецкий, А. Д. Александров, Г. В. Суходольский, С. Л. Рубинштейн, Б. В. Гнеденко, А. Г. Ковалев, Н. А. Менчинская, И. С. Якиманская, К. К. Платонов, В. Н. Мясищев, Е. Д. Божович, М. К. Гумматов, Г. Д. Глейзер, В. А. Далингер, В. А. Гусев, Г. Е. Романов, Х. Х. Кадаяс, И. Я. Каплунович, В. С. Столетнев, С. И. Шварцбурд, И. Верделин, Ж. Пиаже, Г. Ревеш, Э. Грондайк, А. Кеймерон, А. Бинэ, В. Браун, Р. Колермана, П. Руте, Н. Парадиз, А. Роджерс, В. Бетц, А. Блэкуелл, Ж. Адамар, А. Пуанкаре составляют методологическую основу данной работы и представляют собой психологические исследования по проблеме развития пространственных представлений у обучающихся.

Следовательно, возникает проблема совершенствования процесса обучения геометрии за счет включения в учебный процесс информационных технологий, а также специальным образом подобранных видов упражнений, направленных на формирование пространственного мышления.

**Объект исследования:** процесс обучения геометрии в старшей школе.

**Предмет исследования:** формирование пространственного мышления обучающихся на уроках геометрии в старшей школе.

**Цель исследования:** разработать и научно обосновать методику формирования пространственного мышления на уроках геометрии в старшей школе.

**Гипотеза исследования:**

Уровень пространственного мышления при обучении стереометрии повысится, если:

1) включить в учебный процесс систему задач, направленную на умение создавать, определять, преобразовывать и находить взаимодействие между образами и прообразами, а также визуализировать образы и их свойства в повседневной жизни;

2) комплексно использовать средства наглядности на уроках стереометрии, в том числе с применением информационных технологий.

**Задачи исследования:**

1. Проанализировать психолого-педагогическую и методическую литературу по теме исследования с целью выявления сущности пространственного мышления и его структуры.

2. Раскрыть роль геометрического материала в формировании пространственного мышления и выделить особенности использования информационных технологий при обучении геометрии.

3. Разработать и научно обосновать методику формирования пространственного мышления на уроках геометрии в старшей школе.

4. Разработать систему заданий и конспекты уроков для формирования пространственного мышления обучающихся.

5. Провести педагогический эксперимент с целью подтверждения эффективности разработанной методики.

Для решения поставленных задач нами использован комплекс **методов исследования**, который охватил: изучение и анализ психолого-педагогической, методической, математической литературы,

диссертационных исследований по изучаемой проблеме; программ и государственных стандартов; анализ и обобщение имеющихся теоретических и экспериментальных данных по теме исследования; изучение и обобщение опыта преподавания геометрии; педагогический эксперимент; методы практического исследования, включающие прямой и опосредованное наблюдение, беседы, опрос, анкетирование, тестирование; анализ результатов деятельности с применением методов математической статистики; обобщение собственного педагогического опыта.

**Практическая значимость.** В ходе проведенного исследования был разработан один из вариантов формирования пространственного мышления учащихся на уроках геометрии в старшей школе. Полученные результаты исследования со своими выводами и рекомендациями могут быть использованы авторами учебных пособий и учебников для учащихся; учителями математики общеобразовательных школ, гимназий, лицеев; студентами педагогических вузов при изучении курса «Теория и методика обучения математике»; на курсах повышения квалификации учителей математики.

**Структура выпускной квалификационной работы.** Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложения.



# **ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЫШЛЕНИЯ НА УРОКАХ СТЕРЕОМЕТРИИ**

1.1 Сущность, структура пространственного мышления и типы оперирования пространственными образами

Развитие пространственного мышления детей, особенно в реалиях современного мира, является чрезвычайно важным, так как этот психический процесс является безусловным и неотъемлемым компонентом при любой форме творческой деятельности человека, а также от этого зависит его поведение в целом [14].

Человек, познавая окружающий мир, использует обычно рациональное, логическое мышление, оно по своему содержанию отличается от уровня непосредственного, чувственного познания, при котором складывается картина мира преимущественно по средствам ощущений и восприятия. Мышление – это опосредованное, обобщённое отражение действительности человеком в её существенных связях и отношениях [36].

Можно выделить следующие виды мышления:

1. Наглядно-действенное – это мышление, при котором решение мыслительной задачи происходит непосредственно в процессе деятельности. Такой вид считается элементарным видом мышления, который выступает основой для формирования более сложных видов мышления.

2. Наглядно-образное – это такой вид мышления, при котором содержание мыслительной задачи будет основано на образном материале.

3. Словесно-логическое – этот вид мышления подразумевает под собой, решение задачи будет происходить в словесной форме, с опорой на логические операции и понятия [54].

Одной из разновидностей образного мышления является пространственное мышление, оно играет особую роль при овладении человеком знаниями основ наук, а также во многих других областях деятельности [71].

В психологии нет общепринятого термина «пространственное мышление». Причиной тому является то, что любое мышление будет являться обобщенным и опосредованным отражением действительности в её связях и отношениях, в том числе и пространственных.

Изучив литературу, мы смогли выделить компоненты пространственного мышления – психические функции, которые обеспечивают решение теоретических, а также практических задач в «пространстве» тела, графических образов, предметов, речи: конструктивно-пространственные, графомоторные, пространственно-речевые и другие функции.

Образ – это основная структурная единица пространственного мышления, она отражает пространственные признаки и особенности объекта: размер, форма, положение в пространстве и т. д., всё это помогает воспринимать объект. Процесс пространственного мышления происходит путём создания новых образов [37].

Главной отличительной чертой пространственного мышления является оперирование пространственными образами в пространстве или на плоскости. Данное мышление помогает выделять пространственные характеристики при восприятии какого-либо объекта, то есть пространственные представления отражают свойства и соотношение этого объекта в трёхмерном пространстве.

Пространственные представления – это образы памяти или образы воображения, в которых представлены по преимуществу пространственные характеристики объекта: форма, величина, взаимоположение составляющих его частей, расположение его на плоскости или в пространстве.

Психологические исследования говорят о том, что формирование пространственного мышления происходит в связи с общим психическим развитием человека по мере овладения им предметным миром, процессом общения, обучения.

И. Я. Каплунович в своих исследованиях пишет: «понятие пространственного мышления является видовым по отношению к понятию образного мышления и в значительной мере опирается не только на чисто логические, но и на чувственные компоненты, на представления. В психологии пространственное мышление понимается как процесс создания пространственных образов и установления отношения между ними путем оперирования самими образами и их элементами» [31].

Л. Л. Гурова дает следующее определение: «Совокупность мысленных последовательно-операциональных пространственных преобразований и симультанного образного виденья объекта во всем многообразии и изменчивости его свойств, постоянное перекодирование этих различных мысленных планов составляют специфическую мысленную способность, которую сокращенно называют пространственным мышлением».

По мнению А. В. Василенко, под пространственным мышлением понимают:

- специфическую разновидность одного из видов мышления, связанного с воображением (образного мышления), основу которого составляют геометрические образы и основная функция которого - оперировать образами в математическом (абстрактном) пространстве;
- мыслительный процесс, представляющий по своему содержанию обобщенное и опосредованное отражение пространственных свойств и отношений объекта, включенного в этот мыслительный процесс, многократные мыслительные действия с образами, требующие их динамичности, интуитивное определение какие именно действия целесообразно выполнять для получения нужного результата [12].

Л. Л. Гурова определяет понятие образа как такового: «Образ не является зеркальным отражением предмета, он представляет собой динамический синтез его признаков, как бы сколы действительности, взятые в разных ракурсах, когда на первый план выступает то один, то другой признак и в зависимости от такой переакцентировки изменяется вся конфигурация признаков. В решении задачи этот процесс приобретает целенаправленный характер. Образ становится средством исследования ситуации, определения в ней узловых условий и возможных путей их использования. Тем самым он выступает в своей специфической мыслительной функции – функции образной логики» [20].

И. С. Якиманская пишет, что пространственное мышление в своей наиболее развитой форме оперирует образами, содержанием которых является воспроизведение и преобразование пространственных свойств и отношений объектов: их формы, величины, взаимного расположения частей [71].

И. С. Якиманская дает следующее определение: «пространственное мышление – специфический вид мыслительной деятельности, которая необходима при решении задач, требующих ориентации в пространстве (как видимом, так и воображаемом), и которая основывается на анализе пространственных свойств и отношений реальных объектов и их графических изображений» [71].

Если с психологической точки зрения существуют различные определения пространственного мышления, то с педагогической – таких определений мало. Несмотря на актуальность темы, исследователями ей уделяется мало внимания.

Можно сказать, что существенным признаком развития пространственного мышления школьника, позволяющим выявить качественные изменения в его формировании и развитии, является работа с геометрическими образами.

Пространственное мышление в обучении математике формируется на геометрических образах пространственных предметов окружающего мира.

Переход от одних образов и их свойств к другим при решении разнотипных задач, дает целостную систему.

С. А. Коногорская пишет, что пространственное мышление – есть разновидность мышления, реализуемого преимущественно в образном и практических планах, специфика которого заключается в самом предмете мысли – пространстве и пространственных отношениях [36].

Например, Г. Е. Тукеева в своей статье определяет пространственно-образное мышление как процесс, направленный на умозрительное воссоздание различных объектов и затем их практического решения на основе чертежно-графических задач. Вводится целенаправленное и целесообразное преобразование графической действительности, требующее особого рода умственной и практической деятельности, предполагающее систему включенных в нее чертежно-графических действий и операций преобразовательного и познавательного (ориентировочно-исследовательского) характера [65].

А. П. Кузнецов под пространственным мышлением подразумевает свободное оперирование пространственными образами, созданными на различной наглядной основе, их преобразование с учётом требований задачи [39].

Рассмотрим некоторые качества пространственного мышления, которые, по мнению Г. Д. Глейзера, являются наиболее значимыми.

1. В процессе решения многих учебных задач приходится использовать разнотипную наглядную основу. Образы, полученные путем ее восприятия, должны существовать в мыслительной деятельности ученика не рядоположено, а складываться в единую систему, обеспечивая логику их преобразования в процессе решения задачи. «Рассогласования» между этими образами быть не должно, ибо это приводит к формальному усвоению знаний, к невозможности решить задачу.

2. Пространственные образы, которыми оперирует мышление, должны быть динамичными, подвижными, оперативными. Эти качества вытекают из условий их создания и оперирования ими. Подвижность, динамичность образов обусловлена тем, что в процессе решения задач требуется постоянный переход от объемных (трехмерных) изображений к плоскостным(двумерным) и обратно, от восприятия реальных объектов к их графическим изображениям.

3. В ходе решения задач, требующих оперирования пространственными отношениями, необходимо отвлекаться от одной системы отсчета и переходить на другую, заданную условиями задачи или выбранную самостоятельно. В качестве операторных единиц, обеспечивающих решение задач, могут выступать различные пространственные характеристики: форма, величина, пространственная размещенность элементов, соотношение частей и целого и т.п. Преимущественное фиксирование образа различных пространственных свойств объекта определяется его функцией в структуре задачи. На разных этапах ее решения в качестве оперативных образов могут выступать образы, разные по своему содержанию [18].

Все указанные выше особенности пространственных образов определяют основное направление формирования пространственного мышления школьников в процессе обучения с определенными заданными качествами.

Как показывают многочисленные психолого-педагогические исследования и повседневная практика обучения, пространственное мышление развивается в школьном возрасте неравномерно даже у учащихся, находящихся в одинаковых условиях обучения. Возрастные и индивидуальные различия пространственного мышления выступают в сложных и неоднозначных отношениях.

Рассмотрим, как различные авторы определяют структуру пространственного мышления.

И. Я. Каплунович определил понятие структуры пространственного мышления следующим образом: «под структурой пространственного мышления понимается система, представляющая собой многоуровневую совокупность множеств мыслительных операций, осуществляемых в представлении над пространственными образами» [32].

А. В. Василенко выделяет три компонента, входящие в структуру пространственного мышления. Первым элементом структуры является пространственное восприятие, предполагающее отблеск данных находящегося вокруг мира, восприятие обоюдного месторасположения объектов, их формы и величины. Второй элемент – пространственные представления, формирующиеся в процессе случайного воссоздания вида человеком в уме со всеми связанными с ним качествами. Затем на основе созданных представлений формируется способность, мысленно перестраивать исходные образы, что характеризует третий компонент – пространственное воображение. Когда умственная деятельность начинает приобретать более осмысленный и произвольный характер, при сохранении всех существенных свойств и характеристик предметов окружающей действительности для решения поставленных задач, то можно говорить о проявлении пространственного мышления [13].

Для изучения состояния развития пространственного мышления учащихся и его формирования И. С. Якиманская использует такие показатели как:

- 1) успешность создания пространственного образа, адекватного графическому представлению;
- 2) тип оперирования образом;
- 3) широта оперирования;
- 4) полнота образа, т. е. отражение в нем различных характеристик: формы, величины, пространственной размещенности, протяженности [33,71].

Охарактеризуем каждый из них более подробно.

Успешность создания пространственного образа показывает ту особенность графической основы, на который образ формируется наиболее продуктивно (наглядный рисунок – условный чертеж – схема), и динамичность образа, т. е. его подвижность, возможность создания образа в условиях вариативной экспозиции воображения.

Тип оперирования образом есть доступный способ преобразования созданного образа. Сложность оперирования учитывается типами пространственных преобразований:

а) изменения образа по пространственному положению (мысленные вращения, перемещение и др.);

б) мысленное преобразование структуры образа путем перегруппировки его отдельных элементов, используя приемы наложения, совмещения, рассечения и т.п.;

в) одновременное изменение пространственного положения его образа и его структуры [5].

Широта оперирования выражается в легкости «перекодирования» наглядной информации, позволяющей с одинаковой свободой создавать образы на различном графическом материале.

Полнота образа характеризует структуру образа, т.е. набор элементов, связи между ними, их динамическое соотношение. В образе отражается не только форма и величина предмета, но и пространственная размещенность (относительно заданной плоскости или взаимного расположения элементов). Важной характеристикой «мечты» образа является его динамичность, которая выражается в умении мысленно фиксировать изменения в содержании образа и произвольно изменять точку отчета. Динамичность образа проявляется не только в умении видоизменять, но и видеть в статистическом изображении движение, перемещение объектов, способ их создания [6].

С помощью этих показателей можно проанализировать способы представления: широта их использования, учет меры наглядности,



преимущественное оперирование формой, величиной или пространственными соотношениями, произвольное изменение точки отчета и т.п.

Основываясь на этих показателях И. С. Якиманская, предложила три уровня развития пространственного мышления (таблица 1).

Таблица 1 – Уровни развития пространственного мышления по И. С. Якиманской

Уровень пространственного мышления	Описание уровня пространственного мышления
1 уровень	Исходный образ в процессе решения задачи видоизменяется, причем структура его не меняется
2 уровень	Исходный образ преобразуется по структуре
3 уровень	Первичная основа для создания нового образа

Похожая классификация у И. Я. Каплунович. Автор определяет не уровни, а типы пространственного мышления (таблица 2).

Таблица 2 – Типы пространственного мышления по И. Я. Каплунович

Тип пространственного мышления	Преобразования, характерные для типа пространственного мышления
1 тип	Преобразования, касающиеся только пространственного положения образа
2 тип	Преобразования, затрагивающие и видоизменяющие структуру исходного образа
3 тип	Преобразование осуществляется одновременно по пространственному положению и структуре исходного образа

Структура пространственного мышления достаточно сложная, так как в неё входят элементы разных уровней развития и содержания, а также она зависит от многих факторов (содержания наглядного материала, специфики и характера задачи, деятельности и способов оперирования образами). Структура пространственного мышления определяется функцией образов в системе познавательной (учебной) деятельности и характеризуется динамичностью, полнотой, степенью новизны пространственных образов. Однако пространственное мышление характеризуется не только созданием

соответствующих образов, но и их оперированием, «перекодированием», которое происходит на основе представления [63].

И. С. Якиманская говорит о том, что становление пространственного мышления происходит в системе общего психического развития и осуществляется по мере овладения человеком предметным миром, в процессе общения, в ходе специального обучения, позволяющего наиболее полно постигнуть пространственные свойства и отношения в их всеобщих и закономерных связях [71,5].

Исследователи отмечают, что этот вид мышления начинает формироваться с самых первых дней жизни ребенка и поддается тренировке: уже в трехлетнем возрасте дети способны читать простые карты и даже создавать свои собственные.

Исходя из этого, целесообразно начинать развивать пространственное мышление уже в дошкольном возрасте и продолжать формировать его в период обучения в начальной школе, когда наиболее активно у ребенка развиваются когнитивные процессы: восприятие, память, мышление, речь, воображение [11].

С самого раннего детства дети постигают окружающий его мир через контакт с предметами. Е. С. Трощкая подчеркивает сензитивность младшего школьного возраста для развития пространственного мышления, она объясняет это тем, что именно к моменту поступления в школу у ребенка накапливается необходимый опыт оперирования объемными объектами реальной действительности, что дает возможность на основе данного опыта выполнять умственные действия на плоскости [63].

Таким образом, можно сказать, что пространственное мышление является разноуровневым и сложным процессом, на структуру и развитие которого влияет множество различных факторов.

1.2 Роль геометрического материала в формировании пространственного мышления у школьников

Пространственное мышление обеспечивается разнообразными психическими процессами, такими как: чувство, воображение, внимание, память и другие. Ведущую роль играют: классификация, абстракция, анализ, обобщение, сравнение, синтез.

В статье А. В. Белошистой [8] предлагаются новые подходы к построению методической системы развития пространственного мышления школьников на уроках математики, основываясь на приведенных автором исследованиях. Ученая утверждает, что система работы над развитием пространственного мышления ребенка младшего школьного возраста может выстраиваться преимущественно с использованием наглядных плоских фигур. Многолетний эксперимент, в котором приняли участия не одна сотня учителей и несколько тысяч школьников, показал значимость плоских фигур в процессе формирования пространственного мышления. Пространственная фигура ограничена плоскими фигурами, а плоские фигуры, в свою очередь, получают при сечении и развертках многогранных фигур.

Изучая методологические разработки и рекомендации о путях и методах развития и создания пространственного мышления у учащихся, мы отметили, что большинство приходит к выводу о необходимости развития пространственного мышления с первого класса.

К моменту поступления в первый класс ребёнок уже имеет определённые сформированные пространственные представления без восприятия каких-либо конкретных пространственных понятий отдельно, а с восприятием мира в целом со всеми окружающими его объектами [18].

Пространственное мышление формируется за счёт оперирования пространственными образами, а те в свою очередь отражают пространственные характеристики объекта, то есть форму, величину, положение в пространстве и т. д. В данной ситуации математика играет важную роль, так как такие понятия как форма, величина, положение в пространстве или на плоскости изучаются в геометрии.

При формировании пространственного мышления детей младшего школьного возраста, в первую очередь необходимо уделить внимания пространственным отношениям: справа-слева, выше-ниже, над-под, спереди-сзади, т.к. овладения этими понятиями вызывает значительные трудности. Основными приемами для развития этих отношений послужит раскрашивание предметных картинок, представление образов в качестве схем, обозначение предметов буквами или цифрами. С их помощью фиксируется итог мыслительной работы по пониманию навыков ориентации в привычном пространстве и происходит овладения простейшими графическими умениями.

Формирование пространственного мышления у ученика может быть осуществлено с использованием принципов построения когнитивных семантических образов. Изображение должно быть максимально тесно связано с объективным содержанием и, несомненно, отражать запоминание более сложных разделов и, если возможно, быть связано с переживаниями, эмоциями, личными событиями.

Способствует и расширяет возможности создания пространственных представлений с помощью упражнений для изменения формы фигуры в результате растяжения или сжатия.

В методических разработках для учителей к учебнику «Наглядная геометрия в начальных классах», разработанных А. В. Белошистой, представлена система упражнений и заданий развивающего характера. Данная система условно делится на четыре этапа: работа с моделями геометрических фигур на вещественном уровне, работа с моделями фигур в графическом виде, работа с применением инструментов при построении фигур, работа с объемными телами путем комбинирования в пространстве плоских фигур и разверстка этих тел на плоскости

На первом этапе ребенок выполняет задания с разнообразными наборами геометрических фигур на складывание по образцу, представлению или заданию. Задача состоит в чередовании заданий на

различные типы оперирования таким образом, чтобы ребенок накапливал запасы образов и мог упражняться в выполнении оперирования ими.

На втором этапе применяются специальные геометрические шаблоны, с помощью которых ребенок получает на рисунке нужные формы. Когда ученик обводит, раскрашивает или штрихует форму, то на кинестетическом уровне запоминает ее образ. Данный этап формирует умение поворачивать, сдвигать, создавать композиции, находить симметрию изменять параметры фигур. Важно отметить, что эти задания носят игровой характер, который наиболее привлекателен для детей младшего школьного возраста.

На третьем этапе ребенок привыкает пользоваться инструментами (не только линейкой, но и циркулем с угольником) при построении фигур. С помощью заданий на построение приобретаются и накапливаются практические умения и опыт доказательств.

Четвертый этап является стереометрическим. Ученики овладевают приемами черчения.

Изучение геометрического материала младшими школьниками решает следующие задачи:

- развитие плоскостного и пространственного мышления у них;
- уточнение и обогащение геометрических представлений учеников, приобретённых в дошкольном возрасте, а также помимо обучения в школе;
- обогащение геометрических представлений школьников, формирование некоторых основных геометрических понятий;
- различные геометрические фигуры используют и в качестве наглядной основы при формировании представлений о долях величин, а также при решении разного рода текстовых задач;
- формирование осознанных геометрических знаний;
- формирование способности выполнять мыслительные операции с геометрическим материалом: рассуждать и делать выводы, сравнивать и

анализировать, находить общее и частное, устанавливать простые закономерности;

- формирование элементов конструкторских умений и конструкторского мышления;

- обучение способам получения знаний в индивидуальном творческом поиске, способам оперирования с имеющимися знаниями в любой ситуации, в том числе нестандартной, творческой [55].

При изучении геометрического материала на уроках математики следует широко использовать разнообразные наглядные пособия. Это демонстрационные, общеклассные пособия: геометрические фигуры, изготовленные из цветного картона или плотной бумаги, плакаты с изображениями предметов различной формы, а также геометрических фигур, чертежи на доске, видеофильмы. Кроме того, требуются индивидуальные наглядные – такой раздаточный материал, как полоски бумаги, палочки различной длины, вырезанные из бумаги фигуры и части фигур. При изучении отдельных тем полезно изготовить с детьми самодельные наглядные пособия: модель прямого угла, раздвижную модель угла, палетку, модели единиц измерения площади и другое [40].

Наиболее эффективными приемами изучения геометрического материала являются лабораторно-практические: моделирование фигур из бумаги, из палочек, из проволоки; черчение, измерение и др. При этом важно обеспечить разнообразие объектов, для того чтобы, варьируя несущественные признаки (цвет, размер, расположение на плоскости и др.), помочь детям выделить и усвоить существенные признаки – форму предметов, свойства фигур и т.п.

Таким образом, изучение геометрического материала младшими школьниками на уроках математики имеет большую практическую значимость в формировании пространственного мышления. Геометрический материал лежит в основе нашей жизнедеятельности, а также изучения курса геометрии в старших классах.

Результаты исследований отечественных педагогов В. А. Гусева, В. А. Панчищиной, В. И. Далингера, В. В. Орлова, и др. показывают, что среди школьных предметов математического цикла, предмет геометрия имеет наибольший потенциал для формирования и развития пространственного мышления, особенно его раздел «Стереометрия», который изучает свойства и отношения геометрических фигур в пространстве. Важнейшей задачей стереометрии является развитие интеллектуальной составляющей школьников, посредством знакомства учащихся с пространством, его особенностями, понятиями и представлениями. Основной целью изучения стереометрии является развитие у учащихся пространственного мышления.

В преподавании данной дисциплины создание пространственных образов и оперирование ими особенно ярко выступают на первый план. Ученики познают пространственные формы стереометрических объектов и их различных комбинаций в активном использовании. Активное восприятие дает возможность учащимся накапливать запас представлений, что является необходимым этапом познания пространственных форм. На основе полученных пространственных представлений создаются понятия, устанавливаются связи между ними – математические предложения, излагаются теоремы, т.е. совершается переход к абстрактному мышлению.

Стереометрия содержит богатый материал для демонстрации объемных форм окружающей нас действительности. При этом использование таких форм должно отличаться доступностью, четкостью, наглядностью. К этому призывает основоположник наглядного обучения, классик педагогической науки Я. А. Коменский. Чешский педагог рассматривал вопрос восприятия наглядности учащимися, так как оно, по его мнению, находится в прямой связи с мышлением. Н. И. Лобачевский отмечает, что «...первыми данными, без сомнения, будут всегда те понятия, которые мы приобретаем в природе посредством наших чувств», и в своих

наставлениях преподавателям математики рекомендует опираться на наглядность.

Как было установлено Р. С. Черкасовым, А. Д. Семушиным, И. В. Трайневым, Г. Ф. Хакимовым, наглядное обучение опирается на конкретные образы, поэтому необходимо использовать различные средства визуальной наглядности. Применение в процессе обучения стереометрии разнотипных средств наглядности способствует накоплению богатого запаса зрительных пространственных образов, а также формированию их динамичности, что, по мнению С. Л. Рубинштейна, является необходимым условием высокого уровня развития пространственного мышления. К средствам наглядности отнесем: натуральные (вещественные) модели (фотографии, рисунки, реальные предметы, муляжи, геометрические тела); условно-графические изображения (чертежи, проекции, разрезы, сечения); знаковые модели (математические формулы и символы); компьютерные модели (передаваемый по сети текст или изображение информации на экране компьютера, графика и звук).

Все виды учебной наглядности чувственно воспринимаемы, но их содержание принципиально различно, что определяет характер возникающих на их основе пространственных образов. Психологическая многогранность средств визуальной наглядности позволяет утверждать, что они имеют разностороннюю педагогическую ценность в развитии пространственного мышления учащихся в процессе обучения стереометрии.

Если при создании пространственного образа на уроках стереометрии мысленному преобразованию подвергается наглядная основа, на базе которой возникает образ, то оперирование заключается в преобразовании уже созданного на этой основе образа, иногда в условиях отвлечения от наглядной основы. Этот процесс также характеризуется числом и характером преобразований созданных образов. Исследователи выделили несколько способов преобразования пространственных образов (типов



оперирования) в ходе решения задач. Умение мысленно изменять положение образа стереометрической комбинации в пространстве по отношению к другим объектам или их элементам относится к первому типу оперирования. Второй тип оперирования характеризуется умением учащихся мысленно изменять структуру образа геометрической конфигурации путем мысленной перегруппировки ее составных элементов с помощью применения различных приемов, например, совмещения, добавления, наложения, усечения. Третий тип оперирования подразумевает умение изменять образ геометрической конфигурации одновременно по положению и по структуре. И, наконец, четвертый тип оперирования требует умения конструировать образы новых геометрических конфигураций и воспроизводить их с помощью различных видов учебной наглядности.

Приемы мышления, в том числе и пространственного, особенно ярко проявляются при обучении решению различного рода практических и теоретических задач. Старшеклассники в процессе обучения стереометрии овладевают наиболее рациональными приемами оперирования пространственными образами. От них требуются умения в ходе решения стереометрических задач осуществлять переход от трехмерного пространства к двумерному и обратно, переход от натуральных моделей к условно-графическим изображениям стереометрических объектов и обратно, переход от фиксированной системы отсчета при восприятии объекта к свободно выбранной или произвольно заданной.

Таким образом, многие современные научные исследования посвящены поиску возможностей формирования пространственных представлений и развития пространственного мышления школьников. Указанная способность является наиболее востребованной на этапе изучения геометрии в старшей школе, поскольку учащиеся в этот период обучения погружаются в мир объемных геометрических фигур и их свойств. При этом изучение теоретического материала, решение задач в основном

опираются на умения учащихся грамотного построения и чтения проекционного чертежа, на способность видеть в плоском изображении, выполненном по определенным правилам, стереометрический объект, анализировать его структуру, рассматривать умственным взором геометрическое тело с различных ракурсов.

### 1.3 Особенности использования информационных технологий при изучении геометрии

Сегодня информационные технологии очень важны в жизни человека. Они охватывают практически все сферы жизни, включая систему образования. В большинстве школ есть ИТ-классы, которые позволяют учителям использовать современные технические ресурсы на своих уроках и внеклассных мероприятиях. Информационные технологии способствуют повышению эффективности и качества образовательного процесса, а также активно развиваются и опираются на принцип самостоятельного обучения с помощью электронных средств.

Информационные технологии в математических дисциплинах повышают эффективность образовательного процесса и в целом повышают интерес учащихся к предметам и будущей профессиональной деятельности. Электронные средства обучения повышают осведомленность учащихся о процессе обучения, развивают познавательную активность учащихся, способствуют общему развитию всех учащихся для достижения максимально возможных результатов, в том числе самых сильных и слабых, и позволяют размышлять над знаниями.

Но не все может показаться гладким на первый взгляд. Во-первых, внедрение инструментов информационных технологий в школах требует значительных экономических затрат, и многие школы не могут себе их позволить. Во-вторых, возникают технические проблемы, большая нагрузка на локальную сеть, недостаточный доступ в Интернет и т.д. В-третьих,

информационные технологии помогают учащимся, пропустившим занятия, заполняться в быстром темпе, но это не влияет на качество их обучения положительным образом, а скорее, согласно результатам анализа, качество обучения ухудшается.

Предметная область «математика» дает большие возможности для применения информационных технологий в процессе обучения. Они могут использоваться как на различных этапах процесса обучения (при изучении нового материала, закреплении и систематизации ранее изученного, контроле знаний и усвоенных способов деятельности, обобщении и повторении материала), так и на разных этапах занятий (при актуализации знаний, изложении нового материала и т. д.) и, конечно, во внеурочной деятельности, которая является неотъемлемой частью процесса обучения.

Анализ опыта работы учителей математики позволил выделить основные средства информационных технологий, которые традиционно используются в процессе обучения математике. К ним относятся:

- мультимедийные презентации, которые чаще всего сопровождают изучение теоретического материала и его первичное закрепление;
- электронные учебники со встроенными видеофрагментами, тестовыми вопросами и вопросами для самоконтроля;
- программы-графопостроители, используемые в процессе обучения алгебре (Excel, AdvancedGrapher, MathCad и др.);
- виртуальные конструкторы, используемые при обучении геометрии («Живая геометрия», WinGeom, «Стереоконструктор» и др.);
- тестовые среды.

С начала XXI века в Российской Федерации активно разрабатываются программы развития интерактивных средств обучения. Правительством приняты «Концепция информатизации сферы образования Российской Федерации», программа «Развитие единой образовательной

информационной среды», проект «Информатизация системы образования», разработана и создана «Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов», «Каталог образовательных ресурсов сети Интернет». Кроме того, достаточно распространены образовательные интернет платформы такие как Foxford, InternetUrock, Учи.ру, «Универсариум», «Российская электронная школа», «Билет в будущее», «Яндекс.Учебник» и др. На данных образовательных порталах можно встретить не только записи уроков и занятий с подробным разбором учебных задач, но и систему проверки знаний, различные проверочные работы, тесты. Все эти средства помогают современному учителю реализовать различные методики обучения, повысить мотивацию обучающихся, привить интерес к предмету. Многие методисты отмечают положительное влияние применения современных мультимедийных технологий. Применяя на уроках интерактивные методы, учитель получает возможность часто сменять виды деятельности учащихся и формы взаимодействия между ними, управлять учебно-познавательным процессом используя проверочные работы, выполненные на компьютере, обучать осуществлять самостоятельный поиск необходимой информации в сети Internet и ее отбора, применять новые формы учебного взаимодействия учащихся.

Современные школы и вузы имеют следующие лицензионные продукты: Derive Maple, Mathematica, Mathcad, Mathlab и др. Эти продукты обладают колоссальными возможностями построения графических изображений, создавать различные анимации и клипы. Но в виду высокой цены данных продуктов в школе приходится использовать бесплатные интерактивные системы, такие как GeoGebra, Desmos, 3D Max, Geometria, Cabri 3D. Учащиеся достаточно быстро осваиваются в этих системах и способны самостоятельно выполнять различные построения в них. Представленные системы позволяют быстро создавать красочные выразительные наглядные модели пространственных фигур, составлять их комбинации.

Данные программы позволяют рассматривать построенные пространственные фигуры с разных сторон, что, безусловно, помогает учащимся развивать пространственные представления о той или иной геометрической фигуре, выявить шаги при построении, просмотреть их этапы, используя соответствующие команды программ. Построенные чертежи в рассмотренных системах можно сохранять и пользоваться ими в дальнейшем, изменять те или иные параметры, двигать объекты, перемещая точки, приближать или удалять объекты, менять размер элементов.

Применение интерактивных методов на уроках математики дает возможность учащимся наблюдать фигуры и их комбинации с разных ракурсов, находить удобные ракурсы, позволяющие увидеть нужный элемент фигуры, отыскать соотношения между ее элементами, понять, как лучше перенести чертеж в учебную тетрадь.

Абстрактный характер геометрического материала, усиленный стремлением сохранить фундаментальность его изложения в школьных учебниках, сужает возможности использования развивающих технологий в преподавании школьного курса геометрии.

В связи с этим в обучении геометрии применяют интерактивные геометрические среды, которые представляют собой программное обеспечение, позволяющее выполнять геометрические построения на компьютере таким образом, что при изменении одного из геометрических объектов чертежа остальные также изменяются, сохраняя заданные отношения неизменными. Например, при перемещении прямой, перпендикуляр к ней также переместится, оставаясь перпендикулярным к ней. Таким образом, чертеж, созданный в интерактивной геометрической среде, представляет собой модель, реализующую заданные отношения между геометрическими объектами.

Кроме указанной отличительной черты, подобные среды обладают также и другими возможностями, в частности, в них можно изменять стиль

и цвет линий, оставлять след движущихся геометрических объектов и автоматически перемещать их.

Система операций интерактивных геометрических сред совпадает с системой операций, характерной для самой геометрии (построить прямую, проходящую через точку; провести окружность заданного радиуса с центром в точке А и т. д.). При этом геометрические среды обладают расширенным по сравнению с геометрией «на бумаге» набором элементарных операций (включая, например, деление отрезка пополам или вписывание треугольника в окружность). Это значительно упрощает построение модели геометрической задачи, так как для создания чертежа достаточно последовательно выполнять в интерактивной геометрической среде операции, указанные в условии задачи.

В настоящее время существуют несколько интерактивных геометрических сред, каждая из которых имеет свои сильные стороны и недостатки.

Живая математика является средой моделирования и динамического изменения чертежей, графиков и иных объектов; позволяет разрешать обширную область вопросов при изучении геометрии, алгебры, тригонометрии и математического анализа. Программное обеспечение Geometer's Sketchpad v. 4 является базой, на основе которой разработана Живая математика. Программа является российской разработкой, поэтому трудностей в понимании ее у русскоязычного населения быть не должно – ее интерфейс полностью русифицирован. Она адаптирована Институтом Новых Технологий; ее можно устанавливать на операционные системы: Windows, MacOS. Данная динамическая среда не относится к бесплатно распространяемым программным обеспечениям. Тем не менее, в программе имеется бесплатная демоверсия, длительность пользования которой составляет 10 дней, но её минусом считается возможность установки на компьютер только лишь с операционной системой Windows 10 [68].

Широкий набор инструментов для выполнения построений на плоскости и последующей их эксплуатации – все это есть в среде динамической геометрии Живая математика. Другими словами, программа включает в себя едва ли не весь планиметрический материал. По крайней мере можно с уверенностью сказать, что работа на плоскости занимает значительную долю предоставляемых инструментов.

Создание стереометрических чертежей в данной системе довольно ограничено. В среде нет 3D-полотна. На первый взгляд кажется, что это означает, что строить пространственные фигуры и работать с ними в программе невозможно. Однако объемное тело построить все-таки возможно. Для того чтобы начать построение объемного тела, первоначально нужно выполнить вспомогательные построения (задать трехмерную систему координат), которые потом возможно сделать невидимыми. На рисунке 1 представлен интерфейс программы.

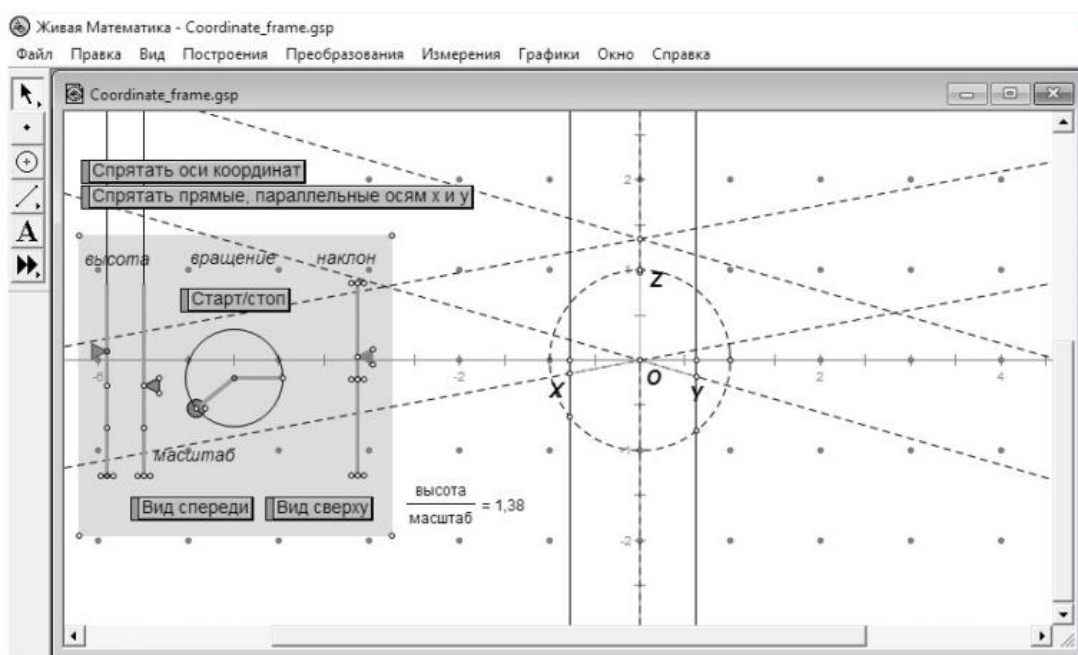


Рисунок 1 – Интерфейс программы «Живая математика»

Математический конструктор – отечественная разработка в области интерактивных динамических сред для образовательных целей. Создателем среды является компания 1С, которая с 1996 года занимается разработкой обучающих мультимедийных продуктов.

Среда позволяет создавать интерактивные модели, сочетающие дизайн, динамическое изменение, исследование, и может быть применена на абсолютно всех этапах математического образования. Среда Математический конструктор не является свободно распространяемым программным обеспечением. Одна лицензия может быть использована для установки программного обеспечения на неограниченное количество устройств. Программу можно устанавливать на следующие операционные системы: Windows, Linux, MacOS, iOS, Android. Также можно работать в среде онлайн, на сайте разработчика, но своими возможностями веб-версия среды похвастаться не может, они весьма ограничены.

Математический конструктор, как и предыдущая среда, также лучше подходит для работы на плоскости, чем в пространстве. У программы Математический конструктор достаточно широкие способности в планиметрии – функции и графики, динамические геометрические построения, измерения и расчеты, составление задач с автоматизированной проверкой и т. д [47].

Взглянув на интерфейс программы (рисунок 2), можно сделать вывод, что работа с программой не должна вызывать трудностей, элементы управления интуитивно понятны.

Однако возможности этой среды для работы с объемными фигурами и стерео-конструкциями ограничены. В ней нет интерактивного 3D-холста. Для работы со стереометрическими чертежами пользователю необходимо самостоятельно обеспечить свое рабочее полотно.



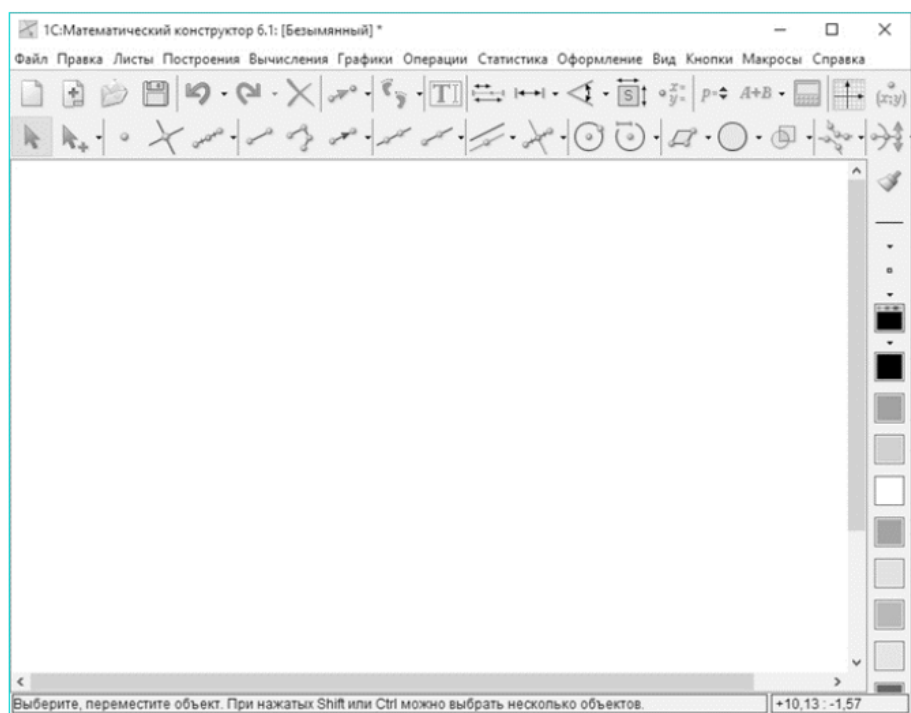


Рисунок 2 – Интерфейс программы «Математический конструктор»

GeoGebra – это динамическая геометрическая среда, которая позволяет изображать взаимосвязи в алгебре, буквенно-числовые выражения, равенства, неравенства, и в геометрии, которая исследует формы, их свойства, взаимное расположение, взаимопревращения и т.д.

Разработана австрийским математиком и профессором Университета Йоханнеса Кеплера в Линце, Маркусом Хохенвартером (Markus Hohenwarter). Среда почти каждый год с 2002 года получает множество образовательных наград в Европе и США [48], с каждым годом ее использует все большее число людей.

Среду GeoGebra беспрепятственно можно установить на компьютер, так как она является бесплатным программным обеспечением. Среда переведена на значительную часть языков мира, обладает интерфейсом, удобным в использовании, является кроссплатформенной, то есть можно переходить из одной системы в другую и использовать те же самые файлы GeoGebra. Среда распространяется на разнообразные операционные системы, такие как Windows, Linux, MacOS. Также среду можно установить на смартфон под управлением iOS и Android OS. Плюсом является наличие

онлайн версия среды на сайте. На рисунке 3 представлен интерфейс программы.

С одной стороны, GeoGebra – это интерактивная геометрическая система. Пользователь может создавать конструкции из точек, векторов, отрезков, линий, многоугольников, а также конических сечений и динамически их изменять, задавать функции.

С другой стороны, уравнения и координаты могут быть включены напрямую. Таким образом, GeoGebra умеет работать с переменными, параметрами, числами, векторами, точками, в среде есть инструменты нахождения производных и интегралов от функций и т.д. [4].

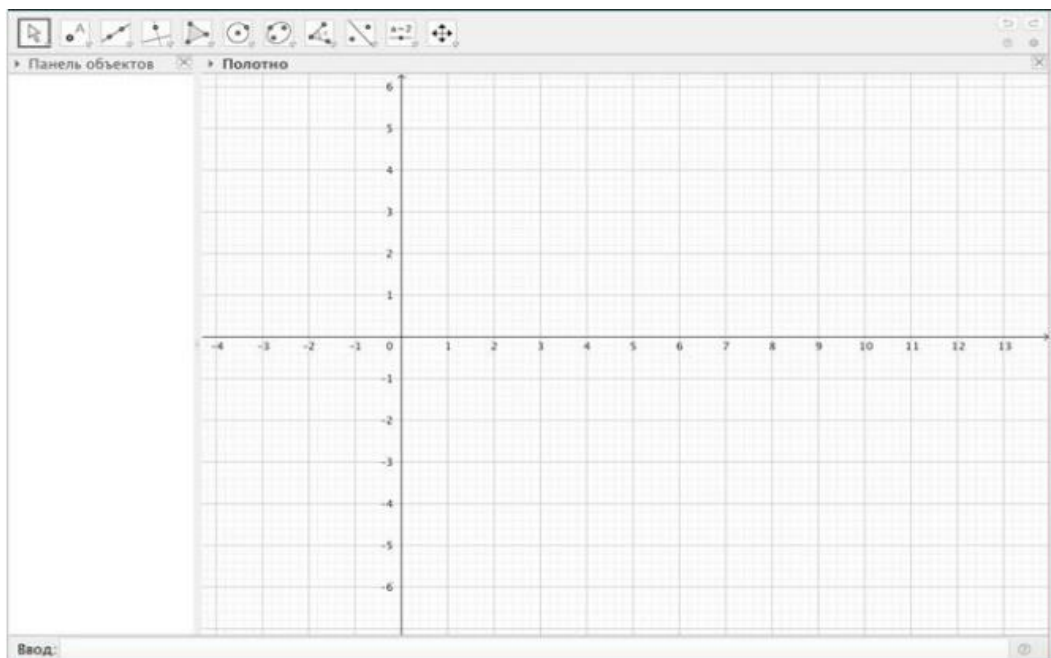


Рисунок 3 – Интерфейс программы «GeoGebra».

Таким образом, современные информационные технологии в обучении геометрии являются неотъемлемой составляющей организации образовательного процесса в современной школе.

Использование математических сред позволяет учащимся наиболее основательно изучить свойства исследуемых объектов. Другая сторона использования информационных технологий – это простота получения результата, а следовательно, пропадает интерес к полученному результату.

Таким образом, использование графических средств различных программных обеспечений, в учебном процессе позволяют повысить уровень развития элементарной и функциональной математической грамотности обучающихся, интенсифицировать образовательный процесс изучения геометрии, позволяют учителям создавать собственные библиотеки готовых мультимедийных материалов, интерактивных чертежей, схем.

#### Выводы по первой главе

Пространственное мышление – это один из видов интеллектуальной деятельности, с помощью которого возможно создание трехмерных образов и действия с ними в процессе решения всевозможных задач. Другими словами, это способность человека представить объект во всех его деталях и проявлениях и каким-либо образом трансформировать этот объект.

В соответствии с исследованиями И. С. Якиманской, развитие пространственного мышления осуществляется неравномерно. Различия наблюдаются не только в разные возрастные периоды, но и в пределах одной возрастной группы. Существуют довольно устойчивые индивидуальные варианты развития пространственного мышления, что обуславливает различия в успешности овладения геометрией, которая влияет на направленность занятий ею, профессиональную ориентацию, склонности и интересы.

Использование информационных технологий обучения способствует оптимизации учебного процесса и изменению роли учителя, который теперь выступает в качестве направляющего звена учебной деятельности. Учащиеся, в свою очередь, получают определенную самостоятельность в учебной деятельности, что создает условия для формирования благоприятного отношения к использованию информационных технологий в процессе обучения.

Анализируя опыт использования информационных технологий в качестве средства обучения и формирования пространственных представлений школьников при изучении геометрии, можно сделать вывод о том, что по этой проблеме накоплен определенный опыт; получены глубокие результаты, имеющие теоретическое и практическое значение. Исследование проблем компьютерной поддержки преподавания геометрии в средней школе в последнее время ведется особенно интенсивно. Применение информационных технологий в геометрии имеет большие возможности.

## ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЫШЛЕНИЯ НА УРОКАХ СТЕРЕОМЕТРИИ

### 2.1 Система задач для формирования пространственного мышления на уроках стереометрии

Умение ориентироваться в пространстве играет исключительную роль в жизнедеятельности человека, оно является формой отражения окружающего мира, условием успешного познания и активного преобразования действительности. Нарушение этого вида мышления, как доказывают психологи, приводит к глобальной дезориентации человека [10]. Именно развитое пространственное мышление определяет способность человека к решению геометрических задач, умению читать чертежи и карты, возможность представлять объекты в трехмерном пространстве, определять метрические характеристики, а также выполнять определенные мыслительные операции с объектами, например, создавать динамические образы. Для дальнейшего исследования мы будем рассматривать понятие пространственных способностей, сформированность которых можно отследить и измерить, в отличие от мышления. Пространственные способности – способность понимать, рассуждать и запоминать пространственные отношения между объектами и пространством. В широком смысле пространственные способности включают процессы, связанные с восприятием, запоминанием и изменением пространственных отношений между объектами, а также способности визуализировать трансформацию объектных отношений вследствие изменения перспективы и других манипуляций.

Учитывая особенности пространственных способностей, их отличие от первичных образов, Н. С. Подходова [15] выделяет следующие типы

заданий и условия их выполнения, учитывающие особенности формирования представлений как обобщения перцептивных образов:

- Задания на развитие представлений должны:

а) выполняться в отсутствии наглядной основы;

б) предлагаться не только по линии образов, отражающих различную фактуру моделей, цвет, материал и т.п., но и по линии разнообразия положений моделей фигур в образах, ведь положение фигуры в пространстве не определяет ее название.

- Задания на представление:

а) полезно выполнять с закрытыми глазами, но, помогая себе, если нужно, руками, т. е. жестикулируя;

б) при их выполнении требуют тишины и отсутствия напряженности у учащихся;

в) предлагается составлять самим учащимся;

г) выполняют функцию обучения переводу с вербального языка на язык образов и наоборот (в случае составления таких задач учащимися), а значит способствуют развитию умения описывать пространство и внимательному отношению к тексту любой задачи;

д) неэффективны в форме заданий типа «кто быстрее».

- Задания на проверку сформированности представлений наиболее эффективны в форме практической деятельности, создания вещественных моделей (в случае объемных фигур) или рисунков (в случае плоских фигур) соответствующих геометрических объектов.

В исследованиях Е.Н. Кабановой-Меллер, А.Д. Ботвинникова, И.С. Якиманской [33, 39, 54, 71] подчеркивается, что своих наиболее развитых форм пространственные способности достигают в процессе деятельности с графическим материалом (чертежом), основанной на создании и преобразовании зрительных образов и заключающейся в чтении, создании и преобразовании чертежа. В основе правильного чтения чертежа лежит умение рассматривать одну и ту же фигуру с разных точек зрения, т.к.

определить форму изображенного на чертеже объекта можно только путем неоднократного анализа под углом зрения разных проекций. Однако, как показывают ученые, овладение приемами восприятия пространственных образов по их графическим изображениям, как бы эффективны они не были, не обеспечивают еще успешности оперирования ими.

О.Н. Орлянской [32] были проанализированы трактовки систем задач, представленные российскими учеными-методистами, и выделены следующие их характеристики:

- общность – задачи подчинены общей идее (методу решения, кругу используемых понятий, дидактическим назначениям и т. д.) или теме общего курса, обладающей разным уровнем глобальности;
- способ построения (аналогия, обобщение, конкретизация и др.) – каждая задача обобщена предыдущей, или ее конкретизирует, или является аналогом, или является ключевой задачей;
- уровень организации – строго детерминированное расположение уровней связей между задачами;
- связность элементов в системе – возможность графически представить совокупность задач связным графом;
- полнота – совокупность задач включает в себя задачи на все изучаемые понятия, факты, способы деятельности, в том числе мотивационные, подходящие под понятие, на аналогию, следствия из фактов и прочие;
- целевая достаточность – достаточное количество задач для тренинга в классе и дома; аналогичных задач для закрепления метода решения; задач для индивидуальных и групповых заданий разной направленности; задач для самостоятельной (в том числе исследовательской) деятельности учащихся; задач для текущего и итогового контроля с учетом запасных вариантов и т. д.;
- целевая ориентация – определение места каждой задачи и назначения в блоке уроков;

- рядоположенность (последовательность расположения) – наличие усложнений, разветвлений.

Методисты-геометры (А.Б. Василевский, Г.Д. Глейзер, С.В. Петров и др.) [18, 21, 30, 40] предлагают в работе с учащимися использовать задачи, решаемые по чертежу, на мысленное представление объемной фигуры по отдельным ее элементам, на построение разверток объемных фигур, выполнение построения изображений некоторых объемных фигур на плоскости, построение сечений пространственных фигур. Исследователи считают решение задач на изображение пространственных фигур наиболее эффективным средством развития пространственных представлений, воображения.

Укажем некоторые действия (механизмы), направленные на развитие умений создавать и оперировать образами:

- создание первичных образов;
- распознавание образов пространственных объектов или их моделей (графических или реальных);
- воссоздание образов пространственных объектов или их моделей по некоторым их элементам;
- изменение расположения образов представленных объектов;
- конструирование новых образов на основе представленных – преобразование образов (изменения структуры образа; изменения пространственного положения и структуры образа) и др.

Сам реальный объект, его мысленный образ и его модели (например, изображение) находятся не во взаимно-однозначных отношениях. Распознавание объектов есть процесс взаимного отождествления данного объекта, его образа и модели. Например, «узнавание» объекта по его изображению. Под созданием моделей (графических или реальных) представленных пространственных объектов понимаем, например, изображение (создание графической модели) объекта. «Воссоздать»



графическую модель по некоторому фрагменту – это значит, дополнить, завершить изображение какого-либо объекта.

Под оперированием пространственными образами методистами (И.Г. Вяльцевой и др.) [65] понимается мыслительная деятельность, направленная на активизацию исходных образов в нужном направлении, их перестройку, видоизменение, трансформацию и создание на этой основе новых образов, а основным средством графической передачи образов авторы считают чертеж. Поэтому знание способов изображения пространственных фигур на плоскости создает необходимые предпосылки для воссоздания пространственных образов по восприятию их изображений (чертежей) и выполнению мысленных действий над ними.

В рамках проводимого исследования нами разработана система заданий, включающая четыре подсистемы, ориентированные на развитие отдельных компонентов пространственного мышления:

- система задач на формирование умения создавать пространственные образы.
- система упражнений, направленная на развитие пространственных представлений.
- система заданий на формирование умения осуществлять реальные трансформации объектов и образов.
- система математических задач, раскрывающих сущность некоторых видов геометрических преобразований.

Система заданий удовлетворяет следующим принципам:

- непрерывности, то есть требует включения упражнений, задач и заданий системы в содержание каждого урока (в том числе и в контрольные работы);
- интеграции – требует включения в систему практических и разнообразных математических задач;
- учета возрастных особенностей, что предполагает решение ряда задач системы в ходе игровой деятельности;

- активности – требует невмешательства педагога в процесс выполнения учащимися заданий.

На основе анализа результатов исследований А. Д. Александрова, И. Г. Вяльцевой, Г. Д. Глейзера, Н. С. Подходовой, А. Я. Цукаря, Н. Ф. Четверухина, И. С. Якиманской и др. нами определены ступени формирования пространственных способностей, которые представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Ступени формирования пространственных способностей

Ступень формирования пространственных способностей	Характеристика ступени формирования пространственных способностей
Нулевая ступень (3-4 года)	Пространственные способности в форме пространственного воображения
Первая ступень (4-7 лет)	Формирование умений выделять из множества объектов объекты указанной формы, их сопоставление с известными геометрическими фигурами, их комбинация, выполнение мысленных преобразований объектов и определение образ-результата этих преобразований
Вторая ступень (13-15 лет)	Формирование умений, связанных с моделированием объектов окружающего мира, определением трех и более видов объектов (вид спереди, вид справа, вид сверху и т. д.). Но создаваемые на этой ступени представления связаны с теми фигурами, модели которых встречаются в жизненной практике учащихся (прямоугольник, треугольник, круг, параллелепипед, шар, цилиндр и т. д.)
Третья ступень (13-15 лет)	Формирование умений воссоздавать в воображении образы плоскостных и пространственных объектов по их модели (развертка, проекции и т. д.) и оперирование ими, выполнение 2-3 мыслительных операций. Учащимся на этом уровне требуются базовые знания курса планиметрии, определенный жизненный опыт
Четвертая ступень (16-18 лет)	Формирование умений, связанных с выполнением целого ряда мыслительных действий с образами, требующих их динамичности. Кроме этого, при решении задач на пространственное мышление учащимся часто необходимы базовые знания всего курса геометрии (в том числе определения и свойства различных видов проекций)
Пятая ступень	Развитие не только умений выполнять многократные мыслительные действия с образами, но и интуитивно определять, какие именно действия целесообразно выполнять для получения нужного результата

Рассматривая содержательную характеристику каждой ступени, можно выделить несколько видов задач на развитие пространственных

способностей учащихся (связанные с изображениями, с реальными моделями и др.). Среди них особое значение имеют задачи на построение или анализ изображений, которые мы разделим условно на четыре группы (первого вида, второго вида, третьего вида, четвертого и пятого вида).

Для рассмотрения таких задач введем несколько дополнительных понятий. Объект, подлежащий какому-либо моделированию и затем воспроизведению, будем называть прообразом, а плоскую фигуру, воспроизводящую и представляющую прообраз, - образом. Образ, представляющий объект на плоской поверхности, будем называть изображением этого объекта.

Итак, выделяем пять видов задач:

а) первого вида – задачи на создание пространственного образа, определение его вида и свойств;

б) второго вида – задачи, в которых требуется установить соответствие между образом и прообразом;

в) третьего вида – задачи на мысленное преобразование пространственных образов;

г) четвертого вида – задачи, решение которых начинается с рассмотрения уже определенного образа и заключается либо в восстановлении прообраза, либо в определении свойств прообраза.

д) пятого вида – задачи с практическим содержанием.

Данная структура и легла в основе сборника задач, направленного на формирование пространственных способностей на уроках геометрии с применением информационных технологий.

Рассмотрим каждый вид подробнее и приведем некоторые примеры заданий из сборника задач, направленных на формирование пространственного мышления обучающихся.

*Примеры задач первого вида (задачи на создание пространственного образа, определение его вида и свойств):*

1. На рисунке 4 изображены два треугольника. Они разбивают плоскость на четыре части. Нарисуйте два треугольника так, чтобы они разбивали плоскость на семь частей.

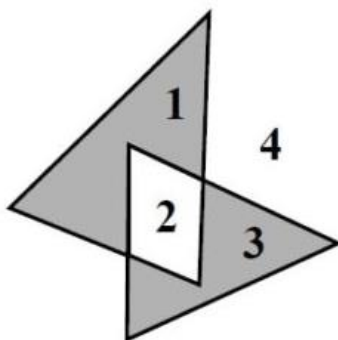


Рисунок 4 – Рисунок к задаче 1

Для решения задачи необходимо переместить нижний треугольник до пересечения его вершины со стороной другого треугольника, в таком случае получится 6 частей плоскости внутри фигур, а седьмая часть – область вокруг фигуры (рисунок 5).

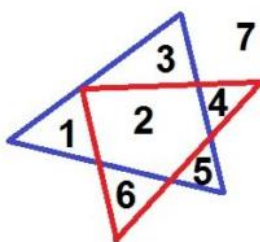


Рисунок 5 – Ответ к задаче 1

2. Отмеченные точки – вершины некоторого многогранника (рисунок 6). Начертите многогранник так, чтобы грань BCD была видимой, а грань AKO – невидимой.

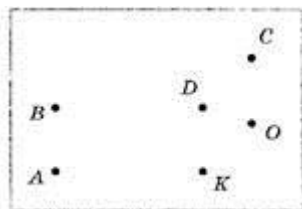


Рисунок 6 – Рисунок к задаче 2

Сложность задачи заключается в том, что вид многогранника не определен. Поэтому у учащихся могут возникнуть разные образы.

Вопрос: можно ли, не представляя многогранник, выполнить задание. Конечно, на начальном этапе выполнения задания можно воспользоваться правилами изображения видимых и невидимых объектов, но на заключительном этапе все-таки необходимо представить результат (создать образ) с целью определения возможности существования такого многогранника.

*Примеры задач второго вида (задачи, в которых требуется установить соответствие между образом и прообразом):*

1. Когда кубик стоит так, как показано на рисунке 7, то внизу у него будет фиолетовая грань, сзади – зелёная, а слева – белая. Мысленно перекачивайте кубик по изображенному пути. Представьте, что каждый раз грань, которая оказалась внизу, будет оставлять на клетках отпечаток. Какой отпечаток будет в выделенной клетке?

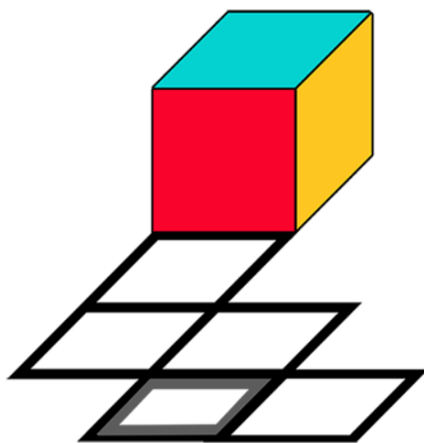


Рисунок 7 – Рисунок к задаче 1

Для наглядности решения подобных задач можно использовать настоящий кубик и начать с простых заданий, в которых ученики самостоятельно смогут убедиться в ответе, непосредственно прокатив кубик. Затем задания усложняем – пытаемся мысленно восстановить процесс перекачивания кубика.

Восстановим путь кубика: красная грань – голубая грань – желтая грань – зеленая грань.

2. На рисунке 8 представлена развертка кубика. Определите, изображение какого кубика из представленных на рисунке может быть получено из этой развертки.

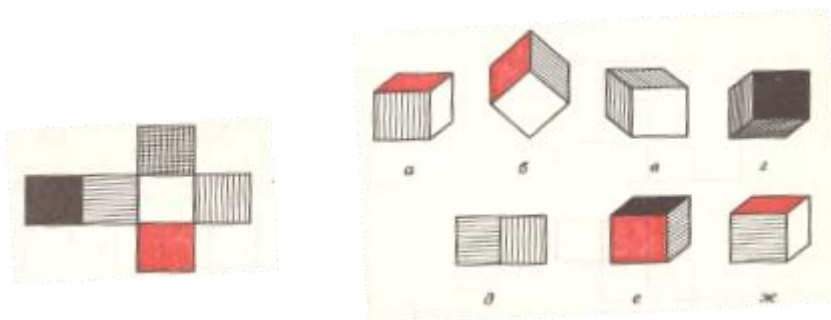


Рисунок 8 – Рисунок к задаче 2

При решении данной задачи необходимо сопоставить две модели куба: изображение развертки и наглядное изображение. При решении задачи можно: 1) склеить по изображению развертки модель куба, обозначить соответствующим образом грани и вращая модель сопоставить с наглядными изображениями; 2) мысленно сопоставить наглядные изображения куба и его развертку. Во втором случае возможно два варианта: 1) создать мысленный наглядный образ по изображению развертки, мысленно его вращать, сопоставляя с наглядными изображениями; 2) мысленно «разворачивать» поверхность куба по наглядным изображениям, мысленно преобразовывать развертки и сопоставлять с данным изображением.

*Пример задач третьего вида (задачи на мысленное преобразование пространственных образов):*

1. Алиса собирает кубик-головоломку (рисунок 9). Пять деталей она уже соединила. Выберите шестой элемент, который необходимо добавить, чтобы кубик стал целым.

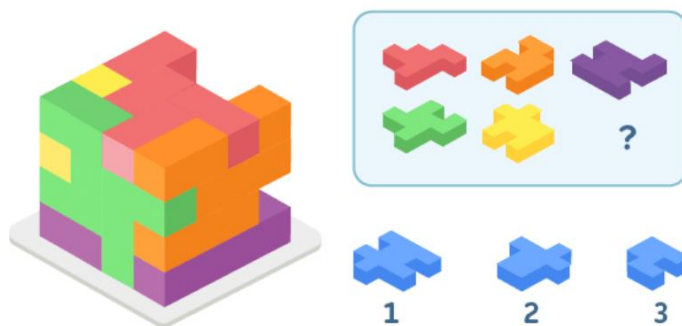


Рисунок 9 – Рисунок к задаче 1

Сложность задания в недоступности изображения, ученикам необходимо не только подобрать необходимую деталь, но и для начала восстановить оставшееся незаполненным место в головоломке. Можем предположить, что в нижнем ряду (из-за фиолетовой детали) не хватает только одного кубика, а в верхней грани нет двух кубиков в центре, такими свойствами обладает только фигура 2 из предложенных вариантов.

*Пример задач четвертого вида (задачи, решение которых начинается с рассмотрения уже определенного образа и заключается либо в восстановлении прообраза, либо в определении свойств прообраза):*

1. Пользуясь рисунком 10, определите, какая доска подойдет для полки?

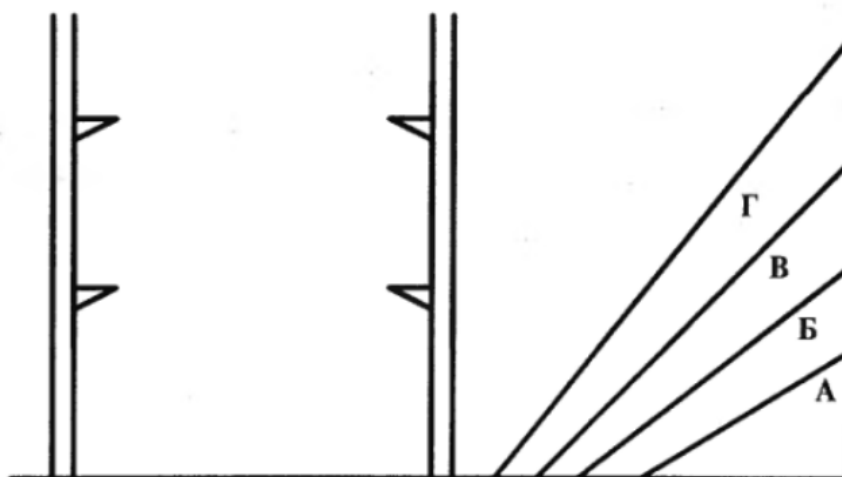


Рисунок 10 – Рисунок к задаче 1

Для решения задачи ученикам необходимо не только воспользоваться свойствами образа, но и потренировать свой глазомер.

Пример задач пятого вида (задачи с практическим содержанием):

1. На рисунке 11 изображена комната:



Рисунок 11 – Рисунок к задаче 1

Определите, под какой цифрой на рисунке 12 представлена верная схема расстановки мебели в этой комнате.

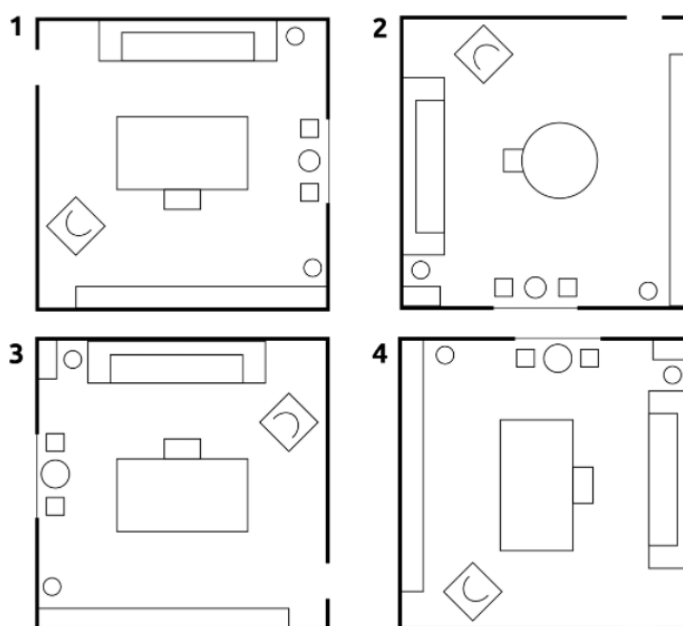


Рисунок 12 – Варианты ответа к задаче 1

Знакомство с данным видом задач можно начать с простых примеров практического содержания вокруг нас. Но в данном блоке представлены и не совсем тривиальные задачи:



2. На рисунке 13 даны два изображения одной и той же башни. На левом рисунке вы видите три грани крыши башни, а на правом – четыре грани.

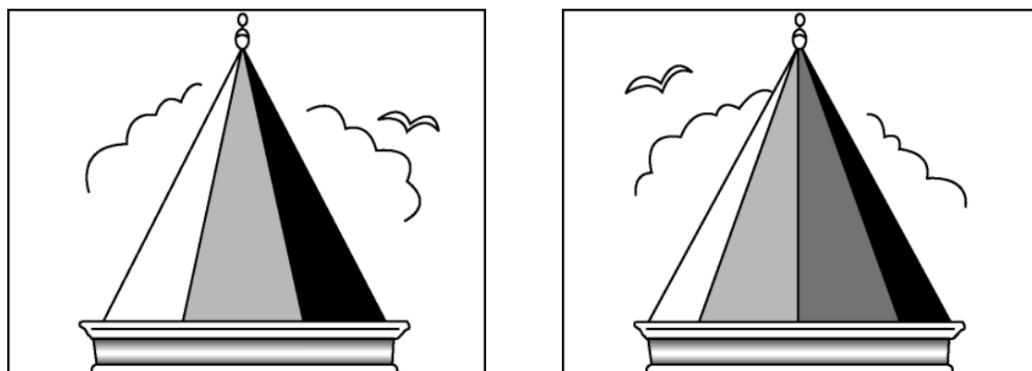


Рисунок 13 – Рисунок к задаче 2

Ниже на рисунке 14 изображен вид крыши башни сверху. Кроме того, знаком (x) показаны пять различных положений наблюдателя, обозначенных P1-P5.

С каждой из этих позиций наблюдатель может видеть несколько граней крыши башни. Определите число граней, которые можно видеть с каждой из этих позиций.

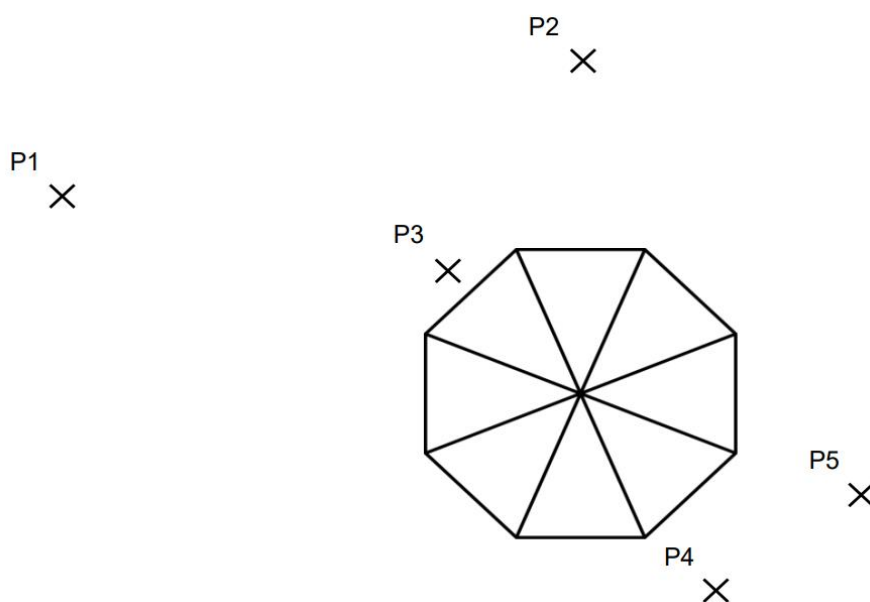


Рисунок 14 – Рисунок к задаче 2

Материалы сборника представлены по видам задач и представлены пятью разделами. Данное деление и представление порядка изучения задач носит рекомендательный характер и является условным.

Достоинство данного сборника в том, что почти все разделы независимы друг от друга. Это дает большую свободу применения материалов на занятиях по геометрии как для преподавателя с его индивидуальной методикой рассмотрения данной темы, так и является готовым инструментом для самостоятельного рассмотрения темы обучающимися.

Задачи на развитие пространственных способностей мы рекомендуем предлагать учащимся при изучении следующих тематических блоков курса геометрии:

1. Взаимное расположение точек, прямых и плоскостей.
2. Взаимное расположение плоских и пространственных фигур.
3. Многоугольники и многогранники.
4. Тела вращения.
5. Объединение и пересечение фигур. Сечения
6. Моделирование пространственных фигур.
7. Преобразования плоскости и пространства.
8. Геометрическое место точек (ГМТ).

Разработанной нами системе задач присущи все необходимые характеристики:

- общность – задачи подчинены общей идее развития пространственных способностей;
- способ построения – каждая задача обобщена предыдущей, или ее конкретизирует, или является аналогом, или является ключевой задачей;
- уровень организации – строго детерминированное расположение уровней связей между задачами;
- связность элементов в системе – возможность графически представить совокупность задач связным графом;

- полнота – совокупность задач включает в себя задачи на все понятия, связанные с проектированием, изображением и т.п.;
- целевая достаточность – наличие достаточного количества задач для тренинга; аналогичных задач для закрепления метода решения; задач для индивидуальной и групповой работы; задач для самостоятельной (в том числе проектно-исследовательской) деятельности учащихся и т. д.;
- целевая ориентация – место каждой задачи определено в соответствии с уровнями и основными действиями, направленными на развитие умений создавать и оперировать образами;
- рядоположенность (последовательность расположения) – задачи четырёх видов распределены по уровням (базовому и профильному).

Представленные упражнения можно включать в содержание урока на любом его этапе: они вызывают интерес, активизируют память и воображение, не занимают много времени, пригодны как для индивидуальной, так и фронтальной работы.

## 2.2 Методический подход к процессу формирования пространственного мышления на уроках стереометрии с применением информационных технологий

Характерной чертой современного развития школьного образования является непрерывный поиск эффективных форм и методов обучения, путей совершенствования образовательного процесса в целом.

Для достижения высокого уровня геометрической подготовки учащихся необходимо обеспечить возможность приобретения ими фундаментальных знаний, развития пространственного воображения, стремления к самостоятельному изучению нового материала.

Результаты единого государственного экзамена по математике показывают, что уровень знаний и умений школьников по геометрии

является достаточно низким, значительное число учащихся не справляются с решением геометрических задач [16].

Приступая в 10 классе к изучению нового раздела геометрии – стереометрии, ученики, имевшие дело в 7-9 классах с геометрией на плоскости, испытывают серьезные затруднения при переходе из плоскости в пространство. «Дополнительное» измерение создает особенные сложности уже в начале изучения стереометрии, когда учащиеся сталкиваются с необходимостью представить себе такие абстрактные понятия, как бесконечно протяженные прямая и плоскость в пространстве, которым посвящено большинство теорем и задач курса 10 класса. Причем понятие прямой на плоскости, которое школьники изучили еще в седьмом классе, практически не позволяет упростить сложность восприятия схожего объекта с дополнительным свойством.

Второе затрудняющее школьников обстоятельство – как подойти к доказательству теоремы или решению зачастую весьма абстрактной задачи. А проблема учителей – как научить школьников находить нужный подход. Дело в том, что хотя геометрическое, пространственное воображение присуще некоторым школьникам, но таких не так уж много. Большинству школьников требуется помощь в развитии умения представлять и изображать стандартные стереометрические конфигурации, их приходится обучать геометрическому видению – пониманию теорем и условий задач, сформулированных словесно.

На этапе перехода от плоскости к пространству можно оценить актуальность и важность применения разработанного нами сборника заданий для развития пространственных способностей. Применение заданий на расположение элементов в пространстве возможно применять в целях пропедевтики курса стереометрии, начиная с начальных классов, постепенно усложняясь к 7-9 классу. В предложенной системе для школьников 10 класса уже будет сформировано начальное представление о пространственных объектах, что позволит легче воспринять теоретическое

обоснование элементов в пространстве. Вторым вариантом применения сборника заданий – непосредственное включение в процесс обучения стереометрии 10 класса. На начальном этапе знакомства с пространством можно включать элементы заданий в урок. Например, на этапе разминки и подготовке к занятию (для концентрации внимания, включения в учебную деятельность), на этапе целеполагания (для формулировки проблемного вопроса или задачи), на этапе переключения действия (для эмоциональной разгрузки и отдыха).

Также решением указанной проблемы является внедрение в учебный процесс новых информационных технологий, которые служат эффективным средством управления познавательной деятельностью и формирования пространственных представлений учеников. При их использовании открываются огромные возможности изменения и совершенствования методики отбора необходимой теоретической и практической информации, которая способствует улучшению формирования пространственного воображения школьников на уроках геометрии. Такой процесс обучения характеризуется индивидуальным и дифференцированным подходом, приводит к изменению содержания характера деятельности между учителем и учеником [61].

Усиление логической составляющей курса геометрии, стремление построить курс на строго дедуктивной основе привело к тому, что проблема развития пространственного мышления отошла на дальний план, что отрицательно отразилось на результатах обучения геометрии и, в первую очередь, стереометрии.

Процесс формирования и развития пространственных представлений характеризуется умением мысленно конструировать пространственные образы или схематические конфигурации изучаемых объектов и выполнять над ними мыслительные операции, соответствующие тем, которые должны быть выполнены над самими объектами.

Одной из основных проблем при изучении стереометрии является проблема наглядности, связанная с тем, что изображения даже простейших стереометрических фигур, выполненные в тетрадах или на доске, как правило, содержат большие погрешности.

Работа в интерактивных программах позволяет избежать таких ошибок, она позволяет сделать задачи наглядно обозримыми, развивать пространственное воображение в правильном направлении [25].

Кроме того, учителя охотно используют наглядные пособия на уроках стереометрии. Модели параллелепипеда, пирамиды, правильных многогранников можно найти в большинстве кабинетов математики. При этом чаще всего такие модели используются с чисто иллюстративной целью: их можно рассматривать с разных сторон. Однако запастись моделями для всего разнообразия решаемых на уроках задач невозможно.

Использование при изучении стереометрии вещественных моделей для показа взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве необходимо, но недостаточно. Во-первых, не всегда просто показать расположение объектов внутри геометрических тел; во-вторых, невозможно проследить динамику построений; в-третьих, переход от вещественной пространственной модели к ее изображению на плоском чертеже затруднен для учащихся. Отсюда повышенный интерес к виртуальному трехмерному моделированию и его применениям в школе.

Современная трехмерная графика позволяет:

- создавать модели достаточно сложных геометрических фигур и их комбинации,
- вращать их на экране,
- выбирать удобное для решения положение фигур,
- освещать и выделять нужные объекты и т. д. [59].

Иллюстрациями качественных утверждений служат подвижные чертежи, позволяющие работать со всеми объектами, составляющими конфигурации, используемые в формулировках. Иногда такие чертежи

содержат некоторые значения численных характеристик, если последние подтверждают справедливость качественных утверждений. Перемещая элементы чертежа, учащийся может убедиться в истинности утверждений, при этом учитель имеет возможность контролировать понимание формулировок: задавать вопросы о существенности условий, просить ученика точно формулировать его наблюдения.

Применение информационных технологий при изучении разделов стереометрии в 10-11 классах возможно на любом из этапов урока:

1. На этапе усвоения новых знаний. Примеры: наглядное пособие при объяснении новой темы (интерактивные модели, движущиеся элементы, позволяющие увидеть фигуру с разных ракурсов); урок-исследование с использованием обучающих программ, на котором ученики самостоятельно в ходе исследовательской деятельности добывают знания.

2. На этапе отработки полученных знаний и умений. Примеры: практические занятия с полноценным использованием математических программных пакетов позволяют охватить больший объём материала, глубже понять и освоить теоретический материал.

3. На этапе обобщения и систематизации знаний и способов деятельности. Примеры: организация проектных и творческих работ учащихся.

4. На этапе промежуточного и итогового контроля и самоконтроля достигнутых результатов обучения. Примеры: индивидуальные практические работы на построение; итоговые тестирования.

5. На этапе коррекции и самого процесса обучения, и его результатов путем совершенствования дозировки учебного материала, его классификации, систематизации. Пример: проведение работы над затруднениями пройденной темы в индивидуальном и комфортном темпе для каждого ученика.

Все эти возможности собственно дидактического и методического характера действительно неоспоримы. Кроме того, необходимо принять во

внимание, что использование рационально составленных компьютерных обучающих программ с обязательным учетом не только специфики собственно содержательной (научной) информации, но и специфики психолого-педагогических закономерностей усвоения этой информации данным конкретным контингентом учащихся, позволяет индивидуализировать и дифференцировать процесс обучения, стимулировать познавательную активность и самостоятельность обучающихся.

Анализ опыта внедрения вспомогательных программных продуктов на уроках математики в различных учебных заведениях позволяет сделать следующие выводы.

Автоматизация учебных работ общего и профессионального характера создает, с одной стороны, предпосылки для более глубокого познания свойств изучаемых объектов и процессов.

С другой стороны, относительная легкость получения результата с применением информационных технологий снижает интерес к самому результату.

Двойственный характер применения информационных технологий в изучении геометрии заставляет задуматься над методикой применения в учебном процессе вспомогательных программных продуктов, рациональным их сочетанием с другими средствами поддержки обучения.

Построение сечений многогранников является одной из важнейших тем в школьном курсе стереометрии, задачи по этой теме регулярно встречаются в контрольно-измерительных заданиях ЕГЭ по математике. При прохождении этой темы основное внимание надо обратить на формирование у учеников умения строить точки пересечения плоскости и прямой, т. е. прямой с гранями многогранника. Мы бы хотели бы обратить внимание на 3D-модели сечений многогранников различными плоскостями, выполненные в программе GeoGebra. Возможности данной системы позволяют облегчить создание математических построений и моделей,



проводить интерактивные исследования при перемещении объектов и изменении параметров. Также программа GeoGebra помогает визуализировать пересечение секущей плоскости с гранями многогранника при данных условиях и автоматически выполняет построение образующегося при этом сечения.

Рассмотрим подробнее включение в учебный процесс разработанной системы задач, направленной на формирование пространственных представлений учащихся, а также комплексное использование средств наглядности на уроках стереометрии с применением информационных технологий.

Для дальнейшего исследования возьмем обучение геометрии в 10-11 классах по УМК Л. С. Атанасян, рассчитанной на 2 года обучения. В десятом классе реализуется первый год обучения по 2 часа в неделю, всего 70 часов за один учебный год. Данная программа полностью отражает профильный уровень подготовки школьников по разделам программы. Она конкретизирует содержание тем образовательного стандарта и дает примерное распределение часов по разделам курса. Количество часов, предусмотренное в программе: общее – 70 часов, контрольных работ – 4, зачетов – 3.

В таблице 4 представлен учебно-тематический план изучения геометрии в 10 классе

Таблица 4 – Учебно-тематический план изучения геометрии в 10 классе

№п\п	Тема	Количество часов	Контрольные работы	Зачеты
1	2	3	4	5
	Некоторые сведения из планиметрии	12		
1	Введение	3		
2	Параллельность прямых и плоскостей	16	2	1

*Продолжение таблицы 4*

1	2	3	4	5
3	Перпендикулярность прямых и плоскостей	17	1	1
4	Многогранники	14	1	1
5	Заключительное повторение курса геометрии 10 класса	8		
	Всего	70	4	3

Общее представление о средствах и формах наглядности, а также включение в учебный процесс заданий из разработанного сборника, представлены во фрагментах календарно-тематического планирования (таблица 4). Для проведения исследования были выбраны раздел «Тетраэдр и параллелепипед», находящийся в п. 2 учебно-тематического плана «Параллельность прямых и плоскостей» (таблица 5) и раздел «Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью», находящийся в п. 3 учебно-тематического плана «Перпендикулярность прямых и плоскостей» (таблица 6).

Таблица 5 – Раздел календарно-тематического планирования «Тетраэдр и параллелепипед»

Тема раздела, тема урока	Кол-во часов	УУД			Средства наглядности
		предметные	метапредметные	личностные	
1	2	3	4	5	6
Тетраэдр и параллелепипед	4				
Тетраэдр	1	Объяснять, какая фигура называется тетраэдром, показывать на чертеже и моделях его элементы Знать: понятия тетраэдра, его граней, ребер, вершин, боковых граней и основания	Коммуникативные: проявлять готовность к обсуждению разных точек зрения и выработке общей (групповой) позиции Регулятивные: осознавать качество и уровень усвоения Познавательные: создавать структуру взаимосвязей смысловых единиц текста	Формирование целевых установок учебной деятельности Формирование навыков анализа, сопоставления, сравнения	Сборник заданий, направленных на развитие пространственных способностей учащихся; реальные и интерактивные модели тетраэдра

*Продолжение таблицы 5*

1	2	3	4	5	6
Параллелепипед	1	Объяснять, какая фигура называется параллелепипедом, показывать на чертеже и моделях его элементы Знать: понятия параллелепипеда, его граней, ребер, вершин, диагоналей, боковых граней и оснований; свойства параллелепипеда с доказательствами Уметь: решать задачи по теме	Коммуникативные: развить у учащихся представление о месте математики в системе наук. Регулятивные: формировать целевые установки учебной деятельности. Познавательные: различать методы познания окружающего мира по его целям (наблюдение, опыт, эксперимент, моделирование, вычисление)	Формирование устойчивой мотивации к обучению	Информационные технологии: видеотрекменты, презентация PowerPoint; реальные и интерактивные модели параллелепипеда
Задачи на построение сечений	2	Уметь описывать и анализировать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, выполнять чертежи по условиям задач. Решать задачи на построение сечений тетраэдра и параллелепипеда на чертеже.	Коммуникативные: способствовать формированию научного мировоззрения. Регулятивные: оценивать весомость приводимых доказательств и рассуждений. Познавательные: осуществлять расширенный поиск информации	Формирование навыков осознанного выбора наиболее эффективного способа решения	Математическая программа Geogebra; интерактивная доска IDroo; сборник заданий, направленных на развитие пространственных способностей на уроках стереометрии

Таблица 6 – Раздел календарно-тематического планирования «Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью»

Тема раздела, тема урока	Кол-во часов	УУД			Средства наглядности
		предметные	метапредметные	личностные	
1	2	3	4	5	6
Расстояние от точки до плоскости	2	Знать: понятие перпендикуляра, проведенного из точки к плоскости, и основания перпендикуляра, наклонной, проведенной из точки к плоскости, и основания наклонной, проекции наклонной на плоскость, расстояние от прямой до плоскости, связь между наклонной, ее проекцией и перпендикуляром Уметь: решать задачи по теме	Коммуникативные: проявлять готовность к обсуждению разных точек зрения и выработке общей (групповой) позиции Регулятивные: осознавать качество и уровень усвоения Познавательные: создавать структуру взаимосвязей смысловых единиц текста	Формирование целевых установок учебной деятельности и Формирование навыков анализа, сопоставления, сравнения	Сборник заданий, направленных на развитие пространственных способностей на уроках стереометрии
Теорема о трёх перпендикулярах	2	Знать: понятие перпендикуляра, проведенного из точки к плоскости, и основания перпендикуляра, наклонной, проведенной из точки к плоскости, и основания наклонной, проекции наклонной на плоскость, расстояние от прямой до плоскости, расстояние между параллельными плоскостями. Уметь: решать задачи по теме	Коммуникативные: развивать у учащихся представление о месте математики в системе наук. Регулятивные: формировать целевые установки учебной деятельности. Познавательные: различать методы познания окружающего мира по его целям (наблюдение, опыт, эксперимент, моделирование, вычисление)	Формирование устойчивой мотивации к обучению	Интерактивная платформа и математические модели; сборник заданий, направленных на развитие пространственных способностей на уроках стереометрии

Продолжение таблицы 6

1	2	3	4	5	6
Угол между прямой и плоскостью	2	Знать: понятия проекции фигуры на плоскость, угла между прямой и плоскостью Уметь: решать задачи по теме	Коммуникативные: определять цели и функции участников, способы взаимодействия; планировать общие способы работы; обмениваться знаниями между членами группы для принятия эффективных совместных решений. Регулятивные: формировать целевые установки учебной деятельности, выстраивать последовательность необходимых операций. Познавательные: осуществлять сравнение и классификацию по заданным критериям	Формирование устойчивой мотивации к проблемно-поисковой деятельности	Информационные технологии: видеофрагменты, презентация PowerPoint; сборник заданий, направленных на развитие пространственных способностей на уроках стереометрии

На основе приведенного выше, нами были разработаны конспекты уроков с применением информационных технологий и сборника задач по темам «Многогранники, площадь поверхности многогранника», «Тетраэдр и параллелепипед», «Построение сечений тетраэдра и параллелепипеда», «Угол между прямой и плоскостью, теорема о трёх перпендикулярах», детальные фрагменты которых рассмотрим подробнее.

*Тема урока: Многогранники. Площадь поверхности многогранника.*

Тип урока: изучение нового материала и первичное закрепление.

Технологическая карта данного урока представлена в Приложении А.

В рамках данного занятия на этапе актуализации знаний и умений учащихся используются материалы сборника задач, направленных на формирование пространственных представлений учащихся.

Задание 1. На каркасную модель многогранника напаяна проволока (рисунок 15).

Изобразите эту проволоку на многограннике, после того как его перевернули.

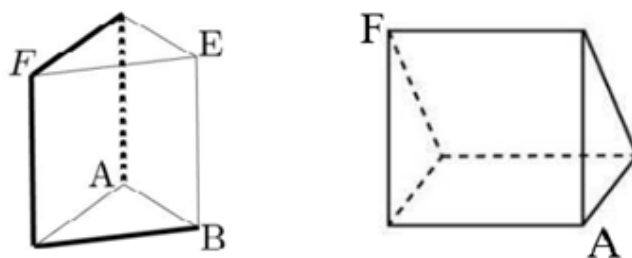


Рисунок 15 – Рисунок к заданию 1

Задание 2. На поверхности геометрического тела поставили точку, которую нельзя увидеть (рисунок 16). Закрасьте эту поверхность синим цветом.

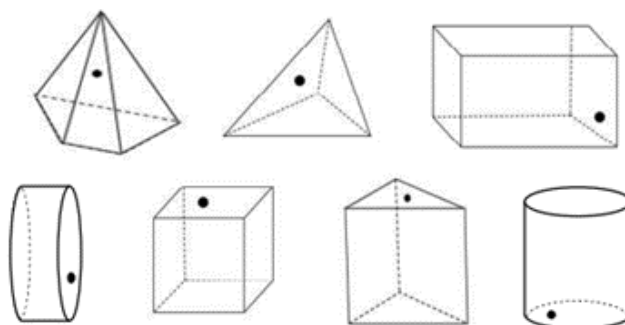


Рисунок 16 – Рисунок к заданию 2

Задание 3. На нижней грани куба отмечена точка А, а на верхней – точка В (рисунок 17). На развёртке куба отмечена точка А. Отметьте на развёртке точку В.

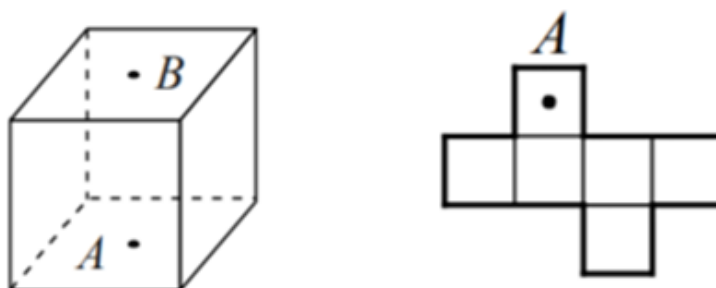


Рисунок 17 – Рисунок к заданию 3

Также на данном занятии используются средства наглядности теоретического материала:

- интерактивная презентация, содержащая основные определения и свойства многогранников, историю возникновения и применение их в повседневной жизни (на этапе изучения нового материала);

- видеоматериал, иллюстрирующий основные формы правильных многогранников (на этапе изучения нового материала);

- раздаточный материал для исследовательской работы учащихся – развёртки многогранников (на этапе закрепления изученного материала).

*Тема урока: Тетраэдр и параллелепипед*

Тип урока: изучение нового материала и первичное закрепление.

Технологическая карта данного урока представлена в Приложении Б.

В рамках данного занятия на этапе подведения итогов занятия используются материалы сборника задач, направленных на формирование пространственных представлений учащихся.

В завершении детального знакомства с новыми геометрическими фигурами учитель предлагает убедиться в важности правильного чертежа и описывает актуальность этого навыка для дальнейшего изучения темы «Тетраэдр и параллелепипед». На предложенных чертежах (рисунок 18) учащиеся ищут ошибки, озвучивают и аргументируют свой ответ, предлагают правильный вариант изображения.

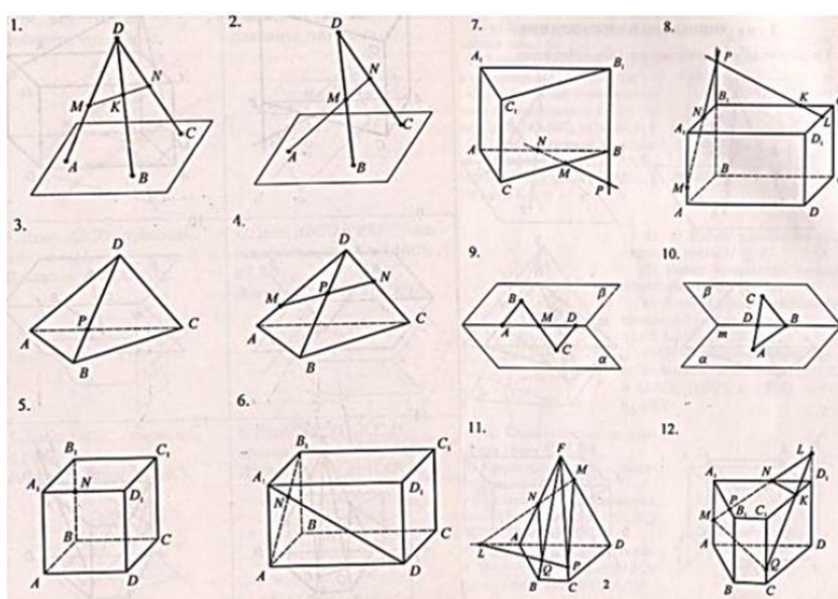


Рисунок 18 – Чертежи с ошибочными построениями

Также на данном занятии используются средства наглядности теоретического материала:

- презентация, содержащая интерактивные модели тетраэдра и параллелепипеда, иллюстрирующие их основные элементы и свойства (на этапе изучения нового материала);

- реальные модели тетраэдра и параллелепипеда (на этапе изучения нового материала).

*Тема урока: Построение сечений тетраэдра и параллелепипеда*

Тип урока: комбинированный урок.

Технологическая карта данного урока представлена в Приложении В.

В рамках данного занятия на этапе актуализации знаний и умений используются материалы сборника задач, направленных на формирование пространственных представлений учащихся.

Задание 1. Дорисуйте невидимую линию на чертежах, представленных на рисунке 19.

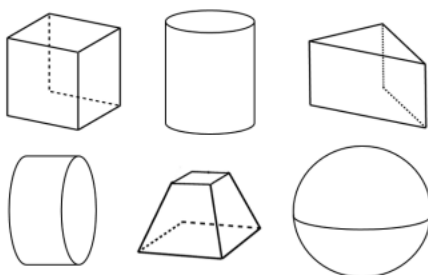


Рисунок 19 – Рисунок к заданию 1

Задание 2. Закрасьте пересечение геометрического тела с плоской фигурой на рисунке 20.

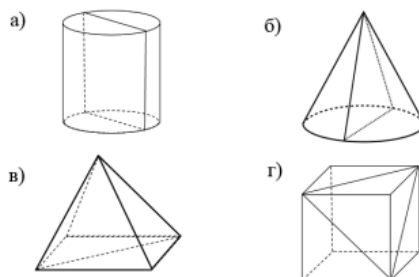


Рисунок 20 – Рисунок к заданию 2



Задание 3. На рисунке 21 обведите видимую границу сечения сплошной линией, а невидимую – штриховкой.

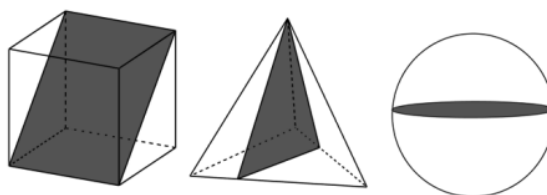


Рисунок 21 – Рисунок к заданию 3

Также на данном занятии используются средства наглядности изучаемого материала:

- презентация, содержащая интерактивные модели тетраэдра и параллелепипеда, иллюстрирующие их основные элементы и свойства (на этапе изучения нового материала);

- интерактивные платформы GeoGebra и IDroo, имеющие все необходимые функции для наглядного построения сечений тетраэдра и параллелепипеда и позволяющие применить индивидуальный подход к каждому ученику (на этапе изучения и закрепления материала урока).

Примеры выполнения заданий представлены на рисунках 22 и 23.

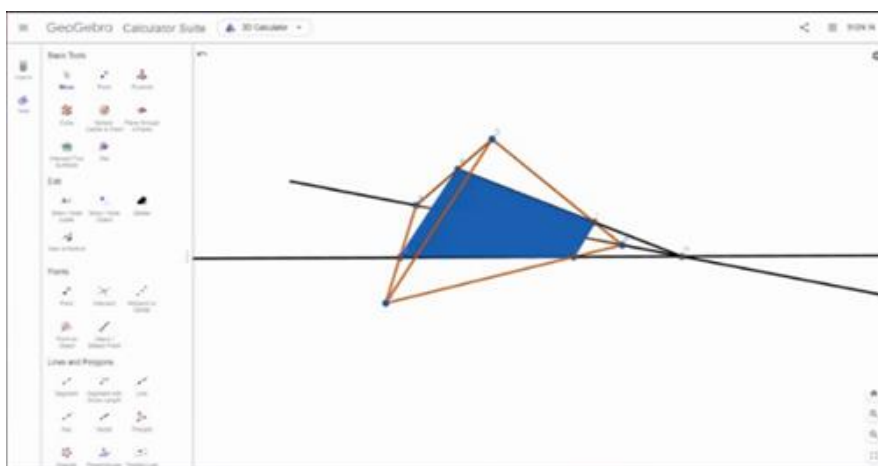


Рисунок 22 – Построение сечения тетраэдра на платформе GeoGebra

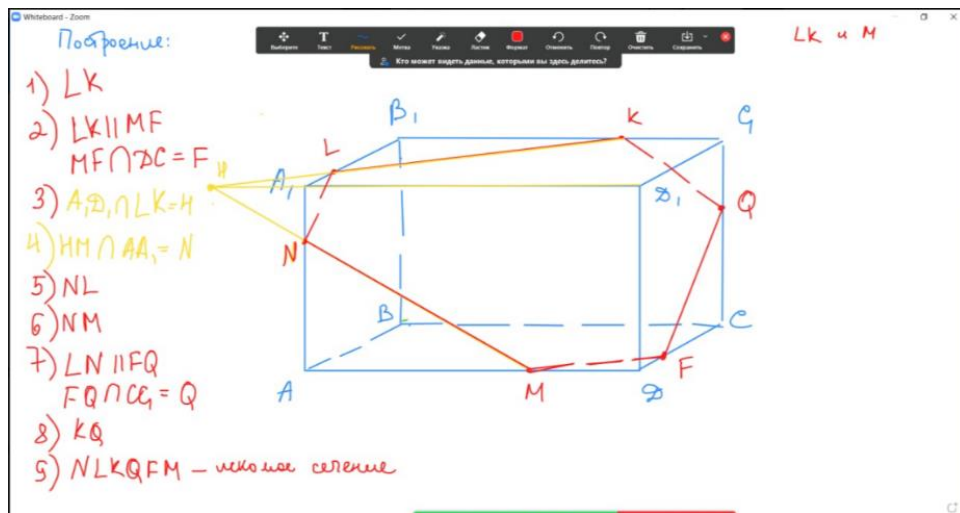


Рисунок 23 – Построение сечения параллелепипеда на платформе IDroo

Тема урока: Угол между прямой и плоскостью. Теорема о трёх перпендикулярах.

Тип урока: изучение нового материала и первичное закрепление

Технологическая карта данного урока представлена в Приложении Г.

В рамках данного занятия на этапе закрепления полученных знаний используются материалы сборника задач, направленных на формирование пространственных представлений учащихся. Задания направлены на применение изучаемого материала – теоремы о трех перпендикулярах – в решении задач практического содержания.

Задание 1. На какое расстояние следует отодвинуть от стены дома нижний конец лестницы, длина которой равна 13 м, чтобы верхний ее конец оказался на высоте 12 м?

Задание 2. В одном углу комнаты с размерами 4 x 5 x 3 (м) спит муха. В противоположном углу сидит паук. Какая длина паутины будет самой короткой, если паук захочет проползти по ней к уснувшей в углу мухе? В ответе укажите приближенное значение в метрах с точностью до одного знака после запятой.

Задание 3. В праздник пирамиду в Лувре, высотой 21,65 м и длиной стороны основания 35 м, решили украсить гирляндой, натянув её от вершины до основания пирамиды.

Какова должна быть наименьшая длина одной гирлянды для украшения? Ответ округлите до сотых.

Также на данном занятии используются средства наглядности изучаемого материала:

- презентация, содержащая интерактивные модели изучаемого материала (на этапе изучения нового материала);

- интерактивная платформа GeoGebra, позволяющая рассмотреть в разных условиях и расположениях отображение изучаемых явлений (на этапе изучения и нового материала).

Таким образом, идея, состоящая в комплексном применении информационных технологий и разработанного сборника заданий в обучении, имеет потенциал в рассмотрении как одно из результативных условий развития пространственных способностей школьников на уроках геометрии.

### 2.3 Организация и результаты опытно-экспериментальной работы

Целью педагогического эксперимента являлась апробация и проверка эффективности методики формирования пространственного мышления на уроках стереометрии.

Достижение поставленной цели эксперимента предполагало решение следующих задач:

1. Определить «стартовый» уровень пространственных способностей учащихся.

2. Разработать сборник заданий, направленный на повышение уровня пространственных способностей учеников, для апробирования во время занятий с применением информационных технологий.

3. Разработать конспекты уроков по стереометрии и апробировать на занятиях с применением информационных технологий.

4. Проанализировать результаты педагогического эксперимента для проведения корректирующих действий по формированию пространственных способностей учеников с применением информационных технологий.

Опытно-экспериментальная работа проводилась в период с 2020 по 2023 гг. на базе МАОУ «Гимназия №80 г. Челябинска» и охватывала следующие этапы:

Первый этап – поисково-диагностический (2020 г). Выявлялись теоретические предпосылки формирования пространственного мышления; уточнялся понятийный аппарат исследования, формулировались его гипотеза, цель и задачи. Проводился констатирующий эксперимент.

Второй этап – опытно-экспериментальный (2020 – 2021 учебный год). Выполнялись разработка сборника заданий, направленного на повышение уровня пространственного мышления учеников, и опытно-экспериментальная работа по его внедрению в процесс обучения.

Третий этап – оценочно-обобщающий (2022 – 2023 учебный год). В ходе которого была проведена экспериментальная проверка эффективности разработанной методики, ее оценка и корректировка по результатам педагогического эксперимента; обобщены результаты работы и сформулированы выводы.

На начальном этапе восьми обучающимся 10-11 классов был предоставлен тест (Приложение Д), состоящий из десяти заданий разного вида, проверяющих уровень их пространственных способностей. По его результатам 62,5 % обучающихся не справились и с половиной заданий. Таким образом, необходимость внедрения сборника заданий для повышения уровня пространственных способностей очевидна.

Опираясь на распределение по уровню сформированности пространственных способностей (таблица 7), можно сделать вывод, что низкий уровень сформированности пространственных способностей имеют 4 человека, средний уровень – 4 человека, а высокий уровень – 0 человек.

Таблица 7 – Уровни сформированности пространственных способностей

Уровень	Количество баллов
Низкий	0-4
Средний	5-8
Высокий	9-10

После внедрения в образовательный процесс заданий из сборника задач, направленных на формирование пространственных способностей, и проведения разработанных занятий по курсу стереометрии, был проведен аналогичный тест (Приложение Е). По результатам которого можно наблюдать 100 % выполнение более 7 заданий у каждого ученика. Соответственно уровень сформированности пространственных способностей повысился и распределяется следующим образом: низкий уровень – 0 человек, средний уровень – 5 человек, высокий уровень – 3 человека.

В таблице 8 приведено сравнение количества верно решенных задач во входном и итоговом тестировании.

Таблица 8 – Сравнение результатов входного и итогового тестирования

Ученик	Количество баллов	
	Тест 1	Тест 2
А	4	9
Б	7	9
В	5	7
Г	8	9
Д	2	7
Е	4	8
Ж	3	7
З	8	8

Для наглядности отразим результаты в диаграмме (рисунок 24). Можно заметить динамику изменений относительно каждого ученика. 7 из 8 обучающихся повысили свой уровень пространственных способностей.

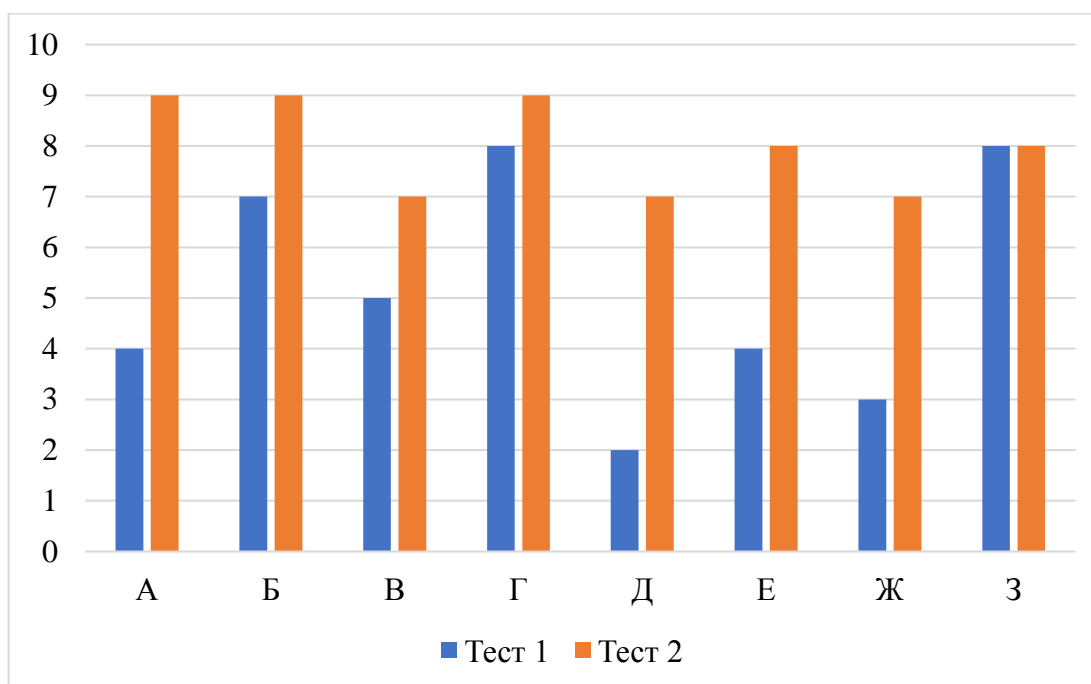


Рисунок 24 – Сравнение результатов входного и итогового тестирования

Так как количество обучающихся невелико, для проверки гипотезы был выбран критерий Манна-Уитни. За  $H_1$  была выбрана гипотеза о том, что включение в учебный процесс системы задач, направленной на умение создавать, определять, преобразовывать и находить взаимодействие между образами и прообразами, визуализировать образы и их свойства в повседневной жизни, а также комплексное использование средств наглядности на уроках стереометрии с применением информационных технологий, повысило общий уровень пространственных способностей обучающихся. За  $H_0$  – общий уровень не повысился.

Результаты эксперимента были ранжированы для того, чтобы можно было применить критерий Манна-Уитни (таблица 9):

Таблица 9 – Ранжирование результатов эксперимента

№ п/п	Ученик	Количество выполненных задач	$n_m$	Ранг
16	А	9	3	15
15	Б	9		15
14	Г	9		15
13	Г	8	4	11,5
12	З	8		11,5
11	Е	8		11,5
10	З	8		11,5
9	Б	7	4	7,5
8	В	7		7,5
7	Д	7		7,5
6	Ж	7		7,5
5	В	5	1	5
4	А	4	2	3,5
3	Е	4		3,5
2	Ж	3	1	2
1	Д	2	1	1

Контрольное значение для проверки суммы рангов:  $K.З. = \frac{16 \cdot 17}{2} = 136$ .

Для принятия гипотезы  $H_1$  необходимо, чтобы  $U_{\text{эксп}} < U_{\text{кр}}$ .

Найдем значение U-критерия Манна-Уитни по формуле (1).

$$U = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_m(n_m+1)}{2} - R_m, \quad (1)$$

где  $n_m$  – наибольшая из объемов выборок  $n_1$  и  $n_2$ ,

$R_m$  – наибольшая сумма рангов  $R_1$  и  $R_2$ .

Для наших данных:  $n_1 = 8$ ,  $n_2 = 8$ ,  $n_m = 8$ ,  $R_1 = 45,5$ ,  $R_2 = 90,5$ ,  
 $R_m = 90,5$ .

Подставим в формулу:  $U_{\text{эксп}} = 8 \cdot 8 + \frac{8 \cdot (8+1)}{2} - 90,5 = 9,5$ .

Из таблицы находим  $U_{\text{кр}} = 15$ .

Так как  $U_{\text{эксп}} < U_{\text{кр}}$ , можем принять гипотезу  $H_1$  о том, что включение в учебный процесс системы задач, направленной на умение создавать, определять, преобразовывать и находить взаимодействие между образами и прообразами, визуализировать образы и их свойства в повседневной жизни, а также комплексное использование средств наглядности на уроках стереометрии с применением информационных технологий, повысило общий уровень пространственных способностей школьников.

### Выводы по второй главе

Обучение геометрии, в особенности стереометрии, не может обойтись без наглядности. Наглядность предоставляет богатый материал для формирования геометрических представлений. Большие дополнительные возможности для обеспечения наглядности дает грамотное использование современных информационных технологий.

Нами был разработан сборник заданий для развития пространственных способностей обучающихся. Достоинство данного сборника в том, что почти все разделы независимы друг от друга. Это дает большую свободу применения материалов на занятиях по геометрии как для преподавателя с его индивидуальной методикой рассмотрения данной темы, так и является готовым инструментом для самостоятельного рассмотрения темы обучающимися.

Построение сечений многогранников является одной из важнейших тем в школьном курсе стереометрии, задачи по этой теме регулярно встречаются в контрольно-измерительных заданиях ЕГЭ по математике. Исходя из этого нами были разработаны конспекты уроков по стереометрии, в которых были использованы следующие информационные



технологии: видеофрагменты, презентация PowerPoint, математическая программа Geogebra, интерактивная доска для занятий IDroo.

Для определения стартового уровня сформированности пространственных способностей обучающихся был проведен входной тест. После внедрения в образовательный процесс системы заданий, направленных на формирование пространственных способностей, и проведения разработанных занятий по курсу стереометрии, был проведен аналогичный тест. Результаты тестов показали повышение уровня сформированности пространственных способностей обучающихся. Таким образом, гипотеза исследования была подтверждена.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Пространственное мышление – вид умственной деятельности, обеспечивающей создание пространственных образов и оперирования ими в процессе решения различных практических и теоретических задач.

Деятельность представления является основным механизмом пространственного мышления, обеспечивающим восприятия заданных пространственных соотношений, их мысленную переработку и создание на этой основе новых пространственных образов.

Стереометрия является одной из важнейших составных частей школьного курса математики. Приступая в 10-м классе к изучению нового раздела геометрии – стереометрии, ученики, имевшие дело в 7-9-х классах с геометрией на плоскости, испытывают серьезные затруднения при переходе из плоскости в пространство. Для решения указанной проблемы нами было предложено внедрить в образовательный процесс системы заданий, направленных на формирование пространственного мышления, и проведения разработанных занятий по курсу стереометрии с применением информационных технологий.

Теоретическая и экспериментальная работы позволили подтвердить гипотезу исследования и решить поставленные задачи. В ходе исследования мы проанализировали психолого-педагогическую и методическую литературу по проблеме с целью выявления сущности пространственного мышления и его структуры, указали роль геометрического материала в формировании пространственного мышления, а также выделили особенности использования информационных технологий при обучении геометрии. В практической части нашего исследования мы разработали систему заданий и конспекты уроков для формирования пространственного мышления с помощью информационных технологий, а также научно обосновали и подтвердили эффективность методики формирования

пространственного мышления на уроках геометрии с применением информационных технологий.

Таким образом, было подтверждено, что включение в учебный процесс системы задач, направленной на умение создавать, определять, преобразовывать и находить взаимодействие между образами и прообразами, визуализировать образы и их свойства в повседневной жизни, а также комплексное использование средств наглядности на уроках стереометрии с применением информационных технологий, повысило общий уровень пространственных способностей обучающихся.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. 3D Graphing – GeoGebra. – URL: <https://www.geogebra.org/3d>  
(дата обращения: 02.10.2022)
2. IDroo – учебная виртуальная доска для занятий. – URL: <https://app.idroo.com/dashboard/boards> (дата обращения: 30.10.2022).
3. Акпынар, Л. М. Развитие пространственного мышления младших школьников в процессе ознакомления с геометрическим материалом: статья / Л. М. Акпынар // Перспективы развития науки и образования. – Москва : ЦМО МГУ, 2016. – № 6. – С. 10-15.
4. Алфёров, М. Ю. Дидактические возможности и особенности свободной программы динамической геометрии Geogebra / М. Ю. Алфёров // АНО «Информационные технологии в образовании». – 2013. – URL: <http://www.tmo.ito.edu.ru/2013/section/220/96517/index.html> (дата обращения: 10.03.2020).
5. Баданова, Т. А. О различных подходах к определению пространственного мышления / Т. А. Баданова // Актуальные проблемы подготовки будущего учителя математики. – Калуга : Изд-во КГПУ, 2017. – №9 – С. 28-33.
6. Баданова, Т. А. Пространственное воображение и представление как основа развития пространственного мышления / Т. А. Баданова // Образование в XXI веке. – Тверь: ООО «Буквица», 2017. – С.123-125.
7. Бакуров, А. Н. Система динамических компьютерных моделей как средство обучения стереометрии учащихся средней школы / А. Н. Бакуров // Ученые записки ОГУ, 2013. – №4. – С. 56-59.
8. Белошистая, А. В. Наглядная геометрия в начальных классах: учеб.-метод. пособ. для учителей / А. В. Белошистая. – Москва : Litres, 2007. – 100 с. – ISBN 5-94603-074-4.

9. Бузумова, О. Л. Обучение геометрии с использованием возможностей GeoGebra / О. Л. Безумова, Р. П. Овчинникова, О. Н. Троицкая. – Архангельск : КИРА, 2011. – 140 с.
10. Василенко, А. В. Методическая подготовка будущих учителей к развитию пространственного мышления учащихся средствами информационных технологий / А. В. Василенко // Вестник РУДН, 2013. – №2. – С. 7-12.
11. Василенко, А. В. Моделирование как средство развития пространственного мышления / А. В. Василенко // Преподаватель XXI век, 2012 – №3. – С. 123-127.
12. Василенко, А. В. Развитие пространственного мышления учащихся в процессе обучения геометрии: психологический аспект / А. В. Василенко // Преподаватель 21 век, 2010. – № 2. – С. 170–174.
13. Василенко, А. В. Уровни развития пространственного мышления учащихся на уроках геометрии / А. В. Василенко // Наука и школа, 2011 – №2. – С. 62-65.
14. Васильев, С. Н. Развитие пространственного мышления младших школьников: практическое пособие / С. Н. Васильев, И. Н. Филинберг, Н. И. Спиглазова. – Новокузнецк, 2017. – 34 с.
15. Васильченко, С. Ш. Диагностические задания для оценки уровня развития пространственных представлений учащихся / С. Ш. Васильченко, С. В. Митрохина // Проблемы современного педагогического образования, 2018. – № 2, С. 59-63.
16. Высоцкий, И. Р. Единый государственный экзамен. Универсальные материалы для подготовки учащихся. Математика / Под редакцией А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – Москва : Интеллект-Центр, 2020. – 96 с. – ISBN 978-5-89790-710-6.
17. Геометрия. 10-11 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений / авт. : Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев [и др.]. – 9-е изд., с изм.

– Москва : Просвещение : Московские учебники, 2020. – 206 с. – ISBN 5-7853-0123-7.

18. Глейзер, Г. Д. Развитие пространственных представлений школьников при изучении геометрии / Г. Д. Глейзер – Москва : Педагогика, 2006. – 423 с.

19. Городнова, Е. Б. Методические особенности использование интерактивной среды GeoGebra при решении стереометрических задач / Е. В. Городнова // Вестник научных конференций, 2016. – №7-3(11). – С. 26–28.

20. Гурова, Л. Л. Психология мышления / Л. Л. Гурова – Москва, Саратов : ПЕР СЭ, Ай Пи Эр Медиа, 2019. – 136 с. – ISBN 978-5-4486-0830-8.

21. Гусев, В. А. Методика обучения геометрии / В. А. Гусев – Москва : Академия, 2014. – ISBN 5-7695-0769-1.

22. Далингер, В. А. Методика обучения учащихся построению пространственных тел и их сечений на плоскостном чертеже / В. А. Далингер // Международный журнал экспериментального образования. – 2016. – № 12(1). – С. 26-27. – URL: <https://expeducation.ru/ru/article/view?id=10746> (дата обращения: 13.01.2023).

23. Далингер, В. А. Методика обучения учащихся стереометрии посредством решения задач: учебное пособие / В. А. Далингер. – Омск : Изд-во ОмГПУ, 2001. – с. 365. – ISBN 8-8568-0521-8.

24. Динамическая математическая образовательная среда GeoGebra : Учеб. пособие / А. Р. Есяян, Н. М. Добровольский, Е. А. Седова, А. В. Якушин. – Тула : Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2017. – 417 с. – ISBN 978-5-9500201-0-0.

25. Дубровский, В. Н. Стереометрия с компьютером / В. Н. Дубровский // Компьютерные инструменты в образовании, 2013. – № 6. – С. 3-11.

26. Ефимьева, Н. В. Проблема использования многогранников на ранних этапах изучения стереометрии. – URL: <http://nsportal.ru/shkola/geometriya/library/2012/01/13/problema-ispolzovaniya-mnogogrannikov-na-rannikh-etapakh> (дата обращения: 13.01.2022).
27. Зверева, Л. Г. Практическое применение информационных технологий для развития пространственного мышления на уроках математики в 5 классах / Л. Г. Зверева, С. Г. Вдовенко, К. С. Якшина, А. Р. Нурова. // Материалы XI Международной студенческой научной конференции «Студенческий научный форум», 2019. – С. 73-79.
28. Зепнова, Н. Н. Развитие пространственного мышления школьников - залог успешного изучения точных дисциплин в вузе / Н. Н. Зепнова // Вестник ИрГТУ, 2012. – №6 (65) – С. 65-69. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/razvitie-prostranstvennogo-myshleniya-shkolnikov-zalog-uspeshnogo-izucheniya-tochnyh-distiplin-v-vuze> (дата обращения: 10.02.2022).
29. Зив, Б. Г. Геометрия. Дидактические материалы. 10 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организации : базовый и углубл. уровни / Б. Г. Зив – Москва : Просвещение, 2018. – 159 с. – ISBN 978-5-09-073248-2.
30. Ишменева, Н. М. Развитие пространственного воображения на уроках геометрии. – URL: <http://studygur.ru/doc/741022/razvitie-prostranstvennogo-voobrazheniya-na-urokah-geometrii> (дата обращения: 15.08.2022).
31. Каплунович, И. Я. Психологические закономерности развития пространственного мышления / И. Я. Каплунович // Вопросы психологии, 2002. – № 1. – С. 60-68.
32. Каплунович, И. Я. Развитие структуры пространственного мышления при решении математических задач / И. Я. Каплунович // Вопросы психологии. – 2005. – № 2. – С. 231-237.

33. Кириленко, С. Е. Пространственное мышление, как сложный психический процесс / С. Е. Кириленко // Инструменты современной научной деятельности: сборник статей по итогам Международной научно-практической конференции. – Екатеринбург : Сократ, 2017. – №18. – С. 17-21.

34. Коногорская, С. А. Возрастные особенности развития пространственного мышления подростков и старших школьников: их взаимосвязь с учебной успеваемостью / С. А. Коногорская // Вестник БГУ. Образование. Личность. Общество, 2014. – №5. – С. 17-21. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/vozzrastnye-osobennosti-razvitiya-prostranstvennogo-myshleniya-podrostkov-i-starshih-shkolnikov-ih-vzaimosvyaz-s-uchebnoy> (дата обращения: 13.08.2022).

35. Коногорская, С. А. Особенности развития компонентов пространственного мышления школьников на разных ступенях общего образования / С. А. Коногорская // Ученые записки Российского государственного социального университета. – Москва : Российский государственный социальный университет, 2019. – № 4. – С. 91-99.

36. Коногорская, С. А. Программа поэтапного развития пространственного мышления младших школьников / С. А. Коногорская // Вестник педагогического университета им. В.П. Астафьева. – Красноярск : Красноярский государственные педагогический университет им. В.П. Астафьева, 2014. – № 2. – С.161-166.

37. Коногорская, С. А. Особенности пространственного мышления и их взаимосвязь с учебной успешностью обучающихся : психология / С. А. Коногорская // Научно-педагогическое обозрение. – 2017. – № 1. – С. 142–150.

38. Коротаева, Е. В. Интерактивное обучение: вопросы теории и практики обучения / Е. В. Коротаева // Педагогическое образование в России, 2017. – №2. – С. 171-174.



39. Кузнецов, А. П. Пространственное мышление как умственная деятельность / А. П. Кузнецов // Обучение и воспитание: теория и практика. – Новосибирск : ООО «Центр развития научного сотрудничества», 2014. – № 11. – С.13-16.

40. Кузнецова, Ю. И. Развитие компонентов пространственного мышления обучающихся на уроках геометрии / Ю. И. Кузнецова // Вестник науки и образования, 2017. – № 3 (27). – С. 95-98.

41. Куприянова, О. М. Обучение логическим основам математики с использованием интерактивных технологий / О. М. Куприянова, Е. В. Морозова // Научно-методический электронный журнал «Концепт», 2016. – №. 11. – С. 996–1000. –URL: <http://e-koncept.ru/2016/86216.htm> (дата обращения: 02.03.2022).

42. Ларин, С. В. Методика обучения математике: компьютерная анимация в среде Geogebra : учебное пособие для вузов / С. В. Ларин. – Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 233 с. – ISBN 978-5-534-08929-5.

43. Маклаева, Э. В. Этапы формирования и развития пространственных представлений обучающихся в процессе обучения математики/ Э. В. Маклаева // Современные проблемы науки и образования. – Пенза : ИД «Академия естествознания», 2014. – № 5. – С. 44-47.

44. Мамалыга, Р. Ф. Формирование пространственного мышления – важная составляющая инженерного мышления у учащихся 7-9 классов во внеклассной работе / Р. Ф. Мамалыга, А. Г. Тверской // Формирование инженерного мышления в процессе обучения, 2015. – С. 109-114.

45. Манзарова, А. М. Развитие пространственного мышления школьников на уроках стереометрии средствами ИКТ / А. М. Манзарова // Молодой ученый, 2021. – №13(355). – С. 271-273. – URL: <https://moluch.ru/archive/355/79556/> (дата обращения: 13.01.2023).

46. Маслова, О. А. Развитие пространственного мышления учащихся 10-го класса с использованием интерактивных технологий / О. А. Маслова, Е. В. Морозова // Научно-методический электронный журнал

«Концепт». – 2017. – №39. – С. 1266–1270. – URL: <http://e-koncept.ru/2017/970580.htm> (дата обращения .25.09.2022).

47. Математический конструктор. – URL: <https://obr.1c.ru/mathkit/> (дата обращения: 14.03.2022).

48. О среде GeoGebra. – URL: <https://www.geogebra.org/about>.

49. Особенности использования информационных технологий при изучении стереометрии – геометрия, разное. – URL : <https://megatalant.com/biblioteka/statya-osobennosti-ispolzovaniya-informacionnyhtehnologiy-pri-izuchenii-stereometrii-80626.html> (дата обращения: 14.03.2022).

50. Папян, С. А. Развитие пространственного мышления учащихся при изучении многогранников на уроках геометрии / С. А. Папян, А. А. Никитина // Математическое и информационное моделирование, 2021. – №19. – С. 215-219.

51. Подаев, М. В. Динамическая визуализация геометрических понятий как средство развития пространственных представлений подростков / М. В. Подаев // Вестник ТГПУ, 2019. – №9(87). – С. 91-93.

52. Приказ Минобрнауки России от 17 мая 2012 г. № 413 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования». – URL: [http://www.consultant.ru/document/cons\\_doc\\_LAW\\_131131/](http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_131131/) (дата обращения 24.01.2022).

53. Применение современных информационных технологий на уроках математики : сборник материалов творческой лаборатории / авт.-сост. Ю. А. Скурихина. – Киров : КОГОАУ ДПО «ИРО Кировской области», 2019. – 127 с.

54. Психологический практикум «Мышление и речь»: учебно-методическое пособие / сост.: А.А. Маленов, А.Ю. Маленова. – Омск : Изд-во ОмГУ, 2005. – 108 с. – ISBN 5-7779-0619-2.

55. Пышкало, А. М. Методика обучения элементам геометрии в начальных классах : пособие для учителей / А. М. Пышкало. – Москва : Просвещение, 1973. – 208 с

56. Русинова, Л. П. Пространственное мышление студентов при изучении начертательной геометрии / Л. П. Русинова // Молодой ученый. – 2010. – №11(22). – С. 144-148. – URL: <https://moluch.ru/archive/22/2302/> (дата обращения: 17.04.2022).

57. Санина, Е. И. Обобщающее повторение начал стереометрии / Е. И. Санина // Математика в школе, 2013. – №6 – С. 12-14.

58. Санина, Е. И. Развитие пространственного мышления в процессе обучения стереометрии / Е. И. Санина, О. А. Гришина // Вестник РУДН, 2013. – №4. – С. 61-65. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/razvitie-prostranstvennogo-myshleniya-v-protssesse-obucheniya-stereometrii> (дата обращения: 18.10.2022).

59. Сенчилов, В. В. Применение интерактивных технологий при изучении курса геометрии в школе // Концепт. – 2013. – № 10. – С. 32-37. – URL: <http://e-koncept.ru/2013/13197.htm> (дата обращения 23.05.2022).

60. Терёшин, Д. А. Развитие математического мышления учащихся в процессе обучения курсу стереометрии в классах физико-математического профиля / Д. А. Терёшин // Вестник ТГПУ, 2013. – №4(132). С. 78-81. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/razvitie-matematicheskogo-myshleniya-uchaschihsya-v-protssesse-obucheniya-kursu-stereometrii-v-klassah-fiziko-matematicheskogo> (дата обращения: 07.04.2022).

61. Тимофеева, Н. М. О применении программных средств в процессе обучения / Н. М. Тимофеева, О. М. Киселева // Системы компьютерной математики и их приложения. – Смоленск : Изд-во СГПУ, 2015. – С. 233-235.

62. Тимощук, М. Е. Обучение общим подходам к решению задач по первым разделам систематического курса стереометрии / М. Е. Тимощук // Ученые записки. Электронный научный журнал Курского государственного

университета, 2012. №2 (22). – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/obuchenie-obschimpodhodam-k-resheniyu-zadach-po-pervym-razdelam-sistemicheskogo-kursastereometrii> (дата обращения: 15.05.2022).

63. Троцкая, Е. С. Методы диагностики пространственного мышления младших школьников / Е. С. Троцкая // Научный журнал ГАОУ ВО МГПУ «Известия ИППО», 2017. – № 1. – С. 86-91.

64. Троякова, Г. А. Методические особенности построения сечений на основе аксиом в среде Geogebra / Г. А. Троякова, П. А. Михалев // Информационные технологии в математике и математическом образовании. – Красноярск: Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева, 2017. – С. 218–222.

65. Тукеева, Г. Е. О формировании пространственно-образного мышления // Вопросы науки и образования, 2019. – № 5(50). – С. 84-86. – URL: <https://scientificpublication.ru/images/PDF/2019/50/o-formirovaniiprostranstvenno.pdf> (дата обращения 27.11.2022).

66. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» от 29.12.2012 № 273-ФЗ. – URL: [http://www.consultant.ru/document/cons\\_doc\\_LAW\\_140174/](http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_140174/) (дата обращения: 25.09.2021).

67. Федеральный закон от 31 июля 2020 г. N 304-ФЗ «О внесении изменений в Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» по вопросам воспитания обучающихся» – URL: [http://www.consultant.ru/document/cons\\_doc\\_LAW\\_358792/](http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_358792/) (дата обращения 12.03.2022).

68. Фунтиков, Р. А. Обзор и сравнительный анализ динамических сред «Живая математика», «Математический конструктор» и «GeoGebra» / Р. А. Фунтиков // Молодой ученый, 2018. – № 33(219). – С. 8–11.

69. Шабанова, М. В. Обучение математике с использованием возможностей GeoGebra : монография / М. В. Шабанова [и др.] ; Северный

(Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова, Красноярский государственный педагогический университет им. В. П. Астафьева. – Москва : Перо, 2013. – 128 с. – ISBN 978-5-91940-618-1.

70. Шигапов, И. И. Методическое пособие по GeoGebra 3D: построение 3D графиков : ВКР / И. И. Шигапов, А. А. Попов. – Казань, 2014. – 33 с. – URL: <https://kpfu.ru/portal/docs/F487527991/Shigapov.pdf> (дата обращения: 24.04.2022).

71. Якиманская, И. С. Развитие пространственного мышления школьников / И. С. Якиманская. – Москва : Педагогика, 1980. – 240 с.

72. Яшкова, А. А. Формирование пространственного мышления обучающихся с использованием дистанционных образовательных технологий / А. А. Яшкова // Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах, 2021. – С. 106-108.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Технологическая карта урока «Многогранники. Площадь поверхности многогранника»

**Предмет:** Математика (Геометрия)

**Класс:** 10 **УМК:** Атанасян Л. С. Геометрия. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений.

**Тема урока:** Многогранники. Площадь поверхности многогранника

**Тип урока:** Урок изучения нового материала и первичного закрепления

**Цель урока:** изучение понятия правильного многогранника как геометрической фигуры, его видов, рассмотрение применения и значимости изучаемого понятия в повседневной жизни.

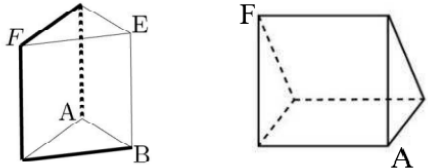
**Планируемые результаты:**

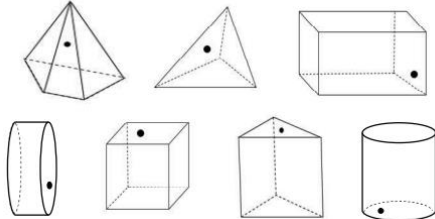
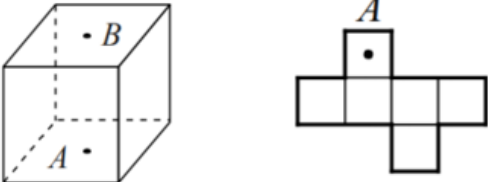
- личностные: сформированность мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки; критичность мышления, умение распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта; эстетическое отношение к миру;
- метапредметные: умение самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в учёбе, развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности; владение навыками учебно-исследовательской деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;
- предметные: владение основными понятиями пространственных геометрических фигур, их основными свойствами и видами; формирование пространственных представлений и применение их в решении практических задач.

**Методы и приемы:** словесный, наглядный, репродуктивный, эвристический методы.

**Оборудование и материалы:** компьютер, проектор, доска, индивидуальный комплект заданий для ученика, презентация и видеоматериал.

## Структура и ход урока

Деятельность учителя	Деятельность учащихся	УУД	Примечания
<b>1. Организационный этап</b>			
Приветствие учащихся проверка подготовленности к учебному занятию, организация внимания детей.	Приветствие учителя, показать готовность к учебному занятию. Включиться в рабочий ритм урока.	<i>Коммуникативные:</i> умение организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками. <i>Регулятивные:</i> умение развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности.	
<b>2. Актуализация знаний и умений учащихся</b>			
Объявляет о небольшой разминке для актуализации навыков работы с пространственными фигурами и включения в учебный процесс. Дает инструктаж по выполнению заданий. Организует обсуждение формулировок и решения задач.	Выполняют задание, обсуждают формулировки и решение задач.	<i>Коммуникативные:</i> уметь оформлять свои мысли в устной форме, уметь формулировать и аргументировать собственные суждения, уметь слушать учителя и других учащихся. <i>Познавательные:</i> уметь ориентироваться в своей системе знаний: отличать новое от уже известного с помощью учителя, уметь ставить цели и находить пути решения. <i>Личностные:</i> уметь точно и грамотно излагать свои мысли в устной речи.	Задания из сборника задач, направленных на формирование пространственных представлений учащихся: Задание 1. На каркасную модель многогранника напаяна проволока. Изобразите эту проволоку на многограннике, после того как его перевернули.  Задание 2. На поверхности геометрического тела поставили точку, которую нельзя увидеть. Закрасьте эту поверхность синим цветом.

			 <p data-bbox="1541 475 2078 619">Задание 3. На нижней грани куба отмечена точка А, а на верхней – точка В. На развёртке куба отмечена точка А. Отметьте на развёртке точку В.</p> 
--	--	--	---

**3. Постановка цели и задач урока. Мотивация учебной деятельности учащихся**

<p data-bbox="163 866 409 930">Задаёт наводящие вопросы.</p> <p data-bbox="163 975 495 1078">Связывает рассуждения учащихся с этапами урока.</p> <p data-bbox="163 1123 495 1187">Просит сформулировать цели занятия.</p>	<p data-bbox="544 866 846 898">Отвечают на вопросы.</p> <p data-bbox="544 975 909 1007">Узнают о структуре урока.</p> <p data-bbox="544 1123 813 1187">Формулируют цели занятия.</p>	<p data-bbox="934 866 1503 1042"><i>Регулятивные:</i> умение самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в учёбе и познавательной деятельности.</p> <p data-bbox="934 1050 1473 1121"><i>Познавательные:</i> уметь ставить цели и находить пути решения.</p>	
---	--	--	--



<b>4. Изучение нового материала</b>			
<p>Изложение теоретического материала. Подкрепляет словесное описание моделями фигур. Использует средства наглядности. Подключает учащихся к обсуждению основных понятий.</p>	<p>Изучают новый теоретический материал, задают уточняющие вопросы, участвуют в обсуждении.</p>	<p><i>Предметные:</i> уметь находить элементы многогранника, определять вид многогранника.  <i>Познавательные:</i> уметь анализировать теоретический материал, вести самостоятельный поиск, отбор информации, ее преобразование, выделять главное, сравнивать, обобщать, анализировать, проводить аналогию.  <i>Коммуникативные:</i> уметь уважительно относиться к точке зрения других.</p>	<p>Презентация «Многогранники», видеоматериал «Многогранники».</p>
<b>5. Закрепление изученного материала</b>			
<p>Организует исследовательскую работу по закреплению изученного материала.</p> <p>Выдает каждому ученику развертку модели многогранника, формулирует задание. Отвечает на уточняющие вопросы, контролирует выполнение исследовательской работы, корректирует решения, осуществляет проверку ответов.</p>	<p>Выполняют исследовательскую работу по закреплению изученного материала.</p> <p>Исследуют развертку модели полученного многогранника исходя из предложенного плана. Выполняют задания, связанные с измерением, построением и вычислением. Обсуждают решения, сверяют полученные ответы.</p>	<p><i>Предметные:</i> умение применить уже изученные темы в рамках новой, уметь находить составные элементы многогранника, определять его свойства, уметь конструировать многогранник по имеющейся развёртке.  <i>Познавательные:</i> уметь устанавливать причинно-следственные связи.  <i>Регулятивные:</i> уметь контролировать и оценивать процесс и результаты своей деятельности.</p>	<p><i>Каждому ученику дается развертка модели многогранника и предлагается задание:</i></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Укажите видовые признаки данного многогранника: <ol style="list-style-type: none"> <li>1) название,</li> <li>2) размеры сторон,</li> <li>3) вид граней,</li> <li>4) взаимное положение граней,</li> <li>5) граней и основания.</li> </ol> </li> <li>2. Дайте формулировку определения данного многогранника.</li> <li>3. Сделайте чертеж данного многогранника в тетради и в приложение GeoGebra.</li> <li>4. Дайте вывод формулы для вычисления площади полной поверхности многогранника.</li> </ol>

			<p>5. Проведите необходимые измерения и вычислите <math>S</math> полной поверхности.</p> <p>6. а) Докажите, что число ребер призмы (если вам дана призма) кратно трем.</p> <p>б) Докажите, что любая пирамида (если вам дана пирамида) имеет четное число ребер.</p> <p>7. Проверьте, верна ли для вашего многогранника теорема Эйлера.</p> <p>8. Используя данную развертку, изготовьте модель многогранника.</p>
<b>6. Информация о домашнем задании, инструктаж о его выполнении</b>			
Выводит на экран домашнее задание. Дает инструктаж по его выполнению. Отвечает на возникшие вопросы.	Записывают домашнее задание, задают вопросы.	<i>Регулятивные:</i> умение самостоятельно планировать пути достижения целей	
<b>7. Рефлексия (подведение итогов занятия)</b>			
Объявление об анализе деятельности на уроке. Организует рефлексию и самооценку учениками собственной учебной деятельности	Анализируют деятельность на уроке. Производят самооценку учебной деятельности на уроке	<i>Регулятивные:</i> владение основами самоконтроля, самооценки. <i>Коммуникативные:</i> умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли.	
Объявляет о конце занятия.	Прощаются с учителем, собирают вещи.		

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### Технологическая карта урока «Тетраэдр и параллелепипед»

**Предмет:** Математика (Геометрия)

**Класс: 10 УМК:** Атанасян Л. С. Геометрия. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений.

**Тема урока:** Тетраэдр и параллелепипед

**Тип урока:** Урок изучения нового материала и первичного закрепления

**Цель урока:** изучение понятий тетраэдра и параллелепипеда как геометрической фигуры, их составных элементов (вершин, рёбер, граней) и свойств, а также применение теоретических знаний при решении практических задач по изученной теме.

**Планируемые результаты:**

- личностные: сформированность мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки; критичность мышления, умение распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта; эстетическое отношение к миру;
- метапредметные: умение самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в учёбе, развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности; владение навыками учебно-исследовательской деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;
- предметные: владение основными понятиями тетраэдра и параллелепипеда, нахождение их основных элементов и описание свойств.

**Методы и приемы:** словесный, наглядный, репродуктивный, эвристический методы.

**Оборудование и материалы:** компьютер, проектор, доска, презентация, интерактивные и реальные модели фигур.

## Структура и ход урока

Деятельность учителя	Деятельность учащихся	УУД	Примечания
<b>1. Организационный этап</b>			
Приветствие учащихся проверка подготовленности к учебному занятию, организация внимания детей.	Приветствие учителя, показать готовность к учебному занятию. Включиться в рабочий ритм урока.	<i>Коммуникативные:</i> умение организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками. <i>Регулятивные:</i> умение развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности.	
<b>2. Проверка домашнего задания, воспроизведение и коррекция опорных знаний учащихся</b>			
Проверка домашнего задания, разбор затруднений, обсуждение процесса решения.	Участвуют в обсуждении, проверяют домашнее задание, задают вопросы.	<i>Коммуникативные:</i> уметь оформлять свои мысли в устной форме, уметь формулировать и аргументировать собственные суждения, уметь слушать учителя и других учащихся. <i>Регулятивные:</i> уметь контролировать и оценивать процесс и результаты своей деятельности.	Разбор задач № 63, 64, 65. <b>63</b> Параллельные плоскости $\alpha$ и $\beta$ пересекают сторону $AB$ угла $BAC$ соответственно в точках $A_1$ и $A_2$ , а сторону $AC$ этого угла — соответственно в точках $B_1$ и $B_2$ . Найдите: а) $AA_2$ и $AB_2$ , если $A_1A_2 = 2A_1A = 12$ см, $AB_1 = 5$ см; б) $A_2B_2$ и $AA_2$ , если $A_1B_1 = 18$ см, $AA_1 = 24$ см, $AA_2 = \frac{3}{2} A_1A_2$ . <b>64</b> Три прямые, проходящие через одну точку и не лежащие в одной плоскости, пересекают одну из параллельных плоскостей в точках $A_1, B_1$ и $C_1$ , а другую — в точках $A_2, B_2$ и $C_2$ . Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны. <b>65</b> Параллельные отрезки $A_1A_2, B_1B_2$ и $C_1C_2$ заключены между параллельными плоскостями $\alpha$ и $\beta$ (рис. 32). а) Определите вид четырехугольников $A_1B_1B_2A_2, B_1C_1C_2B_2$ и $A_1C_1C_2A_2$ . б) Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$ .  Опорный конспект по теме «Тетраэдр и параллелепипед».

<b>3. Постановка цели и задач урока. Мотивация учебной деятельности учащихся</b>			
<p>Задаёт наводящие вопросы.</p> <p>Связывает рассуждения учащихся с этапами урока.</p> <p>Просит сформулировать цели занятия.</p>	<p>Отвечают на вопросы.</p> <p>Узнают о структуре урока.</p> <p>Формулируют цели занятия.</p>	<p><i>Познавательные:</i> применение предметных знаний, поиск информации для выполнения учебных заданий.</p> <p><i>Коммуникативные:</i> учитывать разные мнения и стремиться к координации различных позиций в сотрудничестве.</p> <p><i>Регулятивные:</i> учитывать правила в планировании и контроле.</p>	
<b>4. Изучение нового материала</b>			
<p>Обсуждение основных теоретических понятий, с которыми учащиеся познакомились дома.</p>	<p>Участвуют в обсуждении. Отвечают на вопросы,</p>	<p><i>Предметные:</i> уметь находить элементы многогранника, определять вид многогранника.</p> <p><i>Познавательные:</i> уметь анализировать теоретический материал, вести самостоятельный поиск, отбор информации, ее преобразование, выделять главное, сравнивать, обобщать,</p>	<p>Презентация «Тетраэдр и параллелепипед», использование интерактивных и реальных моделей тетраэдра и параллелепипеда.</p> <p>Основные понятия: Многогранник – поверхность геометрического тела, составленная из многоугольников.</p> <p>Определение тетраэдра. <math>\Delta ABC, D \notin (ABC)</math></p> <p>Рассмотрим произвольный <math>\Delta ABC</math> и точку <math>D</math>, не лежащую в его плоскости. Поверхность, образованная <math>\Delta ABC</math> и треугольниками, одной из вершин которых является точка <math>D</math>, а двумя другими – вершины <math>\Delta ABC</math>, называется тетраэдром.</p> <p>Определение параллелепипеда.</p>

<p>Организует исследование составных элементов тетраэдра и их систематизацию.</p>	<p>Проводят исследование составных элементов тетраэдра и параллелепипеда, заполняют предложенную таблицу, аргументируют свои ответы.</p>	<p>анализировать, проводить аналогию. <i>Коммуникативные:</i> уметь уважительно относиться к точке зрения других.</p>	<p>Пусть <math>\alpha \parallel \beta</math>. Рассмотрим 2 равных параллелограмма ABCD и <math>A_1 B_1 C_1 D_1</math> в этих плоскостях, расположенных так, чтобы отрезки <math>AA_1</math>, <math>BB_1</math>, <math>CC_1</math> и <math>DD_1</math> были параллельны. Тогда поверхность, составленная из двух равных параллелограммов ABCD и <math>A_1 B_1 C_1 D_1</math> и четырёх параллелограммов <math>ADD_1 A_1</math>, <math>A_1 B_1 BA</math>, <math>BCB_1 C_1</math> и <math>CDD_1 C_1</math>, называется параллелепипедом и обозначается <math>ABCD A_1 B_1 C_1 D_1</math>.</p> <p>Тетраэдр DABC</p> <table border="1" data-bbox="1236 600 2078 778"> <thead> <tr> <th></th> <th>Кол-во</th> <th>Название</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Грани</td> <td>4</td> <td>ABC, DAB, DAC, DBC</td> </tr> <tr> <td>Ребра</td> <td>6</td> <td>AB, AC, BC, DA, DB, DC</td> </tr> <tr> <td>Вершины</td> <td>4</td> <td>A, B, C, D</td> </tr> </tbody> </table> <p>Параллелепипед <math>ABCD A_1 B_1 C_1 D_1</math>.</p> <table border="1" data-bbox="1236 852 2078 1212"> <thead> <tr> <th></th> <th>Кол-во</th> <th>Название</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Грани</td> <td>6</td> <td>ABCD, <math>A_1 B_1 C_1 D_1</math>, <math>ADD_1 A_1</math>, <math>A_1 B_1 BA</math>, <math>BCB_1 C_1</math>, <math>CDD_1 C_1</math></td> </tr> <tr> <td>Ребра</td> <td>12</td> <td><math>A_1 B_1</math>, <math>B_1 C_1</math>, <math>C_1 D_1</math>, <math>A_1 D_1</math>, <math>A_1 A</math>, <math>B_1 B</math>, <math>C_1 C</math>, <math>D_1 D</math>, AB, BC, CD, AD</td> </tr> <tr> <td>Вершины</td> <td>8</td> <td><math>A_1</math>, <math>B_1</math>, <math>C_1</math>, <math>D_1</math>, A, B, C, D</td> </tr> <tr> <td>Диагонали</td> <td>4</td> <td><math>A_1 C</math>, <math>AC_1</math>, <math>BD_1</math>, <math>B_1 D</math></td> </tr> </tbody> </table> <p>Свойства параллелепипеда: 1. Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.</p>		Кол-во	Название	Грани	4	ABC, DAB, DAC, DBC	Ребра	6	AB, AC, BC, DA, DB, DC	Вершины	4	A, B, C, D		Кол-во	Название	Грани	6	ABCD, $A_1 B_1 C_1 D_1$ , $ADD_1 A_1$ , $A_1 B_1 BA$ , $BCB_1 C_1$ , $CDD_1 C_1$	Ребра	12	$A_1 B_1$ , $B_1 C_1$ , $C_1 D_1$ , $A_1 D_1$ , $A_1 A$ , $B_1 B$ , $C_1 C$ , $D_1 D$ , AB, BC, CD, AD	Вершины	8	$A_1$ , $B_1$ , $C_1$ , $D_1$ , A, B, C, D	Диагонали	4	$A_1 C$ , $AC_1$ , $BD_1$ , $B_1 D$
	Кол-во	Название																												
Грани	4	ABC, DAB, DAC, DBC																												
Ребра	6	AB, AC, BC, DA, DB, DC																												
Вершины	4	A, B, C, D																												
	Кол-во	Название																												
Грани	6	ABCD, $A_1 B_1 C_1 D_1$ , $ADD_1 A_1$ , $A_1 B_1 BA$ , $BCB_1 C_1$ , $CDD_1 C_1$																												
Ребра	12	$A_1 B_1$ , $B_1 C_1$ , $C_1 D_1$ , $A_1 D_1$ , $A_1 A$ , $B_1 B$ , $C_1 C$ , $D_1 D$ , AB, BC, CD, AD																												
Вершины	8	$A_1$ , $B_1$ , $C_1$ , $D_1$ , A, B, C, D																												
Диагонали	4	$A_1 C$ , $AC_1$ , $BD_1$ , $B_1 D$																												
<p>Рассмотрение свойств параллелепипеда.</p>	<p>Формулируют свойства параллелепипеда, доказывают их.</p>																													

			2. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.
<b>5. Закрепление изученного материала</b>			
<p>Организует разбор заданий по изученной теме. Задает наводящие вопросы, корректирует рассуждения учащихся.</p> <p>Выдает задания для самостоятельного изучения и решения. Отвечает на уточняющие вопросы.</p>	<p>Совместно с учителем разбирают задачи на закрепление изученного материала. Задают вопросы, участвуют в рассуждениях.</p> <p>Самостоятельно выполняют задания из карточки.</p>	<p><i>Предметные:</i> умение применить уже изученные темы в рамках новой, уметь находить составные элементы тетраэдра и параллелепипеда, определять применяемые свойства.</p> <p><i>Познавательные:</i> уметь устанавливать причинно-следственные связи.</p> <p><i>Регулятивные:</i> уметь контролировать и оценивать процесс и результаты своей деятельности.</p>	<p>Разбор задач: №68, №70, №76, №77, №110.</p> <p>68 Точки <math>M</math> и <math>N</math> — середины ребер <math>AB</math> и <math>AC</math> тетраэдра <math>ABCD</math>. Докажите, что прямая <math>MN</math> параллельна плоскости <math>BCD</math>.</p> <p>69 Через середины ребер <math>AB</math> и <math>BC</math> тетраэдра <math>SABC</math> проведена плоскость параллельно ребру <math>SB</math>. Докажите, что эта плоскость пересекает грани <math>SAB</math> и <math>SBC</math> по параллельным прямым.</p> <p>70 Докажите, что плоскость, проходящая через середины ребер <math>AB</math>, <math>AC</math> и <math>AD</math> тетраэдра <math>ABCD</math>, параллельна плоскости <math>BCD</math>.</p> <p>76 Дан параллелепипед <math>ABCD A_1 B_1 C_1 D_1</math>. Докажите, что <math>AC \parallel A_1 C_1</math> и <math>BD \parallel B_1 D_1</math>.</p> <p>77 Сумма всех ребер параллелепипеда <math>ABCD A_1 B_1 C_1 D_1</math> равна 120 см. Найдите каждое ребро параллелепипеда, если <math>\frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}</math>, <math>\frac{BC}{BB_1} = \frac{5}{6}</math>.</p> <p>110 Докажите, что в параллелепипеде <math>ABCD A_1 B_1 C_1 D_1</math> плоскость <math>A_1 DB</math> параллельна плоскости <math>D_1 C B_1</math>.</p> <p>Задания для самостоятельного решения:</p> <p><b>В тетраэдре <math>DABC</math> <math>\angle DBC = \angle DBA = \angle ABC = 90^\circ</math>, <math>BD = 1</math>, <math>BA = BC = 2</math> см. Найдите площадь грани <math>ADC</math>.</b></p> <p><b>В тетраэдре <math>DABC</math> <math>\angle DBC = \angle DBA = 60^\circ</math>, <math>BA = BC = 5</math> см, <math>DB = 8</math> см, <math>AC = 8</math> см. Найдите площадь треугольника <math>ADC</math>.</b></p>
<b>6. Информация о домашнем задании, инструктаж о его выполнении</b>			
<p>Выводит на экран домашнее задание. Дает инструктаж по его выполнению. Отвечает на возникшие вопросы.</p>	<p>Записывают домашнее задание, задают вопросы.</p>	<p><i>Регулятивные:</i> умение самостоятельно планировать пути достижения целей</p>	<p>66 Назовите все пары скрещивающихся (т. е. принадлежащих скрещивающимся прямым) ребер тетраэдра <math>ABCD</math>. Сколько таких пар ребер имеет тетраэдр?</p> <p>69 Через середины ребер <math>AB</math> и <math>BC</math> тетраэдра <math>SABC</math> проведена плоскость параллельно ребру <math>SB</math>. Докажите, что эта плоскость пересекает грани <math>SAB</math> и <math>SBC</math> по параллельным прямым.</p> <p>78 На рисунке 42 изображен параллелепипед <math>ABCD A_1 B_1 C_1 D_1</math>, на ребрах которого отмечены точки <math>M</math>, <math>N</math>, <math>M_1</math> и <math>N_1</math> так, что <math>AM = CN = A_1 M_1 = C_1 N_1</math>. Докажите, что <math>MBND M_1 B_1 N_1 D_1</math> — параллелепипед.</p>

			<p><math>ABCD A_1 B_1 C_1 D_1</math> — параллелепипед, <math>BE</math> лежит в плоскости <math>A_1 BD</math>. Докажите, что <math>BE</math> параллельна плоскости <math>B_1 D_1 C</math>.</p> <p>3.</p> <p>В тетраэдре <math>DABC</math> <math>\angle DBC = \angle DBA = \angle ABC = 60^\circ</math>, <math>BD = BA = BC = 4</math> см. Найдите площадь грани <math>ADC</math>.</p> <p>4.</p>
--	--	--	--



### 7. Подведение итогов занятия

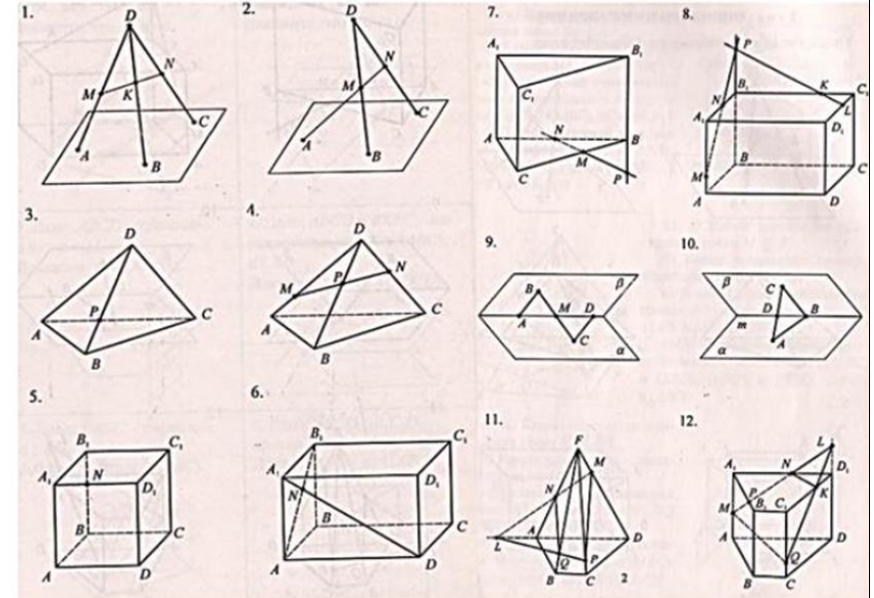
Подводит итоги занятия. Организует повторение теоретического материала, пройденного на уроке. Предлагает убедиться в важности правильного чертежа и описывает актуальность этого навыка для дальнейшего изучения темы «Тетраэдр и параллелепипед».

Объявляет о конце занятия.

Повторяют теоретический материал: определения тетраэдра и параллелепипеда, их составные элементы и свойства. На предложенных чертежах ребята ищут ошибки, озвучивают и аргументируют свой ответ, предлагают правильный вариант изображения.

Прощаются с учителем, собирают вещи.

*Познавательные:* уметь устанавливать причинно-следственные связи.  
*Коммуникативные:* умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли.



## ПРИЛОЖЕНИЕ В

### Технологическая карта урока «Построение сечений тетраэдра и параллелепипеда»

**Предмет:** Математика (Геометрия)

**Класс:** 10 **УМК:** Атанасян Л. С. Геометрия. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений.

**Тема урока:** Построение сечений тетраэдра и параллелепипеда

**Тип урока:** комбинированный урок

**Цель урока:** овладение методами и правилами построения сечений в тетраэдре и параллелепипеде с разными заданными условиями.

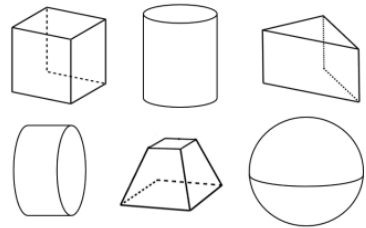
**Планируемые результаты:**

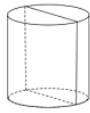
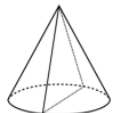
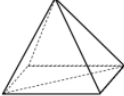
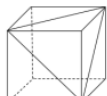
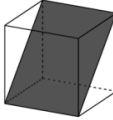
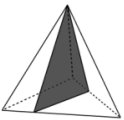

- личностные: сформированность мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки; критичность мышления, умение распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта; эстетическое отношение к миру;
- метапредметные: умение самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в учёбе, развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности; владение навыками учебно-исследовательской деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;
- предметные: владение основными понятиями пространственных фигур и методов и правил построения сечений в тетраэдре и параллелепипеде с разными заданными условиями.

**Методы и приемы:** словесный, наглядный, репродуктивный, эвристический методы.

**Оборудование и материалы:** компьютеры, проектор, доска, индивидуальные задания для учащихся на интерактивных платформах.

## Структура и ход урока

Деятельность учителя	Деятельность учащихся	УУД	Примечания
<b>1. Организационный этап</b>			
Приветствие учащихся проверка подготовленности к учебному занятию, организация внимания детей.	Приветствие учителя, показать готовность к учебному занятию. Включиться в рабочий ритм урока.	<i>Коммуникативные:</i> умение организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками. <i>Регулятивные:</i> умение развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности.	
<b>2. Актуализация знаний и умений учащихся</b>			
Объявляет о небольшой разминке для актуализации навыков работы с пространственными фигурами и включения в учебный процесс. Дает инструктаж по выполнению заданий. Организует работу с чертежами, акцентирует внимание на верных чертежах, обсуждает возможные ошибки или неверные трактовки чертежей.	Выполняют задание, обсуждают верные варианты чертежей и выделяют распространенные ошибки.	<i>Коммуникативные:</i> уметь оформлять свои мысли в устной форме, уметь формулировать и аргументировать собственные суждения, уметь слушать учителя и других учащихся. <i>Познавательные:</i> уметь ориентироваться в своей системе знаний: отличать новое от уже известного с помощью учителя, уметь ставить цели и находить пути решения. <i>Личностные:</i> уметь точно и грамотно излагать свои мысли в устной речи.	Задания из сборника задач, направленных на формирование пространственных представлений учащихся: Задание 1. Дорисуйте невидимую линию на чертежах.  Задание 2. Закрасьте пересечение геометрического тела с плоской фигурой.

			<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;"> <div style="text-align: center;"> <p>а) </p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>б) </p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>в) </p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>г) </p> </div> </div> <p>Задание 3. Обведите видимую границу сечения сплошной линией, а невидимую – штриховкой.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">    </div>
<b>3. Постановка цели и задач урока. Мотивация учебной деятельности учащихся</b>			
<p>Задаёт наводящие вопросы.</p> <p>Связывает рассуждения учащихся с этапами урока.</p> <p>Просит сформулировать цели занятия.</p>	<p>Отвечают на вопросы.</p> <p>Узнают о структуре урока.</p> <p>Формулируют цели занятия.</p>	<p><i>Регулятивные:</i> умение самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в учёбе и познавательной деятельности.</p> <p><i>Познавательные:</i> уметь ставить цели и находить пути решения.</p>	

#### 4. Изучение нового материала

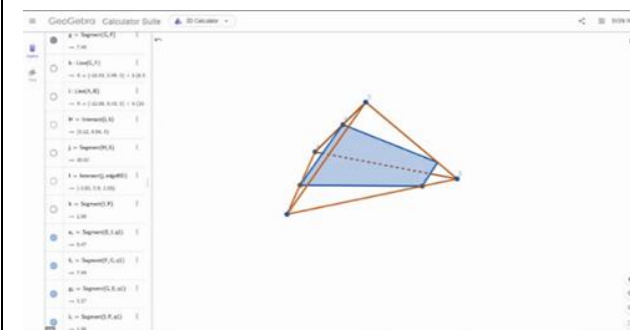
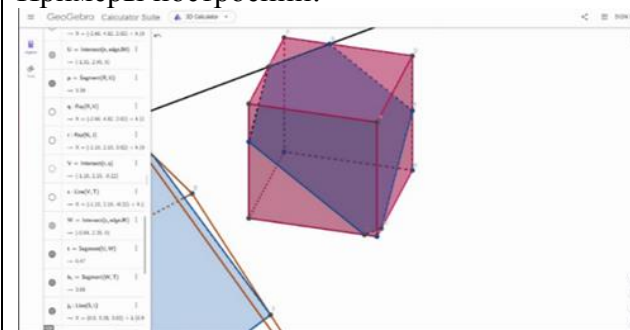
Изложение теоретического материала.  
Подкрепляет словесное описание моделями фигур.  
Использует средства наглядности.  
Дает правила построения сечений.  
Рассказывает о методе следов.  
С помощью программы Geogebra показывает построение треугольника и четырёхугольника в тетраэдре, трех-, четырех-, пяти- и шестиугольника в параллелепипеде

Изучают новый материал, задают уточняющие вопросы, участвуют в обсуждении. Строят совместно с учителем, делают опорный конспект основных задач и правил построения сечений.

*Познавательные:* уметь анализировать теоретический материал, вести самостоятельный поиск, отбор информации, ее преобразование, выделять главное, сравнивать, обобщать, анализировать, проводить аналогию.  
*Коммуникативные:* уметь уважительно относиться к точке зрения других.

Презентация «Сечения», работа с интерактивной платформой GeoGebra.

Примеры построений:



## 5. Закрепление изученного материала

Организует индивидуальную работу учащихся с построением сечений на интерактивных платформах GeoGebra и IDroo. Контролирует выполнение заданий, корректирует построения и консультирует по возникающим вопросам учеников.

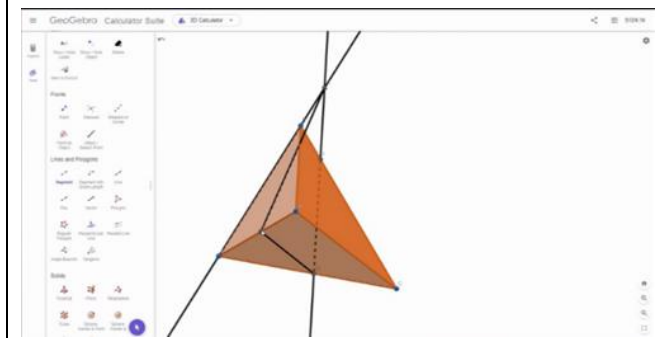
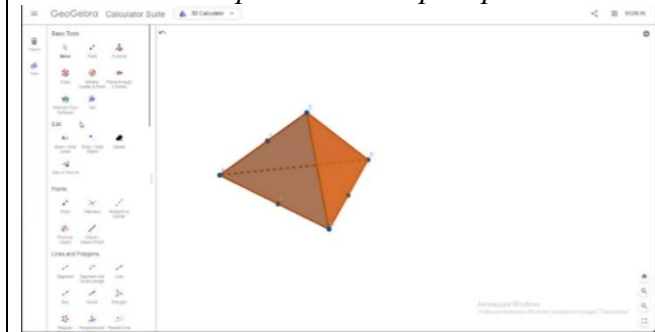
Выполняют индивидуальные задания на построение сечений в тетраэдре и параллелепипеде на интерактивных платформах GeoGebra и IDroo.

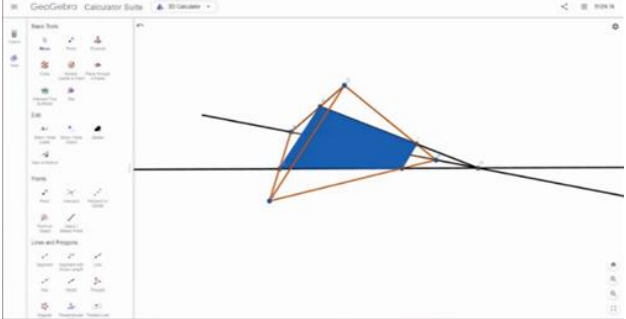
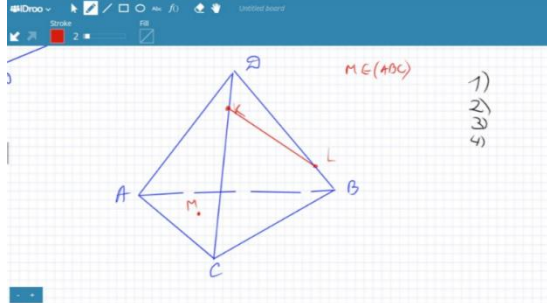
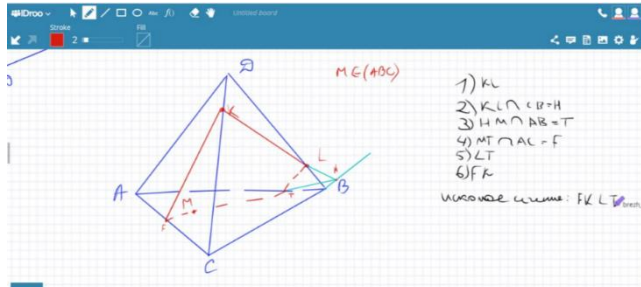
*Предметные:* умение применить уже изученные темы в рамках новой, уметь находить составные элементы тетраэдра и параллелепипеда, определять их свойства, уметь применять правила построения сечения для различных заданных условий.  
*Познавательные:* уметь устанавливать причинно-следственные связи.  
*Регулятивные:* уметь контролировать и оценивать процесс и результаты своей деятельности.

Работа с интерактивными платформами GeoGebra и IDroo.

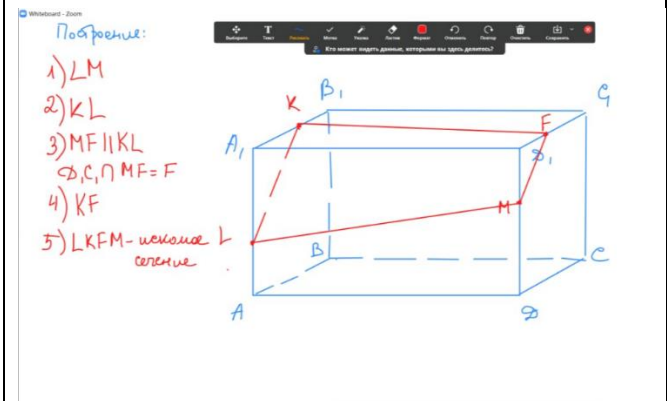
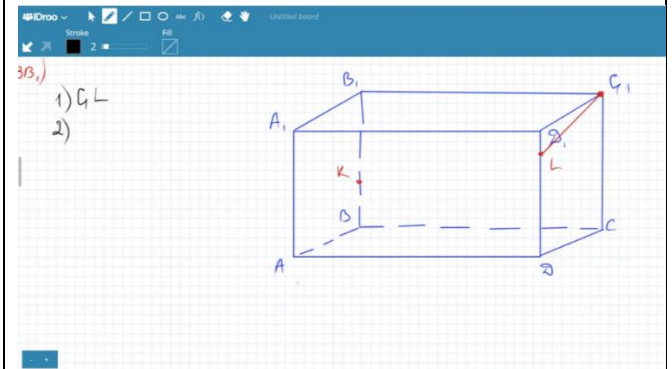
Примеры заданий:

*Построения в тетраэдре*

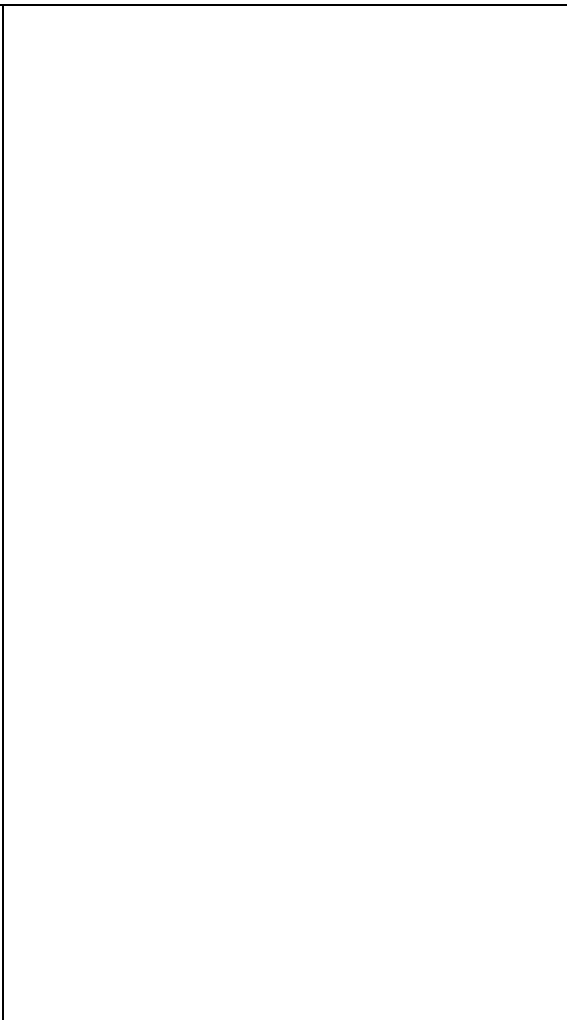
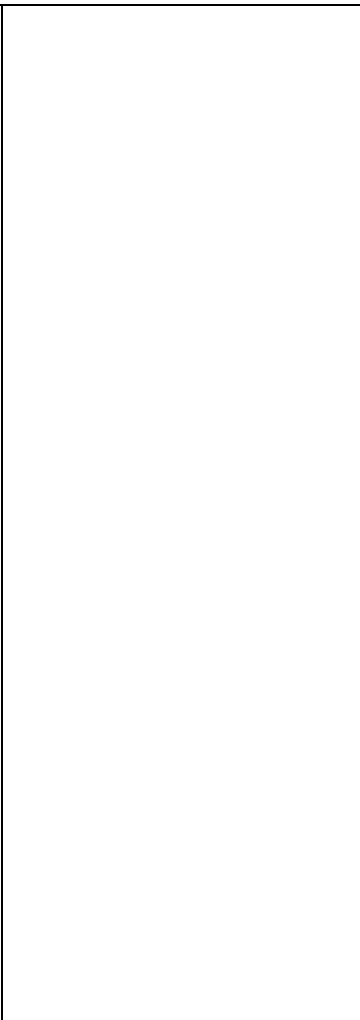
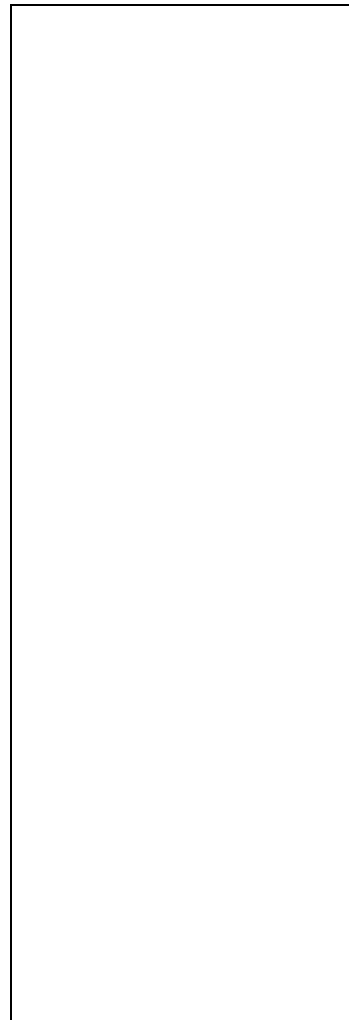


			 <p><i>Построение сечений в тетраэдре по трём точкам, когда одна находится в плоскости грани тетраэдра</i></p>  
--	--	--	--

## Построения в параллелепипеде







Построение:

- 1) LK
- 2) ML
- 3)  $KN \parallel LM$   
 $KN \cap CG = N$
- 4)  $MQ \parallel LK$   
 $MQ \cap DC = Q$
- 5) QN
- 6) LMQNK - искомого сечение

*Построение с применением метода следов при разном выборе данных*

Построение:

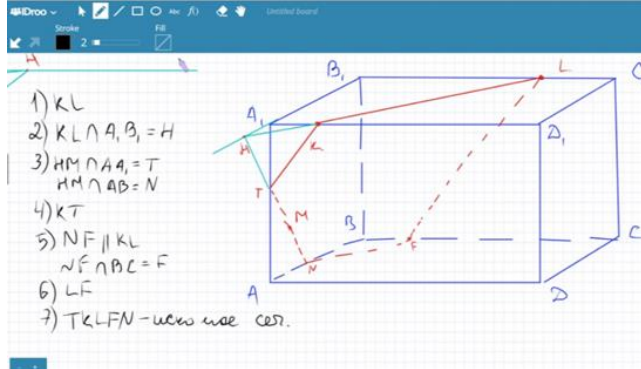
- 1) LK
- 2)  $LK \parallel MF$   
 $MF \cap DC = F$
- 3)  $MF \parallel BC = H$
- 4)  $KH \cap CG = E$
- 5) EF
- 6) KE
- 7)  $FE \parallel ZL$   
 $ZL \cap AA_1 = Z$
- 8) ZM
- 9) ZLKEFH - искомого сечение

Построение:

- 1)  $LK$
- 2)  $LK \parallel MF$   
 $MF \cap DC = F$
- 3)  $A_1D_1 \cap LK = H$
- 4)  $HH \cap AA_1 = N$
- 5)  $NL$
- 6)  $NM$
- 7)  $LN \parallel FQ$   
 $FQ \cap C_1D_1 = Q$
- 8)  $KQ$
- 9)  $NLKQFM$  — искомое сечение

*Построение сечений в параллелепипеде по трём точкам, когда одна находится в плоскости грани параллелепипеда*

- 1)  $KL$
- 2)

			
--	--	--	---

### 6. Информация о домашнем задании, инструктаж о его выполнении

<p>Выводит на экран домашнее задание. Дает инструктаж по его выполнению. Отвечает на возникшие вопросы.</p>	<p>Записывают домашнее задание, задают вопросы.</p>	<p><i>Регулятивные:</i> умение самостоятельно планировать пути достижения целей</p>	<p><b>Домашнее задание:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Необходимо зарегистрироваться в GeoGebra.</li> <li>2. Открыть первую ссылку. Там должен прогрузиться тетраэдр, а на нем точки. Необходимо построить сечение.</li> <li>3. Нажать «сохранить», а после этого отправить ссылку с готовой работой.</li> <li>4. И так с каждой ссылкой. Всего 6 построений</li> </ol> <p><b>Ссылки:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <a href="https://www.geogebra.org/3d/kyr97cnm">https://www.geogebra.org/3d/kyr97cnm</a></li> <li>2. <a href="https://www.geogebra.org/3d/qn5ycun6">https://www.geogebra.org/3d/qn5ycun6</a></li> <li>3. <a href="https://www.geogebra.org/3d/mucxc5we">https://www.geogebra.org/3d/mucxc5we</a></li> <li>4. <a href="https://www.geogebra.org/3d/ak8vkqge">https://www.geogebra.org/3d/ak8vkqge</a></li> <li>5. <a href="https://www.geogebra.org/3d/tbqvkskr">https://www.geogebra.org/3d/tbqvkskr</a></li> <li>6. <a href="https://www.geogebra.org/3d/kgxvrzsk">https://www.geogebra.org/3d/kgxvrzsk</a></li> </ol>
---	---	---	---

### 7. Рефлексия (подведение итогов занятия)

<p>Объявление об анализе деятельности на уроке. Организует рефлексию и самооценку учениками собственной учебной деятельности</p> <p>Объявляет о конце занятия.</p>	<p>Анализируют деятельность на уроке. Производят самооценку учебной деятельности на уроке</p> <p>Прощаются с учителем, собирают вещи.</p>	<p><i>Регулятивные:</i> владение основами самоконтроля, самооценки. <i>Коммуникативные:</i> умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли.</p>	
--	---	--	--

## ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Технологическая карта урока «Угол между прямой и плоскостью. Теорема о трёх перпендикулярах»

**Предмет:** Математика (Геометрия)

**Класс:** 10 **УМК:** Атанасян Л. С. Геометрия. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений.

**Тема урока:** Угол между прямой и плоскостью. Теорема о трёх перпендикулярах.

**Тип урока:** Урок изучения нового материала и первичного закрепления

**Цель урока:** изучение понятия угла между прямой и плоскостью, определение теоремы о трёх перпендикулярах, а также ее применение для решения опорных задач и задач практического содержания.

**Планируемые результаты:**

- личностные: сформированность мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки; критичность мышления, умение распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта; эстетическое отношение к миру;
- метапредметные: умение самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в учёбе, развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности; владение навыками учебно-исследовательской деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;
- предметные: владение основными понятиями пространственных геометрических фигур, их основными свойствами и видами; формирование пространственных представлений угла между прямой и плоскостью и теоремы о трёх перпендикулярах и применение их в решении практических задач.

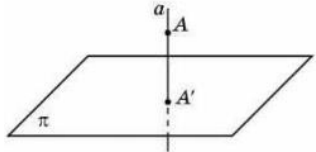
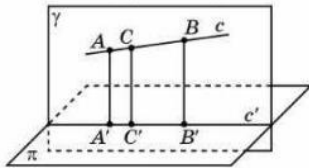
**Методы и приемы:** словесный, наглядный, репродуктивный, эвристический методы.

**Оборудование и материалы:** компьютер, проектор, доска, презентация, интерактивные модели рассматриваемых понятий.

## Структура и ход урока

Деятельность учителя	Деятельность учащихся	УУД	Примечания
<b>1. Организационный этап</b>			
Приветствие учащихся проверка подготовленности к учебному занятию, организация внимания детей.	Приветствие учителя, показать готовность к учебному занятию. Включиться в рабочий ритм урока.	<i>Коммуникативные:</i> умение организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками. <i>Регулятивные:</i> умение развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности.	
<b>2. Постановка цели и задач урока. Мотивация учебной деятельности учащихся</b>			
Задаёт наводящие вопросы.  Связывает рассуждения учащихся с этапами урока.  Просит сформулировать цели занятия.	Отвечают на вопросы.  Узнают о структуре урока.  Формулируют цели занятия.	<i>Регулятивные:</i> умение самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в учёбе и познавательной деятельности. <i>Познавательные:</i> уметь ставить цели и находить пути решения.	

### 3. Изучение нового материала

<p>Изложение теоретического материала. Подкрепляет словесное описание моделями фигур. Использует средства наглядности. Подключает учащихся к обсуждению основных понятий. Помогает при рассуждениях над доказательством свойств и теоремы о трех перпендикулярах.</p>	<p>Изучают новый теоретический материал, задают уточняющие вопросы, участвуют в обсуждении. Рассматривают основные понятия, доказывают свойства и теорему.</p>	<p><i>Познавательные:</i> уметь анализировать теоретический материал, вести самостоятельный поиск, отбор информации, ее преобразование, выделять главное, сравнивать, обобщать, анализировать, проводить аналогию. <i>Коммуникативные:</i> уметь уважительно относиться к точке зрения других.</p>	<p>Презентация «Угол между прямой и плоскостью. Теорема о трёх перпендикулярах», интерактивные модели на платформе GeoGebra.</p> <p>Основные понятия: Зафиксируем некоторую плоскость <math>\pi</math>. Для произвольной точки <math>A</math> пространства проведем прямую <math>a</math>, перпендикулярную данной плоскости. Точка <math>A'</math> пересечения этой прямой с данной плоскостью называется <i>ортогональной проекцией</i> точки <math>A</math> на плоскость (рис. 15.1).</p>  <p style="text-align: center;">Рис. 15.1</p>  <p style="text-align: center;">Рис. 15.2</p> <p>Соответствие, при котором точкам пространства сопоставляются их ортогональные проекции на данную плоскость, называется <i>ортогональным проектированием</i> на эту плоскость. Сама плоскость называется <i>плоскостью проектирования</i>.</p> <p>Рассмотрим некоторые свойства ортогонального проектирования.</p> <p>Свойство 1. Ортогональное проектирование переводит прямые, не перпендикулярны плоскости проектирования, в прямые, а прямые, перпендикулярные плоскости проектирования, - в точки.</p>
---	--	--	--

Свойство 2. Ортогональное проектирование сохраняет отношение отрезков, лежащих на прямой, не перпендикулярной плоскости проектирования. В частности, середина отрезка проектируется в середину проекции этого отрезка.

Углом между наклонной и плоскостью называется угол между этой наклонной и ее ортогональной проекции на эту плоскость (рис. 16.1. а).

Считают, что прямая, перпендикулярная плоскости, образует с этой плоскостью прямой угол (рис 16.1, б).

Углом между отрезками и плоскостью называется угол между прямой, содержащей отрезок, и этой плоскостью.

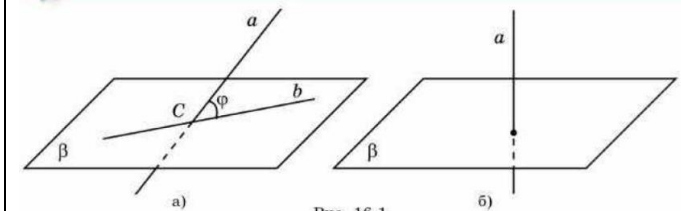


Рис. 16.1

**Теорема (о трех перпендикулярах).** Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна ортогональной проекции наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и самой наклонной



#### 4. Закрепление изученного материала

<p>Организует решение опорных задач для закрепления изученного материала.</p>	<p>Решают опорные задачи по изученной теме совместно с учителем. Участвуют в осуждении, оформляют решение в тетради.</p>	<p><i>Предметные:</i> умение применить уже изученные темы в рамках новой, уметь применять теорему о трех перпендикулярах в опорных задачах и задачах практического содержания.</p>	<p><u>Задание.</u> №15.6. Отрезки двух наклонных, проведенных из одной точки к плоскости, равны 15 см и 20 см. Ортогональная проекция одного из этих отрезков равна 16 см. Найдите ортогональную проекцию другого отрезка.</p>
<p>Предлагает рассмотреть задания с практическим содержанием по текущей теме из сборника задач, направленных для формирование пространственного мышления.</p>	<p>Решают задачи практического содержания, аргументируют свое решение, участвуют в обсуждении, оформляют решение задач в тетради.</p>	<p><i>Познавательные:</i> уметь устанавливать причинно-следственные связи.</p> <p><i>Регулятивные:</i> уметь контролировать и оценивать процесс и результаты своей деятельности.</p>	<p><i>Задача.</i> В кубе <math>ABCD A_1 B_1 C_1 D_1</math> найдите тангенс угла между прямой <math>AC_1</math> и плоскостью <math>BCC_1</math>.</p> <p>Задания из сборника задач, направленных на формирование пространственных представлений учащихся:</p> <p>Задание 1. На какое расстояние следует отодвинуть от стены дома нижний конец лестницы, длина которой равна 13 м, чтобы верхний ее конец оказался на высоте 12 м?</p> <p>Задание 2. В одном углу комнаты с размерами 4 х 5 х 3 (м) спит муха. В противоположном углу сидит паук. Какая длина паутины будет самой короткой, если паук захочет проползти по ней к уснувшей в углу мухе? В ответе укажите приближенное значение в метрах с точностью до одного знака после запятой.</p> <p>Задание 3. В праздник пирамиду в Лувре, высотой 21,65 м и длиной стороны основания 35 м, решили украсить гирляндой, натянув её от вершины до основания пирамиды. Какова должна быть наименьшая длина одной гирлянды для украшения? Ответ округлите до сотых.</p>

### **5. Информация о домашнем задании, инструктаж о его выполнении**

<p>Выводит на экран домашнее задание. Дает инструктаж по его выполнению. Отвечает на возникшие вопросы.</p>	<p>Записывают домашнее задание, задают вопросы.</p>	<p><i>Регулятивные:</i> умение самостоятельно планировать пути достижения целей</p>	
---	---	---	--

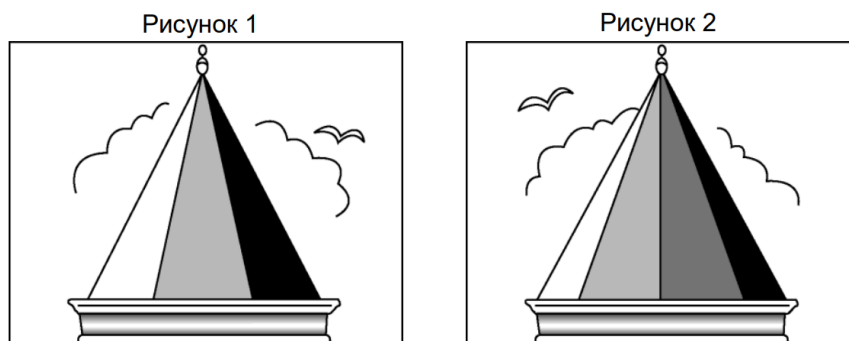
### **6. Рефлексия (подведение итогов занятия)**

<p>Объявление об анализе деятельности на уроке. Организует рефлексию и самооценку учениками собственной учебной деятельности</p> <p>Объявляет о конце занятия.</p>	<p>Анализируют деятельность на уроке. Производят самооценку учебной деятельности на уроке</p> <p>Прощаются с учителем, собирают вещи.</p>	<p><i>Регулятивные:</i> владение основами самоконтроля, самооценки.</p> <p><i>Коммуникативные:</i> умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли.</p>	
--	---	---	--

## ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Входной тест для учащихся на определение уровня их пространственных способностей

1. На рисунках 1 и 2 даны два изображения **одной и той же** башни. На рисунке 1 вы видите **три** грани крыши башни, а на рисунке 2 – **четыре** грани.



Ниже на рисунке 3 изображен вид крыши башни сверху. Кроме того, знаком (x) показаны пять различных положений наблюдателя, обозначенных P1 – P5.

С каждой из этих позиций наблюдатель может видеть несколько граней крыши башни.

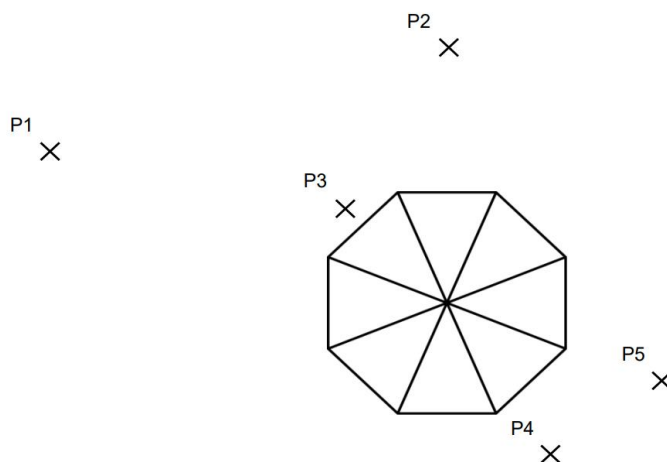
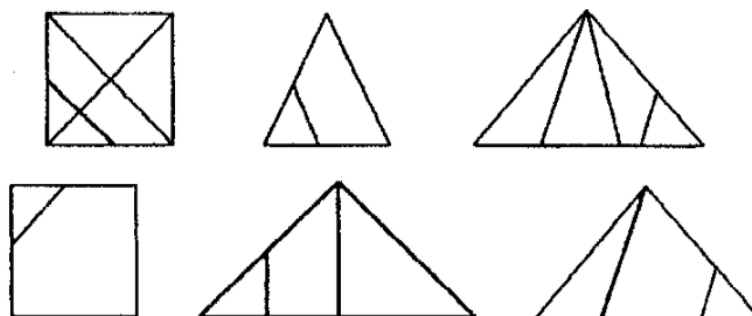


Рисунок 3

В таблице обведите число граней, которые можно видеть с каждой из этих позиций.

Позиция	Число граней, которые можно видеть с данной позиции (обведите правильное число)				
P1	1	2	3	4	более, чем 4
P2	1	2	3	4	более, чем 4
P3	1	2	3	4	более, чем 4
P4	1	2	3	4	более, чем 4
P5	1	2	3	4	более, чем 4

2. Мысленно определите, какому виду (сверху, сбоку и т.д.) соответствуют приведенные изображения, подпишите на них названия видимых вершин и точек сечения.



3. «Базовый» ассортимент производителя гаражей включает в себя модели только с одним окном и одной дверью. Дима выбирает следующую модель (рисунок 4) из «базового» ассортимента. На ней показано расположение окна и двери.

На приведённом ниже рисунке 5 показано, как разные «базовые» модели выглядят сзади. Только один из этих рисунков соответствует модели, выбранной Димой.

Какую модель выбрал Дима? Обведите А, В, С или D.



Рисунок 4

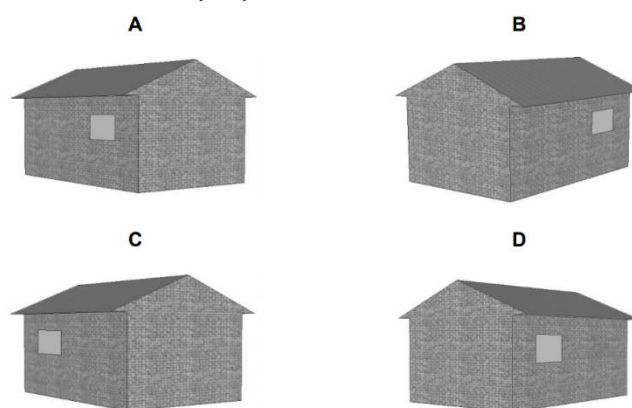


Рисунок 5

4. На рисунке 6 изображены два одинаковых квадрата. Они разбивают плоскость на четыре части. На свободном поле справа, обозначенном как рисунок 7, нарисуйте два квадрата так, чтобы они разбивали плоскость на десять частей.

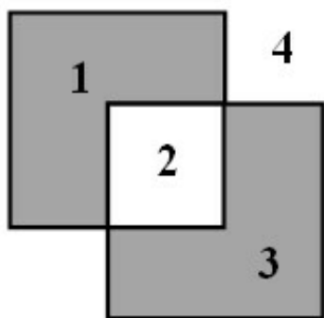
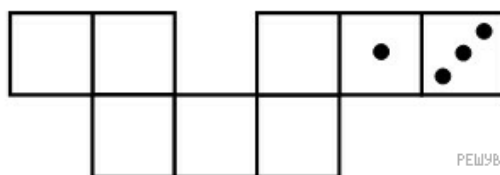


Рисунок 6

Рисунок 7

5. Игральный кубик прокатили по столу. На рисунке изображён след кубика. Отметьте на рисунке место, в котором грань с шестью точками соприкасалась со столом. Считайте, что сумма чисел на противоположных сторонах кубика равна 7.



РЕШУВ.Р.Ф

6. Когда фигуру А (рисунок 8) повернули на  $90^\circ$  против часовой стрелки относительно точки О, получилась фигура В. Нарисуйте фигуру, которая получится, если повернуть фигуру С (рисунок 9) на  $90^\circ$  против часовой стрелки относительно точки М.

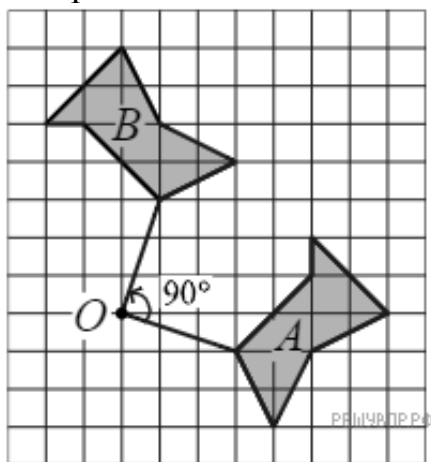


Рисунок 8

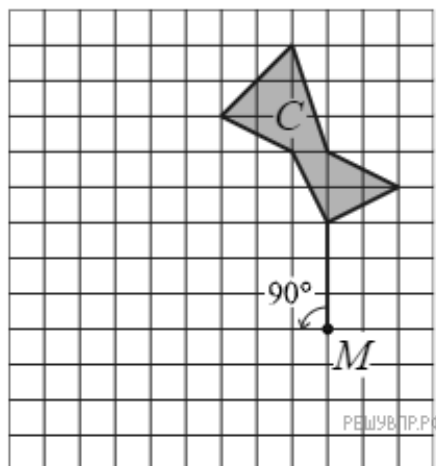


Рисунок 9

7. Сумма очков на противоположных гранях обычного игрового кубика равна 7. Например, если на грани 1 очко, то на противоположной грани 6 очков, если на грани 2 очка, то на противоположной 5 очков. На рисунке 10 изображён игровой кубик. На рисунке 13 изображён этот же кубик. Напишите на рисунке 11 число очков на грани, которая отмечена знаком вопроса.

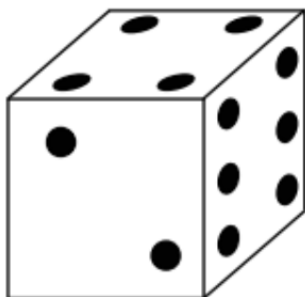


Рисунок 10

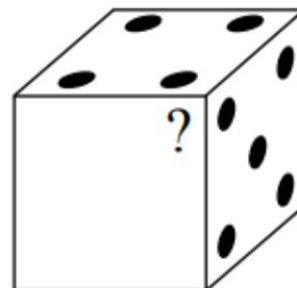


Рисунок 11

8. На нижней грани куба отмечена точка А, а на верхней – точка В (рисунок 12). На развёртке куба (рисунок 13) отмечена точка А. Отметьте на развёртке точку В.

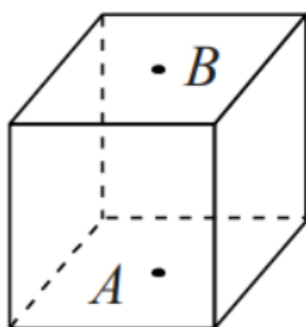


Рисунок 12

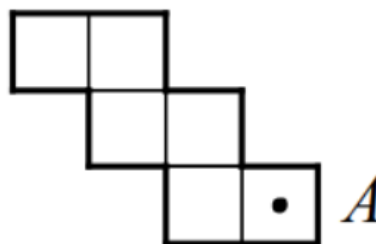
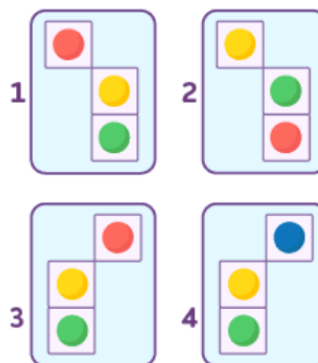
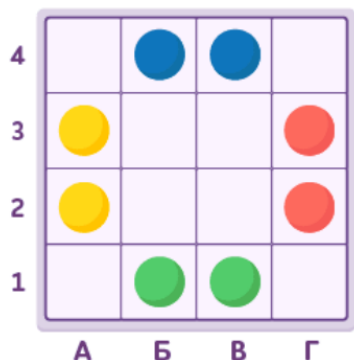
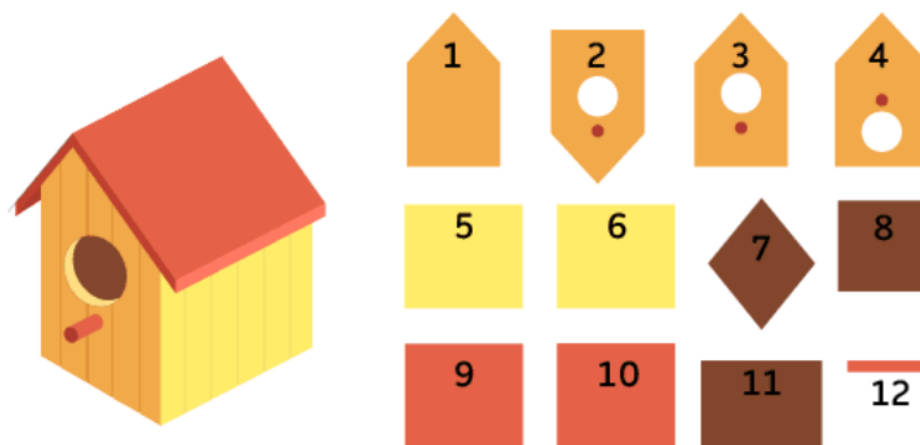


Рисунок 13

9. Какое расположение фишек (1-4) можно получить, если переставить одну фишку на любую свободную клетку?



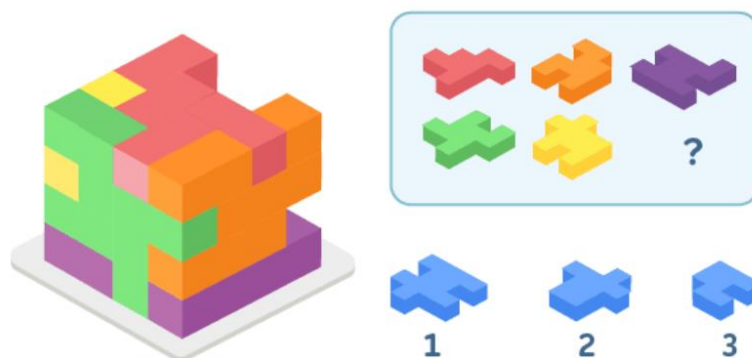
10. На рисунке изображен скворечник. Какой набор деталей был для этого использован?



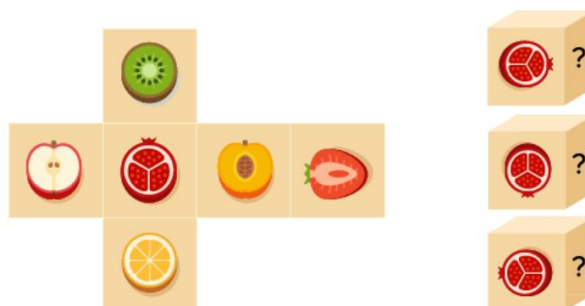
## ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Итоговый тест для учащихся на определение уровня их пространственных способностей

1. Алиса собирает кубик-головоломку. Пять деталей она уже соединила. Выберите шестой элемент, который необходимо добавить, чтобы кубик стал целым.



2. На рисунке изображен один и тот же кубик, повернутый по-разному. Посмотрите на его развертку и определите, какие фрукты спрятаны за знаком вопроса (сверху вниз). В ответ запишите последовательность фруктов.



3. На рисунке 1 изображены три круга. Они разбивают плоскость на шесть частей. На свободном поле справа, обозначенном как рисунок 2, нарисуйте три круга так, чтобы они разбивали плоскость на семь частей.

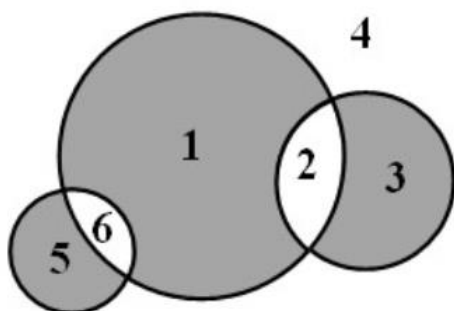


Рисунок 1

Рисунок 2



4. Сумма очков на противоположных гранях обычного игрового кубика равна 7. Например, если на грани 1 очко, то на противоположной грани 6 очков, если на грани 2 очка, то на противоположной 5 очков. На рисунке 3 изображён игровой кубик. На рисунке 4 изображён этот же кубик. Напишите на рисунке 6 число очков на грани, которая отмечена знаком вопроса.

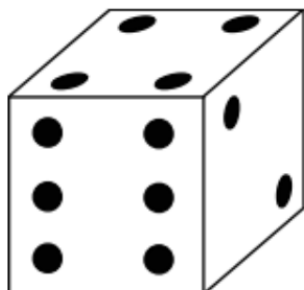


Рисунок 3

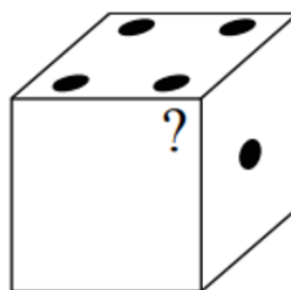


Рисунок 4

5. На рисунке 5 на клетчатой бумаге изображены фигуры, симметричные относительно изображённой прямой. Нарисуйте на рисунке 6 фигуру, симметричную заштрихованной фигуре относительно данной прямой.

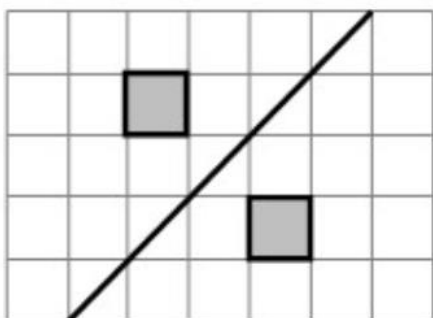


Рисунок 5

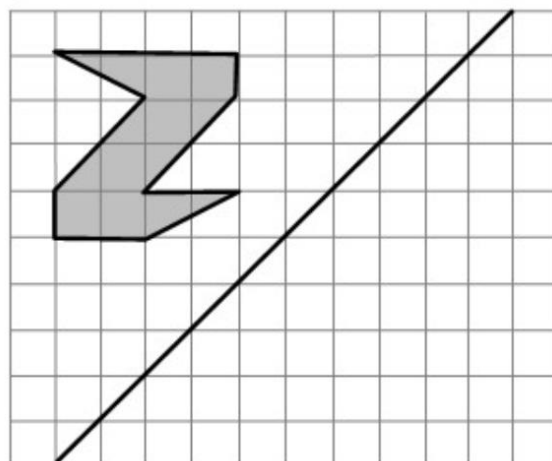
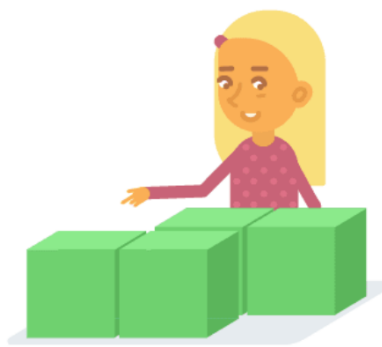
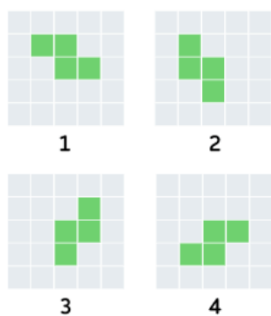


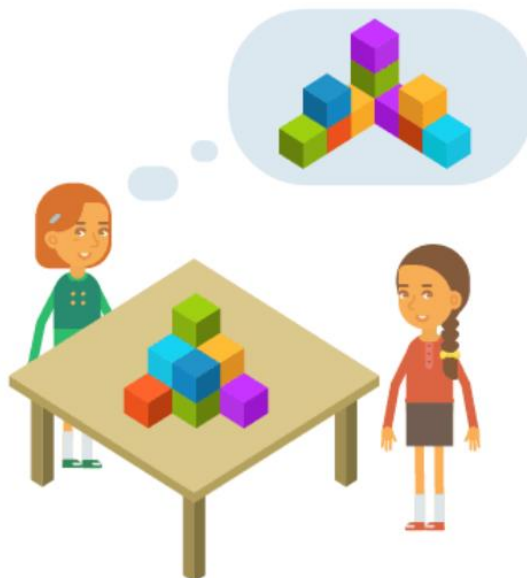
Рисунок 6

6. Перед вами фигура из кубиков. Укажите, как увидит эту фигуру девочка, если посмотрит на нее сверху.



7. На столе лежат кубики. Хватит ли их, чтобы сделать постройку, которую представляет девочка? Выберите один из вариантов ответа:

- 1) Да, один кубик даже останется.
- 2) Да, кубиков одинаковое количество.
- 3) Нет, одного кубика не хватает.
- 4) Нет, двух кубиков не хватает.



8. На нижней грани куба отмечена точка  $A$ , а на верхней – точка  $B$  (рисунок 7). На развёртке куба (рисунок 8) отмечена точка  $A$ . Отметьте на развёртке точку  $B$ .

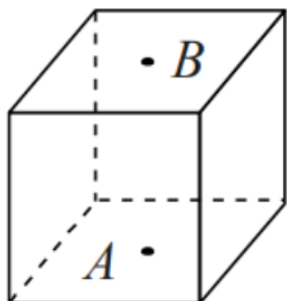


Рисунок 7

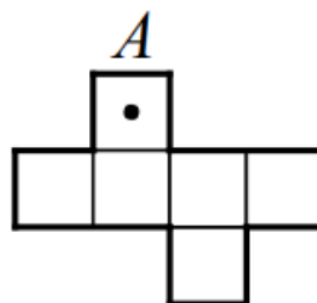
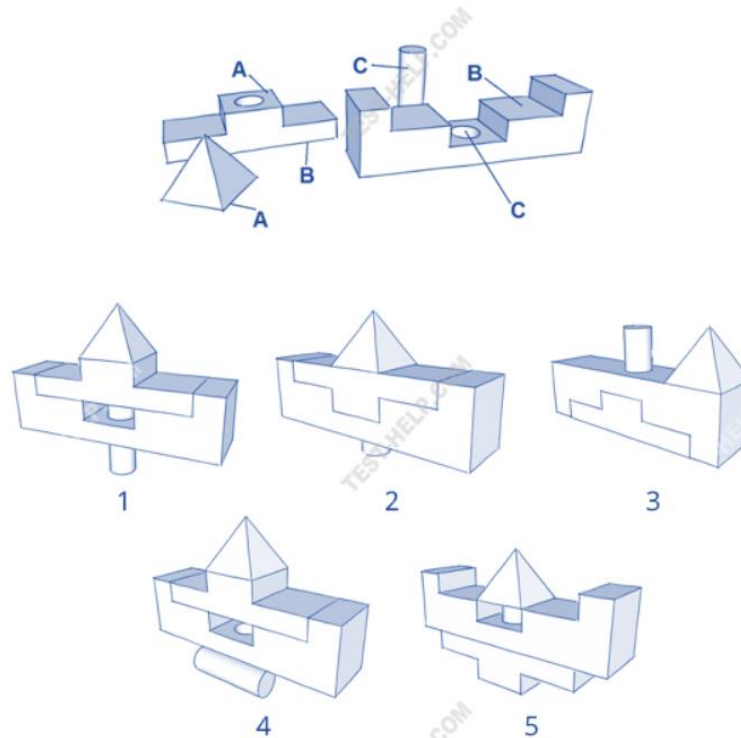


Рисунок 8

9. При правильном соединении головоломка создаст одну из следующих пяти фигур на рисунке. Обратите внимание, что стороны, которые обозначены одинаковыми буквами (А, В, С), должны соприкасаться между собой. В ответе запишите номер фигуры, которая получится в результате правильного сбора.



10. Какое изображение (1-4) является зеркальным отражением верхней фигуры? В ответе укажите номер верного отражения.

