МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методические особенности применения динамической системы GeoGebra в обучении учащихся основной школы решению уравнений и их систем с параметрами

Выпускная квалификационная работа по направлению

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность программы бакалавриата
«Математика. Информатика»

Форма обучения очная

Проверка на объем заимствований:
86 % авторского текста
Работа рекомендована к защите
«05» апреля 2023 г.
зав. кафедрой математики и МОМ
________ Звягин К.А.

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513/2045-1
Гурина Нина Юрьевна

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент кафедры МиМОМ
Нигматулин Равиль Михайлович

Челябинск
2023

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Одной из задач развития математического образования в Российской Федерации является внедрение современных информационных технологий в образовательный процесс. При активном использовании информационных технологий у учащихся повышается мотивация к обучению, уровень самостоятельности в деятельности. Кроме этого, информационные технологии позволяют обеспечить наглядность, что способствует качественному усвоению изучаемого материала [18].

В соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования в образовательном процессе предполагается использование учителями математики на своих уроках информационных технологий, в частности – динамических сред [28]. Однако в таком случае возникает проблема постоянного совершенствования методики обучения математике, выделения методических особенностей обучения с использованием компьютерных программ и разработки цифровых дидактических материалов [34].

Данной проблеме посвящены труды многих авторов: С. В. Ларина, В. И. Ярошевича, Ю. Н. Кашицыной и др. [2; 8; 11; 14; 16; 19; 35; 39]. Однако, в настоящее время наблюдается существенная нехватка опыта разработки учителями математики и применения электронных дидактических материалов на уроках по ключевым темам программы основной школы, например, по теме «Уравнения и системы уравнений».

Отметим, что уравнения и системы уравнений включены в задания как первой, так и второй части работы на основном государственном экзамене (далее – ОГЭ) [31]. Особую трудность представляют уравнения и системы уравнений с параметром, что подтверждается низким процентом выполнения этих заданий учащимися на экзамене. Например, в 2022 году по Челябинской области задание 22 (содержащее параметр), выполнили 3,63 % участников экзамена [32].

Таким образом, выделяется проблема совершенствования методики обучения решению задач с параметром с использованием информационных технологий (в частности, динамических сред) в основной школе.

Задачи с параметрами не являются отдельной темой содержания рабочей программы по математике за курс основной школы. Поэтому существенно различаются методические подходы в УМК разных авторов. Учебники содержат недостаточное количество теоретического материала и задач. Поэтому учителю сложно выбрать технологии обучения и контроля, методы и приёмы обучения [33].

При обучении решению задач с параметром учителю важно обеспечить наглядность, показать учащимся динамику изменения графиков, влияние параметра на их положение и форму. Одним из популярных и доказавших свою эффективность на уроках математики приложений является динамическая система GeoGebra [16; 38]. Однако, как показывает анализ научно-методической литературы [2; 16; 19; 35], опыт применения среды GeoGebra при решении задач с параметрами сводится к построению графиков по данным в условии задачи формулам и уравнениям и использованию лишь одного инструмента для анимации – слайдера («ползунка»). При таком подходе не используются широкие возможности для визуализации и организации интерактивного обучения, которыми обладает среда GeoGebra и образовательная платформа GeoGebra Classroom.

Выделенные выше проблемы и недостаток опыта определяют актуальность работы.

Объект исследования: процесс обучение учащихся основной школы решению уравнений и систем уравнений с параметрами.

Предмет исследования: использование интерактивных возможностей среды GeoGebra в обучении учащихся основной школы решению уравнений и систем уравнений с параметрами.

Гипотеза исследования: выявление и реализация методических особенностей использования динамической среды GeoGebra позволит эффективно организовать процесс обучения решению уравнений и систем уравнений с параметром, сформировать у учащихся умения решать уравнения, системы уравнений с параметрами.

Цель исследования: выявить методические особенности применения динамической среды GeoGebra в обучении решению уравнений и систем уравнений с параметрами, разработать в данной среде интерактивные задания для использования на уроках математики.

Задачи исследования:

1) провести анализ учебников по алгебре 8-9 классов и изучить методические подходы обучения решению уравнений и их систем с параметрами;

2) провести анализ научно-методической литературы и изучить опыт использования динамической среды GeoGebra для обучения решению уравнений и систем уравнений с параметрами в основной школе;

3) выявить методические особенности применения динамической среды GeoGebra в процессе обучения решению уравнений и их систем с параметрами;

4) разработать в среде GeoGebra интерактивные задания для обучения решению уравнений и их систем с параметрами;

5) описать методику работы с разработанными заданиями и провести апробацию.

Теоретическая значимость исследования: выявлены методические особенности применения среды GeoGebra в процессе обучения учащихся основной школы решению уравнений и их систем с параметрами.

Практическая значимость исследования: разработаны интерактивные задания в среде GeoGebra и методические рекомендации к ним, которые могут быть использованы учителями математики и студентами в период педагогической практики.

ГЛАВА 1. ОБУЧЕНИЕ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ С ПАРАМЕТРАМИ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

1.1 Методические особенности обучения решению уравнений и их систем с параметрами в основной школе

В учебном курсе «Алгебра» основной школы одно из центральных мест занимает содержательно-методическая линия «Уравнения и неравенства». На протяжении трёх лет, с 7 по 9 класс, обучающиеся знакомятся с различными видами уравнений, неравенств и их систем и методами решения. Это способствует формированию у обучающихся математического аппарата, необходимого для решения математических задач, задач смежных предметов и окружающей реальности [28].

Для выявления методических особенностей обучения решению уравнений и их систем с параметрами выделим предметные результаты освоения курса математики, закрепленные в федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования (далее – ФГОС ООО) и примерной рабочей программе [29; 28].

Предметные результаты по учебному предмету «Математика» (относящиеся к курсу «Алгебра») должны обеспечивать [28]:

– умение решать линейные и квадратные уравнения, дробно-рациональные уравнения с одной переменной, системы уравнений, умение составлять и решать уравнения и их системы;

– умение решать уравнения, неравенства и системы графическим методом;

– знакомство с уравнениями и неравенствами с параметром.

Выделим в примерной рабочей программе основного общего образования [29] умения, которые связаны с решением уравнений и систем уравнений с параметрами.

В результате освоения дисциплины за 8 класс обучающийся должен уметь:

– решать линейные уравнения с параметрами, несложные системы линейных уравнений с параметрами;

– проводить исследования уравнений и систем уравнений, в том числе с применением графических представлений (устанавливать, имеет ли уравнение или система уравнений решения, если имеет, то сколько, и пр.).

В результате освоения дисциплины за 9 класс обучающийся должен уметь:

– решать несложные квадратные уравнения с параметром;

– решать несложные системы нелинейных уравнений с параметром;

– применять методы равносильных преобразований, замены переменной, графического метода при решении уравнений 3-й и 4-й степеней;

– проводить исследования уравнений и систем уравнений, в том числе с применением графических представлений (устанавливать, имеет ли уравнение или система уравнений решения, если имеет, то сколько, и пр.).

Следует заметить, что во ФГОС ООО и в примерной рабочей программе недостаточно конкретизируются виды деятельности учащихся и предметные результаты, относящиеся к уравнениям и их системам с параметрами, несмотря на то, что задания с параметром встречаются в заданиях ОГЭ и ЕГЭ. В кодификаторе ОГЭ за 2023 год [17] выделяется отдельный блок требований «Уметь решать уравнения, неравенства и их системы» и выделены навыки, которыми должен владеть учащийся.

Для выделения методических особенностей обучения решению уравнений и систем уравнений с параметрами проведём анализ научно-методической литературы.

В статье [3] выделяется, что для эффективного обучения необходимо сосредоточить внимание обучающихся на построении логической цепочки решения уравнения. Для этого, по мнению автора, необходимо акцентировать внимание на анализе случаев ограничений параметра, а не на нахождении корней.

В работе [4] отмечается, что для обучения школьников решению уравнений и их систем с параметрами следует уделять внимание геометрической интерпретации решений, то есть использовать графический метод решения.

В.А. Далингер считает, что с помощью задач с параметром можно проверить знание обучающегося основных разделов математики, уровень математического и логического мышления и первоначальные навыки исследовательской деятельности. Обучающиеся, обладающие навыком решения задач с параметром, легче справляются и с другими задачами [10].

Также этой проблеме посвящены труды зарубежных авторов. Например, исследование, описанное в работе [40], показало, что в школьную программу необходимо включать нестандарные задачи с параметрами, для решения которых нужно не только знать алгоритмы решения уравнений, но и уметь анализировать исходные условия, подбирать и комбинировать различные методы и приёмы.

Учитывая требования ФГОС ООО [28] и результаты анализа научно-методической литературы [3; 4; 10; 39], мы выявили, что обучение решению задач с параметрами предполагает:

1) включение задач с параметрами в рабочую программу курса «Алгебра», начиная с 7 класса;

2) включение в задачи вопросов о геометрической интерпретации уравнения, взаимосвязи параметров, присутствующих в уравнении, и решения;

3) знакомство учащихся с графической интерпретацией уравнений и систем уравнений, включение заданий на построение и преобразование графиков функций, в том числе – с параметрами;

4) реализацию взаимосвязей между двумя методами: графическим и аналитическим, в процессе решения задачи.

Разрабатывая уроки с учетом выявленных методических особенностей, можно сделать процесс обучения решению уравнений и систем уравнений с параметрами систематизированным, последовательным, благодаря чему у учащихся будут формироваться прочные навыки решения таких задач. Также у учащихся будет складываться целостное представление о методах решения задач с параметрами и их взаимосвязи, что значительно расширит их возможности в решении таких задач и повысит мотивацию к обучению.

1.2 Сравнительный анализ содержательно-методической линии «Уравнения и системы уравнений с параметрами» в УМК разных авторов

Проанализируем учебно-методические комплексы (далее – УМК) Мерзляка А. Г. [6; 7; 20; 21] (углубленный уровень) и Мордковича А. Г. [24-27], рекомендованные к использованию при реализации программы основного образования, для выявления особенностей содержательно-методической линии «Уравнения и системы уравнений с параметрами».

Сравним порядок изложения интересующих нас тем и количество часов, выделяемых на их изучение в 8 классе. Результаты анализа учебника [20] представлены в Таблице 1.

Таблица 1 – Распределение содержательно-методической линии «Уравнения и системы уравнений с параметрами» в учебнике [20]

Номер пара-графа	Название параграфа	Количество часов
1	*2*	*3*
Глава 2. Рациональные выражения		
6	Основное свойство рациональной дроби	2
11	Равносильные уравнения. Уравнение – следствие. Рациональные уравнения	3
12	Рациональные уравнения с параметрами	3
15	Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график	4

Продолжение таблицы 1

1	*2*	*3*
Глава 5. Квадратные корни. Действительные числа		
26	Функция $y = x^2$ и её график	3
27	Квадратные корни. Арифметический квадратный корень	5
31	Функция $y = \sqrt{x}$ и её график	4
Глава 6. Квадратные уравнения		
32	Квадратные уравнения. Решение неполных квадратных уравнений.	4
33	Формула корней квадратного уравнения.	5
34	Теорема Виета	5
35	Квадратный трёхчлен	4
36	Решение уравнений, сводящихся к квадратным уравнениям	5

Результаты анализа учебника [24; 25] представлены в Таблице 2.

Таблица 2 – Распределение содержательно-методической линии «Уравнения и системы уравнений с параметрами» в учебнике [24]

Номер параграфа	Название параграфа	Количество часов
1	*2*	*3*
Глава 1. Алгебраические дроби		
5	Первые представления о рациональных уравнениях	2
Глава 2. Функция $y = \sqrt{x}$. Свойства квадратного корня		
17	Модуль действительного числа. Функция $y = \|x\|$.	4
Глава 3. Квадратичная функция. Функция $y = \frac{k}{x}$		
19	Функция $y = x^2$, её свойства и график.	3
20	Функция $y = \frac{k}{x}$, её свойства и график.	3
22	Функция $y = ax^2 + bx + c$, её свойства и график	5
23	Графическое решение квадратных уравнений	2
24	Дробно-линейная функция	3
25	Как построить графики функций $y = \|f(x)\|$ и $y = f(\|x\|)$	4
Глава 4. Квадратные уравнения		
27	Основные понятия	2
28	Формулы корней квадратного уравнения	4
29	Теорема Виета	3
Глава 6. Алгебраические уравнения		
39	Многочлены от одной переменной	5
40	Уравнения высших степеней	4
42	Уравнения с модулем	3
43	Иррациональные уравнения	4
44	Задачи с параметрами	6

Проведенный анализ учебников за 8 класс [20; 24; 25] показывает, что оба комплекта учебников содержат задания с параметром, но порядок изложения тем в комплектах отличается. В учебнике [20] параграфы, посвященные изучению функций $y = {}^{k}/_{x}, y = \sqrt{x}, y = ax^2 + bx + c$ расположены в разных главах, в то время как в [26] функции $y = \sqrt{x}$ выделяется глава 2 «Функция $y = \sqrt{x}$. Свойства квадратного корня», а $y = x^2, y = {}^{k}/_{x}, y = ax^2 + bx + c$ собраны в главе 3 «Квадратичная функция. Функция $y = {}^{k}/_{x}$ ». В учебнике [20] уравнения с параметром имеют отметку повышенной сложности и располагаются в конце параграфа, кроме этого выделяется параграф с уравнениями с параметрами. В учебниках [24; 25] выделен отдельный параграф «Задачи с параметром» в конце учебника. Кроме этого, количество часов, выделенных на изучение тем, содержащих задачи с параметрами, в комплектах примерно одинаковое.

Рассмотрим содержание учебников А. Г. Мерзляка [21] и А. Г. Мордковича [26; 27] за 9 класс. Результаты анализа учебника [21] представлены в Таблице 3.

Таблица 3 – Распределение содержательно-методической линии «Уравнения и системы уравнений с параметрами» в учебнике [21]

Номер параграфа	Название параграфа	Количество часов
1	*2*	*3*
Глава 1. Квадратичная функция		
2	Возрастание и убывание функции. Наибольшее и наименьшее значения функции	6
3	Чётные и нечётные функции	3
4	Построение графиков функций $y = kf(x)$ и $y = f(kx)$	4
5	Построение графиков функций $y = f(x) + b$ и $y = f(x + a)$	5
6	Построение графиков функций $y = f(\|x\|)$ и $y = \|f(x)\|$	4
7	Квадратичная функция, её график и свойства	7
Глава 2. Уравнения с двумя переменными и их системы		
10	Уравнение с двумя переменными и его график	6
11	Графические методы решения систем уравнений с двумя переменными	4

Продолжение таблицы 3

1	*2*	*3*
13	Метод замены переменных и другие способы решения систем уравнений с двумя переменными	6
Глава 4. Степенная функция		
19	Степенная функция с натуральным показателем	4
21	Определение корня $n -$ й степени	4
22	Свойства корня $n -$ й степени	7
23	Степень с рациональным показателем и её свойства	5

Результаты анализа учебника [26; 27] представлены в Таблице 4.

Таблица 4 – Распределение содержательно-методической линии «Уравнения и системы уравнений с параметрами» в учебнике [24]

Номер пара-графа	Название параграфа	Количество часов
Глава 2. Системы уравнений		
8	Уравнения с двумя переменными	4
10	Основные понятия, связанные с системами уравнений и неравенств	3
11	Методы решения систем уравнений	4
12	Однородные системы. Симметрические системы.	4
13	Иррациональные системы. Системы с модулями	4
Глава 3. Числовые функции		
19	Функции $y = x^m$ $(m \in Z)$, их свойства и графики	5
20	Функция $y = \sqrt[3]{x}$, её свойства и график	3

Из таблиц 1-4 видно, что и в учебнике [21], и в учебнике [25] вторая глава посвящена уравнениям и системам уравнений посвящают главу 2. Но нужно отметить, что А. Г. Мерзляк [21] выделяет отдельный параграф на изучение графического метода решения.

Также было замечено, что ни в одном из учебников не даётся определения понятию «параметр», учащиеся знакомятся с ним в процессе решения уравнений с параметрами.

В учебнике 8 класса [20] выделяется различие между независимой переменной x и параметром a. Приведя пример линейного уравнения $ax = 1$, автор подчеркивает, что буква x играет роль неизвестного числа, буква a

– известного числа, тогда a называют параметром, а уравнение такого вида – уравнением с параметром.

В учебнике 8 класса [24] в качестве примера приведено квадратное уравнение $x^2 - (2p + 1)x + (p^2 + p - 2) = 0$, в котором в роли коэффициентов выступают буквенные выражения. Автор вводит понятие «уравнение с параметром», а затем поясняет, что параметр – это буква.

Оба автора предлагают для решения разнообразные уравнения и системы уравнений с параметрами, однако отметим, что в учебнике [21] гораздо больше примеров задач с решениями. Кроме этого, в учебнике [21] больше внимания уделяется закреплению изученного материала: в практической части встречается большое количество примеров, аналогичных разобранным в теоретической части.

Также было замечено, что учебнике [27] лучше показана связь между аналитическим и графическим методами решения, так как приводится несколько способов решения для одного задания.

Сопоставив содержание учебников и выделенные ранее методические особенности, отметим, что в школьной программе большее внимание уделяется аналитическому методу решения. В учебниках редко встречаются задания, позволяющие установить взаимосвязь между значением параметра в уравнении и видом, расположением линии, соответствующей данному уравнению. Кроме этого, отсутствуют задания, выполнение которых предполагает использование компьютерных программ или приложений. Однако, ФГОС ООО [28] рекомендует учителям использовать на уроках компьютерные программы.

1.3 Методы решения уравнений и их систем с параметрами

В школьных учебниках и методической литературе отсутствует единое понимание понятия «параметр», и как следствие, отсутствуют единые методические подходы к обучению решения задач с параметрами.

Например, в статье [5] приводится следующее определение понятия «параметр»: «Параметр (от греческого слова parametron – отмеривающий) – величина, значение которой служат для различения некоторого множества между собой. Под областью определения уравнения $f(x;\ a) = 0$ с параметром a понимают все такие системы значений x и a, при которых $f(x;\ a)$ имеет смысл».

В работах [22; 23] под параметром понимают независимую переменную, входящую в условие задачи или появляющаяся в процессе ее решения, «управляющую» решением задачи. «Управляемость» решением задачи данной переменной заключается в том, что каждый раз необходимо указывать ответ в зависимости от значения этой переменной.

Проведенный в предыдущем параграфе анализ учебников [20; 21; 24; 25; 26; 27] показал, что авторы знакомят учащихся с параметром, приводя конкретные примеры, и не дают четкого определения понятию «параметр».

Мы возьмём за основу определение из статьи [9].

Параметр – это независимая переменная, значение которой в данной задаче считается фиксированным. В общем случае параметр является произвольным действительным числом или числом, принадлежащим заранее оговоренному множеству. При решении уравнения с параметром выделяется независимая переменная, значение которой является решением уравнения, и независимая переменная – параметр.

Задача, условие которой содержит хотя бы одну независимую переменную – параметр, называется задачей с параметром [10].

Решить уравнение (систему уравнений) с параметром в общем виде – указать, сколько и какие решения имеет уравнение (система уравнений) в зависимости от значений параметра. При этом должны быть рассмотрены все возможные значения параметра a.

В частном случае может быть поставлена задача о нахождении значений параметра a, при каждом из которых уравнение (система) имеет конкретное количество решений.

Аналогичный подход к определению задач с параметром можно увидеть в статьях [9].

Существует большое количество классификаций задач с параметрами по разным признакам [9; 26; 10]. Мы остановимся на варианте В.А. Далингера, описанном в пособии [10], в котором выделяться два класса задач с параметрами.

К первому классу относятся задачи, в которых необходимо решить уравнение или систему уравнений с параметром при всех возможных значениях параметра.

Ко второму – задачи, в которых нужно найти лишь те решения, которые удовлетворяют некоторым дополнительным условиям.

В пособиях [1; 9; 10; 33; 37] представлены разнообразные методы решения задач с параметрами. Чаще всего выделяют два основных: аналитический и графический. Многие задачи могут быть решены комбинированным методом, то есть на разных этапах решения задачи могут быть использованы различные методы.

Используя литературу [33; 36; 15; 10; 30], охарактеризуем два основных метода.

Аналитический метод. Иногда аналитический метод называют методом прямого решения, при котором повторяются стандартные действия, применяемые для решения уравнений (систем уравнений) в задачах без параметра. Решение аналитическим методом часто включает выполнение равносильных преобразований (возведение в нечетную степень обеих частей уравнения, применение формул сокращенного умножения, разложение на множители и др.), то есть замену одного уравнения (системы уравнений) равносильным. Также при решении аналитическим методом часто применяется приём «дробления», когда задача разделяется на совокупность более простых задач. Например, выражение с модулями заменяется на совокупность выражений без модулей [10].

Анализ, проведённый ранее, показал, что именно аналитическим методом решается большинство задач с параметрами в школьных учебниках.

Графический метод. В зависимости от того, какая роль отводится параметру в задаче, выделяют два основных графических метода: первый – построение графиков уравнений и систем уравнений в плоскости xOy, второй – в плоскости xOa [30].

В первом случае исходное уравнение $F(x,a)=0$ необходимо привести к виду $g(x)=f(x,a)$ и построить в плоскости xOy график функции $y=g(x)$. Функция $y=f(x,a)$ задаёт семейство кривых, зависящих от значения параметра a, которые получаются из кривой $y=f(x)$ с помощью элементарных преобразований (параллельного переноса вдоль осей, растяжения и сжатия, наложения модуля и др.). Нужно учитывать области определения функций $y=g(x)$, $y=f(x,a)$ и возможные ограничения на значения параметр a. Построив график уравнения $g(x)=f(x,a)$, можно найти точки пересечения графиков функций. Абсциссы точек пересечения будут являться корнями исходного уравнения.

Во втором случае строят график исходного уравнения $F(x,a)=0$. В некоторых случаях в исходном уравнении можно выделить функции вида $a=f(x)$ и построить их графики в координатной плоскости xOa. Тогда каждому значению параметра a соответствует горизонтальная прямая (параллельная оси Ox). Количество решений уравнения равно количеству точек пересечения графика уравнения с такой прямой при соответствующем значении a.

Аналогичные приёмы используют и в случае систем уравнений:

$$\begin{cases} F(x,a)=0, \\ G(x,a)=0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} F(x,a)=0, \\ g(x)=0. \end{cases}$$

Для этого строят графики уравнений и интерпретируют их взаимное расположение на плоскости xOy в зависимости от значения параметра и условий задачи.

Графический метод в некоторых случаях может существенно облегчить решение задач с параметром. Также данный метод обладает высокой степенью наглядности [13]. Однако, иногда графический метод требует аналитических действий, например, при нахождении «плохих» координат точек пересечения кривых.

Проиллюстрируем решение задач с параметрами аналитическим, графическим и комбинированным методами. Мы разработали примеры на основе заданий из школьных учебников [20; 21; 25; 27]. Для каждого примера приведены решения разными методами. Это позволяет подчеркнуть связь между аналитическим и графическим методами решения и показать, что в некоторых случаях графический метод требует меньшего количества вычислений и значительно упрощает решение.

Пример 1

При каких значениях параметра a уравнение

$$|x^2 - 4x + 3| + x - a = 0$$

имеет три корня?

Решение:

1. *Графический метод.*

Будет решать это уравнение графически в осях координат xOa.

Преобразуем уравнение к виду $a = f(x)$ и получим:

$$a = x + |x^2 - 4x + 3|.$$

Построим график этой функции.

Раскрыв модуль, получим кусочно-заданную функцию:

$$a = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, \text{если } x \le 1 \text{ или } x \ge 3, \\ -x^2 + 5x - 3, \text{если } 1 < x < 3. \end{cases}$$

Построим параболы на соответствующих промежутках (рисунок 1):

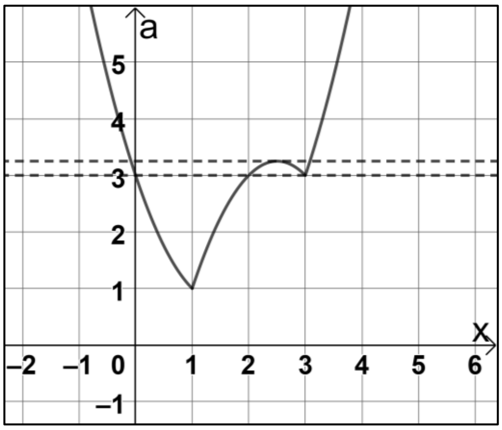


Рисунок 1 – График функции к примеру 1

Каждому значению параметра a соответствует горизонтальная прямая (параллельная оси Ox). Количество решений уравнения равно количеству точек пересечения графика уравнения с такой прямой при соответствующем значении a.

Проанализировав график и изобразив ключевые положения прямой $a = 3$ и $a = 3{,}25$ (прямая проходит через вершину параболы), находим значения параметра a, при которых прямая имеет с графиком функции три общие точки. Следовательно, исходное уравнение имеет три решения только при $a = 3$ и $a = 3{,}25$. В остальных случаях количество общих точек прямой и графика функции не равно трём.

2. *Комбинированный метод*

Уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-4x+3\ge 0,\\ x^2-3x+3-a=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-4x+3<0,\\ x^2-5x+3+a=0.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le 1,\\ x\ge 3,\end{array}\right.\\ x^2-3x+3-a=0,\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}1<x<3,\\ x^2-5x+3+a=0.\end{cases} & (2)\end{array}\right.$$

Рассмотрим систему (1).

График функции $y = x^2 - 3x + 3 - a$ – парабола с вершиной в точке $(1{,}5; 0{,}75 - a)$, ветви которой направлены вверх.

Корни уравнения $x^2 - 3x + 3 - a = 0$ – это абсциссы точек пересечения параболы и оси Ox.

Выделим три случая.

1 случай. Система (1) имеет одно решение и квадратное уравнение имеет одно решение, тогда вершина параболы лежит на оси Ox в одном из промежутков $x \leq 1, x \geq 3$.

Однако, $x_{\text{в}} = 1{,}5 \notin (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

Значит, такое расположение параболы невозможно.

2 случай. Система (1) имеет одно решение, а квадратное уравнение имеет два корня, тогда у параболы будет два нуля, один из которых в промежутках $x \leq 1$ или $x \geq 3$ (рисунок 2).

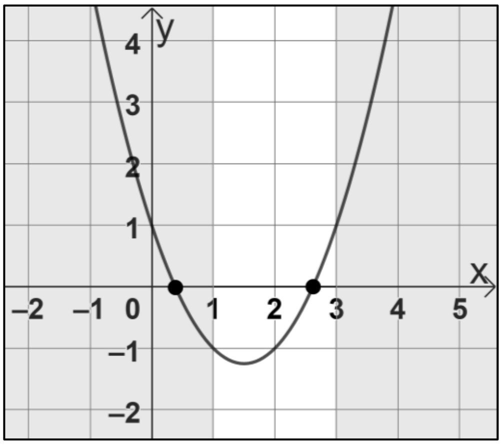


Рисунок 2 – Пример расположения параболы к случаю 2

Тогда выполняется система:

$$\begin{cases} D > 0, \\ f(1) \cdot f(3) < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 3 > 0, \\ (1 - a) \cdot (3 - a) < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0{,}75, \\ 1 < a < 3. \end{cases} \Leftrightarrow 1 < a < 3.$$

Рассмотрим граничные случаи, когда $a = 1$ или $a = 3$.

При $a = 1$ получим уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$, корнями которого будут $x_1 = 2$ и $x_2 = 1$.

$x_1 \notin (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$, $x_2 \notin (-\infty; 1]$.

Тогда при $a = 1$ система (1) имеет одно решение.

При $a = 3$ получим уравнение $x^2 - 3x + 4 = 0$, не имеющее решений, так как $D = -7 < 0$.

Следовательно, при $a \in (1; 3)$ система (1) имеет одно решение.

3 случай. Система (1) имеет два решения, тогда у параболы будет два нуля, каждый из которых в промежутках $x \leq 1$ или $x \geq 3$ (рисунок 3).

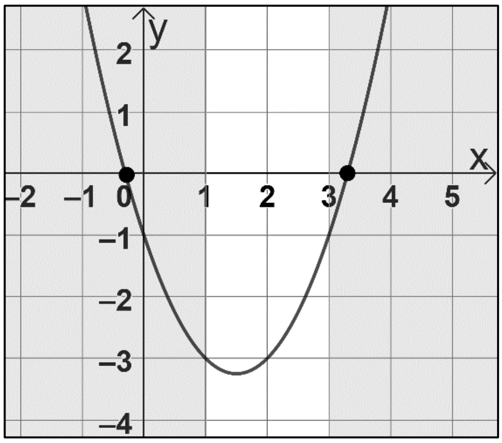


Рисунок 3 – Пример расположения параболы к случаю 3

Тогда справедлива система:

$$\begin{cases} D > 0, \\ f(1) \leq 0, \\ f(3) \leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 + 4a > 0, \\ 1 - a \leq 0, \\ 3 - a \leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0{,}75, \\ a \geq 1, \\ a \geq 3. \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 3.$$

Значит, что при $a \in [3; +\infty)$ система (1) имеет два корня.

Рассмотрим систему (2).

График функции $y = x^2 - 5x + 3 + a$ – парабола с вершиной в точке $(2{,}5; a - 3{,}25)$, ветви которой направлены вверх. Корни уравнения $x^2 - 5x + 3 + a = 0$ – это абсциссы точек пересечения параболы и оси Ox.

Рассмотрим 3 случай расположения параболы.

1 случай. Система (2) имеет одно решение и квадратное уравнение имеет одно решение, тогда вершина параболы лежит на оси Ox на промежутке $1 < x < 3$.

$$\begin{cases} D = 0, \\ 1 < x_{\text{в}} < 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13 - 4a = 0, \\ 1 < 2{,}5 < 3. \end{cases} \Leftrightarrow a = 3{,}25.$$

Значит, при $a = 3{,}25$ система (2) имеет 1 решение.

2 случай. Система (2) имеет одно решение, а квадратное уравнение имеет два корня, тогда у параболы будет два нуля, один из которых в промежутке $1 < x < 3$ (рисунок 4).

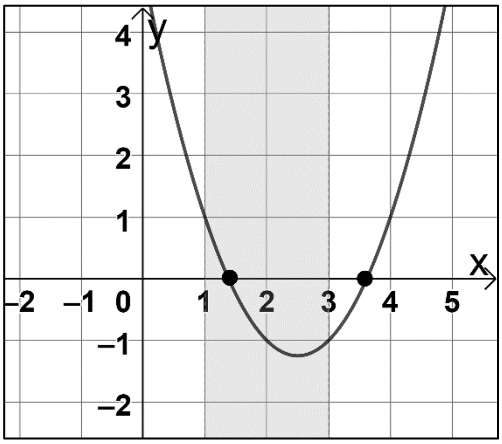


Рисунок 4 – Пример расположения к случаю 2

$$\begin{cases} D > 0, \\ f(3) \leq 0, \\ f(1) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13 - 4a > 0, \\ -3 + a \leq 0, \\ a - 1 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 3{,}25, \\ a \leq 3, \\ a > 1. \end{cases} \Leftrightarrow 1 < a \leq 3.$$

Следовательно, при $a \in (1; 3]$ система (2) имеет 1 корень.

3 случай. Система (2) имеет два решения, тогда у параболы будет два нуля, каждый из которых в промежутке $1 < x < 3$ (рисунок 5).

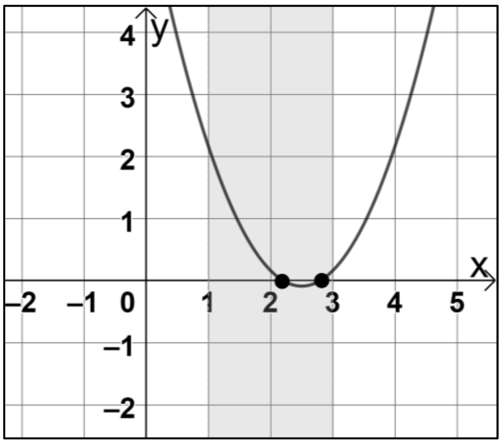


Рисунок 5 – Пример расположения параболы к случаю 3

В таком случае справедливо:

$$\begin{cases} D > 0, \\ f(3) > 0, \\ f(1) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13 - 4a > 0, \\ a - 3 > 0, \\ a - 1 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 3{,}25, \\ a > 3, \\ a > 1. \end{cases} \Leftrightarrow 3 < a < 3{,}25.$$

Таким образом, при $a \in (3; 3{,}25)$ система (2) имеет 2 решения.

В итоге, исходная уравнение имеет три корня при $a = 3$ и $a = 3{,}25$.

Ответ: $a = 3; 3{,}25$.

Аналогичные задачи имеются в учебнике [21] и приведены в Приложении А. Их решение предполагает рассмотрение случаев раскрытия модуля и расположения параболы и прямой (прямых), поэтому может опираться на решение примера 1.

Пример 2

При каких значения параметра a уравнение

$$(a-2x-x^2+1)(a-|x-1|+|x+1|)=0$$

имеет три корня?

Решение:

1. *Графический метод*

Уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} a-x^2-2x+1=0, \\ a-|x-1|+|x+1|=0. \end{array}\right.$$

Будет решать исходное уравнение графически в осях координат xOa.

Преобразуем каждое уравнение в совокупности к виду $a=f(x)$ и получим две функции:

$$a=x^2+2x-1,$$

$$a=|x-1|-|x+1|.$$

Построим графики этих функции.

График $a=x^2+2x-1$ – парабола с вершиной в точке $(-1;-2)$, ветви которой направлены вверх.

Раскрыв модули, получим кусочно-заданную функцию:

График $a=|x-1|-|x+1|$.

$$a=\begin{cases} 2, \text{если } x\le -1, \\ -2x, \text{если } -1<x<1, \\ -2, \text{если } x>1. \end{cases}$$

Построим параболу и прямые на соответствующих промежутках (рисунок 6):

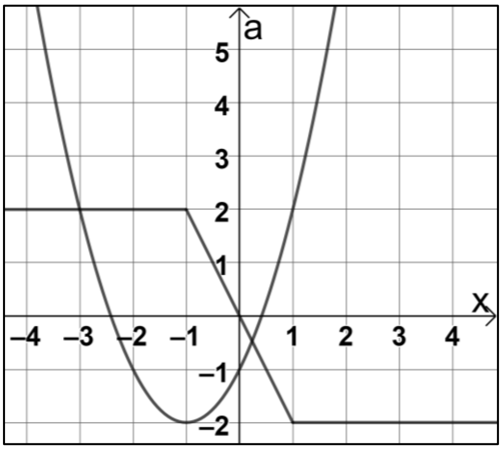


Рисунок 6 – График функции к примеру 2

Каждому значению параметра a соответствует горизонтальная прямая (параллельная оси Ox). Количество решений уравнения равно количеству точек пересечения графиков функций с такой прямой при соответствующем значении a.

Проанализировав график и изобразив ключевые положения прямой $a = 2$, $a = -2$ и $a = 4 - 2\sqrt{5}$ (точка пересечения графиков функций), находим значения параметра a, при которых прямая имеет с графиком функции три общие точки. Следовательно, исходное уравнение имеет три решения только при $a \in (-2; 2)$ и $a = 4 - 2\sqrt{5}$. В остальных случаях количество общих точек прямой и графика функции не равно трём.

2. *Аналитический метод*

Перейдём от уравнения к совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} a - 2x - x^2 + 1 = 0, \qquad (3) \\ a - |x - 1| + |x + 1| = 0. \qquad (4) \end{array}\right.$$

Решим уравнение (3).

$$a - 2x - x^2 + 1 = 0;$$

$$x^2 + 2x - a - 1 = 0;$$

$$D = 8 + 4a.$$

Тогда если $a = -2$, то уравнение имеет один корень $x = -1$.

Если $a > -2$, то уравнение имеет два корня:

$$x_1 = -1 + \sqrt{2 + a}; x_2 = -1 - \sqrt{2 + a}$$

Решим уравнение (4).

$$a - |x-1| + |x+1| = 0$$

Рассмотрим все случаи раскрытия модуля.

1) $x \le -1$:

$$a + x - 1 - x - 1 = 0;$$

$$0 \cdot x = 2 - a;$$

$$a = 2.$$

Значит, при $a = 2$ уравнение имеет бесконечно много решений, а при остальных a не имеет решений.

2) $-1 < x < 1$:

$$a + x - 1 + x + 1 = 0;$$

$$a + 2x = 0;$$

$$x_3 = -\frac{a}{2};$$

$$-2 < a < 2.$$

Значит, при $a \in (-2; 2)$ уравнение имеет 1 решение.

3) $x \ge 1$:

$$a - x + 1 + x + 1 = 0;$$

$$0 \cdot x = 2 + a;$$

$$a = -2.$$

Значит, при $a = -2$ уравнение имеет бесконечно много решений, а при остальных a не имеет решений.

Рассмотрим случаи, когда решения уравнений (3) и (4) совпадают.

1) $x_1 = -1 + \sqrt{2+a}$ и $x_3 = -{}^{a}/_{2}$, при $-2 < a < 2$.

$$-1 + \sqrt{2+a} = -\frac{a}{2};$$

$$\sqrt{8+4a} = 2 - a;$$

$$a^2 - 8a - 4 = 0;$$

$$D = 80;$$

$$a_1 = 4 + 2\sqrt{5} \text{ и } a_2 = 4 - 2\sqrt{5}.$$

Однако, $a_1 > 2$, значит корни x_1 и x_3 совпадают при $a_2 = 4 - 2\sqrt{5}$

2) $x_2 = -1 - \sqrt{2+a}$ и $x_3 = -{}^{a}\!/_{2}$ при $-2 < a < 2$.

Аналогично корни x_2 и x_3 совпадают при $a_2 = 4 - 2\sqrt{5}$.

Следовательно, при $a = 4 - 2\sqrt{5}$ решения уравнений (3) и (4) совпадают. Значит, исходное уравнение имеет одно решение.

В итоге, исходное уравнение имеет три корня при

$$a \in \left(-2; 4 - 2\sqrt{5}\right) \cup \left(4 - 2\sqrt{5}; 2\right).$$

Ответ: $\left(-2; 4 - 2\sqrt{5}\right) \cup \left(4 - 2\sqrt{5}; 2\right)$

Аналогичные задачи имеются в учебниках [20; 21] и приведены в Приложении А. Их решение тоже предполагает построение графиков функций в системе координат xOa и нахождение подходящих положений прямой, параллельной оси Ox, поэтому может опираться на решение примера 2.

Часто задачи решаются комбинированным методом. Приведем примеры решения.

Пример 3

При каких значениях параметра a система имеет три решения?

$$\begin{cases} |x| + |y| = 4, \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = (a-1)^2. \end{cases}$$

Решение:

График уравнения $|x| + |y| = 4$ – квадрат с вершинами в точках $(0; 4), (0; 4), (-4{,}0), (0, -4)$, а стороны лежат на прямых:

$$l_1: x - y - 4 = 0;$$

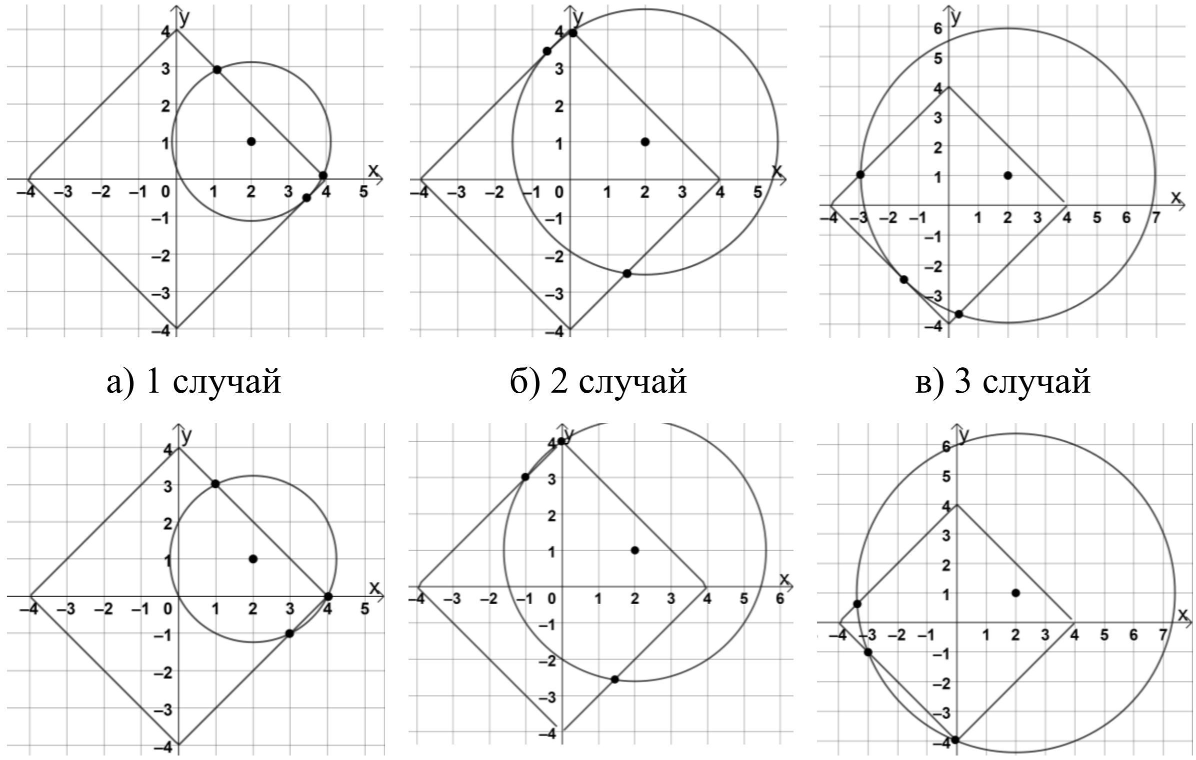
$$l_2: x - y + 4 = 0;$$

$$l_3: x + y + 4 = 0;$$

$$l_4: x + y - 4 = 0.$$

График уравнения $(x-2)^2 + (y-1)^2 = (a-1)^2$ – окружность ω с центром в точке С $(2; 1)$ и радиусом $R = |a - 1|$.

Решением системы будут координаты точек пересечения графиков уравнений. Изобразим случаи, когда система имеет три решения, то есть ромб и окружность имеют 3 точки пересечения (рисунок 7).



а) 1 случай б) 2 случай в) 3 случай

г) 4 случай д) 5 случай е) 6 случай

Рисунок 7 – Подходящие расположения окружности для примера 2

Рассмотрим каждый случай отдельно и найдём все подходящие значения параметра a.

1 случай. Окружность ω касается прямой l_1 и пересекает прямую l_4 в двух точках (рисунок 7а)

Тогда $\rho(\mathrm{C}, l_1) = R$.

Воспользуемся формулой расстояния от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $l: Ax + By + C = 0$:

$$\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Получим:

$$R = \rho(C, l_1) = \frac{3}{\sqrt{2}};$$

$$|a-1| = \frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$a_1 = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}, \qquad a_2 = 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

2 случай. Окружность ω касается прямой l_2 и пересекает прямые l_3 и l_4 (рисунок 7б).

Тогда $\rho(\mathrm{C}, y_2) = R$.

Аналогично случаю 1 получим:

$$R = \rho(C, l_2) = \frac{5}{\sqrt{2}};$$

$$|a-1| = \frac{5\sqrt{2}}{2};$$

$$a_3 = 1 + \frac{5\sqrt{2}}{2}, \qquad a_4 = 1 - \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

3 случай. Окружность ω касается прямой l_3 и пересекает прямые l_1 и l_2 (рисунок 7в).

Тогда $\rho(\mathrm{C}, y_3) = R$.

Аналогично случаю 1 получим:

$$R = \rho(C, l_3) = \frac{7}{\sqrt{2}};$$

$$|a-1| = \frac{7\sqrt{2}}{2};$$

$$a_5 = 1 + \frac{7\sqrt{2}}{2}, \qquad a_6 = 1 - \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

4 случай. Окружность ω проходит через точку $(4;0)$ и пересекает прямые l_1 и l_4 (рисунок 7г).

Тогда координаты точки удовлетворяют уравнению окружности.

$$(0-4)^2 + (0-1)^2 = (a-1)^2;$$

$$(a-1)^2 = 17;$$

$$a_9 = 1 + \sqrt{17}; a_{10} = 1 - \sqrt{17}.$$

5 случай. Окружность ω проходит через точку $(0;4)$ и пересекает прямые l_1 и l_2 (рисунок 7д).

Аналогично случаю 4 получаем:

$$(0-2)^2+(4-1)^2=(a-1)^2;$$

$$(a-1)^2=13;$$

$$a_7=1+\sqrt{13}, \qquad a_8=1-\sqrt{13}.$$

6 случай. Окружность ω проходит через точку $(0;-4)$ и пересекает прямые l_2 и l_3 (рисунок 7е)

Аналогично случаю 4 получаем:

$$(0-2)^2+(-4-1)^2=(a-1)^2;$$

$$(a-1)^2=29;$$

$$a_{11}=1+\sqrt{29}, \qquad a_{12}=1-\sqrt{29};$$

Ответ: $1\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}, 1\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}, 1\pm\frac{7\sqrt{2}}{2},\ 1\pm\sqrt{13}, 1\pm\sqrt{17}, 1\pm\sqrt{29}.$

Аналогичные задачи имеются в учебниках [21; 27] и приведены в приложение А. Их решение предполагает рассмотрение случаев расположения двух линий: параболы или квадрата и окружности, поэтому может опираться на решение примера 3.

Пример 4

При каких значениях параметра a система имеет два решения?

$$\begin{cases} y=|2x-a|-3, \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$$

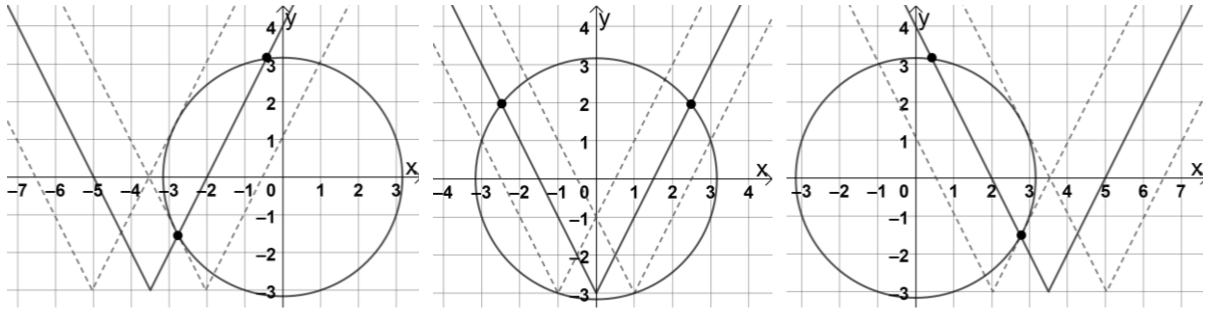
Решение:

График функции $y=|2x-a|-3$ – это два луча с общим началом в точке $(0{,}5a;-3)$, которые образуют «уголок». Левый луч лежит на прямой $l_1: 2x+y-a+3=0$, правый – $l_2: -2x+y+a+3=0$.

График уравнения $x^2+y^2=10$ – это окружность ω с центром в точке $\mathrm{C}(0;0)$ и радиусом $R=\sqrt{10}$.

Исходная система имеет два решения, когда окружность ω имеет с «уголком» две общие точки.

Изобразим все подходящие случаи и для каждого из них вычислим значения параметра a (рисунок 8).



а) 1 случай б) 2 случай в) 3 случай

Рисунок 8 – Подходящие случаи расположения «уголка» для примера 3

1 случай. Правый луч «уголка» пересекает окружность ω в двух точках, левый луч не имеет общих точек с окружностью ω (рисунок 8а).

Используя геометрическую интерпретацию, сравниваем расстояния от центра окружности до прямых и получаем систему

$$\begin{cases} \rho(C, l_1) < R, \\ \rho(C, l_2) > R. \end{cases}$$

Воспользуемся формулой расстояния от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $l: Ax + By + C = 0$:

$$\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Получим:

$$\rho(C, l_1) = \frac{|-a-3|}{\sqrt{5}}, \rho(C, l_2) = \frac{|-a+3|}{\sqrt{5}}.$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{|-a-3|}{\sqrt{5}} < \sqrt{10}, \\ \dfrac{|-a+3|}{\sqrt{5}} > \sqrt{10}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5\sqrt{2} - 3 < a < 5\sqrt{2} - 3, \\ \left[\begin{array}{l} a < 3 - 5\sqrt{2}, \\ a > 5\sqrt{2} + 3. \end{array} \right. \end{cases}$$

Изобразим промежутки на координатной прямой (рисунок 9):

Рисунок 9 – Координатная прямая к случаю 1

Таким образом, при $a \in (-5\sqrt{2}-3; 3-5\sqrt{2})$ система имеет два решения.

2 случай. Вершина уголка (точка $(0{,}5a; -3)$) находится внутри круга $x^2+y^2<10$, каждый из лучей пересекает окружность в одной точке (рисунок 8б).

В этом случае, абсцисса вершины «уголка» должна находиться в промежутке $(-1; 1)$. Значит, абсцисса вершины «уголка» удовлетворяет неравенству: $-1 < 0{,}5a < 1$.

Следовательно, при $a \in (-2; 2)$ система имеет два решения.

3 случай. Левый луч «уголка» пересекает окружность ω в двух точках, правый луч не имеет общих точек с окружностью ω (рисунок 8в).

Аналогично случаю 1 получаем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{|-a-3|}{\sqrt{5}} > \sqrt{10}, \\ \dfrac{|-a+3|}{\sqrt{5}} < \sqrt{10}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < -3-5\sqrt{2}, \\ a > 5\sqrt{2}-3, \end{array}\right. \\ 3-5\sqrt{2} < a < 5\sqrt{2}+3. \end{cases}$$

Изобразим полученные промежутки на координатной прямой (рисунок 10):

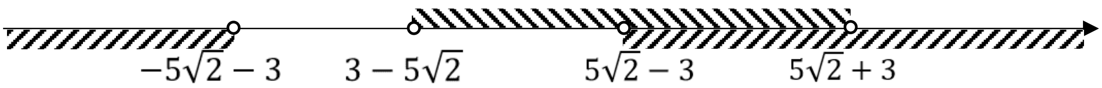


Рисунок 10 – Координатная прямая к случаю 3

Итак, система имеет два решения при $a \in (5\sqrt{2}-3; 5\sqrt{2}+3)$.

Объединяя промежутки из всех рассмотренных случаев, получаем ответ.

Ответ: $\left(-5\sqrt{2}-3; 3-5\sqrt{2}\right) \cup (-2; 2) \cup \left(5\sqrt{2}-3; 5\sqrt{2}+3\right)$.

Аналогичные задачи имеются в учебниках [21; 27] и приведены в Приложении А. Их решение предполагает рассмотрение схожих случаев расположения двух линий: окружности или параболы и прямой (прямых), поэтому может опираться на решение примера 3.

Пример 5

При каких значениях параметра k уравнение

$$\left|\frac{x+1}{x}\right| - kx = 0$$

имеет три корня?

Решение:

Рассмотрим уравнение при $k = 0$.

Тогда исходное уравнение примет следующий вид:

$$\left|\frac{x+1}{x}\right| = 0,$$

$$x = -1.$$

Таким образом, при $k = 0$ исходное уравнение имеет единственный корень $x = -1$.

Пусть $k \neq 0$. Раскрыв модуль, получим совокупность систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left|\frac{x+1}{x}\right| \geq 0, \\ \frac{x+1}{x} - kx = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{x+1}{x} < 0, \\ \frac{x+1}{x} + kx = 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq -1, \\ x \geq 0. \end{array}\right. \\ kx^2 - x - 1 = 0, \\ x \neq 0, \end{cases} & (5) \\ \begin{cases} -1 < x < 0, \\ kx^2 + x + 1 = 0, \\ x \neq 0. \end{cases} & (6) \end{array}\right.$$

Рассмотрим систему (5).

График функции $y = kx^2 - x - 1$ $(k \neq 0)$ – парабола с выколотой точкой $(0; -1)$. Корни уравнения $kx^2 - x - 1 = 0$ – это абсциссы точек пересечения параболы и оси Ox.

Значит, система (5) имеет столько решений, сколько нулей имеет параболы лежит в промежутках $x \leq -1, x \geq 0$.

Рассмотрим все возможные случаи.

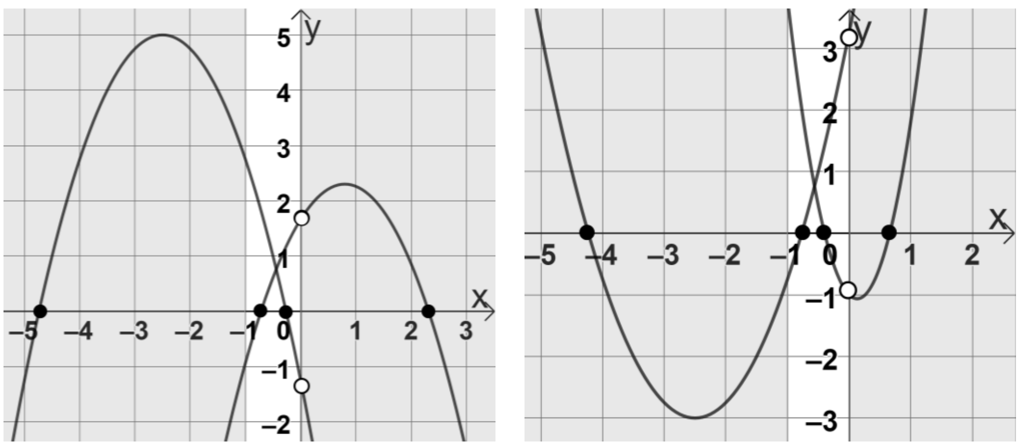
1 случай. Система (5) имеет одно решение и квадратное уравнение имеет одно решение, тогда вершина параболы лежит на оси Ox в одном из промежутков $x \leq -1, x \geq 0$.

Тогда перейдем к системе:

$$\begin{cases} D = 0, \\ \left[\begin{array}{l} x_{\text{в}} > 0, \\ x_{\text{в}} \le -1. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4k = 0, \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2k} > 0, \\ \dfrac{1}{2k} \le -1. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\dfrac{1}{4}, \\ \left[\begin{array}{l} k > 0, \\ -0{,}5 \le k < 0. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}.$$

Следовательно, при $k = -0{,}25$ система (3) имеет 1 корень.

2 случай. Система (5) имеет одно решение, а квадратное уравнение – два корня, тогда у параболы будет два нуля, один из которых в промежутках $x \le -1, x \ge 0$ (рисунок 11).



а) при $k > 0$ б) при $k < 0$

Рисунок 11 – Возможные расположения параболы

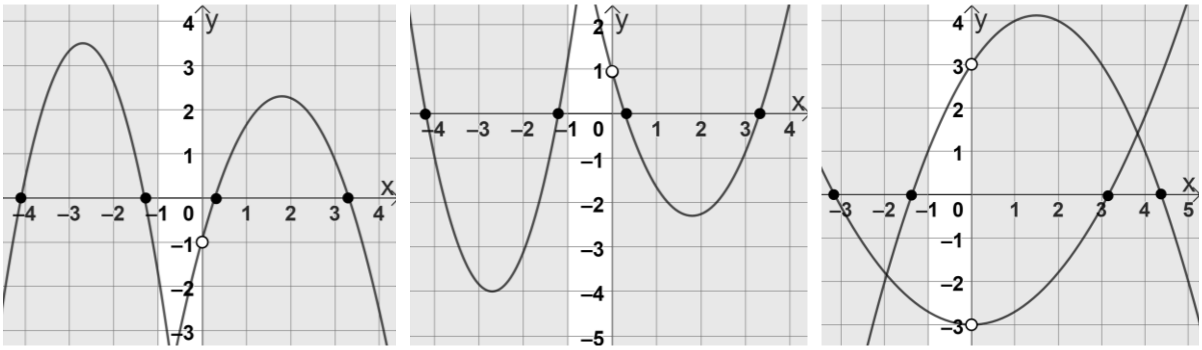
Тогда выполняется одна из систем:

$$\begin{cases} k > 0, \\ D > 0, \\ f(-1) \cdot f(0) < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0, \\ k > -\dfrac{1}{4}. \end{cases} \Leftrightarrow k > 0.$$

$$\begin{cases} k < 0, \\ D > 0, \\ f(-1) \cdot f(0) < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < 0, \\ D > 0, \\ k > 0. \end{cases}$$

Таким образом, система (5) имеет одно решение при $k \in (0; +\infty)$.

3 случай. Система (5) имеет два решения, тогда у параболы будет два нуля, каждый из которых в промежутках $x \le -1$ или $x \ge 0$ (рисунок 12).



а) $k > 0$, оба нуля в промежутке $x > 0$ или в промежутке $x < -1$

б) $k < 0$, оба нуля в промежутке $x > 0$ или в промежутке $x < -1$

в) один ноль лежит в промежутке $x < -1$, другой – х > 0

Рисунок 12 – Примеры расположения параболы к случаю 3 примера 4

Анализируя расположение параболы при $k > 0$, когда оба нуля параболы лежат или в промежутке $x < -1$, или в промежутке $x > 0$, получаем системы (рисунок 12а):

$$\begin{cases} k > 0, \\ D > 0, \\ x_{\text{в}} < -1, \\ f(-1) > 0, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} k < 0, \\ D > 0, \\ x_{\text{в}} < -1, \\ f(-1) < 0. \end{cases}$$

Сравнивая полученные системы, заменим их равносильной:

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_{\text{в}} < -1, \\ k \cdot f(-1) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{2k} < -1, \\ k^2 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < 0.$$

Аналогично при $k < 0$, когда оба нуля параболы лежат или в промежутке $x < -1$, или в промежутке $x > 0$, получаем (рисунок 12б):

$$\begin{cases} k > 0, \\ D > 0, \\ x_{\text{в}} > 0, \\ f(0) > 0, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} k < 0, \\ D > 0, \\ x_{\text{в}} > 0, \\ f(0) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0, \\ x_{\text{в}} > 0, \\ k \cdot f(0) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{2k} > 0, \\ k < 0. \end{cases}$$

Аналогично, когда один ноль параболы лежит в промежутке $x < -1$, а другой – в промежутке $x > 0$, получим (рисунок 12в):

$$\begin{cases} k > 0, \\ D > 0, \\ f(-1) < 0, \\ f(0) < 0, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} k < 0, \\ D > 0, \\ f(-1) > 0, \\ f(0) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0, \\ f(0) \cdot f(-1) > 0, \\ k \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -\dfrac{1}{4}, \\ k < 0, \\ k \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ -\frac{1}{4} < k < 0.$$

Следовательно, система (5) имеет ровно два решения при $k \in \left(-\frac{1}{4}; 0\right)$.

Рассмотрим систему (6).

График функции $y = kx^2 + x + 1$ $(k \neq 0)$ – парабола с выколотой точкой $(0; -1)$. Корни уравнения $kx^2 + x + 1 = 0$ – абсциссы точек пересечения параболы и оси Ox.

Аналогично случаю 1: система (6) имеет столько решений, сколько нулей параболы лежит в промежутке $-1 < x < 0$.

Рассмотрим все возможные случаи.

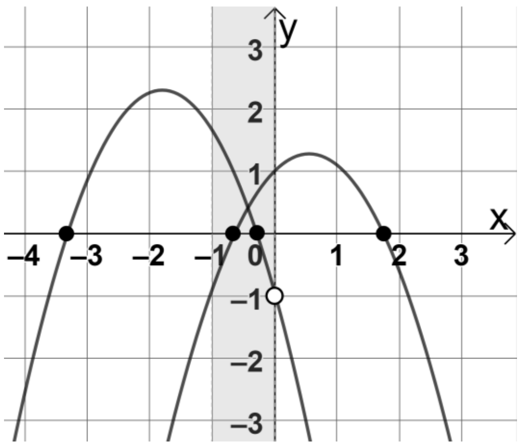
1 случай. Вершина параболы лежит на оси Ox и в промежутке $-1 < x < 0$.

В таком случае справедлива система:

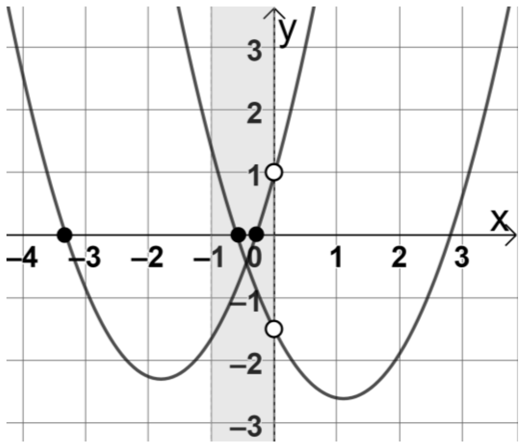
$$\begin{cases} D = 0, \\ -1 < x_{\text{в}} < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4k = 0, \\ -1 < -\dfrac{1}{2k} < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{1}{4}, \\ k > 0{,}5. \end{cases}$$

Такое расположение параболы невозможно.

2 случай. Система (6) имеет одно решение, квадратное уравнение – два корня, тогда у параболы будет два нуля, один из которых лежит в промежутке $-1 < x < 0$ (рисунок 13).



а) $k > 0$



б) $k < 0$

Рисунок 13 – Пример расположения параболы для случая 2 системы (4)

Анализируя расположение параболы при $k > 0$, получим систему:

$$\begin{cases} k > 0, \\ D > 0, \\ f(0) \cdot f(-1) < 0. \end{cases}$$

Аналогично при $k < 0$:

$$\begin{cases} k < 0, \\ D > 0, \\ f(0) \cdot f(-1) < 0. \end{cases}$$

Сравнивая полученные системы, перейдём к равносильной:

$$\begin{cases} k \neq 0, \\ D > 0, \\ f(0) \cdot f(-1) < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0, \\ k < \dfrac{1}{4}, \\ k < 0. \end{cases} \Leftrightarrow k < 0.$$

Следовательно, при $k \in (-\infty; 0)$ система имеет 1 решение.

3 случай. Система (6) имеет два решения, тогда у параболы будет два нуля, каждый из которых лежит в промежутке $-1 < x < 0$.

Рассуждая по аналогии с предыдущими случаями, приходим к системам:

$$\begin{cases} k > 0, \\ D > 0, \\ -1 < x_в < 0, \\ f(-1) > 0, \\ f(0) > 0, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} k < 0, \\ D > 0, \\ -1 < x_в < 0, \\ f(-1) < 0, \\ f(0) < 0. \end{cases}$$

Сравнивая их, получаем равносильную систему:

$$\begin{cases} k \neq 0, \\ D > 0, \\ -1 < x_в < 0, \\ f(-1) \cdot f(0) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0, \\ k < \dfrac{1}{4}, \\ -1 < -\dfrac{1}{2k} < 0, \\ k > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < k < \dfrac{1}{4}, \\ k > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Следовательно, система (6) в этом случае не может иметь ровно два решения.

Сопоставляя разобранные случаи, исходное уравнение имеет 3 корня при $k \in (-0{,}25; 0)$.

Ответ: $(-0{,}25; 0)$.

Аналогичные задачи приведены в Приложении А. Их решение предполагает раскрытие модуля и рассмотрение всех возможных случаев расположения графика функции и оси Ox, поэтому может опираться на решение примера 4.

На разобранных примерах мы показали, что уравнения и системы уравнений с параметрами можно решать различными методами, но благодаря визуализации решения графический метод понятнее и требует меньшего количества вычислений.

ГЛАВА 2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ GEOGEBRA ПРИ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ С ПАРАМЕТРАМИ

2.1 Методические особенности применения GeoGebra на уроках математики

Труды многих педагогов посвящены теме использования компьютерных программ в обучении решению задач с параметром. Авторы отмечают, что использование современных средств информационных технологий в обучении значительно экономит время на уроке, обеспечивает наглядность, повышает динамику подачи и усвоения материала. На данный момент к школьному курсу математики адаптированы программы: «Живая математика», «Математика на компьютерах», «Математический конструктор», «Desmos» и «GeoGebra». Наиболее широко используемой динамической средой является «GeoGebra», так как бесплатна, доступна на как на ПК, так и на мобильных телефонах, а также обладает широким функционалом [38].

В работе [19] продемонстрировано, как можно эффективно использовать возможности динамической среды GeoGebra как на этапе обучения, так и на этапе контроля знаний. Анимационные возможности GeoGebra позволяют не просто визуализировать решение алгебраических и геометрических задач, но и проследить, как изменение параметра влияет на вид линий и решение. Это дает учащемуся сделать вывод о влиянии параметра, развивает умение осуществлять анализ и синтез при решении задачи, формируя таким образом исследовательские навыки.

В статье [14] описывается возможности использования системы динамической геометрии «GeoGebra». Кроме этого, автор считает, что методически целесообразно начинать обучение решению уравнений с параметром в 7 классе, показывая учащимся как аналитические, так и графические методы решения.

В статье [2] отмечаются, что в процессе подготовки учащихся к решению задач с параметрами важно проводить исследовательские работы с графиками различных функций для изучения их расположения в зависимости от коэффициентов. Организовать эту работу можно с использованием «GeoGebra».

В статье [16] отмечается, что задания, решение которых включает применение среды GeoGebra, не должно давать учащимся возможность получить ответ, используя только динамический чертёж и не выполняя дополнительных вычислений, так как цель применения GeoGebra – научить учащихся решать задания без цифровых инструментов.

В работе [34] утверждается, что различные недостатки динамических систем, например, ограниченная точность изменения с помощью виртуальных инструментов, некорректность работы инструментов и др., можно использовать для постановки заданий на вскрытие зрительных иллюзий. Это позволит предупредить «экспериментально – технических разрыв».

Вопросу использования динамической среды GeoGebra посвящены также работы зарубежных авторов [41; 42; 43]. Например, в 2019 году было проведено исследование [42], которое показало, что использование GeoGebra оказало положительное влияние на процесс обучения учащихся, но динамическая система GeoGebra не учитывала их индивидуальные возможности. Поэтому авторы считают, что применение GeoGebra в математическом образовании может давать различные результаты. Также исследование, описанное в статьи [40], показало, что самая частая проблема учащихся, возникающая в процессе применения динамической среды, это низкий уровень владения инструментами динамической среды GeoGebra.

Учитывая особенности обучения решению уравнений и систем уравнений с параметрами, рассмотренные в параграфе 1.1, а также опыт применения динамической среды GeoGebra на уроках математики [2; 14; 16;

19; 34], мы выявили, что использование GeoGebra в процессе обучения решению задач с параметрами должно *предполагать*:

1. *Внедрение апплетов начиная с 7 класса при изучении линейной функции и графическом решении систем линейных уравнений, в том числе – с параметрами*. Учащиеся научатся применять графический метод решения на простых примерах и в будущем смогут применить свои умения при решении более сложных примеров.

2. *Активное использование в апплетах анимации, динамических чертежей с возможностью выполнять преобразования графиков и дополнительные построения.* Благодаря этому в процессе выполнения задания у обучающихся будут формироваться наглядные представления о влиянии параметра на график уравнения, которые позволят в будущем решать задачи с параметрами без использования динамической среды.

3. *Реализацию взаимосвязей между двумя способами: графическим и аналитическим, в процессе решения задачи с использованием апплета.* Поэтому апплеты, разработанные в GeoGebra, должны содержать различные вопросы, которые будут мотивировать учащихся задуматься, как связаны графики уравнений, полученные при построении, и коэффициенты в исходном уравнении.

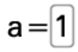
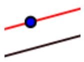
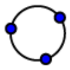
4. *Целенаправленный выбор инструментов и функционала, доступных обучающимся в апплете.* Необходимо оставлять доступными только те инструменты, которые необходимы для решения конкретной задачи. Такое ограничение позволит целенаправленно сформировать у обучающихся навыки, необходимые для решения задач с параметрами без использования динамической среды.

5. *Организацию совместного с учащимся визуального контроля в онлайн и офлайн форматах*. Это позволит быстро увидеть трудности учащихся, выделить типичные ошибки, сравнить различные варианты решения одного задания и выбрать наиболее оптимальный.

6. *Полноту и целостность решения задачи с параметрами в апплете.* Каждый апплет включает в себя рабочее поле и систему дополняющих друг друга вопросов, связанных как с аналитическим, так и с графическим методом решения.

Реализация выявленных методических особенностей использования динамической системы GeoGebra предлагает использование инструментов платформы GeoGebra Classroom [12]. Инструменты, которые мы использовали для создания апплетов, представлены в Таблице 5.

Таблица 5 – Некоторые инструменты GeoGebra

	Инструмент «Окно ввода» даёт учащимся возможность самостоятельно строить графики функций, которые необходимы для выполнения конкретного задания.
	Инструмент «Перемещать» даёт возможность перемещать объекты на полотне.
	«Прямая» для построения прямой по двум точкам. Чтобы воспользоваться данным инструментов, учащемуся необходимо поставить на рабочем поле две точки, через которые будет проведена прямая.
	«Параллельная прямая» Для построения параллельной прямой учащемуся необходимо выбрать точку, через которую будет проведена прямая, и прямую, параллельно которой необходимо провести новую.
	«Окружность по трём точкам» Чтобы построить окружность по трем точкам, учащемуся необходимо поставить точки на поле построения, через которые будет проведена окружность.
	«Окружность по центру и точке» Чтобы построить окружность по центру и радиусу, учащемуся необходимо поставить точку – центр окружности и указать точку, лежащую на окружности.
	«Точка»

При разработке интерактивных заданий использование виртуальной платформы GeoGebra Classroom позволяет сохранять все возможности GeoGebra и дополнять основные задания вопросами в тестовой и развернутой формах, а также в режиме онлайн отправлять учащимся задания, задавать вопрос и осуществлять контроль выполнения в режиме реального времени.

Один из вариантов использования платформы GeoGebra Classroom на уроках математики – это создание урока (LESSON). У учителя есть возможность создать набор заданий в формате ACTIVITY или BOOK и задать его учащимся с возможностью отслеживания процесса выполнения заданий в режиме реального времени.

Рассмотрим инструкцию по созданию урока (LESSON):

1. Откройте созданное задание (систему заданий) в формате BOOK или ACTIVITY и нажать на кнопку «ASSIGN» в правом верхнем углу страницы (рисунок 14).

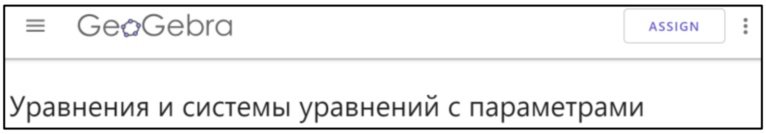


Рисунок 14 – Фрагмент экрана создания урока (LESSON)

2. Выберите, на какой платформе учащиеся будут выполнять задания: GeoGebra Lesson или Google Classroom (рисунок 15).

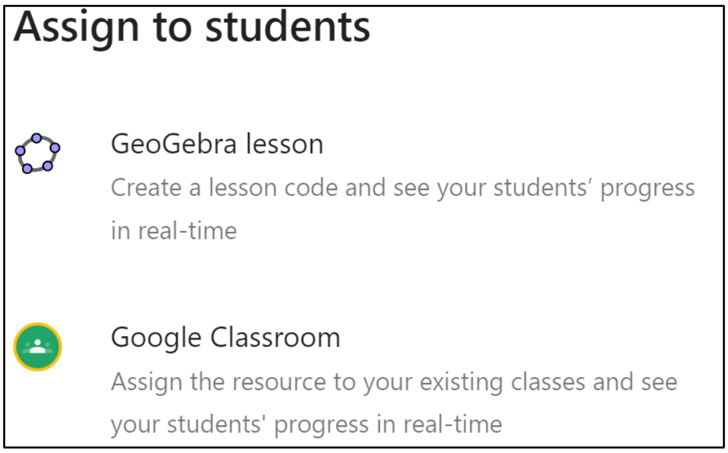


Рисунок 15 – Выбор платформы для выполнения заданий

3. Дайте название классу и нажмите на кнопку «CREATE» для создания (рисунок 16).

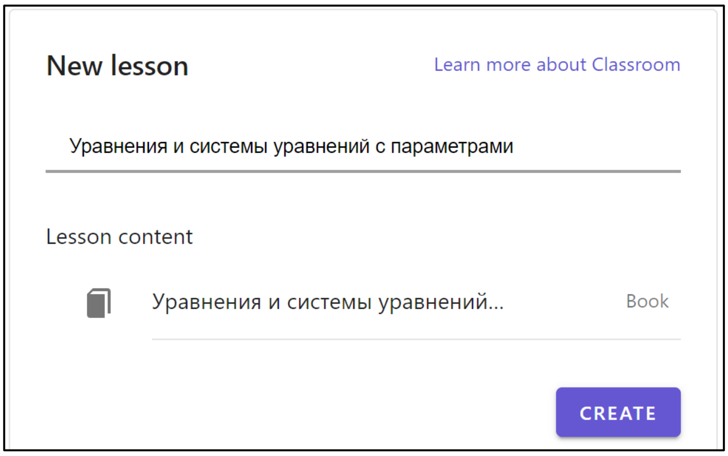


Рисунок 16 – Фрагмент экрана при создании урока (LESSON)

4. Для созданного вами класса будет сгенерированы ссылка и код для входа, которые необходимо отправить учащимся, чтобы они смогли приступить к выполнению заданий (рисунок 17).

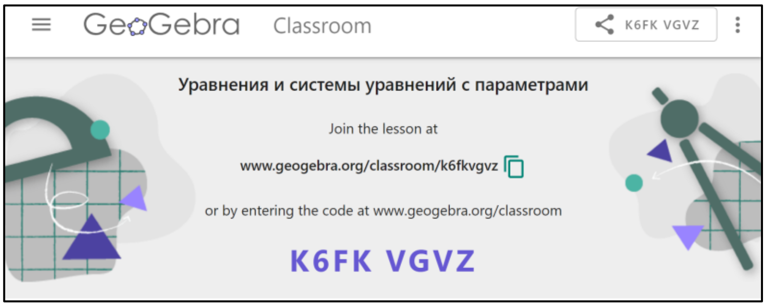


Рисунок 17 – Фрагмент обзорного экрана учителя

После создания урока (LESSON) в аккаунте учителя появляется обзорный экран.

Когда учащиеся войдут в созданный класс, их имена отобразятся на обзорном экране учителя. Учитель может посмотреть, сколько студентов начали выполнять задания и на каком этапе выполнения они находятся.

Перейдя в раздел «Lesson Overview» можно увидеть имена всех учащихся с количеством выполненных заданий (рисунок 18).

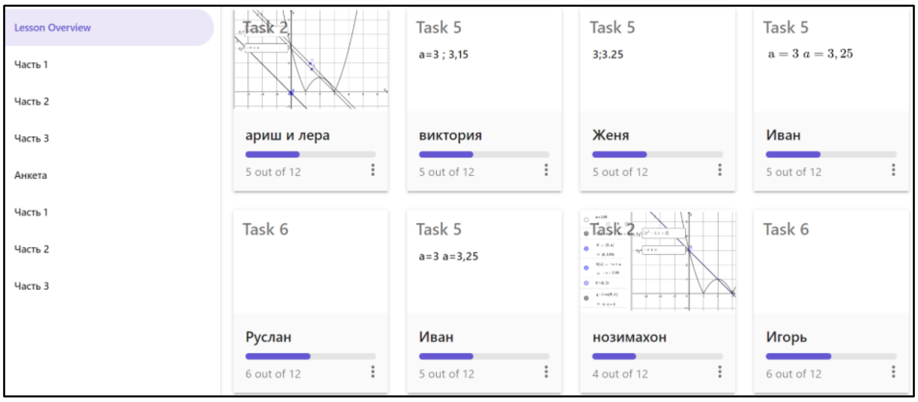


Рисунок 18 – Результаты прохождения урока учащимися

Чтобы посмотреть, как учащиеся выполнили конкретную задачу, необходимо на странице этой задачи нажать на кнопку «DETAILS». Изображения апплетов обновляются в режиме онлайн, что позволяет отслеживать процесс решения заданий учащимися в режиме реального времени (рисунок 19).

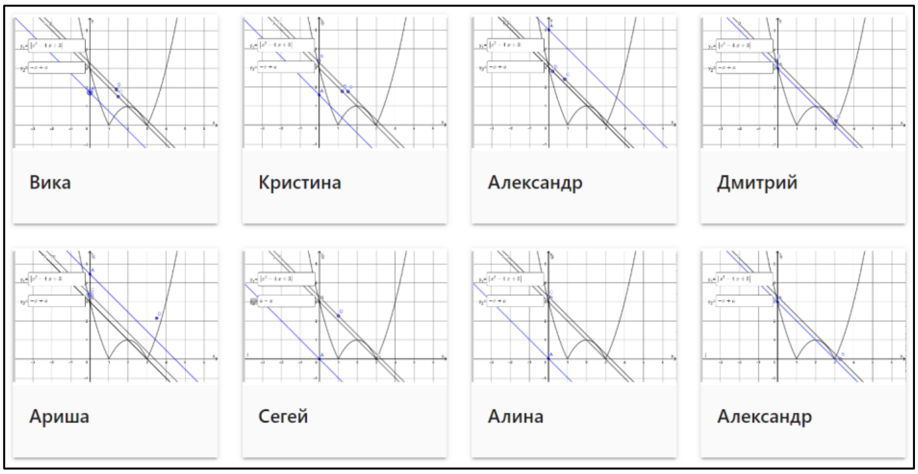


Рисунок 19 – Результаты выполнения задания учащимися

Выбрав вопрос открытого типа, учитель сможет посмотреть ответы всех учащихся (рисунок 20).

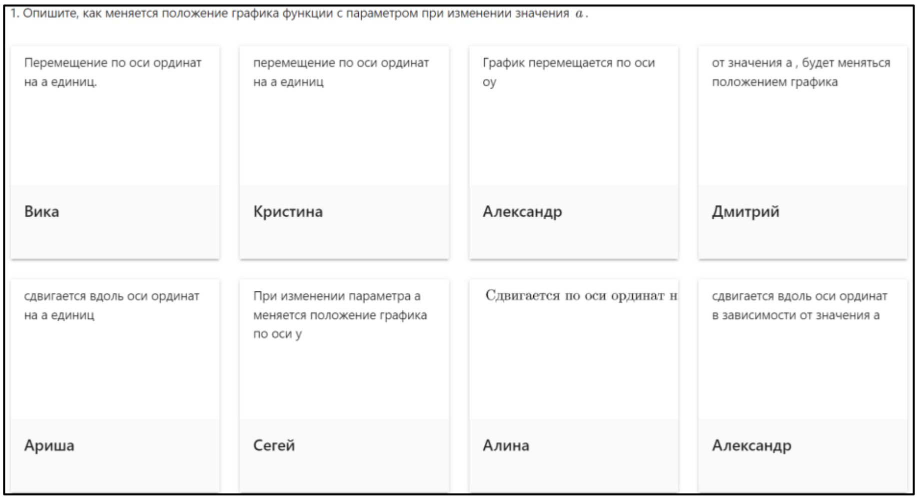


Рисунок 20 – Фрагмент ответов учащихся на открытый вопрос

У учителя есть возможность приостановить работу учащихся. Для этого нужно нажать на «PAUSE» в правом верхнем углу на главной странице. Данная возможность полезна в случае, если на выполнение задания отведено ограниченное количество времени. Для восстановления доступа к заданиям необходимо нажать на кнопку «RESUME».

Отметим, что GeoGebra Classroom удобно использовать как инструмент дистанционного обучения в качестве самостоятельной платформы или в комплексе с такими сервисами, как Microsoft Teams.

Использование рассмотренных возможностей динамической системы GeoGebra и образовательной платформы GeoGebra Classroom позволяет реализовать выявленные методические особенности обучения решению уравнений и систем уравнений с параметрами. Разработка и использование апплетов GeoGebra позволяет сделать обучение интерактивным, создать условия для визуализации, эффективно организовать процесс обучения и сформировать у учащихся умения решать уравнения, системы уравнений с параметрами.

2.2 Разработка заданий в GeoGebra Classroom

Используя инструменты, описанные выше, и учитывая выделенные методические особенности использования GeoGebra в процессе обучения решению задач с параметрами, мы разработали на платформе GeoGebra Classroom апплеты теме «Уравнения и системы уравнений с параметрами», которые могут быть использованы в процессе обучения учителями математики.

Апплеты состоят из нескольких частей, каждая из которых содержит задания, нацеленные на формирование или проверку уровня сформированности определенного навыка.

Чтобы обеспечить динамику чертежей, мы использовали инструменты, описанные выше: «окно ввода», «перемещение», «построение прямой по двум точкам», «построение параллельной прямой», «построение окружности по трем точкам», «построение окружности по центру и радиусу», «точка».

Опишем процесс работы учащегося с апплетами более подробно.

Пример 1

При каких значениях параметра a уравнение

$$|x^2 - 4x + 3| + x - a = 0$$

имеет три корня?

Апплет создан для обучения учащихся решению уравнений с параметром графическим методом в системе xOy. Он состоит из трех частей, каждая из которых направлена на формирование определенного навыка учащегося. В процессе выполнения задания учащийся строит графики функций на рабочем поле GeoGebra; анализируя взаимное расположение графиков, отвечает на вопросы, затем выполняет вычисления. Остановимся подробнее на деятельности учащегося в процессе выполнения апплетов.

Перейдя по ссылке, отправленной учителем, учащийся переходит на страницу первой части апплета. Описание элементов первой части и деятельности учащегося представлено в Таблице 6.

Таблица 6 – Первая часть апплета к примеру 1

Элементы первой части апплета: – текстовое поле с заданием (рисунок 21); – инструкция (рисунок 22); – открытый вопрос (рисунок 23).	
Деятельность учащегося	*Результаты*
Учащийся знакомится с инструкцией по работе апплетом и вводит в поле ответа на первый вопрос уравнение: $\lvert x^2 - 4x + 3\rvert = -x + a$.	Анализируя исходное уравнение и используя наглядные представления, учащийся определит, какие функции будет легче построить в плоскости xOy.

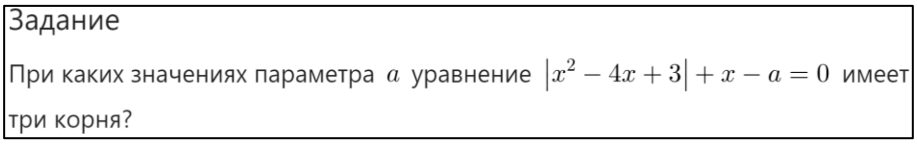


Рисунок 21 – Текстовое поле с заданием к примеру 1

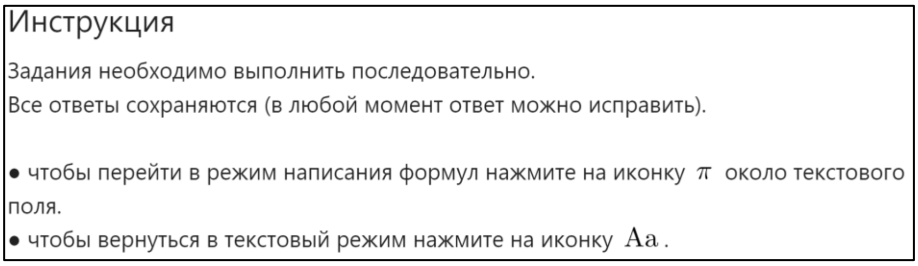


Рисунок 22 – Инструкция по работе с апплетом

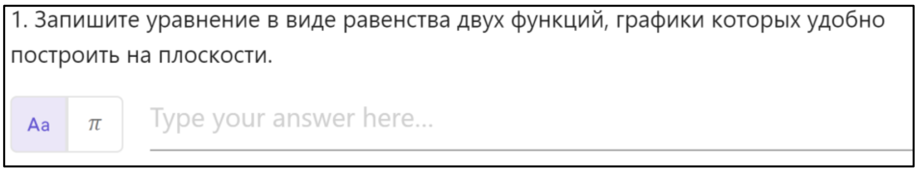


Рисунок 23 – Открытый вопрос к первой части примера 1

После заполнения первой части апплета учащийся приступает ко второй части. Элементы второй части и деятельность учащегося представлены в Таблице 7.

Таблица 7 – Вторая часть апплета к примеру 1

<table>
<tr><td colspan="2">Элементы второй части:
– текстовое поле с пояснениями (рисунок 24);
– инструкция к рабочему листу (рисунок 25);
– рабочий лист GeoGebra: графическое полотно с системой координат xOy и двумя окнами для ввода функций (рисунок 26а);
– три открытых вопроса (рисунок 27).</td></tr>
<tr><td>Деятельность учащегося</td><td>Результаты</td></tr>
<tr><td>Учащийся знакомится с инструкцией к рабочему листу GeoGebra.
Вписывает в окно ввода функции $y_1 = |x^2 - 4x + 3|$ и $y_2 = -x + a$.
Далее с помощью мыши, зажав точку А, двигает прямую $y_2 = -x + a$.
После пробных действий на графическом полотне, учащийся читает дополнительные вопросы.</td><td>Учащийся выяснит, как меняется расположение графика функции в зависимости от параметра.</td></tr>
<tr><td>В поле ответа к вопросу 1 вводит «график функции сдвигается по оси Oy на a единиц или вверх, или вниз».
Отвечая на вопрос 2, учащийся выполняет построения на рабочем поле, используя инструмент «прямая» либо «параллельная прямая» учащийся изображает ключевые положения (рисунок 26б).
Далее учащийся определяет приближенные значения параметра a, используя чертеж, полученные при выполнении предыдущих заданий.</td><td>Применит знания о преобразованиях графиков функций и проанализирует изменения расположения графика функции с параметром на рабочем поле.
Определит, как изменится расположение графика функции $y = -x + a$ при изменении параметра a.
Определит, сколько точек пересечений могут иметь графики полученных функций в зависимости от значений параметра a.
Выделит ключевые положения.</td></tr>
</table>

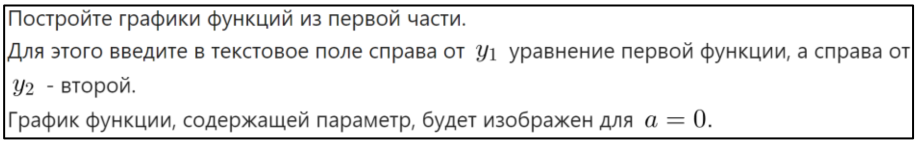


Рисунок 24 – Фрагмент второй части апплета с пояснениями

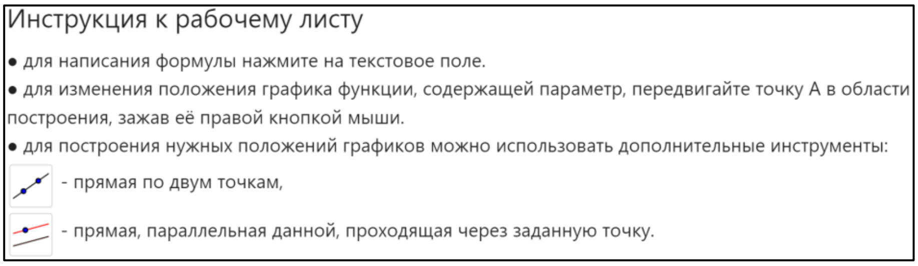
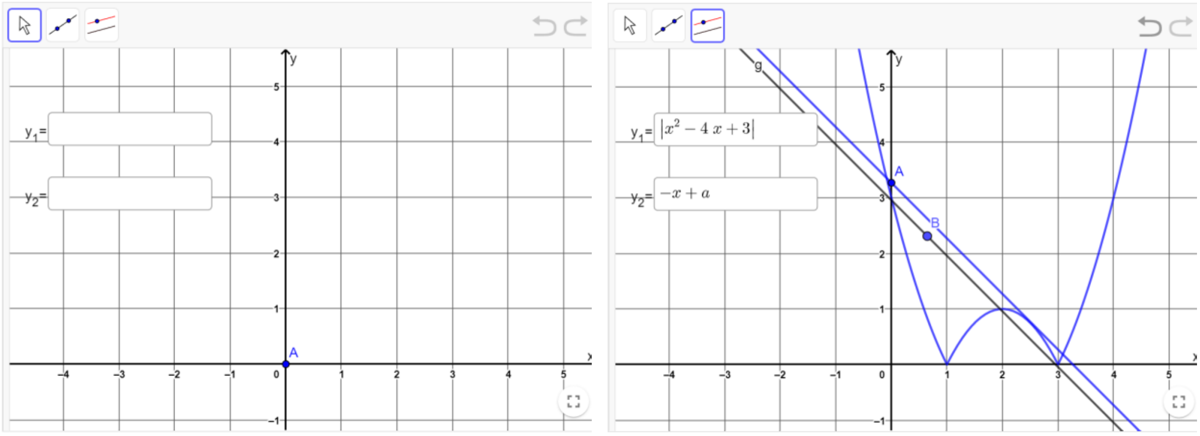
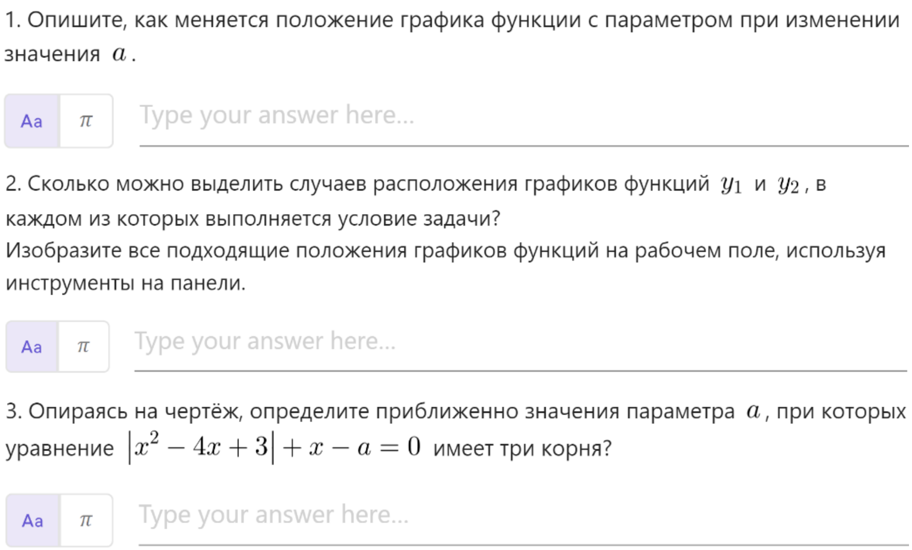


Рисунок 25– Инструкция к рабочему листу



а) до выполнения заданий   б) после выполнения заданий

Рисунок 26 – Графическое полотно GeoGebra


1. Опишите, как меняется положение графика функции с параметром при изменении значения a.

Aa π Type your answer here...

2. Сколько можно выделить случаев расположения графиков функций y_1 и y_2, в каждом из которых выполняется условие задачи?
Изобразите все подходящие положения графиков функций на рабочем поле, используя инструменты на панели.

Aa π Type your answer here...

3. Опираясь на чертёж, определите приближенно значения параметра a, при которых уравнение $|x^2-4x+3|+x-a=0$ имеет три корня?

Aa π Type your answer here...

Рисунок 27 – Открытые вопросы второй части примера 1

Выполнив построения на рабочем листе и ответив на вопросы, учащийся приступает к выполнению третьей части апплета. Элементы третьей части и деятельность учащегося представлены в Таблице 8.

Таблица 8 – Третья часть апплета к примеру 1

<table>
<tr><td colspan="2">Элементы третьей части апплета:
– текстовое поле с заданием (рисунок 28);
– окно «Заметки» которое дает возможность учащему прикрепить скан (фото) своего решения или прописать решение на представленном рабочем поле (рисунок 29).</td></tr>
<tr><td>Деятельность учащегося</td><td>Результаты</td></tr>
<tr><td>Учащийся выполняет вычисления на листе бумаги и сканирует (фотографирует) своё решение или записывает своё решение на рабочем поле.</td><td>Аналитически найдет точные значения параметра a.</td></tr>
</table>

Напишите, как вычислили значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x^2 - 4x + 3| + x - a = 0$ имеет три корня.
Прикрепите своё решение в заметках ниже.

Рисунок 28 – Фрагмент третьей части апплета к примеру 1

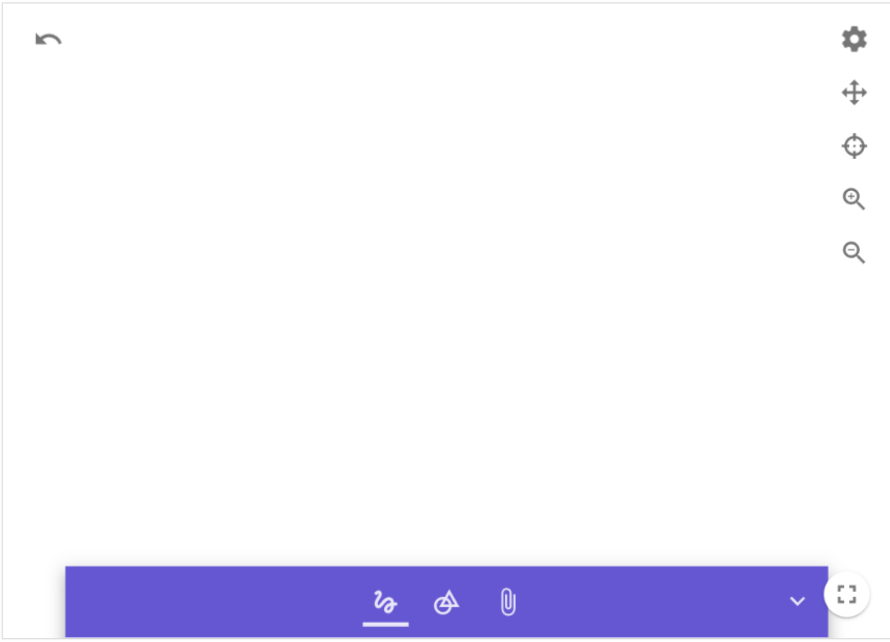


Рисунок 29 – Окно «Заметки»

Выполнив все задания, учащийся должен просто закрыть страницу с апплетом. Все изменения сохраняются автоматически.

Разработанный апплет может быть использован для аналогичных примеров из школьных учебников [21], размещенных в Приложении А. Их решение предполагает рассмотрение случаев раскрытия модуля и расположения параболы и прямой (прямых), поэтому может опираться на решение примера 1.

Пример 2

При каких значения параметра a уравнение

$$(a - 2x - x^2 + 1)(a - |x - 1| + |x + 1|) = 0$$

имеет три корня?

Апплет направлен на обучение учащихся решению уравнений с параметром графическим методом в системе координат xOa. Он состоит из двух частей, каждая из которых направлена на формирования определенного навыка учащегося. В процессе выполнения задания учащийся строит графики функций на рабочем поле GeoGebra. Также, анализируя взаимное расположение графиков, отвечает на вопросы, затем выполняет аналитические вычисления. Остановимся подробнее на каждой из частей апплета.

Перейдя по ссылке, отправленной учителем, учащийся приступает к первой части апплета. Деятельность учащегося описана в Таблице 9.

Таблица 9 – Первая часть апплета к примеру 2

<table>
<tr><td colspan="2">Элементы первой части апплетов:
– текстовое поле с заданием (рисунок Б.1);
– инструкция (рисунок Б.1);
– два открытых вопроса (рисунок 30).</td></tr>
<tr><td>Деятельность учащегося</td><td>Результаты</td></tr>
<tr><td>Учащийся вводит в поле ответа к первому вопросу уравнения $a = x^2 - 2x - 1$,
$a = |x - 1| - |x + 1|$.</td><td>Учащийся применит равносильное преобразование.
Представит уравнение в виде совокупности уравнений, графики которых легко построить на координатной плоскости xOa.</td></tr>
</table>

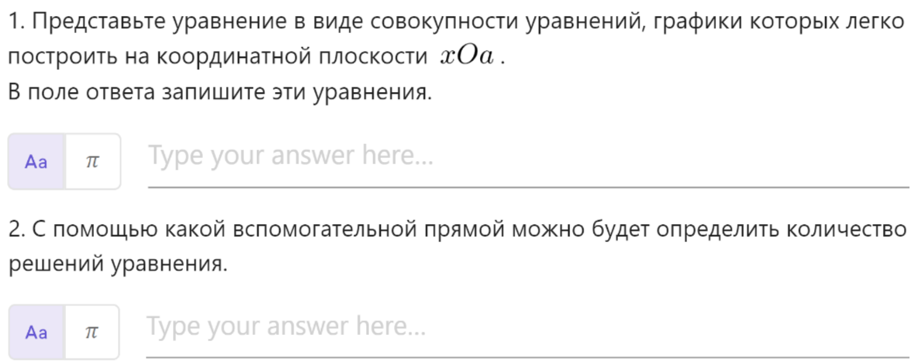


Рисунок 30 – Открытые вопросы первой части примера 2

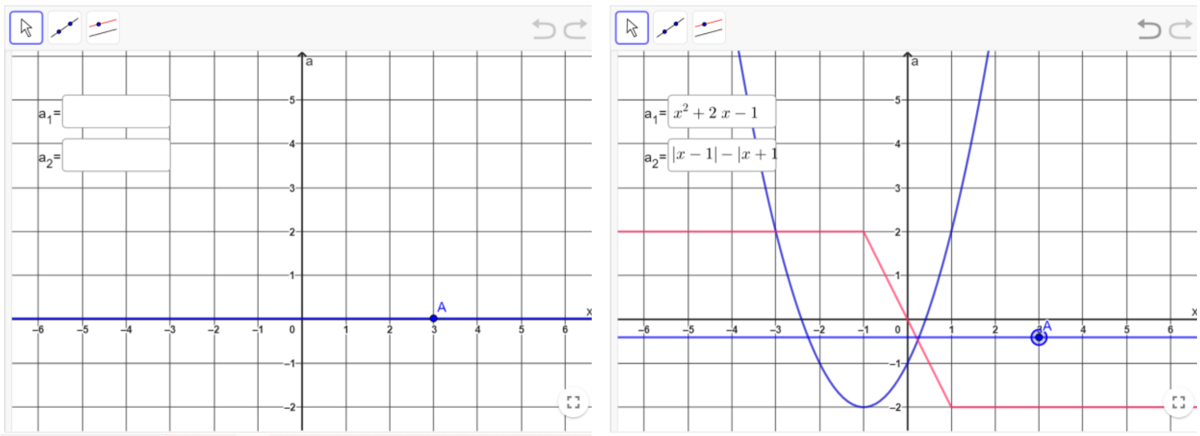
Далее учащийся переходит к выполнению второй части апплета. Элементы второй части и деятельность учащегося описаны в Таблице 10.

Таблица 10 – Вторая часть апплета к примеру 2

<table>
<tr><td>Элементы второй части апплета:
– текстовое поле с пояснениями (рисунок Б.2);
– рабочий лист GeoGebra: графическое полотно с системой координат xOa, прямой, параллельной оси Ox, точкой А для перемещения прямой и двумя окнами для ввода функций (рисунок 31а);
– инструкция к рабочему листу (рисунок Б.2);
– два открытых вопроса (рисунок 32).</td></tr>
</table>

Продолжение таблицы 10

Деятельность учащегося	*Результаты*
Учащийся знакомится с инструкцией к рабочему листу GeoGebra. Вписывает в окно ввода функции $a_1 = x^2 + 2x - 1$ и $a_2 = \|x-1\| - \|x+1\|$. Зажав кнопкой мыши точку А, учащийся двигает прямую, параллельную оси Ox (рисунок 31б). После этого учащийся отвечает на дополнительные вопросы, выполняя преобразования графиков на рабочем поле.	Учащийся анализирует, сколько точек пересечения может иметь совокупность графиков функций a_1, a_2 и прямая, параллельная оси Ox. Делает вывод количестве решений уравнения при изменении значения параметра a.



а) до выполнения заданий

б) случай, когда уравнение имеет 3 решения

Рисунок 31 - Рабочее поле GeoGebra

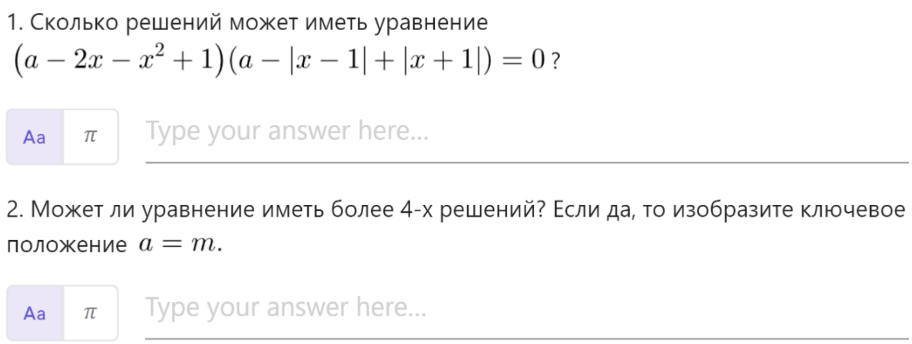


Рисунок 32 – Открытые вопросы второй части примера 2

Выполнив построения на рабочем листе и ответив на вопросы второй части представленного апплета, учащийся приступает к выполнению третьей части апплета.

Элементы третьей части и деятельность учащегося представлены в Таблице 11.

Таблица 11 – Третья часть апплета к примеру 2

Элементы третьей части апплета: – текстовое поле с заданием (рисунок Б.3); – окно «Заметки» (аналогичное примеру 1, рисунок Б.3).	
Деятельность учащегося	*Результаты*
Учащийся выполняет необходимые аналитические вычисления на листе бумаги и сканирует (фотографирует) своё решение или записывает своё решение на рабочем поле.	Учащийся находит два ключевых значения параметра a, опираясь на чертеж. Для нахождения третьего ключевого значения параметра учащийся находит точку пересечение графиков a_1 и a_2.

Выполнив все задания, учащийся должен закрыть страницу с апплетом. Все изменения сохраняются автоматически, а результаты отображаются на обзорном экране учителя.

Разработанный апплет может быть использован для аналогичных примеров из школьных учебников [20; 21] и приведены в Приложении А. Их решение тоже предполагает построение графиков функций в системе координат xOa и нахождение подходящих положений прямой, параллельной оси Ox.

Пример 3

При каких значениях параметра a система имеет три решения?

$$\begin{cases} |x| + |y| = 4, \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = (a-1)^2. \end{cases}$$

Апплет разработан для обучения учащихся решению уравнений с параметром графическим методом в системе координат xOy. Он состоит из трех частей, каждая из которых направлена на формирование определенного навыка учащегося. Аналогично предыдущим примерам, когда учащийся работает с апплетом, он выполняет преобразования графиков функций, используя инструменты GeoGebra, строит графики функций; анализируя взаимное расположение графиков, отвечает на вопросы.

Перейдя по ссылке, отправленной учителем, учащийся переходит на страницу первой части апплета.

Описание элементов первой части и деятельности учащегося представлено в Таблице 12.

Таблица 12 – Первая часть апплета к примеру 3

Элементы первой части апплета: – текстовое поле с заданием (рисунок В.1); – инструкция (рисунок В.1); – три открытых вопроса (рисунок 33).	
Деятельность учащегося	*Результаты*
Учащийся знакомится с инструкцией по работе апплетом. Отвечает на вопросы 1-3.	Применяя знания о графиках функций, учащийся опишет действия при построении графика уравнения $|x| + |y| = 4.$ Затем проанализирует уравнение $(x-2)^2 + (y-1)^2 = (a-1)^2$ и опишет, какая линия является графиком и как она будет изменяться при изменении параметра a.

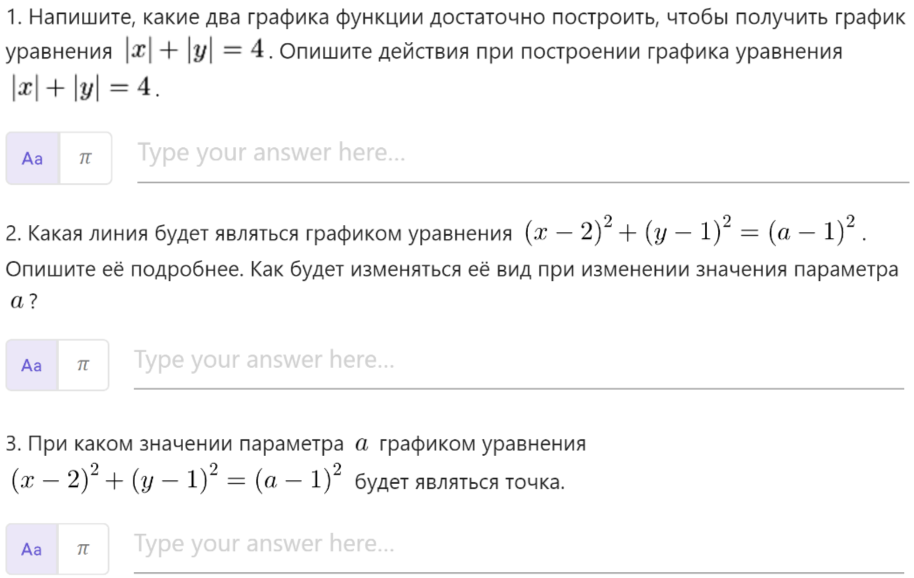


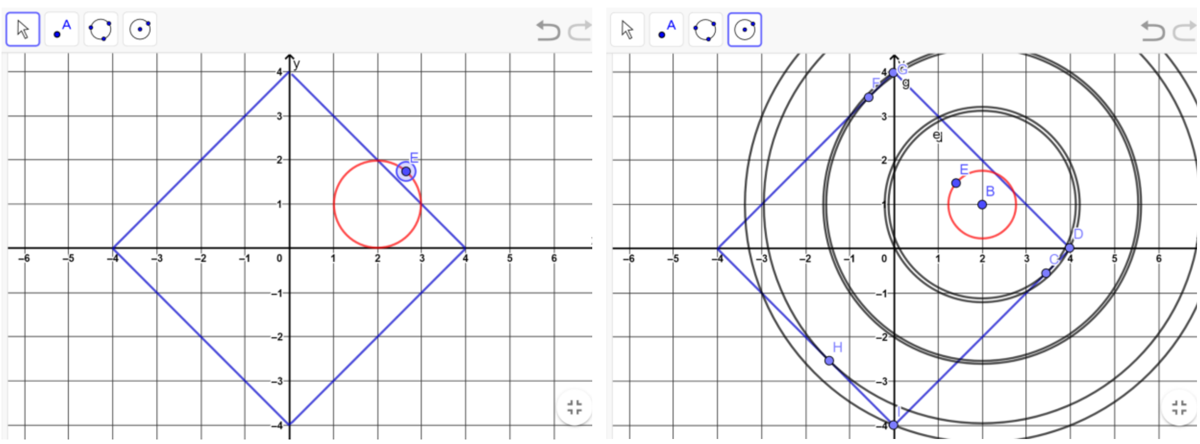
Рисунок 33 – Открытые вопросы к первой части примера 3

После заполнения первой части апплета учащийся приступает к выполнению второй части.

Элементы второй части и деятельность учащегося представлены в Таблице 13.

Таблица 13 – Вторая часть апплета к примеру 3

Элементы второй части: – инструкция к рабочему листу (рисунок В.2); – рабочий лист GeoGebra: графическое полотно с системой координат xOy, графиками уравнений $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert = 4$, $(x-2)^2 + (y-1)^2 = (a-1)^2$ (при $a = 2$) с возможностью изменения радиуса окружности (рисунок 34а); – три открытых вопроса (рисунок 35).	
Деятельность учащегося	**Результаты**
Учащийся знакомится с инструкцией к рабочему листу GeoGebra. С помощью мыши, зажав точку А, изменяет радиус окружности $(x-2)^2 + (y-1)^2 = (a-1)^2$. После пробных действий на графическом полотне, учащийся читает дополнительные вопросы.	Учащийся выяснит, как меняется расположение графика функции в зависимости от параметра.
В поле ответа к вопросу 1 вводит «графики уравнений могут иметь 1, 2, 3 или 4 точки пересечения». Отвечая на вопрос 2, учащийся выполняет построения на рабочем поле, используя инструмент «окружность по трём точкам» либо «окружность по центру и радиусу» учащийся изображает ключевые положения (рисунок 34б). Далее учащийся определяет приближенные значения параметра a, используя чертеж.	Применит знания о преобразованиях графиков уравнений и проанализирует изменения расположения графика уравнения с параметром на рабочем поле. Определит, как изменяется линия, которая является графиком $(x-2)^2 + (y-1)^2 = (a-1)^2$ при изменении параметра a. Определит, сколько точек пересечений могут иметь графики полученных функций в зависимости от значений параметра a. Выделит ключевые положения, когда графики уравнений имеют 3 решения.



а) до выполнения заданий　　　　　б) после выполнения заданий

Рисунок 34 – Графическое полотно GeoGebra

1. Сколько точек пересечения могут иметь графики уравнений $|x| + |y| = 4$ и $(x-2)^2 + (y-1)^2 = (a-1)^2$ при изменении параметра a ?

Aa π Type your answer here...

2. Сколько можно выделить случаев расположения графиков уравнений $|x| + |y| = 4$ и $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$, в каждом из которых выполняется условие задачи? Изобразите все подходящие положения графиков функций на рабочем поле, используя инструменты сверху.

Aa π Type your answer here...

3. Опираясь на чертёж, определите и запишите приближенно (с округлением до десятых) значения параметра a, при которых система имеет 3 решения:

$$\begin{cases} |x| + |y| = 4 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = (a-1)^2. \end{cases}$$

Aa π Type your answer here...

Рисунок 35 – Открытые вопросы второй части примера 3

Выполнив построения на рабочем листе и ответив на вопросы, учащийся приступает к выполнению третьей части апплета. Элементы третьей части и деятельность учащегося представлены в Таблице 14.

Таблица 14 – Третья часть апплета к примеру 3

Элементы третьей части апплета: – открытый вопрос с заданием (рисунок 36);	
Деятельность учащегося	*Результаты*
Учащийся выполняет вычисления на листе бумаги и вписывает в поле ответа полученные значения параметра a через точку с запятой.	Используя знания из геометрии: формулу расстояния от точки до прямой, уравнения прямой, и чертеж, полученный во второй части апплета, учащийся найдёт значения параметра a.

Вычислите, при каких значениях параметра a система имеет 3 решения.

$$\begin{cases} |x| + |y| = 4 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = (a-1)^2 \end{cases}$$

В поле ответа запишите значения параметра a через точку с запятой.

Aa π Type your answer here...

Рисунок 36 – Открытый вопрос третьей части примера 3

Разработанный апплет может быть использован для аналогичных примеров из школьных учебников [21; 27], приведенных в приложение В. Их решение предполагает рассмотрение случаев расположения двух линий:

параболы или квадрата и окружности, поэтому может опираться на решение примера 3.

Также нами были разработаны апплеты для примеров 4 и 5 (ПРИЛОЖЕНИЯ Д, Г)

Разработанные апплеты могут быть использованы учителями математики на своих уроках при обучении решению уравнений и систем уравнений с параметрами. для обеспечения наглядности решения, осуществления контроля выполнения учащимися заданий. Применение апплетов позволит эффективно организовать процесс обучения и сформировать у учащихся умения решать уравнения, системы уравнений с параметрами.

2.3 Апробация разработанных апплетов на уроках математики

С учетом выявленных методических особенностей были разработаны два урока математики, для которых были созданы апплеты, и проведена апробация в МОУ СОШ №44 им. С.Ф. Бароненко г. Копейска в 9А классе (ПРИЛОЖЕНИЯ З).

Апробация включала в себя проведение двух уроков математики в компьютерном классе (22 учащихся класса были разделены на подгруппы).

Для проведения уроков по теме «Уравнения с параметром», были подобраны задания из школьных учебников [20; 21] и разработаны 2 апплета на образовательной платформе GeoGebra Classroom: с одним из которых учащихся работали на уроке в классе, а с другим – дома.

Тип урока: урок закрепления знаний.

Цель урока: формировать умения решать уравнения с параметрами.

Урок включал 6 этапов:

1) организационный этап;
2) определение цели и задач урока;
3) актуализаций знаний;
4) практическая работа в GeoGebra Classroom;

5) домашнее задание;

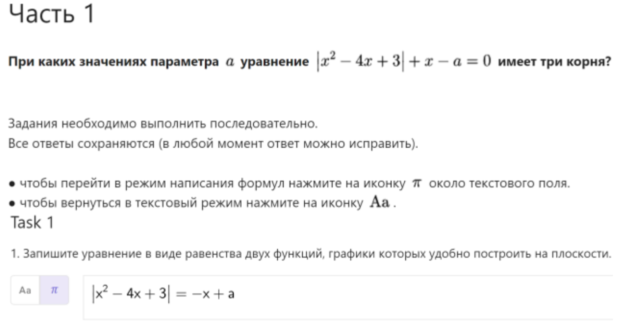
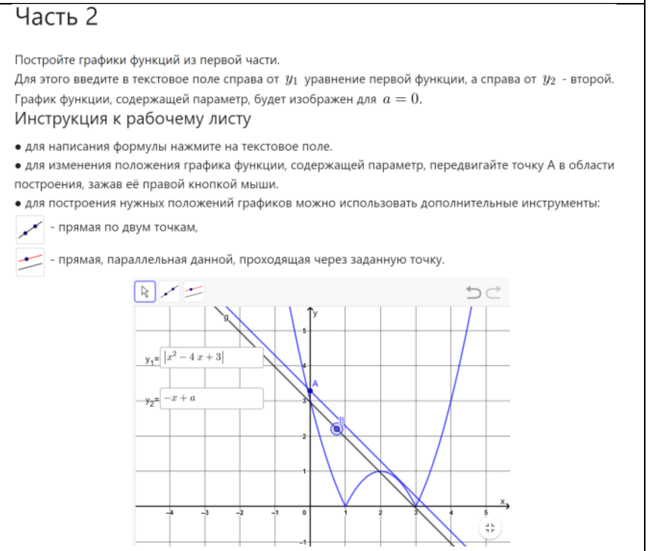
6) рефлексия.

Рассмотрим четвертый этап более подробно.

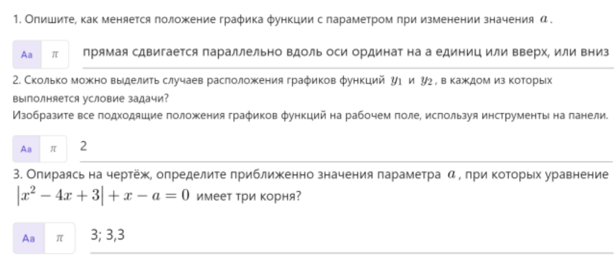
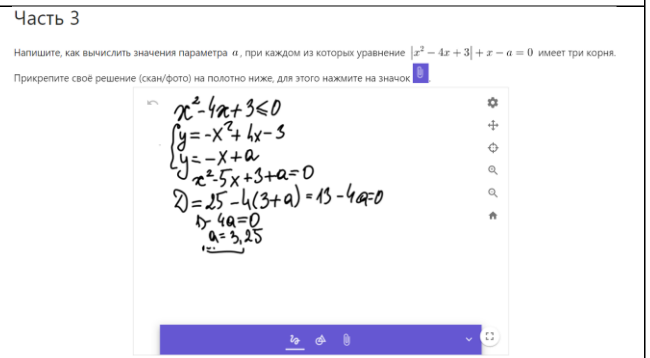
После проведения этапа актуализации знаний учитель объяснил учащимся правила выполнения практической работы, затем попросил пройти за компьютеры.

Описание процесса выполнения практической работы в GeoGebra Classroom представлено в Таблице 15.

Таблица 15 – Фрагмент конспекта урока

Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Интерактивная панель
1	*2*	*3*
Озвучивает учащимся инструкцию по работе с апплетом, отвечает на возникающие вопросы. Просит ответить на первый вопрос в первой части апплета. Заполняет апплет вместе с учащимися (рисунок 37)	Задают вопросы Анализируют исходное уравнение и, используя наглядные представления, определяют, какие функции будет удобнее (легче) построить в плоскости xOy, и вводят в поле ответа на первый вопрос уравнение: $\|x^2 - 4x + 3\| = -x + a$.	 Рисунок 37 – Первая часть апплета на уроке
Озвучивает учащимся инструкцию к рабочему листу GeoGebra, показывая основные элементы. Просит учащихся вписать в окно ввода функции, выделенные в первой части апплета. После появления на рабочем листе графиков функций, объясняет, как двигать прямую $y_2 = -x + 2$ (рисунок 38)	Вписывает в окно ввода функции $y_1 = \|x^2 - 4x + 3\|$ и $y_2 = -x + a$. Зажав точку А, двигают прямую $y_2 = -x + a$ и анализируют, как меняется расположение графика функции в зависимости от параметра.	 Рисунок 38 – Рабочее поле апплета на уроке

Продолжение таблицы 15

1	*2*	*3*
После того, как пробных действий учащихся на графическом полотне, просит их прочитать вопрос 1 и ответить на него. Напоминает учащимся, как пользоваться инструментами GeoGebra, просит ответить на вопрос 2 и выполнить нужные построения на рабочем поле. Помогает учащимся. После того, как учитель проверил, что все учащиеся выполнили построения, просит перейти к третьему вопросу.	Применяют знания о преобразованиях графиков функций и анализируют изменения расположения графика функции с параметром на рабочем поле. Определяют, как изменится расположение графика функции $y = -x + a$ при изменении параметра a. Отвечают учителю и вводят в текстовое поле ответ на первый вопрос. Используя инструмент «прямая» или «параллельная прямая» изображают ключевые положения и определяют, сколько точек пересечения могут иметь графики полученных функций в зависимости от значений параметра a. При необходимости просят помощь у учителя. Используя полученный чертеж, приближенно определяют значения параметра a, при которых графики имеют три точки пересечения, и отвечают на вопрос 3.	 Рисунок 39 – Вопросы апплета на уроке
Проверив, что все учащиеся справились со второй частью апплета, предлагает учащимся перейти к третьей части.	На листе бумаги вычисляет точные значения параметра a, сканирует и прикрепляет на полотно.	 Рисунок 40 – Третья часть апплета на уроке

После практической работы учащимся для решения дома был предложен апплет (ПРИЛОЖЕНИЕ Е).

На последнем этапе среди учащихся было проведено компьютерное тестирование (ПРИЛОЖЕНИЕ Ж).

Как показало тестирование, учащимся сложно определять, как изменяется график функции с параметром при изменении знания параметра. На уроках математики учитель 9А не использовал динамические среды для решения задач с параметрами. Однако, многие учащиеся заметили, что апплет помогает быстро и наглядно построить графики функций и оценить своё решение. На уроке все учащиеся проявляли интерес к использованию динамической среды, а 20 из 22 учащихся хотели бы на уроках математики работать с динамической средой GeoGebra.

В процессе проведения занятия я столкнулась тем, что учащиеся ранее не работали в динамической среде GeoGebra, поэтому им было тяжело выполнять некоторые шаги практической работы. Однако, так как интерфейс GeoGebra гибкий и достаточно понятный, после совершения некоторых пробных действий на рабочем поле учащиеся без проблем выполняли необходимые построения.

По итогам проведения апробации был сделан вывод, что применение динамической среды GeoGebra и образовательной платформы GeoGebra Classroom при обучении решении уравнений и систем уравнений с параметрами повышает мотивацию и интерес учащихся к решению задач, продолжительность концентрации внимания, формирует наглядные представления, что может способствовать достижению планируемых результатов обучения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В выпускной квалификационной работе были изучены и проанализированы методические особенности обучения решению уравнений и их систем с параметрами. Был проведен анализ школьных учебников за 8-9 классы по алгебре, который показал, что в учебной программе основной школы мало внимания уделяется теме «Уравнения и системы уравнений с параметрами». Однако, уравнения с параметром включены во вторую часть заданий ОГЭ. Также на основе анализа научно-методической литературы выделены методы решения задач с параметрами, подобраны примеры, для которых разработаны апплеты GeoGebra.

Изучив опыт применения динамической среды GeoGebra и платформы GeoGebra Classroom на уроках математики и сопоставив их с особенностями обучения решению задач с параметрами, мы выделили методические особенности применения динамической среды GeoGebra в обучении решению уравнений и их систем с параметрами. Были разработаны и описаны апплеты с учетом выявленных методических особенностей, подобраны задания из школьных учебников, для решения которых можно использовать апплеты. Проведены апробация апплетов GeoGebra на уроках математики и опрос среди учащихся, который показал, что учителя математики на уроках не используют динамические среды, хотя их применение повышает мотивацию и интерес учащихся к решению задач с параметрами, способствует продолжительной концентрации внимания, формирует наглядные представления, что обеспечивает достижение планируемых результатов обучения.

В настоящее время для учителя математики навык использования компьютерных программ, в частности, GeoGebra, обязателен для повышения эффективности занятий, прочного усвоения учебного материала, достижения планируемых результатов обучения.

Таким образом, были выполнены задачи и достигнута цель работы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Акманова, С. В.** Задания ЕГЭ с параметрами и рекомендации по методам их решения / С. В. Акманова, А. Р. Акманов. – Текст : непосредственный // Modern science. – 2020. – № 5-1. – С. 281–286.

2. **Алмазова, Т. А.** Методические возможности использования графических калькуляторов при решении задач с параметрами / Т. А. Алмазова, Т. И. Трунтаева, Е. В. Салтыкова // Научные труды Калужского государственного университета имени К. Э. Циолковского : Материалы региональной университетской научно-практической конференции, Калуга, 17-18 апреля 2019 года. – Калуга : ФБГОУ ВПО «Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского», 2019. – С. 348–353.

3. **Ананьина, Т. А.** Организация проектной деятельности школьников при работе с параметрами в классах с углубленным изучением математики / Ананьина Т. А. // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий. – 2015. – № 1. – С. 52–57.

4. **Артемьева, С. В.** Обучение решению задач с параметрами с помощью геометрических интерпретаций / С. В. Артемьева, Т. С. Курьякова, А. А. Пыресева // Повышение профессионального мастерства педагогических работников в России : вызовы времени, тенденции и перспективы развития : Материалы Всероссийской с международным участием научно-практической конференции, посвященной 110-летию Иркутского Педагогического института, Иркутск, 17 мая 2019 года. Часть 1. – Иркутск : «Иркут», 2019. – С. 56–61.

5. **Белямова, Э. С.** Методические особенности изучения темы «Задачи с параметрами», основные понятия / Э. С. Беляева, А. С. Потапов, С. А. Титоренко // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» :

[сайт]. – 2011. – URL: https ://urok.1sept.ru/articles/588088 (дата обращения: 05.06.2023).

6. **Буцко, Е. В.** Алгебра : 8 класс : методическое пособие / Е.В. Буцко, В.Б. Полонский, М.С. Якир. – Москва : Вентана-Граф, 2018. – 192 с. – ISBN 978-5-360-092315. – Текст : непосредственный.

7. **Буцко, Е. В.** Алгебра : 9 класс : методическое пособие / Е.В. Буцко, В.Б. Полонский, М.С. Якир. – Москва : Вентана-Граф, 2018. – 200 с. – ISBN 978-5-360-09916-1. – Текст : непосредственный.

8. **Васильева, М. В.** Построение плоских областей в среде динамической математики при решении задач с параметрами / М. В. Васильева, Ю. Н. Кашицына // Профильная школа. – 2021. – № 4. – С. 10–24.

9. **Голубев, В. И.** О задачах с параметром / В. И. Голубев, А. М. Гольдман // Журнал «Математика». – 2002. – № 23. – URL: https ://mat.1sept.ru/view_article.php?ID=200202302 (дата обращения : 25.05.2023).

10. **Далингер В. А.** Задачи с параметрами : учебное пособие / В.А. Далингер. – Омск : Издательство ООО «Амфора», 2012. – 961 с.

11. **Дахин, А. Н.** Педагогическая задача школьной алгебры / А. Н. Дахин // Школьные технологии. – 2017. – № 4. – С. 33–38

12. Динамическая математическая образовательная среда GeoGebra : учебное пособие / А. Р. Есаян, Н. М. Добровольский, Е. А. Седова, А. В. Якушин. – Тула : ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2017. – 417 с. – ISBN 978-5-9500201-0-0. – Текст : электронный.

13. **Захарова, М. А.** Формирование приемов решения задач с параметром как средство повышения качества математической подготовки / М. А. Захарова, О. В. Потанина // Фундаментальная и прикладная наука : состояние и тенденции развития : сборник статей X Международной научно-практической конференции. – Международный центр научного партнерства «Новая Наука». – Петрозаводск : МЦНП «Новая Наука», 2021. – С. 109–117.

14. **Кашицына, Ю. Н.** Методика обучения решению задач с параметрами с использованием программы «GeoGebra» / Ю. Н. Кашицына // Мир науки, культуры, образования. – 2020. – № 1(80). – С. 249–255.

15. **Керимов, Р. Ф.** Линейные уравнения и системы линейных уравнений с параметрами : методические рекомендации / Р. Ф. Керимов – Москва : Просвещение, 2011. – 32 с.

16. **Кириллова, Д. А.** Применение среды GeoGebra при изучении темы «Уравнение окружности» как способ перехода к задачам с параметром / Д. А. Кириллова // Наука и школа. – 2022. – № 2. – С. 152–160.

17. Кодификатор проверяемых требований к результатам освоения основной образовательной программы основного общего образования и элементов содержания для проведения основного государственного экзамена по математике // Федеральный Институт Технических Измерений (ФИПИ) : [сайт]. – Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки, 2023. – URL: https ://doc.fipi.ru/oge/demoversii-specifikacii-kodifikatory/2023/ma_9_2023.zip (дата обращения : 20.04.2023).

18. Концепция развития математического образования в Российской Федерации : утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р, разработана МинОбрНауки России совместно с Российской академией наук и Российской академией образования // Банк документов Министерства просвещения Российской Федерации. – Москва : 2013. – URL: https ://docs.edu.gov.ru/document/ (дата обращения : 15.03.2023). – Текст : электронный.

19. **Ларин, С. В.** Использование компьютерной анимации при обучении решению задач с параметрами / С. В. Ларин // Математика в школе. – 2022. – № 7. – С. 43–48.

20. **Мерзляк, А. Г.** Алгебра 8 класс (углубленный уровень) : учебник / А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков. – Москва : Вентана-Граф, 2019. – 384 с. – Текст : электронный.

21. **Мерзляк, А. Г.** Алгебра 9 класс (углубленный уровень) : учебник / А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков. – Москва : Вентана-Граф, 2019. – 399 с. – Текст : электронный.

22. **Мирошин, В. В.** Решение задач с параметрами. Теория и практика / В. В. Мирошин. – Москва : Экзамен, 2009. – 286 с. – ISBN 978-5-377-02250-3.

23. **Мирошин, В. В.** Существенные признаки понятия «параметр» // Математика в школе. – № 7. – 2010. – С. 19–22.

24. **Мордкович, А. Г.** Алгебра : 8 класс : учебник для общеобразовательных организаций (углубленный уровень). В 2 частях. Часть 1 / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – Москва : Мнемозина, 2019. – 288 с. – ISBN 978-5-346-04410-9. – Текст : непосредственный.

25. **Мордкович, А. Г.** Алгебра : 8 класс : учебник для общеобразовательных организаций (углубленный уровень). В 2 частях. Часть 2 / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – Москва : Мнемозина, 2019. – 351 с. – ISBN 978-5-346-04411-6. – Текст : непосредственный.

26. **Мордкович, А. Г.** Алгебра : 9 класс : учебник для общеобразовательных организаций (углубленный уровень). В 2 частях. Часть 1 / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – Москва : Мнемозина, 2019. – 288 с. – ISBN 978-5-346-04286-0. – Текст : непосредственный.

27. **Мордкович, А. Г.** Алгебра : 9 класс : учебник для общеобразовательных организаций (углубленный уровень). В 2 частях. Часть 2 / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – Москва : Мнемозина, 2019. – 287 с. – ISBN 978-5-346-04287-7. – Текст : непосредственный.

28. **Приказ Министерства просвещения РФ от 31.05.2021 № 287** «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования». – Москва, 2021. – Текст : электронный.

29. **Примерная рабочая программа основного общего образования предмета «Математика» :** углублённый уровень (для 7-9 классов

образовательных организаций) : одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию, протокол 2/22 от 29 апрель 2022 г. – Москва, 2022. – Текст : электронный.

30. **Прокофьев, А. А.** Задачи с параметрами. / А. А. Прокофьев. – Москва : МИЭТ, 2004. – 258 с.

31. **Спецификация контрольно-измерительных материалов для проведения в 2023 году государственный экзамен по математике** // Федеральный Институт Технических Измерений (ФИПИ) : [сайт]. – Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки, 2023. – URL: https ://doc.fipi.ru/oge/demoversii-specifikacii-kodifikatory/2023/ma_9_2023.zip (дата обращения : 15.05.2023).

32. **Статистико-аналитический отчет о результатах государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего образования в 2022 году в Челябинской области.** – Челябинск : ГБУ ДПО «Региональный центр оценки качества и информатизации образования», 2022. – 454 с.

33. **Суркова, Е. М.** Когда и как в школьном курсе математики можно вводить параметр в качестве элемента уравнения / Е. М. Суркова. – Текст : непосредственный // Актуальные проблемы естественнонаучного и математического образования : материалы XXI Всероссийской (IX с Международным участием) научно-практической конференции / Самарский государственный социально-педагогический университет. – Самара : СГСПУ, 2018. – С. 309–316.

34. Цифровые дидактические материалы. // Корпорация «Российский учебник» : [сайт]. – 2019. – URL: https ://rosuchebnik.ru/material/tsifrovie-didakticheskie-materiali/ (дата обращения : 10.04.2023).

35. **Шабанова, М. В**. GeoGebra в системе средств обучения математике / М. В. Шабанова, Т. Ф. Сергеева // Информатика и образование. – 2014. № 7. – С. 33–43.

36. **Шабашова, О. В.** Система заданий как средство формирования умений применять функционально-графический метод для решения задач с параметрами / О. В. Шабашова // Математика в школе. – 2019. № 5. – С. 43–59.

37. **Шаповал, Л. В.** Графический метод решения уравнений, неравенств и их систем с параметрами / Л. В. Шаповал // Математика. Всё для учителя. – 2019. № 5-6. – С. 58–72.

38. **Якубов, В. А.** О некоторых аспектах ОГЭ по математике / В. А. Якубов // Математика в школе. – 2022. – № 2. – С. 51–55.

39. **Ярошевич, В. И.** Особенности использования информационных технологий в обучении решению математических задач / В. И. Ярошевич, А. М. Сафуанова, И. С. Сафуанов // Вестник РУДН. – 2018. – № 2. – С. 221–228.

40. **Ilany, B.-S**. Solving Equations with Parameters / B.-S. Ilany, M. D. Hassidov. – Текст : электронный // Scientific Research. – 2014. – P. 963–968

41. **Pfeiffer, C.** Teaching and learning of function transformations in a GeoGebra-focused learning environment / C. Pfeiffe, M. Ndlovu . – Текст : электронный // Re(s)source 2018 : International Conference ENS de Lyon. – 2018. – P. 324–327.

42. **Reis, Z. A.** Computer supported mathematics with GeoGebra / Z. A. Reis. – Текст : электронный // Procedia Social and Behavioral Sciences. – 2010. – P. 1449–1455.

43. **Yohannes, A.** GeoGebra in mathematics education : a systematic review of journal articles published from 2010 to 2020 / A. Yohannes, H.-L. Chen. – DOI : 10.1080/10494820.2021.2016861. – Текст : электронный // Interactive Learning Environments. – 2021. – P. 1–17.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Задания, аналогичные примерам

Задания, аналогичные примеру 1

Задание 1 [21]

Сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра a:

2) $|(x+2)^2-3|=a$ 3) $|(|x|-2)^2-3|=a$

Задание 2 [21]

Установите, сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра a:

2) $x^2+3|x-1|-1=a$

Задание 3 [21]

Установите, сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра a:

$$2)\ x^2-4|x-1|-1=a$$

Задания, аналогичные примеру 2

Задание 1 [20]

При каких значениях параметра b уравнение $\dfrac{(x+2b)(x-4b)}{x-2}=0$ имеет единственное решение?

Задание 2 [21]

При каких значения параметра a уравнение

$$(a+4x-x^2-3)(a-1-|x-2|)=0$$

имеет три корня?

Задание 3 [21]

Определите количество корней уравнения

$$(x^2+a^2-1)(a-x)=0$$

в зависимости от значения параметра a.

Задание 4 [21]

Определите количество корней уравнения

$$(a - x^2 - a^2)(3a - x^2) = 0$$

в зависимости от значения параметра a.

Задания, аналогичные примеру 3

Задание 1 [21]

Сколько решений в зависимости от значения параметра a имеет система уравнений:

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x^2 + a \end{cases}$

Задание 2 [21]

Сколько решений в зависимости от значения параметра a имеет система уравнений :

3) $\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$

Задание 3 [27]

Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y + |x| = a \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

Задания, аналогичные примеру 4

Задание 1 [21]

Сколько решений в зависимости от значения a имеет система уравнений:

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = a - |x|, \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$

Задание 2 [27]

Для каждого значения параметра a найдите число решений системы уравнений:

$$a)\ \begin{cases} |x+2| - y = -2, \\ ax + 3y = 3. \end{cases}$$

Задание 3 [27]

Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y + |x| = a, \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

Задания, аналогичные примеру 5

Задание 1

При каких значениях параметра b уравнение

$$\left|\frac{x+3}{x}\right| - bx = 0$$

имеет три решение?

Задание 2

При каких значения параметра a уравнение

$$\left|\frac{2x+1}{x}\right| + ax = 0$$

имеет три корня?

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Апплет к примеру 2

Задание и инструкция к первой части апплета к примеру 2 представлены на рисунке Б.1.

Часть 1

Author: Нина Гурина

При каких значениях параметра a уравнение $(a-2x-x^2+1)(a-|x-1|+|x+1|)=0$ **имеет три корня?**

Инструкция

Задания необходимо выполнить последовательно.
Все ответы сохраняются (в любой момент ответ можно исправить).

- чтобы перейти в режим написания формул нажмите на иконку π около текстового поля.
- чтобы вернуться в текстовый режим нажмите на иконку Aa.

Рисунок Б.1 – Фрагмент апплета к примеру 2

Фрагмент второй части апплета представлен на рисунке Б.2.

Часть 2

Author: Нина Гурина

Постройте графики функций из первого задания.
Для этого введите в текстовое поле a_1 уравнение первой функции, а в a_2 - второй.

Инструкция к рабочему листу

- для написания формулы нажмите на текстовое поле.
- для выполнения построений можно использовать дополнительные инструменты.
- на координатной плоскости изображена прямая $a=m$, для изменения её положения передвигайте точку А в области построения, зажав её правой кнопкой мыши.

Рисунок Б.2 – Фрагмент второй части апплета к примеру 2

Третья часть апплета представлена на рисунках Б.3 и Б.4.

Часть 3

Author: Нина Гурина

Напишите, как вычислили значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a--2x-x^2+1)(a-|x-1|+|x+1|)$ имеет три корня.
Прикрепите своё решение в заметках ниже.

Рисунок Б.3 – Фрагмент третьей части апплета к примеру 2

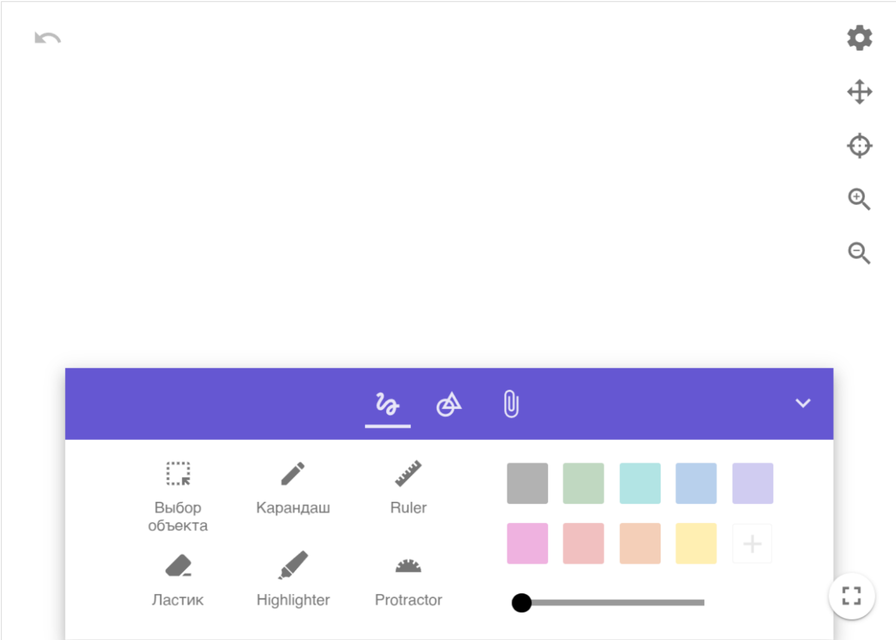


Рисунок Б.4 – Третья часть апплета к примеру 2

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Апплет к примеру 3

Задание и инструкция к первой части апплета к примеру 3 представлены на рисунке В.1.

Часть 1

Author: Нина Гурина

При каких значениях параметра a система имеет 3 решения?

$$\begin{cases} |x| + |y| = 4 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = (a-1)^2 \end{cases}$$

Инструкция

Задания необходимо выполнить последовательно.
Все ответы сохраняются (в любой момент ответ можно исправить).

- чтобы перейти в режим написания формул нажмите на иконку π около текстового поля.
- чтобы вернуться в текстовый режим нажмите на иконку Aa.

Рисунок В.1 – Фрагмент первой части апплета к примеру 3

Фрагмент второй части апплета к примеру 3 представлен на рисунке В.1.

Инструкция к рабочему листу

На координатной плоскости изображены графики уравнений:
1) $|x| + |y| = 4,$
2) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = (a-1)^2$ (при $a = 2$).

- для ответа на вопрос в задании вы можете передвигать точку E, прижав её левой кнопкой мыши.
- для выполнения построений можно использовать дополнительные инструменты.

Рисунок В.2 – Фрагмент второй части апплета к примеру 3

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Апплет к примеру 4

Первая часть апплета к примеру 4 представлена на рисунке Г.1.

Часть 1

Author: Нина Гурина

При каких значениях параметра a система имеет 2 решения?

$$\begin{cases} y = |2x - a| - 3 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

Инструкция

Задания необходимо выполнить последовательно.
Все ответы сохраняются (в любой момент ответ можно исправить).

- чтобы перейти в режим написания формул нажмите на иконку π около текстового поля.
- чтобы вернуться в текстовый режим нажмите на иконку Aa.

1. Опишите, как изменяется положение графика функции $y = |2x - a| - 3$ при изменении значения параметра a.

Aa | π | Type your answer here...

2. Какая линия будет являться графиком уравнения $x^2 + y^2 = 10$? Опишите её подробнее.

Aa | π | Type your answer here...

Рисунок Г.1 – Первая часть апплета к примеру 4

Фрагмент второй части апплета представлен на рисунке Г.2.

Часть 2

Author: Нина Гурина

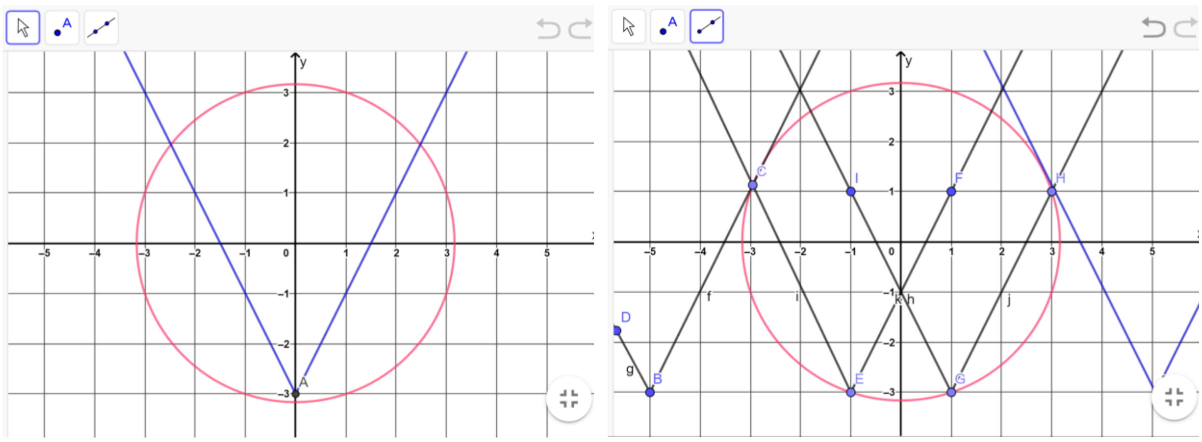
Инструкция к рабочему листу

На координатной плоскости изображены графики уравнений:
1) $y = |2x - a| - 3$ (при $a = 0$),
2) $x^2 + y^2 = 10$.

Для ответа на вопрос в задании вы можете передвигать точку A, прижав её левой кнопкой мыши.

Рисунок Г.2 – Фрагмент второй апплета к примеру 4

Рабочее поле второй части апплета к примеру 4 изображено на рисунке Г.3.



а) до выполнения заданий б) после выполнения заданий

Рисунок Г.3 – Рабочий лист апплета к примеру 4

Вопросы второй части апплета представлены на рисунке Г.4.

1. Сколько точек пересечения могут иметь графики уравнений 1) и 2) при изменении значения параметра a? Укажите все возможные значения.

Aa π Type your answer here...

2. Изобразите на рабочем поле ключевые положения графика функции для определения значений параметра a, при которых будет выполнять условие задачи.
Для построения используйте инструменты сверху (точку, прямую по двум точкам, параллельную прямую, луч)
3. Опираясь на чертёж, определите и запишите приближенно (с округлением до десятых) значения параметра a, при которых система имеет 2 решения:

$$\begin{cases} y = |2x - a| - 3 \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

Aa π Type your answer here...

Рисунок Г.4 – Вопросы второй части апплета к примеру 4

Третья часть апплета к примеру 4 представлена на рисунке Г.5.

Часть 3

Author: Нина Гурина

Вычислите, при каких значениях параметра a система имеет 2 решения:

$$\begin{cases} y = |2x - a| - 3 \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

В ответ запишите множество значений параметра a.

Aa π Type your answer here...

Рисунок Г.5 – Третья часть апплета к примеру 4

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Апплет к примеру 5

Первая часть апплета к примеру 5 представлена на рисунке Д.1.

Часть 1

Author: Нина Гурина

При каких значениях параметра k уравнение $\left|\frac{x+1}{x}\right| - kx = 0$ имеет 3 корня?

Инструкция

Задания необходимо выполнить последовательно.
Все ответы сохраняются (в любой момент ответ можно исправить).

● чтобы перейти в режим написания формул нажмите на иконку π около текстового поля.
● чтобы вернуться в текстовый режим нажмите на иконку Aa.

1. Запишите уравнение в виде равенства двух функций, графики которых удобно построить на плоскости.

Aa | π | Type your answer here...

Рисунок Д.1 – Первая часть апплета к примеру 5

Вторая часть апплета представлена на рисунках Д.2, Д.3, Д.4, Д.5.

Часть 2

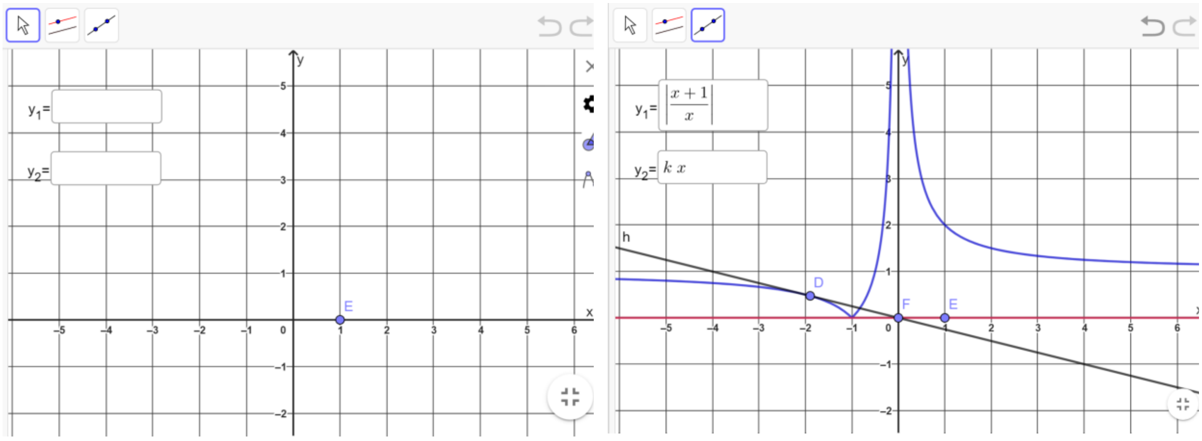
Author: Нина Гурина

Постройте графики функций из первого задания.
Для этого введите в текстовое поле y_1 уравнение первой функции, а в y_2 - второй.
График функции, содержащей параметр, будет изображен для $k = 0$

Инструкция к рабочему листу

● для написания формулы нажмите на текстовое поле.
● для ответа на вопрос в задании вы можете передвигать точку А, прижав её левой кнопкой мыши.
● для построения нужных положений графиков можно использовать дополнительные инструменты.

Рисунок Д.2 – Фрагмент второй части апплета к примеру 5



а) до выполнения заданий б) после выполнения заданий

Рисунок Д.3 – Рабочий лист апплета к примеру 5

1. Напишите этапы построения на плоскости графика функции $y=\left|\frac{x+1}{x}\right|$.

Aa π Type your answer here...

2. Как изменяется положение графика функции при изменении значения k ?

Aa π Type your answer here...

3. Изобразите на рабочем поле ключевые положения графика функции для определения значений параметра, при которых уравнение $\left|\frac{x+1}{x}\right|-kx=0$ будет иметь 3 корня.

Для построения используйте инструменты сверху (прямую по двум точкам, параллельную прямую).

4. Опираясь на чертёж, определите и запишите приближенно (с округлением до десятых) значения параметра, при которых уравнение имеет 2 решения.

Aa π Type your answer here...

Рисунок Д.4 – Вопросы второй части апплета к примеру 5

Часть 3

Author: Нина Гурина

Вычислите, при каких значениях параметра a уравнение $\left|\frac{x+1}{x}\right|-kx=0$ имеет три корня.

В поле ответа запишите значения параметра a через точку с запятой.

Aa π Type your answer here...

Рисунок Д.5 – Третья часть апплета к примеру 5

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Апплет для выполнения дома

Апплет, который был дан учащимся для выполнения дома представлен на рисунках Е.1, Е.2, Е.3, Е.4.

Часть 1

При каких значениях параметра a уравнение $|x| \cdot (x-2) + 1 - x - a = 0$ имеет два корня?

Инструкция

Задания необходимо выполнить последовательно.
Все ответы сохраняются (в любой момент ответ можно исправить).

- чтобы перейти в режим написания формул нажмите на иконку π около текстового поля.
- чтобы вернуться в текстовый режим нажмите на иконку $\mathbf{Aa}$.

1. Запишите уравнение в виде равенства двух функций, графики которых удобно построить на плоскости.

Aa | π | Type your answer here...

Рисунок Е.1 – Первая часть апплета

Часть 2

Постройте графики функций из первой части.
Для этого введите в текстовое поле справа от y_1 уравнение первой функции, а справа от y_2 - второй.
График функции, содержащей параметр, будет изображен для $a = 0$.

Инструкция по работе с апплетом

- для написания формулы нажмите на текстовое поле.
- для изменения положения графика функции, содержащей параметр, передвигайте точку А в области построения, зажав её правой кнопкой мыши.
- для построения нужных положений графиков можно использовать дополнительные инструменты:

 - прямая по двум точкам,

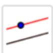
 - прямая, параллельная данной, через проходящая заданную точку.

Рисунок Е.2 – Фрагмент второй части апплета

1. Опишите, как меняется положение графика функции с параметром при изменении значения a.

Aa π Type your answer here...

2. Сколько можно выделить случаев расположения графиков функций y_1 и y_2, в каждом из которых выполняется условие задачи?
Изобразите все подходящие положения графиков функций на рабочем поле, используя инструменты на панели.

Aa π Type your answer here...

3. Опираясь на чертёж, определите приближенное значение параметра a, при которых уравнение $|x| \cdot (x-2) + 1 - x - a = 0$ имеет два корня?

Aa π Type your answer here...

Рисунок Е.3 – Открытые вопросы второй части апплета

Часть 3

Напишите, как вы вычислили значения параметра a, при каждом из котором уравнение $|x| \cdot (x-2) + 1 - x - a = 0$ имеет два корня?
Прикрепите своё решение (скан/фото) на полотно ниже, для этого нажмите на значок .

Рисунок Е.4 – Третья часть апплета

ПРИЛОЖЕНИЕ Ж

Анкета для учащихся

1. Оцените свои умения решать уравнения и их системы с параметрами по шкале от 1 до 10.

1 – мне никогда не удавалось справиться с решением таких заданий;

10 – всегда успешно справляюсь с заданием.

Ответы учащихся отображены в диаграмме (рисунок Ж.1).

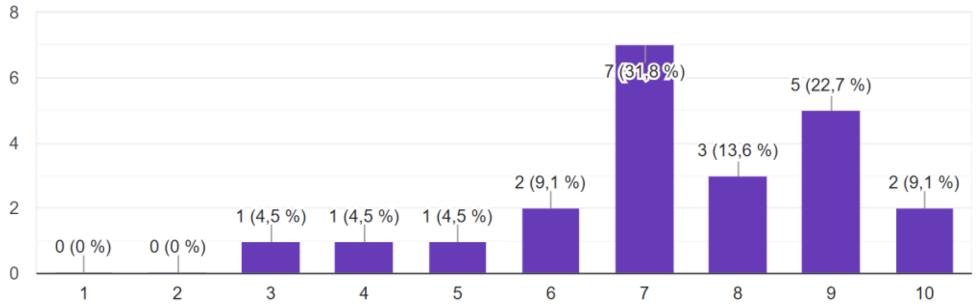


Рисунок Ж.1 – Диаграмма ответов на вопрос 1

2. Используете ли вы графический метод для решения уравнений и систем уравнений с параметрами?

Ответы учащихся отображены в диаграмме (рисунок Ж.2).

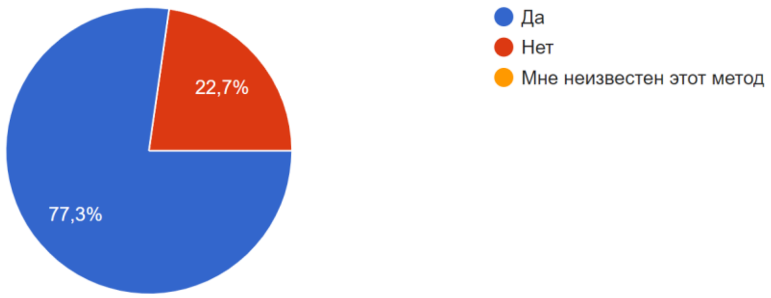


Рисунок Ж.2 – Диаграмма ответов на вопрос 2

3. Сложно ли вам определить, как изменяется график функции с параметром (сжимается/растягивается; сдвигается вверх/вниз/влево/вправо; отражается относительно прямой) при изменении значения параметра?

Ответы учащихся отображены в диаграмме (рисунок Ж.3).

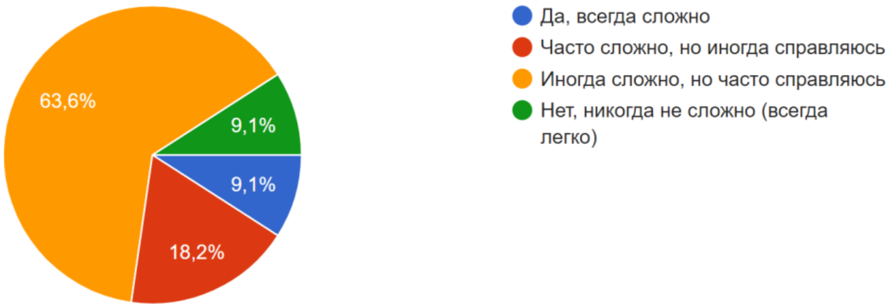


Рисунок Ж.3 – Диаграмма ответов на вопрос 3

4. Для решения задач с параметрами (для построения графиков) вы использовали приложение GeoGebra или аналогичное?

Ответы учащихся отображены в диаграмме (рисунок Ж.4).

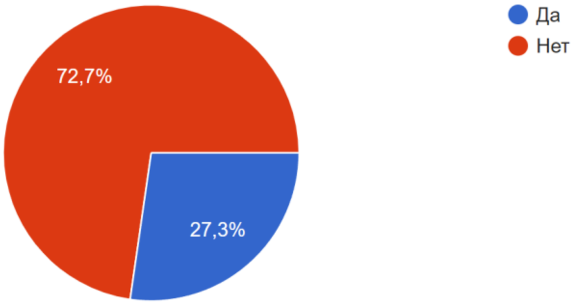


Рисунок Ж.4 – Диаграмма ответов на вопрос 4

5. Умеете ли вы использовать инструменты для построения и преобразования графиков с параметром?

Ответы учащихся отображены в диаграмме (рисунок Ж.5).

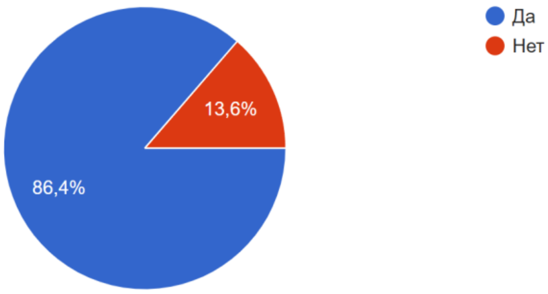


Рисунок Ж.5 – Диаграмма ответов на вопрос 5

6. Оцените по 10-балльной шкале эффективность (полезность) использования апплетов в приложении GeoGebra для изучения графического метода решения уравнений с параметром.

Ответы учащихся отображены в диаграмме (рисунок Ж.6).

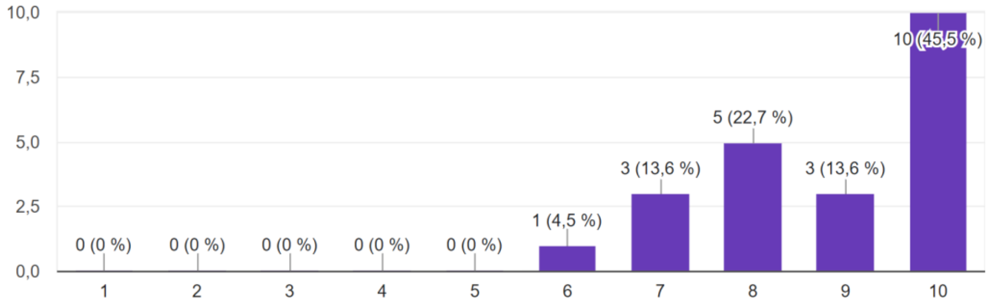


Рисунок Ж.6 – Диаграмма ответов на вопрос 6

7. Выберите утверждения, с которыми Вы согласны:

– апплет помогает быстро и наглядно построить графики функций;

– в апплете можно передвигать и преобразовывать графики функций;

– апплет помогает понять, как меняется расположение графика функции при изменении параметра;

– апплет помогает сформировать наглядные представление об изменении графика функции при изменении параметра;

– апплет помогает быстро оценить своё решение;

– наглядные представления, которые формируются на основе апплета, помогут в дальнейшем решать задачи с параметром без использования программных средств;

8. Хотели бы вы на уроках математики выполнять задания в апплетах, чтобы научиться решать задачи с параметрами?

Ответы учащихся отображены в диаграмме (рисунок Ж.7).

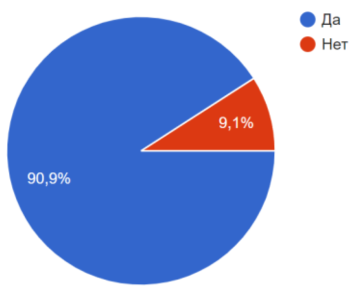


Диаграмма Ж.7 – Диаграмма ответов на вопрос 8

ПРИЛОЖЕНИЕ З

Фотографии с урока

Фотоотчет проведенной апробации представлен на рисунках З.1 и З.2.

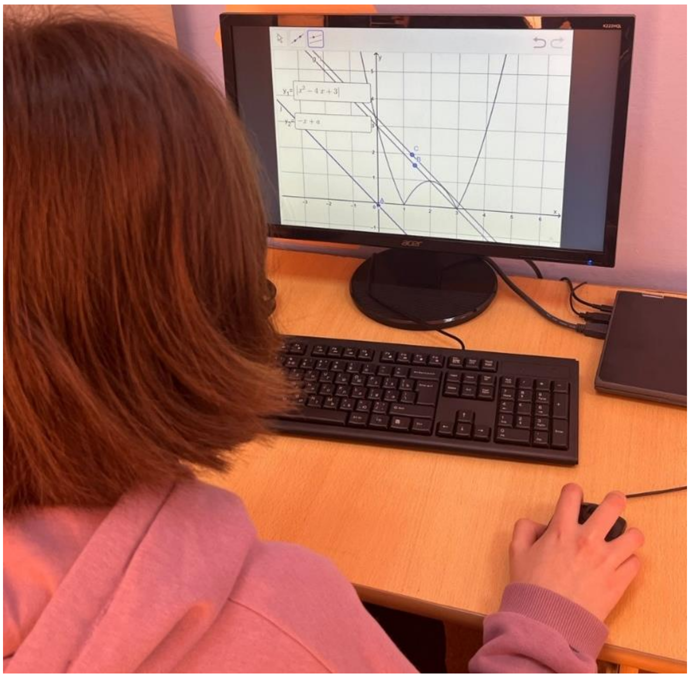


Рисунок З.1 – Выполнение построения учащимся

Рисунок З.2 – Выполнение построений на интерактивной панели