МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика обучения учащихся основной школы решению задач на доказательство

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.01 Педагогическое образование,
направленность программы бакалавриата
«Математика»

Проверка на объем заимствований:
_____________% авторского текста

Работа ________________ к защите
« ___ » ____________ 20__ г.
зав. кафедрой математики и методики обучения математике
______________ Суховиенко Е.А.

Выполнил:
студент группы ЗФ-413/087-4-1
Бусарнов Алексей Петрович

Научный руководитель:
к.ф-м.н., доцент кафедры МиМОМ
Баранова Валентина Александровна

Челябинск
2017

Оглавление

Введение

Современный период развития математического образования характеризуется пересмотром его приоритетных целей. Ведущее место в этой системе занимает интеллектуальное развитие личности школьника, формирование у него качеств мышления, характерных для математической деятельности и качеств, необходимых для полноценной жизни в обществе.

По мнению великого итальянского ученого Галилео Галилея; «геометрия является самым могущественным средством для изощрения наших умственных способностей и дает нам возможность правильно мыслить и рассуждать». Изучение геометрии состоит не только в формировании специальных геометрических знаний, но и способствует развитию личности, умению логически мыслить и доказательно обосновывать истинность утверждений в любой сфере деятельности. Хорошее математическое образование, пространственное воображение и логическое мышление необходимо не только профессиональному математику, но и инженеру, и экономисту, и дизайнеру, и юристу, и программисту, и специалистам многих других профессий.

А. В. Погорелов, в послесловии к одному из первых изданий своего учебника по геометрии для средней школы пишет: ≪Главная задача преподавания геометрии в школе — научить учащегося логически рассуждать, аргументировать свои утверждения, доказывать. Очень немногие из оканчивающих школу будут математиками, тем более геометрами. Будут и такие, которые в их практической деятельности ни разу не воспользуются теоремой Пифагора. Однако вряд ли найдется хотя бы один, которому не придется рассуждать, анализировать, доказывать≫

Традиционно считается, что геометрия – строго логическая наука, изучение которой в первую очередь (и главным образом) развивает логическое мышление. Математик и педагог, автор учебников и пособий для школьников И.Ф.Шарыгин утверждал[22], что геометрическое мышление, формирующееся при изучении геометрии, имеет две составляющие – наглядно-образную и логическую. Учителю необходимо создавать «мотивационный фон» особенно при объяснении нового материала, в частности при доказательстве математических фактов, сколь бы очевидными они не казались, поскольку, по словам математика двадцатого века Д.Пойа, роль доказательств в школьном математическом образовании, является наиболее существенной частью вклада математики в общую культуру человека. По словам великого математика Давида Гильберта, существует поразительная гармония между наглядностью, интуицией и логическим мышлением, заключающаяся в том, что общее и абстрактное, с одной стороны, и непосредственно наглядное, с другой, объединяются в единый мир идей. Поэтому доказательства математических фактов должны быть, по возможности, логически строгими и опираться при этом на имеющиеся наглядно-интуитивные представления учащегося.

Вопросы методики преподавания математики всегда интересовали русских ученых – математиков и педагогов. Вопросами доказательства теорем занимались Е. Ф. Данилова, В. А. Далингер, В.И. Лященко, И. С. Градштейн и мн. другие. В разработке методики преподавания математики участвует широкий круг ученых, методистов, учителей, которые печатают свои работы и делятся опытом на страницах журнала «Математика в школе» и многих других научно-методических изданий, и даже создают блоги и видео-уроки в интернете.

Обучение доказательству теорем нуждается в детальном рассмотрении. Известно[4], что многие учащиеся формально заучивают теорему и ее доказательство, не понимая его логического смысла. Практика показывает, что некоторые ученики не могут самостоятельно сформулировать утверждение, из приведенных ранее суждений, или построить новое на основе пройденных аксиом. Учащиеся часто не понимают необходимость обоснования тех или иных этапов доказательств, ссылаясь на их очевидность, или на рисунок.

Ученик иногда запоминает сочетания слов, которые от него часто требуют при обоснованиях, но при проверке можно обнаружить, что он говорит эти слова механически. Например, говорит: «В треугольниках против равных сторон лежат равные углы», не понимая, что это утверждение применимо только к равным треугольникам. Иногда, ученик, доказавший теорему, не может указать на чертеже те элементы, о которых он говорил при доказательстве [4].

Формальное заучивание теории[5], зубрежка, подкрепляемая бесконечным повторением, калечат мышление ученика. Как верно замечает Э. В. Ильенков, такое повторение «следовало бы назвать не матерью, а мачехой учения». Математического знания не существует, если учащийся просто запоминает материал, ибо работу мысли нельзя заменить работой памяти.

В связи со всем вышесказанным ясно, что перед учителями математики стоит сложнейшая методическая проблема обучения школьников доказательству теорем и решению геометрических задач на доказательство. Это подтверждает актуальность выбранной темы квалификационной работы.

Гипотеза исследования: Процесс обучения учащихся доказательству теорем и решению геометрических задач на доказательство будет более эффективным, если:

– проводить пропедевтическую работу с учащимися 5-6 классов по формированию потребности в логических рассуждениях и умений выполнять дедуктивные выводы;

– формировать у учащихся правильное понимание сути доказательства, его общих приемов, а также приемов по поиску и открытию фактов и аргументов;

– осуществлять исследовательскую деятельность в процессе доказательства теорем и решения геометрических задач на доказательство;

– уделять особое внимание развитию логического мышления учащихся средствами курса геометрии в учебное время, а также на занятиях специальных элективных курсов и при подготовке к ОГЭ

Цель исследования: Совершенствование методики обучения решению геометрических задач на доказательство, реализующей в достаточной мере формирование логического мышления, умений рассуждать и решать задачи.

Объект исследования: процесс обучения геометрии в основной школе.

Предмет исследования: методика обучения решению задач на доказательство в основной школе.

Задачи:

1. Изучить теоретический и практический материал по данной теме.
2. Рассмотреть различные подходы к доказательству теорем.
3. Ознакомиться с имеющимся педагогическим опытом по данной теме.
4. Разработать методические рекомендации, которые будут способствовать улучшению качества обучения учащихся построению доказательств.
5. Разработать методические материалы для внеклассной работы по методам решения задач на доказательство разными способами.

Квалификационная работа состоит из двух глав:

В первой главе изложены некоторые сведения из теории доказательств.

Вторая глава посвящена методическим рекомендациям к обучению построению доказательств. В ней приводятся различные пропедевтические и методические рекомендации, решение задач на доказательство разными способами.

В приложении, представлен материал для урока: «задача одна – решения разные» в качестве примера решения задач на доказательство.

Глава 1. Теоретические основы методики доказательства

1.1 Основы теории доказательств и ее элементы

Доказательство геометрического предложения имеет своей целью установление его достоверности при помощи логического вывода из уже доказанных или известных истин. Существенной особенностью геометрического доказательства в значительной степени, определяющей его необходимость, является то, что при помощи доказательства устанавливаются общие свойства пространственных фигур и объектов. Если доказательство проведено правильно и опиралось на правильные исходные положения, то это дает нам безусловную уверенность в истинности доказываемого положения. Сущность доказательства в *общем*: заключается в том, что каждое составляющие его предложение, кроме исходных, следует из предшествующих ему предложений по какому-либо логическому правилу. Эти правила предоставляет теория доказательств – основной раздел математической логики. По словам Хао Ван: "Вместе с теорией моделей, аксиоматической теорией множеств и теорией вычислений, теория доказательств является одним из так называемых «четырёх столпов» математики".

Посредством доказательства удостоверяется истинность или ложность данного суждения. Структура доказательства состоит из трех основных элементов:

I. **Тезис** (главная цель доказательства – установить истинность тезиса) — доказываемое утверждение. Форма его выражения – суждение;

II. **Аргументы** (основания доказательства) — положения, или утверждения, на которые опирается доказательство и из которых следует истинность доказываемого тезиса, только в случае их истинности. Форма выражения аргументов – суждения. Связывая аргументы воедино, приходим к умозаключениям, которые строятся по определенным правилам. Примерами аргументов могут быть: аксиомы, ранее доказанные теоремы, разного рода определения.

III. **Демонстрация** — последовательность расположения аргументов и выводов, образующих цепь умозаключений. Иными словами – логический процесс взаимосвязи суждений, в результате которого осуществляется переход аргументов к тезису.

Каждое математическое предложение обладают содержанием и логической структурой. Существуют элементарные и составные предложения.

Составные, как не трудно догадаться, образуются из элементарных с помощью слов «и», «или», частицы «не» и некоторых других. Это так называемые *логические связки*. Выяснить логическую структуру составного предложения – значит установить:

- из каких элементарных предложений образованно данное составное предложение;
- с помощью каких логических связок оно было образовано.

Среди суждений, устанавливающих различные отношения между математическими понятиями, выделяют *высказывания* и *высказывательные формы*.

Высказывание – предложение, относительно которого имеет смысл вопрос, истинно оно или ложно.

Высказывательная форма – это предложение с одной или несколькими переменными, которое обращается в высказывание при подстановке в него конкретных значений переменных.

В математике часто встречаются предложения, содержащие одну или несколько переменных, это не что иное, как высказывательная форма.

Слова “ВСЕ” и “НЕКОТОРЫЕ” называют *кванторами*. Слово «квантор» (*от лат. quantum — сколько*) показывает, о скольких (всех или нескольких) объектах идет речь в том или ином предложении.

Различают *квантор общности* и *квантор существования*.

Квантор общности записывается в виде: ($\forall$) - это слова: «любой», «всякий», «каждый», «все».

Квантор существования записывается в виде: ($\exists$) - это слова: «существует», «некоторые», «найдется», «хотя бы один».

Многие математические предложения имеют форму высказываний с кванторами, например:

- Все квадраты являются прямоугольниками
- В любом треугольники сумма внутренних углов равна 180°
- Некоторые действительные числа являются рациональными.

Значение истинности высказываний с квантором устанавливается следующим образом.

Рассмотрим высказывание:

✓ Любой прямоугольник является квадратом.

Это – ложное высказывание. Чтобы в этом убедиться, достаточно начертить прямоугольник, который не является квадратом. Таким образом, данное утверждение опровергнуто приведением *контрпримера*.

Вообще, истинность высказываний с квантором общности устанавливается путём доказательства. Что бы опровергнуть их (убедиться в их ложности) достаточно привести контрпример. Под контрпримером понимают такой объект, для которого условие предложения истинно, а заключение ложно.

Значения истинности высказывания с квантором существования устанавливают следующим образом.

Рассмотрим высказывания:

I. Существуют три прямые, которые проходят через одну точку.

II. Существуют прямоугольные равносторонние треугольники.

Первое высказывание истинное. Чтобы обосновать этот вывод, достаточно привести пример (нарисовать прямые, проходящие через одну точку).

Второе высказывание ложное. Действительно, в прямоугольном треугольнике один угол обязательно содержит 90°, а в равностороннем - величина каждого из углов равна $60°$. Значит, среди прямоугольных треугольников равносторонних нет. Таким образом, чтобы обосновать свой вывод во втором случае, нам пришлось провести доказательство.

Вообще истинность высказываний с квантором существования устанавливается при помощи конкретного примера. Чтобы убедиться в ложности высказывания, необходимо провести доказательство.

Отрицания высказывания с обоими кванторами может быть построено двумя способами:

1. перед данным высказыванием ставится слова «неверно, что…»;
2. квантор общности (или существования) заменяется квантором существования (или общности), а предложение, стоящее после квантора, заменяется его отрицанием.

Данное правило является достаточным для правильного построения отрицания высказываний с квантором. Важно только соблюдение требования: если данное высказывание было ложным, то его отрицание должно быть истинным, и наоборот.

1.2 Отношения равносильности и следования. Необходимые и достаточные условия

Все логические рассуждения не обходятся без слов “следовательно”, “отсюда вытекает”, “из данного предложения следует”, “вследствие”.

Говорят, что из предложения A следует предложение B, если всякий раз, когда истинно предложение A, истинно и предложение B.

Предложение «Из A следует B» можно записать, используя символ " $\Rightarrow$ ", таким образом: $A \Rightarrow B$. Знак " $\Rightarrow$ " – это знак импликации (знак отношения следования между предложениями).

Запись $A \Rightarrow B$ можно читать по разному:

1) из A следует B; 2) всякое A есть B; 3) если A, то B; 4) есть A, следовательно, есть B; и так далее.

Даны предложения:

A – «Треугольник равнобедренный»

B – «Углы при основании треугольника равны»

В курсе планиметрии доказано, что если треугольник равнобедренный, то в нём углы при основании равны (т.е. можно утверждать, что $A \Rightarrow B$). И обратно:

Если углы при основании треугольника равны, то этот треугольник – равнобедренный (т.е. $B \Rightarrow A$).

Таким образом, если из предложения A следует предложение B, а из предложения B следует A, то говорят, что предложения A и B *равносильны*. Записывается как $A \Leftrightarrow B$.

Согласно этому определению, предложение «Треугольник равнобедренный» и «Углы при основании треугольника равны» равносильны.

Запись $A \Leftrightarrow B$ еще можно читать несколькими способами, например: «А тогда, и только тогда, когда В», «А, если и только, если В».

Пример: *Даны предложения:* А – *«Углы X и Y вертикальные»,* В – *«Углы X и Y равны». Выясним, в каком отношении находятся данные предложения.*

Из курса планиметрии известно, что если углы вертикальные, то они равны, т.е. $A \Rightarrow B$, а вот следования $B \Rightarrow A$ нет: из равенства углов не следует что такие углы вертикальные. Значит, два данных предложения не равносильны, они находятся только в отношении импликации (следования), причем только из А следует В.

Понятие отношения следования между предложениями позволяет уточнить смысл слов «необходимо» и «достаточно».

Если из предложения А следует предложение В , то говорят, что В – есть необходимое условие для А, а А – является достаточным условием для В.

Ранее в примере о вертикальных углах было показано, что $A \Rightarrow B$. Поэтому согласно данному определению можно сказать, что равенство углов – есть необходимое условие для того, что бы углы были вертикальными, а вертикальность углов, есть достаточное для их равенства. Поэтому предложение: «Если углы вертикальные, то они равны» можно сформулировать, используя слова «необходимо» и «достаточно»:

- Для того чтобы углы были вертикальными, необходимо, что бы они были равны.
- Для того чтобы углы были равны, достаточно, чтобы они были вертикальными.

Рассмотрим еще пример. Дано предложение: «Для того, чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны». Выясним, как можно сформулировать это предложение иначе.

Видим, что предложение «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны» следует из предложения «Четырехугольник – ромб». Следовательно, исходное предложение «Для того, чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны» можно сформулировать несколькими способами:

1) Во всяком ромбе диагонали взаимно перпендикулярны.
2) Чтобы диагонали четырехугольника были взаимно перпендикулярны, достаточно, чтобы он был ромбом.
3) Если четырехугольник – ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны.
4) Из того, что четырехугольник – ромб, следует, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

Четкое знание учащимися правил отношения и понимание необходимых и достаточных условий, в утверждениях, позволяет избегать трудностей при решении задач на доказательство, и доказательстве теорем. А также, легко справляться с заданием модуля «Геометрия» ОГЭ, в которых необходимо выбрать верное утверждение.

1.3 Структура, виды и дедуктивное доказательство теорем

В теории доказательств существуют некоторые виды суждений:

– общеутвердительные и общеотрицательные
– частноутвердительные и частноотрицательные.

Большинство же суждений в математике являются общеутвердительными или общеотрицательными.

Общеутвердительное суждение:

— «Для всех x, если x присуще свойство S, то x присуще свойство P»

Записывает в виде:

$$(\forall x \in \mathrm{X})\big(S(x) \Rightarrow P(x)\big)$$

Общеотрицательное суждение:

— «Ни одному x, которому присуще свойство S, не присуще свойство P»

Записывает в виде:

$$(\forall x \in \mathrm{X})\big(S(x) \Rightarrow \bar{P}(x)\big)$$

Такие суждения либо принимаются за истинные без доказательства, либо их истинность устанавливается посредством спецмального логического рассуждения. В первом случае такое суждения называются аксиомами, во втором – теоремами.

Свойства первоначальных (основных) математических понятий раскрываются в ***аксиомах*** (др.-греч. ἀξίωμα — утверждение, положение) – суждение, принимаемое без доказательства.

Система аксиом любой математической теории (в частности планиметрии), раскрывая свойства основных понятий, дает, так сказать, их определения. Эти определения называются *аксиоматическими*.

Свойства понятий, не являющиеся основными и не включенные в определения, как правило, доказываются, т.е. выводятся как следствия из определений, аксиом и ранее доказанных свойств. Доказываемые свойства понятий чаще всего называются *теоремами*, иногда *следствиями* или *признаками*. Несмотря на разные названия, структура этих предложений одинакова.

Теорема (др.-греч. θεώρημα — «доказательство, вид; взгляд; представление, положение») – это суждение, утверждение о том, что из свойства A следует свойство B. Истинность этого высказывания устанавливается путём доказательства.

Так как теорема есть высказывание вида $A \Longrightarrow B$, то её словестная запись может иметь различную форму. Однако, в каком бы виде ни была сформулирована теорема, в ней всегда присутствуют два компонента:

условие – то, что дано (A); и ***заключение*** – что нужно доказать (B).

Пусть дана теорема: $A \Longrightarrow B$. Образуем из неё высказывания вида:

$B \Longrightarrow A, \bar{A} \Longrightarrow \bar{B}, \bar{B} \Longrightarrow \bar{A}$.

Пара теорем (утверждений) $A \Longrightarrow B$ и $B \Longrightarrow A$ будут называться ***теоремами обратными*** друг к другу.

Пара теорем (утверждений) $A \Longrightarrow B$ и $\bar{A} \Longrightarrow \bar{B}$ будут называться ***теоремами противоположенными*** друг к другу.

Теорема (утверждение) $\bar{B} \Longrightarrow \bar{A}$ называют ***теоремой обратной противоположной***.

Определено, что теоремы $A \Longrightarrow B$ и $\bar{B} \Longrightarrow \bar{A}$ равносильны, т.е. всегда, когда истинна теорема $A \Longrightarrow B$, будет истинна и теорема $\bar{B} \Longrightarrow \bar{A}$, и наоборот: $A \Longrightarrow B \Leftrightarrow \bar{B} \Longrightarrow \bar{A}$

Такую равносильность называют законом контрапозиции.

После того, как была доказана какая-либо теорема вида $A \Longrightarrow B$, имеет смысл исследовать обратную ей теорему. В каждом случае, нужно проводить её самостоятельное доказательство, так как теорема обратная данной, может быть ложной. Если оказывается верными обе теоремы, данная и обратная ей, то можно их объединить в одну с помощью слов «тогда и только тогда, когда» или «необходимо и достаточно».

В школьном курсе математики для словесной формулировки теоремы используются три формы суждения:

- ✓ *Категорическая.*

Пример: «Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме».

- ✓ *Условная*.

Пример: «Если в треугольнике два угла равны, то треугольник равнобедренный».

- ✓ *Разделительная*.

Пример: «Плоскость и не лежащая на ней прямая либо не пересекаются, либо пересекаются в одной точке».

Теоремы категорической и разделительной форм можно переформулировать, используя словосочетание **«если... то...»,** т. е. обратить ее формулировку в условную.

Например, дана теорема: «В ромбе диагонали взаимно перпендикулярны». В *условной* форме формулировка этой теоремы будет выглядеть так: «Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны».

Или еще пример: «В равнобедренном треугольнике углы при основании равны».

Сформулируем теорему в условной форме. Будем иметь: «Если треугольник равнобедренный, то углы при основании равны». Поскольку понятие «равнобедренный треугольник» находится в условии, то эта теорема выражает свойство объекта.

Заметим, что разбор структуры теоремы более доступен для учащихся в том случае, когда она сформулирована в условной форме.

Условная форма теоремы может быть эффективно использована и для того, чтобы дать ответ на вопрос: «О свойстве или о признаке идет речь в теореме?» На этот вопрос легко ответить, если теорему сформулировать в условной форме. Если окажется, что рассматриваемое понятие находится в условии теоремы, то теорема выражает свойство этого понятия, если же понятие находится в заключении теоремы, то она выражает признак.

Доказать теорему $A \Longrightarrow B$ – это значит установить логическим путем, что всегда, когда выполняется свойство A (условие), будет выполняться и свойство B (заключение). В основе доказательства лежит ***рассуждение*** – логическая операция, в результате которой из одного или нескольких взаимосвязанных по смыслу предложений получается предложение, содержащие новое (по отношению к исходным) знание.

Первое предложение, носящее общий характер, называют *общей* или *большой* посылкой.

Второе предложение, отражающее частный случай, называют *частной* или *малой* посылкой.

Выводимый из двух посылок новый факт называют *заключением*. В любом рассуждении присутствуют посылки и есть заключение. Между посылками и заключением существует определенная связь, с помощью которой они составляют рассуждение. Рассуждение, в котором имеет место отношение следования между посылками и заключением, называют *дедуктивным*. Другими словами, рассуждение дедуктивно, если с его помощью из истинных посылок невозможно получить ложное заключение. В противном случае рассуждение считается не дедуктивным.

Полагают, что в основе каждого дедуктивного рассуждения лежит определенное правило вывода. Основными из них являются:

Правило заключения : $(A \Longrightarrow B$ и $A(\alpha)) \Longrightarrow \ B(\alpha)$,

где $A \Longrightarrow B$ - общая посылка, $B(\alpha)$ заключение.

$$\frac{A \Rightarrow B, A}{B}$$

Правило отрицания : $(A \Longrightarrow B$ и $\overline{B(\alpha)}) \Longrightarrow \ \overline{A(\alpha)}$,

$$\frac{A \Rightarrow B, \bar{B}}{\bar{A}}$$

Правило силлогизма : $(A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow C\ ) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$,

$$\frac{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}$$

Применение данных правил гарантирует, что рассуждение будет дедуктивным, т.е. позволяет из истинных посылок выводить истинное заключение.

Так как большинство умозаключений в курсе планиметрии делается по правилу заключения и по правилу отрицания, то на содержательном уровне, допустимо познакомить с ним учащихся.

Так же, были придуманы умышленно неправильные рассуждения, но имеющие видимость верных. Такие рассуждения получили название софизмов (от греч. σόφισμα; «мастерство, умение, хитрая выдумка, уловка, мудрость»). Разбор софизмов формирует умение правильно рассуждать, а так же помогает усваивать некоторые математические факты и ведет к пониманию логических рассуждений.

1.4 Способы доказательства высказываний и утверждений

Главным способом математических доказательств является дедуктивный вывод. При этом математическое доказательство представляет собой такую цепочку дедуктивных рассуждений, что заключение каждого из них, кроме последнего, является посылкой в одном из последующих рассуждений. Правила вывода предпочтительно рассматривать не только как формальное отражение элементарных шагов доказательства, но и как *эвристические средства*, которые помогают строить доказательства.

Эвристика – это совокупность приемов и методов, облегчающих и упрощающих решение познавательных, конструктивных, практических задач (в частности и задач на доказательство).

Основные сложившиеся эвристические приёмы построения обычных неформальных доказательств зафиксированы в виде правил вывода, что позволяет использовать эти правила в качестве средств, помогающих при построении доказательств. В курсе основной школы к базовым эвристикам можно отнести правила заключения, отрицания и силлогизма, рассмотренные ранее.

Традиционно выделяются три способа поиска и проведения доказательства:

- нисходящий, основанный на выведении следствий из условий и ранее доказанных теорем, используемых в качестве посылок;
- восходящий, основанный на отыскании достаточных условий для выполнения заключения доказываемого утверждения (отталкиваются от заключения);
- комбинированный, который является сочетанием двух первых (сочетание движения в обоих направлениях).

Отметим, что первый и второй способы традиционно называются соответственно синтетический и аналитический.

Сущность **синтетического** (гр. Synthesis – соединение, объединение) способа доказательств состоит в том, что отыскивают истинные утверждения, которые можно было бы путём логически обоснованных шагов преобразовать их в данное требуемое утверждение.

Сущность **аналитического** (гр. Analyses – разчленять, разложить, разбор) способа доказательства утверждений состоит в том, что исходным пунктом для обоснования требуемого утверждения является само утверждение, которое путём логически обоснованных шагов сводится к утверждению, известному как истинное.

Восходящий анализ определяется следующим рассуждением: “*для того, чтобы А было верно, достаточно, что бы было верно В*”.

Для синтетического (нисходящего) способа характерным является описание того, что и как делается. Поэтому доказательство, приведённое этим способом зачастую, кажется учащимся искусственно придуманным. Помимо трудностей, связанных с проведением соответствующих шагов доказательства при использовании синтетического способа, возникает дополнительная трудность – поиск того самого, исходно истинного утверждения.

Используя аналитический метод, напротив, учащийся действует сознательно и убежденно, ему известно от чего отталкиваться. Но, к сожалению, аналитический способ доказательства не всегда правомерен. Поэтому, на практике проведения доказательств, будет полезно последовательно применять оба способа:

– аналитическим путем легко обнаружить нужное истинное утверждение, которое можно принять за исходное, а уже синтетическим путем провести требуемое доказательство.

Вообще, строго говоря, проведение любого доказательства опирается на три блока знаний и умений: *содержательный*, *структурный*, *логический*.

В *содержательный блок* входят элементы, связанные с ранее изученными математическими понятиями и фактами, которые использованы или в формулировке утверждения, или в качестве аргументов при проведении рассуждений. Эти элементы существенно зависят от логической структуры курса, от его аксиоматики, от методических особенностей изложения и других особенностей, а поэтому для одной и той же теоремы или задачи на доказательство в различных учебниках содержательный блок может оказаться различным.

В *структурный блок* входят знания и умения, связанные со структурой утверждения и возможностями их преобразования. В этот блок входят умения выделять условие и заключение теоремы или утверждения, преобразовывать логическую форму с целью получения более простых утверждений и т. д.

Логический блок содержит знания и умения, связанные с правилами логических рассуждений.

Различают *общие* и *частные* методы доказательства теорем.

Общие методы доказательства:

- синтетический
- аналитический (восходящий анализ, нисходящий анализ)
- аналитико-синтетический
- метод от противного
- метод исключения
- метод перебора
- метод полной индукции
- метод математической индукции
- метод бесконечных исключений
- метод конструирования

Частные методы доказательства:

- векторный
- координатный
- координатно-векторный
- метод геометрических преобразований
- алгебраический метод (сводится к решению уравнений, систем уравнений, неравенств, систем неравенств).

На рисунке 1 показаны схематично методы доказательств утверждений:

(Рис. 1)

Метод “от противного” заключается в том, что доказательство теоремы начинают с предположения, что из $S(x) \nRightarrow P(x)$. Тогда имеет место, истинность утверждения $S(x)$ и ложность утверждения $P(x)$. Из утверждения выводят следствия до тех пор, пока не получат следствие, находящееся в противоречии либо с условием теоремы, либо с ранее изученным теоретическим фактом. Данный метод основан на использовании закона контрапозиции, который рассматривался ранее;

Так же существует ***аксиоматический*** метод доказательства – метод построения теорий, в соответствии с которым разрешается пользоваться в доказательствах лишь аксиомами и ранее выведенными из них утверждениями. Основания для применения аксиоматического метода могут быть разными, что обычно приводит к различению аксиом не только по их формулировкам, но и по их методологическим (прагматическим) статусам.

Тенденция построения учебников по геометрии для средней школы в основном ориентирована на аксиоматическую теорию. Сразу ли в начале курса (как построен учебник А.В. Погорелова) излагаются все аксиомы планиметрии или по мере содержательной необходимости в них (как в учебниках авторов Л.С. Атанасяна и А.Д. Александрова), но такой подход это уже объективная реальность.

В обучении аксиоматическому методу доказательства можно выделить несколько этапов.

Первый – направлен на формирование общих приемов поиска и проведения доказательства, которые впоследствии будут использоваться во всех последующих этапах. Этот этап необходимо осуществлять во время изучения первых тем школьного курса геометрии основной школы. Данный этап включает в себя следующие пункты:

- анализ текста утверждения;
- развёртывания условия;
- последовательный анализ заключения и условия утверждения;
- раскрытие содержания прямого и косвенного методов доказательства.

Второй – включает в себя освоение специфических приемов поиска и проведения доказательства утверждений в зависимости от их конкретного содержания и особенно математических методов, используемых при доказательстве утверждений.

Третий – включает в себя раскрытия сущности построения школьного курса геометрии на основе аксиоматической теории.

Итак: В построении школьного курса основной школы можно выявить три основных подхода:

- ✓ Построение курса на содержательной основе, когда материал располагается в систематическом порядке. Эту систему можно определить как принятыми математическими трактовками, так и развёртыванием последующих определений объектов и доказательством отдельных свойств этих объектов. Система аксиом при этом построении *не* вводится. Для аргументации рассуждений используются и ранее доказанные теоремы, и свойства, прочитанные на чертеже;
- ✓ Построение курса на дедуктивной основе. Система аксиом вводится в начале курса. Раскрывается смысл терминов: аксиома, теорема, доказательство. Оговариваются аргументы доказательства;
- ✓ Построение курса основано на дедуктивном подходе, т.е. на определенной аксиоматике, которая вводится постепенно. Степень доказательности утверждений постепенно усиливается.

В первой главе рассмотрены основы теории доказательств, отношения между утверждениями, необходимые и достаточные условия. Разобраны структура и виды теорем. Показаны основные способы доказательства утверждений. Каждый из рассмотренных методов обладает как достоинствами, так и недостатками. Поэтому ни один из них не может быть рекомендован в качестве универсального и единственного метода. Четкое знание сущности методов явится надежным орудием в руках учащихся для самостоятельного отыскания решений задач и во многих случаях поможет учащимся найти решение задач более простое, короткое изящное.

Глава 2. Методические рекомендации к обучению решению задач на доказательство в основной школе

2.1 Пропедевтика обучения доказательствам

Прежде всего, работа по обучению учащихся доказательству теорем должна начинаться задолго до того, как начнут явно изучаться теоремы. Пропедевтически готовить учащегося к доказательству теорем надо еще на уровне 5—6 классов.

Поскольку в основе доказательства теорем лежат такие умения, как оперирование понятиями, работа с текстом теоремы, работа с чертежом, выбор необходимых знаний для выведения следствий, то пропедевтика обучения доказательству должна строиться вокруг перечисленных умений.

Прежде, чем подробно характеризовать пропедевтическую работу по подготовке учащихся к доказательству, перечислим основные направления этой работы:

- ✓ Формировать у учащихся умения подмечать закономерности.
- ✓ Обучать учащихся умению выделять условие и заключение в математических утверждениях.
- ✓ Воспитывать у школьников понимание необходимости доказательства.
- ✓ Формировать у учащихся умения проводить доказательные рассуждения, делать выводы.
- ✓ Знакомить учащихся с простыми и сложными высказываниями и значениями их истинности.
- ✓ Знакомить школьников с понятиями «отрицание высказывания» и обучать школьников умению пользоваться контрпримерами.
- ✓ Обучать учащихся умению выделять различные конфигурации на одном и том же чертеже.

- ✓ Обучать учащихся умению выполнять геометрические чертежи и читать их.
- ✓ Формировать у учащихся умения выводить следствия из заданных условий.

Указанная выше деятельность не только нужна в качестве пропедевтики обучения учащихся доказательствам в систематическом курсе геометрии, но она также играет большую роль уже при изучении всего курса математики основной школы.

Чтобы воспитать в учениках потребность в математических доказательствах нужно, чтобы они понимали, что в математике оперируют с утверждения вида «если что-то является тем-то, то нечто другое следует из этого».

Для ребёнка термин “доказательство” прежде всего, должен означать, что необходимо предпринять действия для проверки, подтверждения факта существования некоего объекта и явления. К сожалению в действительности это далеко не так. Трудности при первоначальном знакомстве с доказательствами вызывает сами термины "докажи", “доказать” “докажите” и т.д. Эти слова вызывают у многих детей ощущение чего-то очень сложного. Известный факт, что зачастую учащиеся даже не пытаются решать задачи, в формулировке которых используются эти слова, а доказательства теорем заучивают наизусть, считая, что по-другому усвоить их невозможно. Поэтому пропедевтика обучения доказательствам прежде всего должна быть направлена на то, чтобы уже в начальной школе сделать привычным слово "докажи" в формулировке математических заданий.

Чем пугает ребенка требование "докажи"? Тем, что оно не встречалось на протяжении 5–6 лет и вдруг появилось, как снег на голову летом. Следовательно, надо организовать обучение так, чтобы это слово стало привычным. Сделать это нетрудно: в ныне действующих учебниках присутствует большое количество заданий, которые после незначительного изменения формулировки позволяют использовать слово "докажи" в связи с закреплением изученной теории.

Например, при отработке определения умножения используются задания, в которых требуется вычислить 16×3, заменив умножение сложением. То же самое задание можно сформулировать по-другому: "Докажи с помощью определения умножения, что $16 \times 3 = 48$". Рассуждения учеников, образцы которых, естественно, должны быть заложены в объяснении учителя, могут быть такими.

«Произведение 16×3 – это по-другому записанная сумма $16 + 16 + 16$. Эта сумма равна 48. Следовательно, $16 \times 3 = 48$».

Даже обычные вычислительные задачи можно формулировать, используя слово "докажи". Например, вместо того чтобы вычислять площадь квадрата с указанной стороной и площадь прямоугольника с указанными сторонами, можно предложить задачу: "Докажи, что площадь квадрата со стороной 6 *см* равна площади прямоугольника со сторонами 12 *см* и 3 *см*". Рассуждения ученика могут быть такими.

«Площадь квадрата со стороной 6 см равна $6\text{ см} \times 6\text{ см} = 36\text{ см}^2$.

Площадь прямоугольника со сторонами 12 см и 3 см равна $12\text{ см} \times 3\text{ см} = 36\text{ см}^2$».

Эти площади равны. Что и требовалось доказать.

Таким образом, необходимо, чтобы при введении первых теорем, учащиеся отчетливо представляли себе главные отличительные черты и примерную структуру математического доказательства.

Так, если перед учениками поставлена задача доказать некоторые утверждения, они должны понимать, следующее:

a) допускаются истинными некоторые отношения и факты, которые входят в условие задачи;

b) от условия к требованию задачи строится логически последовательная цепочка предложений. Каждое из этих предложений должно быть обосновано с помощью суждений, выраженных в условии, определений, известных понятий, аксиомах или ранее доказанных утверждений;

c) заключение является последним звеном в этой цепочке логически расположенных предложений. Если допустить, что условие истинно, если истинна вся данная цепочка утверждений, то и заключение следует признать истинным.

Крайне полезны различные упражнения пропедевтического характера, способны как можно раньше раскрыть эту структуру доказательства перед учащимися. В этом отношении не малые возможности можно найти в учебном материале, относящимся к началам систематических курсов арифметики, алгебры и геометрии.

Задолго до систематического изложения теорем, необходимо уже в V – VI классах сообщать учащимся информацию о некоторых свойствах геометрических фигур без доказательства. Например, при сообщении на уроках, посвящённых геометрическому материалу при работе в V классе, имеет смысл рассказать о признаках равенства треугольников:

Из разноцветных листов бумаги, наложенных друг на друга, однократным разрезанием ножницами учитель получает два равносторонних треугольника. Очевидно, что они равны. При наложении они совпадают. То же делает каждый из учеников.

Тем временем учитель читает соответствующий признак равенства, формирование которого легко заучивается школьниками вместе с символической записью. Например, третий признак равенства треугольников – ССС (сторона-сторона-сторона, или просто «три Эс»):

«Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны».

Таким образом, уже в V классе дети знакомятся с тремя кодами оформления теоремы: словесном, рисуночным и символическим. Эти знания будут полезны для решения задач и построения схемы доказательства. Так же, впервые появляется знак импликации, т.е. " $\Longrightarrow$ " (стрелка), связывающая основание суждения с его заключением. Учащимся, конечно, сообщается, что доказательство сформулированного признака они изучат в курсе геометрии в VII классе. Однако ученики уже будут уметь формулировать теорему, строить (вырезать) равные треугольники. Остается довести пропедевтические знания логическими рассуждениями.

Еще, можно привести пример для более наглядного понимания материала при изучении окружности и ее радиуса. Для того что бы начертить окружность, учитель чертит окружность не обычным способом – циркулем на доске, а взяв небольшой кусок веревки и сделав на ней петлю, привязав один конец к пальцу, который упирает в доску, а на втором конце мел, и натянув веревку, очерчивает круг, центром которого является его палец. Таким образом, ученик видит и понимает значение таких определений как «*Окружность* – геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной ее точки (центра окружности)», и определения её радиуса: «*Радиус* – длина отрезка, соединяющего центр окружности с любой точкой, лежащей на окружности». Подобный пример так же является занимательным и мотивирующим элементом для учеников.

В ряде случаев представляется возможным убедить учащихся в обязательности теоретических обоснований с помощью софизмов, который могут поспособствовать пониманию и указывать возможный способ доказательства. Разбор софизмов, прежде всего, развивает логическое мышление, т.е. прививает навыки правильного мышления. Обнаружить ошибку в софизме – это значит осознать ее, а осознание ошибки предупреждает от повторения ее в других математических рассуждениях. Развитие критического мышления позволит не только успешно освоить точные науки, но и не оказаться жертвой мошенников в жизни. Например, при оформлении кредита в банке не оказаться пожизненным его должником.

Основной акцент в обучении математике учащихся V – VI классов должен быть сделан на формирование обобщенных моделей фигур и стандартов логических рассуждений. Достигнуть этого можно и путём использования обычных арифметических упражнений, а также упражнений на распознавание объектов, принадлежащих понятию, и не принадлежащих ему. Именно на таком материале можно формировать логические правила заключения и отрицания.

2.2 Формирование общих приемов доказательства

Общеизвестно, что в методике преподавания математике процесс решения задачи на доказательство состоит из четырех основных пунктов:

1. мотивация решения задачи и осмысление содержания задачи;
2. поиск плана решения;
3. осуществления плана решения;
4. изучения найденного решения.

Мотивация решения задачи. В учебниках геометрии задачи на доказательство, как правило, формулируются предельно кратко, определенно и чётко. В такой лаконичной, математически корректной форме не всегда улавливается теоретическая ценность, отсутствуют моменты, возбуждающие любознательность и интерес учащихся.

Учителю стоит представить условие задачи так, что бы появилась возможность обратить на задачу внимание всех учащихся класса, вызвать к ней интерес у как можно большего числа учеников и продолжить беседу по задаче и после доказательства её требования. Конечно, универсального способа и конкретного приёма указать невозможно, его попросту нет, однако можно предложить отдельные методические советы:

- ✓ Показать ученикам, как теоретическая задача возникает из практической.

Задачи с практическим содержанием вызывают интерес у многих учащихся. Поэтому интерес к задаче значительно возрастет, если показать её практическое значение и применение. Возможно использование личного опыта учителя, или применение изучаемого материала в человеческой деятельности.

- ✓ Исключение из текста условия задачи её требования.

Полезно, чтобы в некоторых задачах учащиеся сами пытались узнать, что можно доказать, воспользовавшись данной геометрической ситуации.

- ✓ Применение проблемной постановки вопроса к задаче.

В тех случаях, когда задача для учащихся является не достаточно проблемной, полезно заменить её требование более интересным и перспективным. Необходимо так же соответственно изменить и условие задачи.

- ✓ Предложение задачи в занимательной форме.
- ✓ Построение системы подготовительных упражнений и повторение необходимых элементов, самостоятельное доказательство требований которых помогает учащимся открыть решение основной задачи.

Рассмотрим это на примере следующей задачи:

Задача. Определить вид четырёхугольника, который получается в результате последовательного соединения середин сторон любого выпуклого четырехугольника.

Пусть каждый ученик построит произвольный четырёхугольник. При аккуратном выполнении построения они заметят, что получается параллелограмм (это является открытием гипотезы).

Немедленно возникает проблемная ситуация, мотивирующая необходимость обоснования случившегося факта. У некоторых учащихся окажутся частные виды параллелограмма: ромб, прямоугольник, квадрат. Возникает новая интересная проблема: от каких особенностей исходного четырехугольника зависит вид полученного параллелограмма. Так же будет полезным начертить на доске, или на слайде, несколько разных вариантов чертежа.

После обсуждения задачи учитель предлагает доказать, что полученная в результате построения фигура действительно является параллелограммом. Для этого надо:

- выяснить, от чего зависит вид параллелограмма;
- сделать чертеж (если необходимо) и краткую запись;
- записать доказательство, если оно было найдено в результате выполнения анализа.

Данные рекомендации можно оформить в виде плаката или слайда.

Проверка справедливости доказательства:

1. Прочитайте формулировку утверждения задачи. Выделите условие и заключение.
2. Проверьте выполнение утверждения на нескольких частных примерах.
3. Если хотя бы в одном примере утверждение не подтверждается, то следует опровергнуть тезис известными способами (приведения

контрпримера, выведения из тезиса ложного следствия или доказательство утверждения, противоречащего данному).

4. Если же тезис подтверждается во всех случаях или его не удается опровергнуть известными способами, то приступайте к проверке аргументации.

5. Если аргумент опровергается, то доказательство отклоняется. Если же нет – то можно переходить к проверке демонстрации.

6. Если в приведенной демонстрации ошибки не установлены, то делается вывод об истинности проведённого доказательства. Если обнаруживаются ошибки – то доказательство отклоняется.

2.3 Исследовательская деятельность при решении задач

При анализе различных подходов к решению геометрических задач, различных теорий поиска их решения, опираясь на научные концепции исследовательской и творческой деятельности, можно выделить систему исследовательских умений при решении задач на доказательство. Именно такие умения составляют исследовательскую деятельность учащихся на самом первом её этапе. Такая деятельность должна быть посильна всем учащимся, однако, уровень и скорость овладения ею у каждого ученика свои.

Деятельность по решению задач на доказательство составляют следующие исследовательские этапы:

- умение выделять элементы задачи;
- умение находить фигуры, попадающие под данный элемент задачи;
- умение выявлять связи между фигурами и\или их свойствами;

- умение устанавливать связи между полученными связями и элементами в них;
- умения выполнять дополнительные построения;

Выделение элементов задачи

Это умение в основном связано с работой над текстом задачи. Элемент задачи – это те геометрические фигуры и основные отношения между ними, которые входят в условие задачи. К основным отношениям между геометрическими фигурами относят:

- равенство фигур
- подобие фигур
- параллельность и перпендикулярность объектов

Такой подход позволяет различать задачи по числу входящих в них элементов и отношений, при этом важно отдельно выделить неизвестные элементы задачи (на первых порах можно прибегнуть к их выделениям в тексте подчеркивая их). Составления «Дано» решаемой задачи. Проанализируем с этих понятий следующие задачи:

Пример 1: *Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой*.

Элементы задачи: биссектриса угла, вертикальные углы, прямая.

Пример 2: *Докажите, что каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон.*

Элементы задачи: треугольник, сторона треугольника, разность сторон треугольника.

Предложенные примеры содержат два или три элемента. Само выделение элементов не представляет труда для учащихся. Это умение весьма полезно, так как оно позволяет систематизировать понятия, повторить их определения, выявить данные элементы задачи и неизвестные элементы задачи.

В процессе доказательства требования задачи могут и должны появляться, так называемые, *дополнительные* элементы (их иногда называют текущими), они в текст задачи не входят. Эти дополнительные элементы, как правило, появляются или при построении чертежа в соответствии с текстом задачи, или при выполнении дополнительных построений.

Выделение самих фигур, попадающих под данный элемент задачи

Овладение этим умением состоит из двух действий:

1) построение чертежа, соответствующего тексту задачи;
2) непосредственное выделение фигур, попадающих под данный элемент задачи (их обозначение буквами и символами);

Выполняя чертежи, ученики еще раз фиксируют для себя элементы задачи, так как они необходимы для выполнения самого чертежа. При этом у учеников складывается наглядный образ текста задачи, элементов чертежа и элементов задачи, иными словами возникает соответствие между элементами задачи и геометрическими фигурами, полученными на чертеже.

При построении чертежа необходимо выполнять ряд рекомендаций и требований:

1) Чертёж должен представлять собой схематический рисунок фигур, выделенных элементов с обозначением с помощью букв и других знаков, характеристик и свойств объектов, в него входящих. Если в тексте задачи указаны какие-либо обозначения фигуры или её объекты, то эти обозначения должны быть и на чертеже; если же в задаче нет конкретных обозначений, то следует воспользоваться общепринятыми обозначениями или придумать наиболее удобные.

2) Чертеж должен соответствовать задаче. При построении фигур необходимо придерживаться их видовых отличий (если произвольный

треугольник – то и на чертеже должен быть произвольный, а не частный случай).

3) При построении чертежа необязательно выдерживать определенный масштаб. Но желательно соблюдать пропорции в построении отдельных объектов фигур. Обязательно соблюдение отношений фигур, заданных в задаче (параллельность, подобие, равенство и т.д.)

4) Чертеж не должен содержать лишних элементов, не используемых при доказательстве. Для некоторых учащихся, необходимо выделение разными цветами того, что известно, и того что требуется найти.

5) При помощи разных чертежей можно модифицировать доказательство. Разнообразные чертежи одной задачи не привязывают ученика к одному (типовому, шаблонному) варианту решения, не дают ему возможности зазубривать доказательство.

Так же не стоит забывать напоминать учащимся о соизмерении места в тетради и размеров чертежа и его элементов. Нередко, экономия пространства тетради приводит к невозможности изобразить некоторые элементы задачи, потере времени на перерисовывание, или потери необходимых требований.

Установление связей между фигурами

Четкое определение понятия «связи между фигурами, попадающими под данный элемент задачи», дать затруднительно. Точно так же трудно определить число таких связей. Под этими связями будем понимать все те утверждения (аксиомы, определения, теоремы и их следствия, и само условие задачи), которые относятся к рассматриваемым фигурам. Эти связи для учащихся можно просто обозначить как: «свойство фигур».

Процесс поиска свойств фигур носит эвристический характер и происходит, как правило, на интуитивном уровне. Сначала, учащийся выбирает свойства произвольно из набора известных ему свойств, а, накопив определенный опыт в решении задач, начинает выбирать те, которые ему представляются наиболее полезными для доказательства. При этом может получиться так, что некоторые свойства, обнаруженные учеником, оказываются в дальнейшем ненужными, или усложняющими доказательство. Усилия и время были потрачены зря, но, к сожалению, не существует безотказного метода, позволяющего выделить сразу и только необходимые для решения свойства.

Эти умения тесно связаны с рассмотренными приёмами «синтез» и «анализ». Уровень математического мышления довольно большого числа учеников не позволяет им далеко углубиться в синтез – перебор всех возможных свойств фигур. Однако это развивает их способности и увеличивает их возможности в будущем, добавляя опыт в их «багаж знаний».

Представим несколько рекомендаций по нахождению свойств фигур:

- начинаем с выделения свойств, которые следуют непосредственно из условия задачи, при этом ведем запись в виде: «из условия задачи следует»;
- появление других свойств следует так же предварять пояснениями.

Установление связей между свойствами

В этом случае идет речь об анализе уже выделенных свойств, который приводит к доказательству требований задачи. Это умение сильно зависит от личности ученика, и именно здесь может открыться талант ученика в области математики. Остальным ученикам, должна быть оказана максимальная помощь в отыскании путей решения задачи.

Применение дополнительных построений

Часто можно встретить задачи, при решении которых простое сравнение свойств и признаков установленных фигур, попадающих под элементы задачи, не приводит к решению. В этих случаях выручает введение так называемых дополнительных элементов, а для этого требуется, как правило, дополнительные построения. Для вновь введенных элементов задачи процедура исследования повторяется.

Практика показывает, что увидеть нужное дополнительное построение могут далеко не все ученики. Необходимо помочь учащимся научиться видеть и находить это дополнительное построение, и в этом случае роль анализа велика.

В основной школе часто наблюдаются случаи, когда ученики выполняют подобные построения вслепую, без особой логики. Иногда некоторая проба оказывается целесообразной и доказательство находится. Создается видимость того, будто успех в выборе дополнительных построений целиком зависит от случайных обстоятельств. В данном случае учителю необходимо лишний раз убедится, что все ученики понимают какие причины и следствия привели к введению дополнительного построения, и проговорить их еще раз.

2.4 Аналитические методы решения задач на доказательство

Следует отметить, что в действующих учебных пособиях имеется недостаточно примеров для применения аналитических методов доказательства в решениях задач. Различные авторы, часто описывая аналитический метод решения задач, не упоминают о синтетическом методе, который при этом используется. Крайне важно еще раз подчеркнуть, что в чистом виде аналитический метод без синтетической составляющей – невозможен. Как и в случае с синтетическим методом, знакомство с самим принципом аналитического рассуждения необходимо и очень полезно.

Причем как сам анализ, так и аналитический метод вызывают трудности у учащихся. Это в основном связано с тем, что от учеников требуется не просто вспомнить и применить знания, а выдвинуть некоторую идею, чаще всего не стандартную, которая бы позволяла на основной вопрос анализа: “что нужно знать (доказать)?”, чтобы можно было утверждать об истинности этого доказательства.

2.4.1 Восходящий анализ

Восходящий анализ является одним из наиболее эффективных и востребованных средств составления плана решения задачи. При решении большинства задач на доказательство, традиционно решаемых в курсе геометрии основной школы, решения начинается с синтетической деятельности – рассмотрения наиболее естественных выводов, которые вытекают из условия задачи. Однако далее, особенно при доказательстве требований задач повышенной сложности, возникает необходимость в использовании восходящего анализа.

Сравним синтетический и аналитический методы доказательства на примере следующей задачи:

Доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Аналитический метод (восходящий анализ):

1) Чтобы доказать, что $AC \perp BD$, достаточно показать, что $BO \perp AC$.

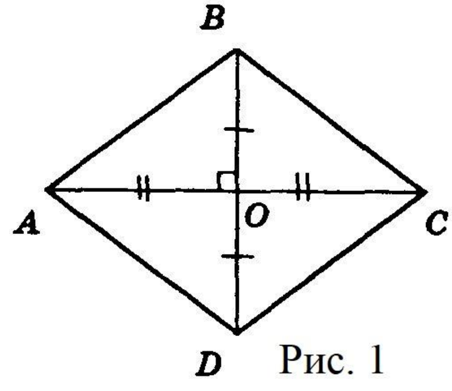

Рис. 1

2) Чтобы доказать, что $BO \perp AC$, достаточно показать, что BO – высота в ΔABC.

3) Чтобы отрезок BO был высотой ΔABC, достаточно доказать что ΔABC равнобедренный, а BO – его медиана.

4) Чтобы ΔABC оказался равнобедренным, достаточно доказать $AB = BC$.

5) Но $AB = BC$ по условию, BO – медиана, т.к $AO = OC$ (по свойству диагоналей параллелограмма).

Синтетический метод (справа в кавычках приведена воображаемая реакция ученика):

1) Рассмотрим ΔABC	«Почему именно его?»
В нём $AB = BC$ по условию	«Ну и что же?»
2) $AO = OC$ по св. параллелограмма.	«Ну и что же?»
3) BO – его медиана.	«Ну и что же?»
4) BO – высота в ΔABC.	«Ну и что же?»
5) $BO \perp AC$, следовательно, диагонали $BD \perp AC$	«А, вот в чем дело! А как узнать, с чего начать?»

Таким образом, нетрудно убедиться, в значительном преимуществе использования восходящего анализа в процессе доказательства требований задачи, которые сводятся к следующему:

- восходящий анализ обеспечивает самостоятельное и, что более важно, сознательное отыскание метода доказательства требования задачи самими учащимися;
- способствует развитию логического мышления;
- обеспечивает осознанность и целенаправленность действий на каждом этапе доказательства.

Схема метода проста: «Что требуется доказать?» и «Что для этого достаточно доказать?»;

С педагогической точки зрения рассматриваемая форма доказательства так же имеет плюсы: есть отправное звено, с которого начинается рассуждение – доказываемое равенство, дополнительные построения мотивированы и не будут казаться ученику искусственными, учащийся ясно осознают поставленную цель на каждом этапе.

Так как в этой форме аналитического метода для доказательств утверждений последовательно подбирают достаточные основания, от следствия восходят к основанию, то этот метод и называют *восходящим анализом*. Подбор целесообразного основания для доказываемого требования и подбор достаточных оснований на каждом последующем этапе рассуждения являются и аналитическими и синтетическими процессами. Этот процесс по сути своей – аналитический, так как из многих возможных оснований выбирается одно, но он и синтетический – так как он устанавливает логическую связь между основанием и следствием.

Восходящий анализ представляет значительный интерес для решения проблем поиска доказательства: он содержит в себе стратегию построения самого доказательства, подсказывает направление творческого поиска путей обоснований. Однако восходящий анализ не является универсальным и имеет свои недостатки.

Сложность заключается в том, что для доказательства истинности того или иного суждения может быть не одно основание, а несколько. Это приводит ученика к необходимости рассматривать несколько различных вариантов рассуждений, некоторые из которых могут завести в тупик. Основная трудность для ученика состоит в умении увидеть эти различные основания и научиться их сравнивать.

Любое доказательство, проведенное методом восходящего анализа, можно обратив его, заменить синтетическим доказательством. При этом синтетическое рассуждение, подготовленное восходящим анализом, не будет казаться искусственным. Таким образом, восходящий анализ является одним из наиболее эффективных средств составления плана решения задачи.

2.4.2 Нисходящий анализ

Нисходящий анализ имеет две разновидности: несовершенный анализ и метод доказательства от противного. При нисходящем анализе ведущими словами являются: «Предположим, что предложение которое нужно доказать, установлено. Что из этого следует?» С опорой на доказанные ранее теоремы, определения и аксиомы выводятся несколько следствий.

При решении задач на доказательство методом несовершенного анализа за исходное берется заключение задачи. Преобразование заключения происходит путём отыскания необходимых признаков его истинности в предположении, что заключение задачи верно. Иными словами – несовершенный анализ сводится к отысканию следствий, вытекающих из предположения справедливости заключения, что приводит к получению верных следствий.

Рассмотрим применение метода нисходящего анализа на примере решения задачи:

Задача: *Докажите, что квадрат медианы, проведенной к катету прямоугольного треугольника, сложенный с утроенным квадратом половины этого катета, равен квадрату гипотенузы*.

Решение:

Из условия задачи:

1) ΔABC – прямоугольный,

$\angle C = 90°, AC = b, CB = a, AB = c$

2) $BM = m_b$– медиана:

$AM = MC$;

3) Доказать:

$m_b{}^2 + 3(\frac{b}{2})^2 = c^2$ **(1)**

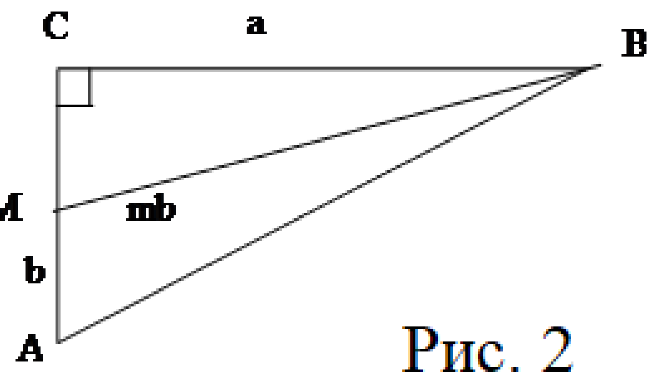

Рис. 2

Применим метод несовершенного анализа. Положим, что пункт 3) истинный и применив теорему Пифагора для ΔMBC, истинное равенство:

1. $m_b{}^2 = a^2 + (\frac{b}{2})^2$ **(2)**

Подставив значение медианы в формулу **(1)** получим:

2. $a^2 + (\frac{b}{2})^2 + 3(\frac{b}{2})^2 = c^2$

После преобразования получаем равенство:

3. $a^2 + b^2 = c^2$ **(3)**

Равенство **(3)** – верно и является истинным.

Однако это не доказывает равенство **(1)**. Невозможно убедиться ни в его истинности, ни в его ложности. В общем случае из неверного утверждения путем верных умозаключений можно и не получить верное следствие. Вместе с тем, метод несовершенного анализа не бесполезен, так как он приводит к синтетическому рассуждению, подсказывает доказательства. Для получения логично построенного доказательства, необходимо обратить все рассуждения, и если это удастся – это и будет синтетическим решением задачи.

В данной задаче оно обратимо:

1. $a^2 + b^2 = c^2$

2. $a^2 + (\frac{b}{2})^2 + 3(\frac{b}{2})^2 = c^2$

3. ${m_b}^2 = a^2 + (\frac{b}{2})^2 \Longrightarrow a^2 + (\frac{b}{2})^2 = {m_b}^2$

4. ${m_b}^2 + 3(\frac{b}{2})^2 = c^2$ **(4)** ■

Что и требовалось доказать.

Итак, несовершенный анализ подсказал синтетическое доказательство требования исходной задачи. Учащиеся вряд ли самостоятельно смогут предложить такое синтетическое доказательство. К достоинствам нисходящего анализа относят осуществления поиска плана доказательств, а так же использование в качестве педагогического метода Сократа: если ученик не прав, учитель с помощью правильно подобранного вопроса приводит его к противоречию.

Методом доказательства **от противного** – называется такая разновидность нисходящего анализа, при которой решение задачи происходит путём получения необходимых условий справедливости положения, противоречащего заключению задачи.

Задача: *Докажите, что если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны*.

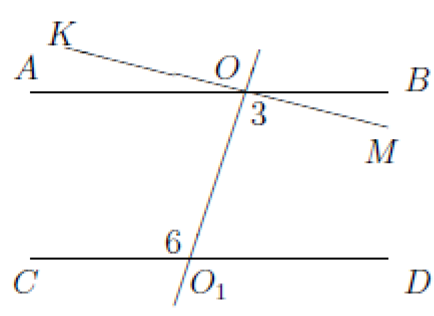

Рис. 3

Р е ш е н и е:

Из условия задачи:

1) $AB \parallel CD$; (дано)

2) $OO_1 -$ секущая (дано)

3) $\angle 3 = \angle 6$ (требуется доказать)

Для доказательства требуемого воспользуемся методом доказательства от противного.

4) Предположим, что равенство **(3)** не верно, т.е. $\angle 3 \neq \angle 6$ (предположение).

Для получения дальнейших следствий необходимо выдвинуть идею, которая привела бы к цели. В данном случае это дополнительное построение:

5) От луча OO_1 отложим $\angle KOO_1 = \angle 6$ (построение).
6) $\angle KOO_1$ и $\angle 6$ накрест лежащие углы при пересечении прямых KM и CD секущей OO_1 (следует из п.2 и п.5)
7) $KM \parallel CD \Rightarrow KO \parallel CD$ (п.5, п.6 и признак параллельности прямых).
8) Следовательно, через точку O проходят две прямые $AB \parallel CD$ и $KO \parallel CD$ (п.1 и п.7).

А так как п.8 противоречит аксиоме параллельности, то наше предположение п.4 неверно, $\Rightarrow$ тогда $\angle 3 = \angle 6$.

Эта задача одна из основных теорем геометрии. Здесь работает аналитический метод “доказательство от противного”; его применение связано с использованием анализа в довольно сложной форме дополнительного построения.

Вообще, аналитический и синтетический методы тесно взаимосвязаны, и образуют единый *аналитико-синтетический метод*. В задачах на доказательство суть анализа состоит в разбиении на подзадачи, а синтеза – в объединении их решений. Результатом анализа будет составление плана решения задачи, а результатом синтеза – в выполнении этого плана.

2.5 Применение карточек при обучении доказательству

Усвоение логики доказательства, выделение шагов доказательства, их обоснование, установление взаимосвязи между отдельными шагами представляет большую трудность для учащихся. Указанные трудности облегчаются использованием специальных карточек. Такие карточки удобны для самостоятельной работы, домашнего задания, а также при опросе. Немаловажно и то, что использование карточек при самостоятельной работе учащихся требует мало времени для их проверки, анализ же самостоятельных работ является наиболее предметным.

На карточке изображается таблица, состоящая из двух колонок. Одна колонка содержит утверждения, другая их обоснования. Рассмотрим составление такой карточки на примере задачи о средней линии треугольника.

Теорема о средней линии треугольника**:** *Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине* (Рис. 4).

Дано:

ΔABC

$ED -$ *средняя линия*;

Доказать:

а) $ED \parallel AB$

б) $ED = \frac{1}{2}AB$

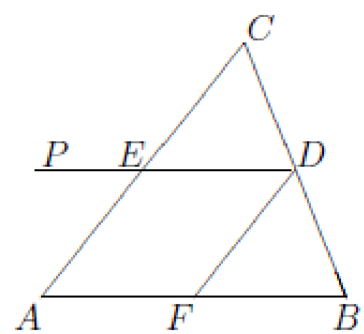

Рис 4

Доказательство:

Таблица 1.

А	I. Утверждение	II. Обоснование
1.	$DE -$ средняя линия ΔACB	по условию
2.	$DP \parallel AB$	так провели!
3.	DP пересекает AC в его середине	по т. Фалеса
4.	DE содержится в DP	(•)E середина отрезка AC
5.	Следовательно, $DP \parallel AB$	

Б	I. Утверждение	II. Обоснование
6.	$DF -$ средняя линия ΔABC	так провели!
7.	$AEDF -$ параллелограмм	$DE \parallel AB$ доказали, $DF \parallel AC$ по доказанному в п.А
8.	$ED = AF$	Св – во параллелограмма
9.	$AF = {}^1/_2 AB$ $ED = {}^1/_2 AB$	$DF -$ средняя линия, поэтому $AF = FB$

Теперь в таблице делаются некоторые пропуски.

А	I. Утверждение	II. Обоснование
1.	$DE -$ средняя линия ΔACB	
2.	$DP \parallel AB$	так провели!
3.	DP пересекает AC в его середине	
4.		$(\bullet)E$ середина отрезка AC
5.	Следовательно, $DP \parallel AB$	
Б 6.	$DF -$ средняя линия ΔABC	так провели!
7.		$DE \parallel AB$ доказали, $DF \parallel AC$ по доказанному в п.А
8.	$ED = AF$	
9.	$AF =$ $ED =$	DF средняя линия поэтому AF = F B

Количество пустых мест в карточке зависит от того, как ученик ориентируется в материале. Если хорошо, то пустых мест в его карточке больше, если хуже меньше. Очевидно, что отлично успевающие ученики могут работать с доказательством и без карточек.

Формы работы с такими карточками весьма разнообразны. Вот одна из них: Учитель, проработав с классом несколько доказательств, выдаёт каждому ученику карточку, в которой он должен заполнить пустые места. При этом ученик может пользоваться и учебником, сопоставляя содержание карточки с доказательством, содержащимся в учебнике. Во время работы учеников с карточками учитель следит за их действиями и оказывает им необходимую помощь. По выполнении задания осуществляется проверка понимания учащимися доказательства требования задачи посредством специальных вопросов, одни из которых закрепляют в сознании школьника эвристики, другие формируют ассоциации, связанные с ними.

Например: «*Для доказательства перпендикулярности двух прямых надо доказать равенство смежных углов, образованных при пересечении прямых*». Данная эвристика обуславливает ассоциацию: равенство смежных углов ⇒ перпендикулярность прямых.

Урок с работой над доказательством по карточкам можно организовать в три этапа. На первом этапе обсуждается идея доказательства, второй этап включает изучение доказательства с помощью карточек, на третьем этапе осуществляется запись доказательства в тетрадях и на классной доске. Так же можно пользоваться карточки для подготовки и решения задач из части 2 в тренировочных вариантах ОГЭ.

Работа с доказательством по карточкам требует воспроизвести всю цепь рассуждений, способствует усвоению сущности дедуктивного метода, ускоряет математическое развитие учащихся.

2.6 Формирование умений построения доказательства различными способами

Одним из явных недостатков современного стиля обучения математике в школе является догматический характер доказательства. Ученику в голову не приходит, что доказательства можно проводить по-разному (и в разной последовательности). Несомненно, что такая практика не даёт особого эффекта в развитии мышления человека и его личности в целом. С другой стороны, ясно, что на уроке (при условии минимума времени на изучение математики) рассмотреть различные способы доказательства многих теорем просто невозможно. Однако эту работу можно вынести на другие формы обучения: индивидуальные задания в классе и дома, занятие кружка, дополнительные беседы, факультативные и элективные курсы. Но все же рекомендуется учителю «выкраивать» время для хотя бы еще одного доказательства теоремы или задачи на доказательство, в том числе и в качестве пропедевтики.

Самое сложное в организации решения задачи разными способами это помощь учителя в нахождении этих способов. При этом учитель должен выступить не с идеей нового варианта доказательства (или разных вариантов), а с вопросом или серией вопросов, инициирующих появление соответствующей идеи или идей. Сложность связана с тем, что эта творческая деятельность учителя направлена не на применение некоторого знания или приёма, а на развитие воображения или интуиции ученика.

Представим некоторые общие условия, способствующие успешному нахождению различных способов доказательства требований задач.

- Для успешного обучения школьников нахождению различных способов доказательства надо научить их с помощью синтетической деятельности получать необходимые посылки для доказательства предложений.
- Для обеспечения индивидуального характера этого процесса необходимо ориентироваться на различные уровни способностей учащихся.
- Учитель обязан постоянно и умело наблюдать за процессом мышления учащихся, анализировать и изучать его. Это очень важная задача, осуществление которой способствует привитию интереса к предмету.

➢ Если учителю удаётся привить учащимся интерес к отысканию различных способов решения задач (доказательств математических предложений), то он сможет практиковать такую работу и в ходе изучения программного материала.

Далее представим задачу, и решим её несколькими способами.

Задача: *Диагонали трапеции разбивают ее на четыре треугольника. Докажите, что треугольники, прилежащие к боковым сторонам равновелики.*

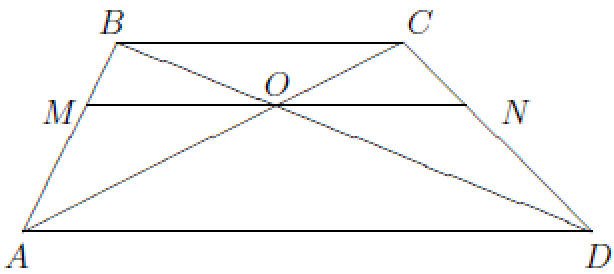

Рис. 5

Для решения этой задачи различными способами можно разбить класс на 3-4 группы. Каждой группе даётся карточка с условием задачи и подсказкой идеи решения. Цель каждой группы выработать стратегию доказательства на основе идеи (идей), предложенной в карточке. В случае затруднения учитель задаёт наводящие вопросы каждой группе. Группа стремится обосновать своё доказательство, используя при этом минимальное количество подсказок. Выдвинув своё доказательство, группа направляет своего представителя к доске. Этот ученик объясняет доказательство. Проверка решения осуществляется в форме беседы. Учащиеся анализируют решение и задают вопросы. Учитель концентрирует внимание учеников на наиболее важных моментах рассуждения.

I. Указания первой карточки:

II. Указания второй карточки:

Идея доказательства: прировнять площади искомых фигур.

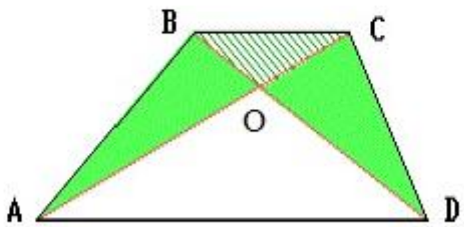

Рис 6

Подсказки первой группе:

1. «Не видите ли вы треугольник, в который включаются $\Delta\, ABO$ и $\Delta\, CDO$»?

Этой подсказки может быть достаточно для решения задачи.

Если первая подсказка не помогла, то группе предлагаются следующие наводящие вопросы:

2. «Площади каких фигур включают в себя площадь треугольника ABD (ΔACD)»?

3. «Что является пересечением треугольников ABD и ACD»? И подобные вопросы.

Опираясь на принадлежность одних треугольников другим, учащиеся первой группы выстраивают следующее доказательство самостоятельно или используя приведённые подсказки.

Решение первой группы:

1) Рассмотрим треугольники $\Delta\, ABD$ и $\Delta\, ACD$. У них общее основание AD и равные высоты, проведённые к этому основанию.
2) Из этого можно сделать следствие: $S_{\Delta\, ABD} = S_{\Delta\, ACD}$.
   $S_{\Delta\, ABO} = S_{\Delta\, ABD} - S_{\Delta\, AOD}$ и $S_{\Delta\, COD} = S_{\Delta\, ACD} - S_{\Delta\, AOD} \Rightarrow$
   $S_{\Delta\, ABO} = S_{\Delta\, COD}$
3) Площади равны, $\Rightarrow$ треугольники равновелики.

Ч.Т.Д.

II. Указания второй карточки:

Идея доказательства:

а) использовать метод от противного.

б) провести через т. О отрезок $MN \parallel BC$.

Подсказки группе:

Подсказку можно дать на часть б) – «Воспользоваться ранее доказанным фактом о том, что $OM = ON$».

Способ решения части а):

1) Допустим обратное: $S_{\Delta\, ABO} \neq S_{\Delta\, COD}$

2) Тогда, $S_{\Delta\, ABD} \neq S_{\Delta\, ACD}$ и следовательно $BC \nparallel AD$ – это приводит к противоречию, что $ABCD$ – трапеция.

3) Значит, допущенное неверно и $S_{\Delta\, ABO} = S_{\Delta\, COD}$

Ч.Т.Д

Способ решения части б):

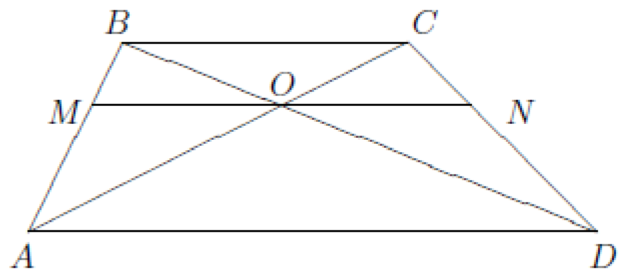

Рис. 5

1) Разобьем, рассматриваемые треугольники $\Delta\, ABO$ и $\Delta\, COD$ на части. Для этого проведем $MN \parallel BC$, $OM = ON.$
2) Получаем, что треугольники $\Delta\, ABO$ и $\Delta\, COD$ состоят из двух треугольников, площади которых: $S_{\Delta AMO} = S_{\Delta \mathrm{DNO}}$, $S_{\Delta BMO} = S_{\Delta CNO}$.
3) Следовательно, $S_{\Delta\, ABO} = S_{\Delta\, COD}$

III. Указания третьей карточки:

Идея доказательства: Вычислить площади треугольников, используя подобие.

Подсказки группе: По известной формуле: $S = {}^1/_2\, ab * sin\alpha$ вычислите площади треугольников $\Delta\, ABO$ и $\Delta\, COD$, используя подобие треугольников $\Delta\, BOC$ и $\Delta\, COD.$

Решение третьей группы:

1) $\Delta\, BOC \sim \Delta\, COD$, тогда $\dfrac{BO}{DO} = \dfrac{CO}{AO}$ и $AO * BO = CO * DO.$
2) Умножив обе части последнего равенства на ${}^1/_2\, sin\alpha$ получаем:

$$\frac{1}{2}AO * BO * sin\alpha = \frac{1}{2}CO * DO * sin\alpha$$

где $\angle\,\alpha = \angle AOB = \angle COD.$

3) Следовательно, $S_{\Delta\,ABO} = S_{\Delta\,COD}$

Ч.Т.Д.

Учащиеся формируются в группы по способностям и умениям. Каждая группа выступает со своим доказательством. Усвоив решение своей группы, ученик способен овладеть другими способами доказательства. В процессе представления доказательства учащийся развивает свою математическую речь, показывает умение рассуждать и отстаивать идеи.

Описанный подход приводит, во-первых, к развитию математического мышления в целом. Во-вторых, исчезают боязнь неуспеха, страх перед задачей, повышается самооценка в данном виде деятельности.

Приведём ещё два простых, но очень важных примера поиска различных способов решения задачи на доказательство.

Задача 1: *Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.*

Из условия задачи имеем:

- ✓ ABCD – параллелограмм
- ✓ $AD = a$
- ✓ $BK \perp AD;\ BK = h$
- ➢ Нужно доказать: $S_{ABCD} = a * h$

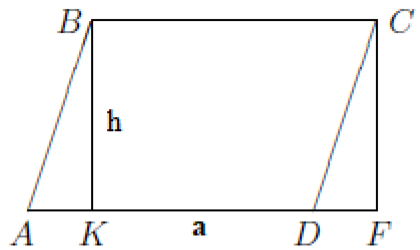

Рис 7

Из перечисленных свойств мы непосредственно не получим требуемый результат. Мы можем выписать различные свойства параллелограмма, но без понимания идеи решения этого делать не имеет смысла.

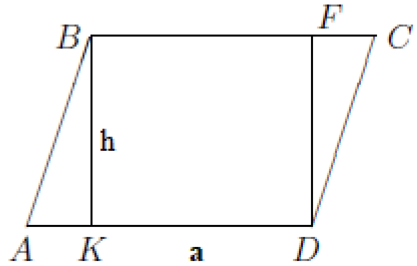

Рис 8

До решения этой задачи учащиеся знают только формулу площади прямоугольника. Поэтому может появиться желание перекроить параллелограмм в прямоугольник. Как это можно сделать? Ответы могут быть различными:

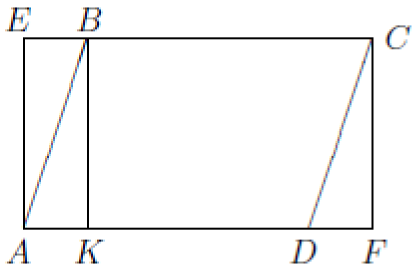

Рис 9

1) провести высоту CF (рис.7);
2) провести высоту DF (рис. 8);
3) провести высоты AE и CF (рис. 9);

Каждый из этих случаев приводит к нужному результату.

Задача 2: *Докажите, что площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведённую к этой стороне*.

Дано:

$\Delta\, ABC$;

$AB = a$;

$CK \perp AB$

Доказать:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(AB * CK).$$

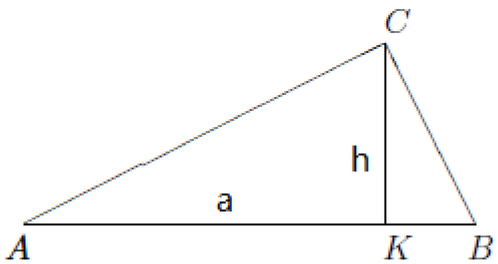

Рис 10

Обычно, в действующих учебниках [1] описывают это доказательство следующим образом:

Площадь параллелограмма равна сумме площадей треугольников $\Delta\, ABC$ и ΔCDB. Так как эти треугольники равны, то площадь параллелограмма равна удвоенной площади треугольника ABC. Высота параллелограмма, соответствующая стороне AB, равна высоте треугольника ABC, проведённой к стороне AB.

В чем недостатки такого доказательства? Так учить доказывать – малоэффективно, так как возникает масса вопросов: «почему мы достраиваем до параллелограмма»? «Почему именно так достраиваем»? «На какие факты мы опираемся в последующей записи»? и другие подобные вопросы. Все эти вопросы либо раскроет учитель (если он их видит и умеет ответить на них), либо они так и не будут заданы. Такое решение или доказательство, особенно если оно выучено наизусть, мало что даёт для математического и общего развития ученика.

Прежде всего, при доказательстве этой теоремы надо обсуждать вопрос о том, на что мы можем опираться при доказательстве.

Мы умеем вычислять площади прямоугольника и параллелограмма. Как можно свести вычисление площади треугольника к площадям этих четырёхугольников?

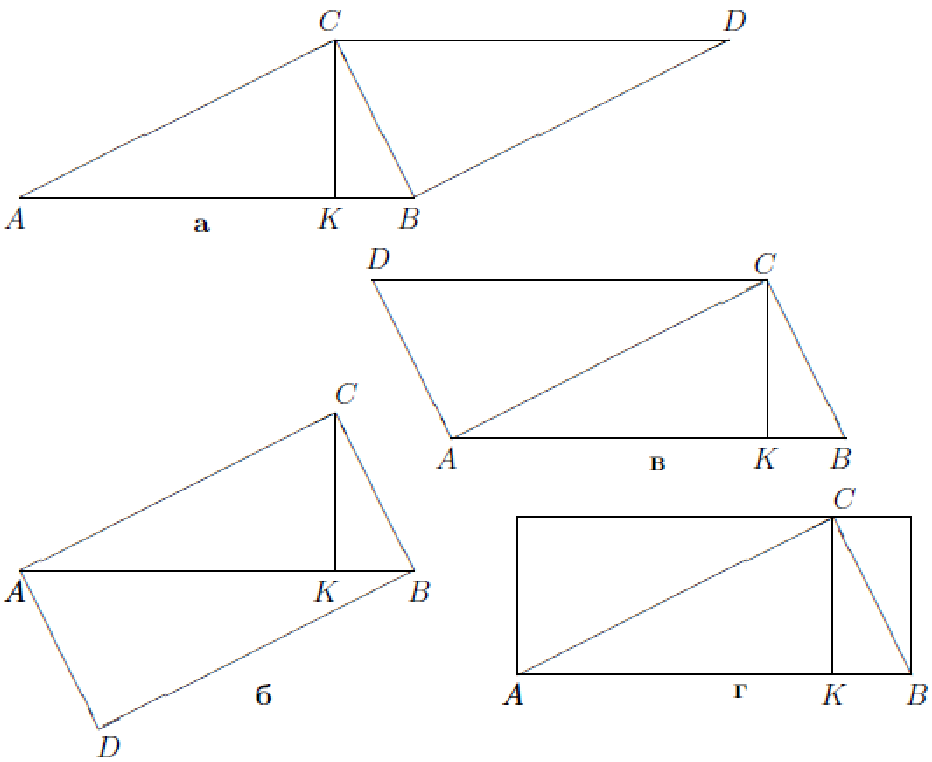

Рис 11

Каким способом можно достроить треугольник ABC до параллелограмма (прямоугольника) (рис. 11, а, б, в, г)?

Рассматривать все эти случаи на уроке совершенно не обязательно. Это можно предложить в качестве индивидуального домашнего задания.

Может возникнуть интересная идея «превратить» данный треугольник в прямоугольник или

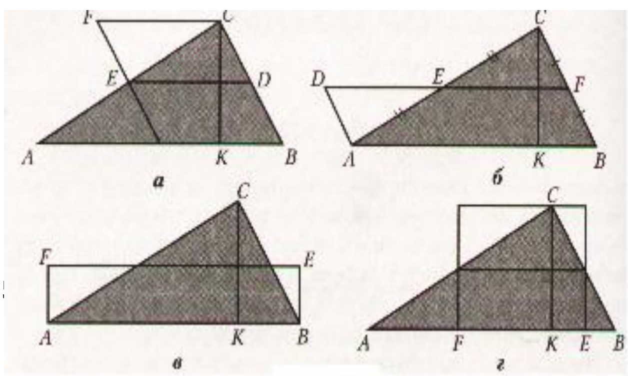

Рис 12

параллелограмм. Такой вопрос можно поставить как проблему для самостоятельной работы учащихся.

Превращение связано с проведением средней линии треугольника ΔABC. Если никто из учеников не догадается, то учитель может сам провести среднюю линию треугольника. Помощь существенная, но всё же не прямая подсказка, так как после проведения средней линии «превращение» ещё нужно додумать, причём возникают четыре варианта (рис. 12). После выполнения чертежей получение самой формулы не вызывает труда.

Приложение: Материалы для проведения занятия элективного курса на тему «Задача одна – решения разные

Методические рекомендации учителю: урок проводится в лекционной форме, изучается обучение поиску решения задачи на доказательство различными способами и их реализация на уроках планиметрии.

При решении задач на доказательства различными способами применяется комплекс ранее полученных знаний и в результате происходить процесс систематизации усвоенных учащимися знаний, умений и навыков. При решении задачи различными способами у ученика формируется аналитическая и синтетическая деятельность. На уроках, решения одной задачи различными способами развивает исследовательскую деятельность учащихся. Решение задачи различными способами – это увлекательный творческий процесс, развивающий воображение, подталкивающий учащегося придумывать, искать все новые и новые решения задачи. Поиски различных способов решения задач на доказательство, формируют у учащихся способность критической оценки свой деятельности, развивает навыки самоконтроля. Выбор наиболее рационального способа доказательства важный фактор развития математического мышления. Решение задач на доказательство различными способами воспитывает интерес у учащихся к изучаемому предмету.

Приведем пример одного из возможных вариантов поиска нескольких способов решения геометрической задачи на доказательство. Воспользуемся немного измененными таблицами вопросов и советов американского ученого Д. Пойа[12].

Задача: **«Если в треугольнике медиана вдвое меньше стороны, к которой она проведена, то такой треугольник – прямоугольный. Доказать».**

Начав думать над задачей, учащиеся попытаются вспомнить ранее изученные теоремы и аксиомы. Для помощи ученикам в поиске и выборе подходящих аргументов обоснования решения предлагается ниже приведенная таблица.

Таблица, содержащая истинные суждения:

Таблица 1

№	**Условия**	**Обоснования**
1	Установить равенство отрезков:	можно, доказав: **а)** что они имеют одинаковую длину; **б)** что они являются соответственными сторонами равных фигур и т.д.
2	Установить равенство углов:	можно, доказав: **а)** что они имеют одинаковую угловую меру; **б)** что они являются соответственными углами равных или подобных фигур и т.д.
3	Установить параллельность между двумя прямыми:	можно, доказав: **а)** что обе прямые перпендикулярны к третьей прямой; **б)** что каждая из них порознь параллельна третьей прямой и т.д.
4	Установить, что две прямые взаимно перпендикулярны:	можно, доказав: **а)** что они образуют равные смежные углы; **б)** что они являются биссектрисами двух смежных углов и т.д.

Такой перечень постепенно составляется коллективом класса, причем работа эта выполняется по ходу изучения учебного материала. Каждый новый способ обоснования равенства отрезков или углов, а также параллельности, перпендикулярности прямых или других фактов, заносится в тетрадь каждым учеником после применения его при изучении той или иной теоремы. Подобная систематизация знаний благотворно сказывается на успехах ученика.

Во второй таблице представлен план действия ученика. Используя эти действия при решении задач пошагово, учащийся уже не должен теряться в поисках доказательства.

Таблица 2

№	Содержание
1	Прочитать внимательно теорему или задачу на доказательство.
2	Сделать соответствующий условию чертеж.
3	Отметить на чертеже данные.
4	Записать условие. (Что дано?)
5	Записать заключение. (Что требуется доказать?)
6	Всесторонне обдумать заключение: нельзя ли его перефразировать, не меняя смысла? можно попробовать сопоставить его с другими (известными) положениями.
7	Предположим, что утверждение истинно.
8	Попытаться найти связь между заключением и условием. Если эту связь непосредственно установить нельзя, нужно попробовать установить ее посредством других (ранее известных) положений.
9	Если и после этого установить связь затруднительно, то стоит попытаться, согласно предположению истинности заключения, сделать дополнительное построение.
10	Снова вернутся к п. 8.
11	Найденную последовательность взаимосвязи между положениями выписать отдельно. При этом запись должна увязывать положения, начиная с неизвестного (заключения), с другими положениями и следовать до известного (условия).
12	Попробовать теперь вести рассуждения с конца выписанной взаимосвязи. Эти рассуждения должны привести к доказательству.
13	Докажи тезис самостоятельно.
14	Попытаться снова рассуждать по пунктам приведённой таблицы, только теперь для доказательства применяй другие известные тебе положения.
15	Доказать тезис разными способами.

Имея такую схему рассуждений, подобрав подходящую задачу можно осуществить её решение несколькими способами. Это гораздо полезнее решения одним способом нескольких задач.

Вернемся к задаче:

«Если в треугольнике медиана вдвое меньше стороны, к которой она проведена, то такой треугольник – прямоугольный. Доказать».

1-й способ доказательства.

1) Внимательно читаем условие задачи (далее следует текст задачи).
2) Выполняем чертёж треугольника, у которого медиана равна половине соответствующей стороны: $CD = \frac{1}{2}AB$.
3) Отмечаем на рисунке данные: равенство отрезков $AD = CD = BD$.
4) Записываем условие: $CD = \frac{1}{2}AB,\ AD = BD$.
5) Записываем заключение: $\Delta ABC -$ прямоугольный.
6) Заключение, можно записать и по-другому: $\angle ACB = 90°\ (AC\ \perp CB)$.

Согласно таблице 2, начинаем обдумывать условие перпендикулярности двух прямых. Подбираем подходящие условия. Устанавливаем, что две прямые взаимно перпендикулярны можно, если они являются биссектрисами двух смежных углов.

7) Предполагаем, что CA и CB – биссектрисы двух смежных углов.
8) Так как смежных углов при вершине C нет, то и связь устанавливать не имеет смысла.
9) Выполняем дополнительное построение: проводим через вершину C прямую MN, параллельную АВ (рис.1) с той целью, чтобы образовались два смежных угла, биссектрисами, которых были бы CA и CB.
10) Возвращаемся к п. 8

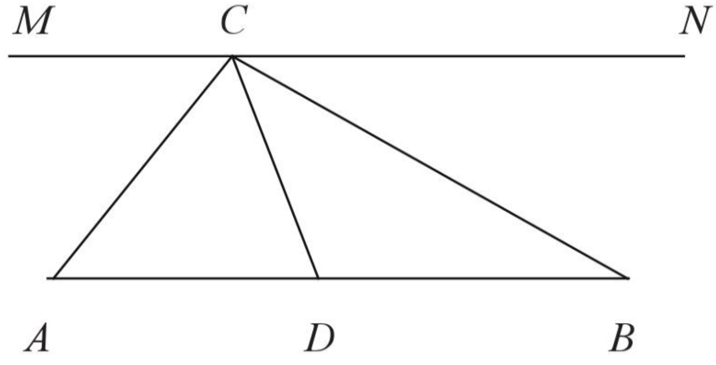

Рис. 1

Пытаемся установить взаимосвязь между заключением и условием задачи. Так как CA и CB биссектрисы двух смежных углов $\angle MCD$ и $\angle DCN$, то $\angle$ ACD $= \angle ACM$, а $\angle BCD = \angle BCN$.

Но $\angle ACD = \angle A,$ а $\angle BCD = \angle B$ (как углы при основании равнобедренных треугольников $\Delta ACD, \Delta BCD$). Из того, что $\angle CAD = \angle ACM$ и $\angle ACD = \angle A$ следует, что $\angle A = \angle ACM$. Аналогично устанавливаю, что $\angle B = \angle BCN$. Так как полупрямые CM и AD находятся в разных полуплоскостях относительно прямой AC , то углы $\angle A$ и $\angle ACM$ внутренние накрест лежащие, аналогично внутренними накрест лежащими будут и углы $\angle B$ и $\angle BCN$. Но равенства $\angle A = \angle ACM$ и $\angle B = \angle BCN$ будут, в частности, истинными тогда, когда $MN \parallel AB$.

Выписываем последовательность установленных отношений.

$\angle ACD = \angle ACM,$ а $\angle BCD = \angle BCN$ (биссектрисы делят углы пополам);

$\angle ACD = \angle A,$ а $\angle BCD = \angle B$ (углы при основании равнобедренных треугольников);

$\angle ACM = \angle A,$ а $\angle BCN = \angle B$ (две величины, порознь равные третьей величине, равны между собой);

$MN \parallel AB$ (признак параллельности прямых).

Ведем рассуждения с конца. Через вершину C треугольника ABC проводим прямую MN, параллельную стороне AB. Получаем $\angle ACM = \angle A,$ а $\angle BCN = \angle B$, как накрест лежащие углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой. Но $\angle A = \angle ACD$, а $\angle B = \angle BCD$, как углы при основании равнобедренных треугольников ADC и BDC. Из того, что $\angle A = \angle ACM$ и $\angle A = \angle ACD$ следует, $\angle ACM = \angle ACD$. Аналогично доказываю, что $\angle BCD = \angle BCN$. Следовательно, CA и CB являются биссектрисами двух смежных углов, то есть они взаимно перпендикулярны.

Запись:

Дано:

ΔACD , $CD -$ медиана,

$CD = \frac{1}{2}AB.$

Доказать:

$$\angle ACB = 90° \; (AC \perp CB).$$

Доказательство:

$AB \parallel MN$ доп. построение.

$$\left.\begin{array}{r} AB \parallel MN \Rightarrow \angle ACM = \angle A \\ \Delta ADC \; (AD = DC) \Rightarrow \angle ACD = \angle A \end{array}\right\} \Rightarrow \angle ACM = \angle ACD \Rightarrow CA - \text{биссектриса } \angle MCD$$

$$\left.\begin{array}{r} AB \parallel MN \Rightarrow \angle BCN = \angle B \\ \Delta BDC \; (BD = DC) \Rightarrow \angle BCD = \angle B \end{array}\right\} \Rightarrow \angle BCN = \angle BCD \Rightarrow CB - \text{биссектриса } \angle NCD$$

$$\angle MCD \text{ и } \angle NCD - \text{смежные углы} \Rightarrow CA \perp CB.$$

В данном случае применён приём формирования умений доказывать суждения различными способами в эвристической форме, когда учителем предложена система целесообразно составленных и определённым образом расположенных вопросов, на которые учащиеся должны дать ответы, постепенно раскрывающие способы доказательства некоторого суждения. «Инвентарём» этого приёма явился дидактический материал – таблицы. Педагогическая сторона этого приёма выражена непосредственной структурой организации учебного процесса. С точки зрения психологии этот приём характеризуется как завершённую обобщением аналитико-синтетическую умственную деятельность школьника. В данном случае педагог, учитывая особенности психологической деятельности учащихся, как бы создал динамическую модель образа мышления, которая своеобразно отразилась в сознании учащихся. Особо укажем на положительную роль таблицы 1. Она представляет собой «мостик» между ранее изученными знаниями и сформулированной проблемной задачей. Неоднократно совершая мыслительные «путешествия» по этому «мостику», учащиеся не только отыскивают ключ к решению задачи, но и запечатлевают в своей памяти многие ранее изученные положения, отмечают их прикладную роль, и все это вместе взятое формирует у них своеобразные умения и навыки в решении проблемных задач. Характерным здесь является то, что важную роль при этом играет сам процесс приобретения знаний. Он представляет собой самостоятельную творческую деятельность учащихся по добыванию знаний. А это в свою очередь способствует активизации сознательной деятельности учащихся.

2-й способ.

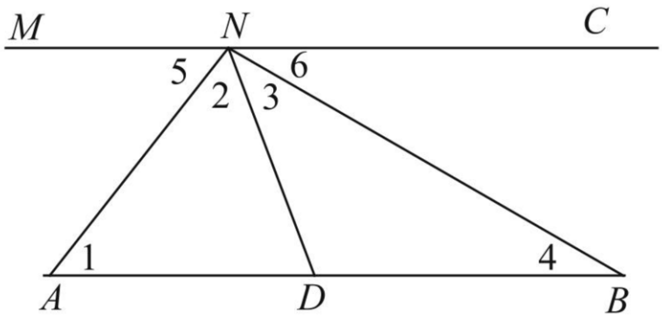

Рис. 2

2-й способ доказательства.

Проводим МС || АB (рис.2).

1) Из равнобедренного AND и BND следует:

$$\left.\begin{array}{l}\angle 1 = \angle 2\\ \angle 1 = \angle 5\end{array}\right\} \Rightarrow \angle 2 = \angle 5;$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle 4 = \angle 3\\ \angle 4 = \angle 6\end{array}\right\} \Rightarrow \angle 3 = \angle 6;$$

2) $\angle 5 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$;

$2(\angle 2 + \angle 3) = 180^\circ$.

$\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ \Rightarrow \angle C = 90^\circ \Rightarrow AC \perp CB$.

Поскольку эта задача обычно помещена в разделе о сумме углов треугольника, естественно потребовать от учащихся решить её, опираясь на теоретические положения этого раздела.

3-й способ доказательства.

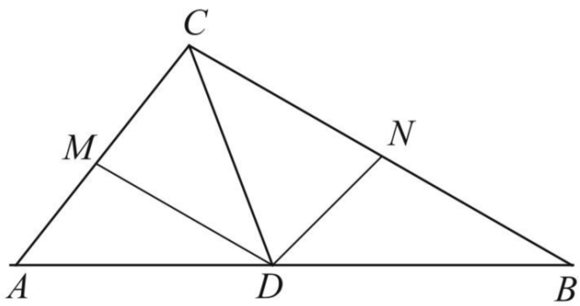

Рис. 3

Пусть в треугольнике ABC (рис. 3) CD – медиана и, $CD = \frac{1}{2}AB$

т.е. $CD = AD = BD$. Проведем DN – медиану равнобедренного треугольника BCD и DM – медиану равнобедренного треугольника BCD. Эти медианы будут и биссектрисами и высотами. Следовательно, $\angle$ DNC = $\angle$ MDN = $\angle$ DMC = 90º. Так как $\angle NDM + \angle DMC = 180°$, то $DN \parallel MC$, а из того, что $DN \parallel MC$ и $\angle DNC = 90^\circ$ следует перпендикулярность прямых MC и CN.

4-й способ доказательства.

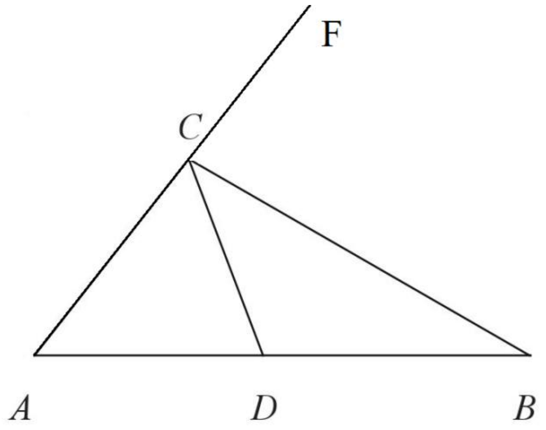

Рис. 4

Отметим на луче AC точку F, тогда $\angle FCB = \angle A + \angle B$ – свойство внешнего угла треугольника.

Но $\angle A = \angle ACD$, а $\angle B$ и $\angle BCD$, следовательно

$\angle A + \angle B = \angle ACD + \angle BCD = \angle ACB$.

Итак, $\angle FCB = \angle ACB = \angle A + \angle B$, т.е. $\angle ACB = 90°$.

В только что разобранном способе доказательства было установлено, что $\angle ACB = \angle A + \angle B$. Но $\angle ACB = \angle A + \angle B = 180°$, т.е. $2\angle ACB = 180º \Rightarrow \angle ACB = 90° \Rightarrow AC \perp CB$.

При решении задач на доказательство различными способами применяется комплекс ранее полученных знаний и в результате происходит процесс систематизации усвоенных учащимися знаний, умений и навыков. При решении задачи различными способами у ученика формируется аналитическая и синтетическая деятельность. На уроках, решения одной задачи различными способами развивает исследовательскую деятельность учащихся. Решение задачи различными способами – это увлекательный творческий процесс, развивающий воображение, подталкивающий учащегося придумывать, искать все новые и новые решения задачи. Поиски различных способов решения задач на доказательство, формируют у учащихся способность критической оценки своей деятельности, развивает навыки самоконтроля. Выбор наиболее рационального способа доказательства важный фактор развития математического мышления. Решение задач на доказательство различными способами воспитывает интерес у учащихся к изучаемому предмету.

Заключение

В данной выпускной квалификационной работе рассмотрены теоретические, методические, пропедевтические и психолого-педагогические аспекты обучения решению геометрических задач на доказательство.

В ходе проведения работы была достигнута основная цель исследования, реализованы все поставленные задачи:

— произведен анализ учебной, психолого-педагогической, математической и методической литературы;

— обобщен и систематизирован материал по теме «решение задач на доказательство»;

— разработаны методические и пропедевтические рекомендации, которые будут способствовать обучению корректному построению доказательства.

— разработаны методические материалы для проведения элективного курса во внеклассной работе по методам решения задач на доказательство различными способами.

Предложенная система обучения построению доказательства позволяет рассматривать решение задачи как самостоятельное исследование, раскрывает творческий потенциал учащихся, способствует развитию математического, в частности, логического мышления. Такой подход учит школьников рассуждать, отстаивать свои идеи, вырабатывать умение критически оценивать результаты своей деятельности и работы других учеников и товарищей.

В методике преподавания математики накоплен богатейший опыт по решению математических и логических задач, разработано и проверено на практике множество методов и приёмов обучения. Поэтому учитель может для конкретной ситуации, сложившейся в данном классе, подобрать эффективную совокупность методов и приемов обучения. При этом он учитывает особенности своего стиля работы, а так же данного класса.

Учитель может использовать предложенные методические рекомендации как в процессе решения задач обязательного курса геометрии основной школы, так и для индивидуальной, факультативной и элективной внеклассной работы.

Выпускная квалификационная работа будет полезна учителям средних школ, особенно начинающим педагогам, а так же студентам педагогических вузов.

Рассмотренный и подобранный нами материал можно с успехом использовать при подготовке учащихся к ОГЭ, поскольку он способствует развитию логического мышления учеников и нахождению различных способов решения.

Список литературы

1. Геометрия 7 – 9 классы: учеб. для общеобразоват. организаций. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. 5-е изд. М.: Просвещение, 2015. – 383с.

2. Геометрия. Учебник для 7 – 9 классов. Погорелов А.В. 2-е изд. М.: Просвещение, 2014. – 240 с.

3. Готман Э.Г., Скопец З.А. Задача одна – решение разные: Геометрические задачи: кн. для учащихся. М.: Просвещение, 2000. – 224 с.

4. Гусев В.А. Теория и методика обучения математике: психолого-педагогические основы. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. — 456 с.

5. Далингер В.А. Методика обучения учащихся доказательству математических предложений. Кн. для учителя. М.: Просвещение, 2006. – 256 с.

6. Епишева О.Б., Крупич В.И. Учить школьников учиться математике: Формирование приемов учебной деятельности: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 1990. — 128с.

7. Ивин А.А. Искусство правильно мыслить. М.:Просвещение, 1990. – 240 с.

8. Колягин Ю.М., Оганесян В.А., Саннинский В.Я., Луканин Г.Л. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. Учеб. пособие для студентов физ. -мат. фак. пед. институтов. М.: Просвещение, 1975. — 462 с.

9. Лакатос И. Доказательство и опровержение: Как доказываются теоремы. М.:Наука 1967. – 152 с.

10. Ляшенко В.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики. М.: Просвещение, 1989. – 406 с.

11. Математика. ОГЭ-2017. 9 класс. Тематический тренинг. Учебно-методическое пособие. Лысенко Ф.Ф. Кулабухова С.Ю. Ростов н/Д.: Легион. 2016. – 384 с.

12. Пойя Д. Как решать задачу. — М.: Либроком, 2010. — 208 с.

13. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. — Изд. 2-е. — М., 1975;

14. Преподавание геометрии в VI – VIII классах. Сборник статей под ред. В.И. Ефимова М.: Просвещение, 1979. – 287 с

15. Психолого-педагогические и методические аспекты урока математики Буренок И.И. Тайбаева Л.И. Славянск - на - Кубани,: 2000. – 72 с.

16. Родионов М.А. Формирование поисковой мотивации в процессе обучения математике: учебное пособие для студентов и учителей. Пенза: ПГПУ. 2001. – 58 с.

17. Саранцев Г.И. Обучение математическим доказательствам и опровержениям в школе. М.: ВЛАДОС. 2006. – 183 с.

18. Столяр А. А. Как математика ум в порядок приводит . — 2-е изд., перераб. и доп. Минск.: Вышэйшая школа , 1991.— 207 с.

19. Теория и методика обучения математике: общая методика: учебное пособие. Суховиенко Е.А. Самигуллина З.П. Севастьянова С.А. Эрентраут Е.Н. Челябинск: ИИУМЦ Образование. 2010. – 65 с.

20. Учебное пособие 7-11 кл. ср. шк. Александров А.Д. Вернер А.Л. Рыжик В.И. М.: Просвещение. 2005.

21. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике М.: УРСС. 2009. – 248 с.

22. Шарыгин И. Ф. Математика для поступающих в вузы. М.: 2006. - 480 с.

23. Министерство образования и науки Российской Федерации. Режим доступа: http://минобрнауки.рф /документы/938

24. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. / Режим доступа: http://gia.edu.ru/ru/

25. Официальный информационный портал государственной итоговой аттестации. / Режим доступа: http://gia.edu.ru/ru/

26. Студопедия. / Режим доступа: http://studopedia.ru/

27. Федеральный государственный стандарт основного общего образования./ Режим доступа: http://standart.edu.ru/

28. Федеральный институт педагогических измерений. / Режим доступа: http://fipi.ru/

29. Экзамен. / Режим доступа: http://www.examen.ru/add/gia/gia-po-matematike/