МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ФИЗИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ ФИЗИКЕ

Методика изучения аналитической механики в курсе теоретической физики педагогического университета

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05 Педагогическое образование
Направленность программы бакалавриата «Физика.Английский язык»

Проверка на объем заимствований:
89,26 % авторского текста

Работа рекоменд. к защите
рекомендована/не рекомендована
«25» 03 2017 г.
зав. кафедрой ФиМОФ
Беспаль Ирина Ивановна

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513/085-5-1
Шинкина Яна Сергеевна

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук, доцент
Свирская Людмила Моисеевна

Челябинск
2017

Оглавление

Введение

Механику по праву можно считать основой всей физики, так как все формы движения материи связаны с механическим движением. Этот раздел физической науки сложился первым среди других разделов. Современная классическая механика развивалась в течение многих веков и по сей день продолжает совершенствоваться.

Аналитическая механика – это раздел классической механики, в котором формулируются и используются общие принципы (дифференциальные и интегральные) механики, на их основе выводятся основные дифференциальные уравнения движения, исследуются сами уравнения и методы их интегрирования. Этот раздел механики довольно сложен, поэтому курс аналитической механики, изучаемый в педагогическом вузе, нуждается в интерпретации с целью повышения уровня усвоения учащимися материала по курсу. Отсюда и возникает необходимость создания методического пособия по аналитической механике.

Объектом исследования является аналитическая механика как раздел классической механики.

Предмет исследования: методика изучения аналитической механики в педагогическом вузе.

Цель работы: разработка методических материалов по разделу «Аналитическая механика», предназначенных для будущего учителя физики.

Задачи работы:

1. Проанализировать учебные издания, содержащие раздел «Аналитическая механика».
2. Подготовить методическое пособие по аналитической механике, рассматривая её как основу для изучения последующих разделов курса «Основы теоретической физики».

Гипотеза исследования: применение методики подробного, пошагового изучения аналитической механики должно способствовать успешному освоению первой ступени курса «Основы теоретической физики» и формированию общекультурных компетенций будущего учителя.

В ходе работы нами был проанализирован ряд изданий, содержащих раздел «Аналитическая механика». В частности, следующие учебные пособия.

1) Жирнов Н.И. Классическая механика. - М.: Просвещение, 1980.- 303 с.

В основе книги - курс лекций по классической механике, читаемый на физическом факультете Московского государственного педагогического института им. В. И. Ленина. Книга написана в соответствии с программой курса теоретической физики для физических специальностей педагогических институтов, в которой механика рассматривается как один из самых важнейших разделов курса теоретической физики. Интересующий нас раздел аналитической механики рассматривается последовательно и логично.

С точки зрения доступности изложения материала, эта книга является одной из наиболее доступных, поэтому и рекомендуется студентам для изучения данного курса.

2) Мултановский В.В. Курс теоретической физики. Т.1. Классическая механика. Основы специальной теории относительности. Релятивистская механика. – М.: Просвещение, 1988 – 304 с.

Данную книгу можно порекомендовать большинству студентов для изучения и восполнения пробелов в знаниях по курсу теоретической механики, так как курс, представленный в книге, написан в соответствии с программой, целями и задачами обучения будущих учителей. Очевидно, что курс теоретической физики в педагогических университетах должен быть простым и доступным, но в то же время не упрощенным, достаточно полным для отражения существа физических теорий. Это издание тоже относится к ряду рекомендованных студентам для изучения курса аналитической механики, но в нем также не в полной мере соблюдена последовательность и подробность изложения материала.

3) Голдстейн Г., Пул Ч., Сафко Дж. Классическая механика. М.: URSS, 2012.- 828 с.

Данная книга написана по материалам лекций по классической механике, прочитанных Голдстейном в Гарвардском университете.
Голдстейн выявляет возможные трудности при решении тех или иных задач и объясняет пути их преодоления, что, безусловно, улучшает уровень понимания и усвоения материала. Для более глубокого изучения изложенного материала и ознакомления читателей с незатронутыми вопросами в конце каждой главы приводится список рекомендуемой литературы. Этот список сопровождается краткими аннотациями, которые даются для ориентации студентов в существующей литературе по механике. Конечно, эти аннотации выражают только личное мнение автора.

4) Ландау Л.Д. Теоретическая физика. Том I. Механика: учебное пособие для вузов/ Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013.— 212 с.

Фундаментальное издание для изучения курса теоретической механики. Занимает одно из первых мест в списке литературы, рекомендуемой студентам для повторения и самостоятельной работы по курсу, отличается строгостью изложения, однако, не очень доступен для первого чтения. Раздел начинается с обсуждения обобщенных координат, т.е. метода Лагранжа, потом вводится метод Гамильтона, а Ньютоновская формулировка классической механики, которая должна предшествовать формализму Лагранжа и Гамильтона, почти не затрагивается.

5) Паншина А.В. Теоретическая механика в решениях задач из сборника И.В. Мещерского. Аналитическая механика / А.В. Паншина, В.М. Чуркин. - М.: URSS, 2012. – 200 с.

Данное пособие предназначено для самостоятельной работы над курсом теоретической механики. Пособие содержит решения 96 задач главы XI «Аналитическая механика» «Сборника задач по теоретической механике И. В. Мещерского.

В разделе «Введение» приводятся краткие сведения из теории, которые можно использовать в качестве дополнительного справочного материала при изучении решений представленных в пособии задач.

Решение каждой задачи пособия составлено таким образом, чтобы можно было его изучать, не обращаясь к решениям предыдущих задач подобного типа.

6) Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Часть II. Динамика / – М.: Высшая школа, 1986 – 403 с.

Данное издание «Курс теоретической механики» часть II «Динамика» написано в соответствии с программой курса теоретической механики для высших технических учебных заведений. В учебнике излагается не только теоретический материал, но и рассматривается подробное решение задач, также приведены вопросы для самоконтроля. Преимущество этого издания в том, что в нем каждая тема курса рассматривается на примере практической задачи.

7) Космодемьянский А.А. Курс теоретической механики. - М.: Просвещение, 1965. — 509 с.

Издание, рекомендуемое студентам педагогических вузов для изучения курса теоретической механики. Хорошо известный материал здесь расположен в несколько иной последовательности, чем это принято в существующих программах по классической механике. Автор убежден, что современный учитель обязан достаточно глубоко понимать перемены в науке и уметь подробно и доступно объяснить это учащимся, для этого автор выделяет значительное место новым задачам.

Однако, все эти издания объединяет то, что в них не содержатся подробные математические преобразования, которые студент практически никогда самостоятельно не проделывает. Отсюда и возникает наша задача - создания пособия, в котором был бы всё изложено подробно и доступно.

Глава I. Три формы классической механики и их историческая роль в физике

§1. Место классической механики в физике. Механика Ньютона

Классическая механика – это наука о законах движения и равновесия макроскопических материальных тел, обладающих скоростями, много меньшими скорости света в вакууме (20). Место классической механики на «карте науки» (13) представлено в таблице 1:

Таблица 1

Скорости	Макроскопические тела	Микрообъекты
$v \ll c$	Классическая механика	Нерелятивистская квантовая механика
$v \sim c$	Релятивистская классическая механика (СТО)	Релятивистская квантовая теория (квантовая теория поля)

Основу классической механики составляют небольшое число сравнительно простых и наглядных гипотез (постулатов), связанных с введением основных понятий о пространстве и времени, силе и массе, инерциальной системе отсчета, и законы Ньютона. Благодаря этому классическая механика отличается своей логической стройностью и внутренней непротиворечивостью (13).

Механику по праву можно считать основой всей физики, так как все формы движения материи связаны с механическим движением. Этот раздел физической науки сложился первым среди других разделов. Современная классическая механика развивалась в течение многих веков и по сей день продолжает совершенствоваться.

Механика берёт своё начало в исследованиях ученых античности. В первую очередь, следует назвать Архимеда (287-212 гг. до н. э.), который создал теорию рычага, установил основные принципы статики твердого тела, заложил основы гидростатики и создал большое число технических изобретений.

Зародившись в древности, механика получила свое название в трудах Аристотеля (384-322 гг. до н. э.). В первой книге своего трактата «Физика» Аристотель доказывает, что в природе содержатся начала движения и покоя, в третьей книге он отождествляет природу с движением и утверждает, что движение является переходом возможности в действительность и тесно связано с понятиями места, времени и пустоты.

Г. Галилей (1564—1642) явился основателем экспериментальной физики и заложил фундамент классической механики. Предшествовавший Галилею античный период характерен в науке дедуктивными рассуждениями, опирающимися не на опыт и не всегда на верные предпосылки. Галилей сформулировал два фундаментальных принципа: принцип относительности для равномерного и прямолинейного движения, а также принцип постоянства ускорения силы тяжести. Он явился основателем динамики как науки, открыв многие интересные свойства равноускоренного и равнозамедленного движений. Галилей установил закон инерции, законы свободного падения, движения тела по наклонной плоскости и тела, брошенного под углом к горизонту, пришел к выводу о силе как причине ускорения.

В систематической форме изложение классической механики было дано И. Ньютоном (1643—1727) в книге “Математические начала натуральной философии”, которая вышла в свет в 1687 году. Ньютон определяет механику как «учение о движениях, производимых какими бы то ни было силами, и о силах, требуемых для производства каких бы то ни было движений». Смысл этого определения не утрачен до сих пор и отражается в прямой и обратной задачах механики. Создав принципы механики, Ньютон разрешил и большое число ее конкретных задач, в частности задачу о движении планет в поле силы тяжести Солнца.

Формирование основ классической механики было величайшим достижением естествознания XVII века. Классическая механика была первой фундаментальной естественнонаучной теорией. В течение трех столетий (с XVII в. по начало XX в.) она выступала единственным теоретическим основанием физического познания, а также ядром второй естественнонаучной картины мира – механистической.

В настоящее время принято выделять три способа формального математического описания классической механики: механика Ньютона, Лагранжев формализм (механика Лагранжа), Гамильтонов формализм (механика Гамильтона). Первый способ соответствует индуктивному методу построения механики, когда за основу принимаются дифференциальные уравнения Ньютона, вытекающие непосредственно из опыта. Эти уравнения рассматриваются как аксиомы. Вторая и третья математические формулировки составляют содержание аналитической механики. В её основу положен дедуктивный метод, согласно которому в качестве основной и единственной аксиомы принимается вариационный принцип Гамильтона-Остроградского.

Механика Ньютона. Обобщая существовавшие независимо друг от друга результаты своих предшественников в стройную теоретическую систему знаний (ньютоновскую механику), Ньютон тем самым явился и родоначальником классической теоретической физики. С именем Ньютона связано открытие или окончательная формулировка основных законов динамики: закона инерции; пропорциональности между количеством движения и величиной движущей силы; равенства по величине и противоположности по направлению сил при центральном характере взаимодействия. Вершиной научного творчества Ньютона стала его теория тяготения и провозглашение первого действительно универсального закона природы – закона всемирного тяготения.

Аналитическая механика. Параллельно с анализом основ механики развивались методы решения вариационных задач. Исаак Ньютон в своих «Математических началах натуральной философии» поставил и решил первую вариационную задачу: найти такую форму тела вращения, движущегося в сопротивляющейся среде вдоль своей оси, для которой испытываемое сопротивление было бы наименьшим. Почти одновременно появились и другие вариационные проблемы: задача о брахистохроне (1696), форма цепной линии и др.

Решающие события произошли в 1744 году. Леонард Эйлер опубликовал первую общую работу по вариационному исчислению («Метод нахождения кривых, обладающих свойствами максимума либо минимума»). В это время начинает развиваться аналитическая механика, которая изучает общие принципы механики и дает общие методы составления уравнения движения и равновесия систем.

Начало развитию аналитической механики было положено Даламбером «Трактат о динамики» (1743 г.) и Лагранжем «Аналитическая механика» (1788 г.), по разработке общих аналитических приемов решения динамических задач, пригодных как для свободных, так и для связанных механических систем.

§2. Лагранжев формализм.

В отличие от Ньютона, который получил законы динамики из эксперимента, Лагранж вывел их математически, как говорят, «на кончике пера». Лагранж ввел понятие обобщенных координат и придал уравнениям механики новую форму. Число обобщенных координат совпадает с числом степеней свободы механической системы. Система, имеющая s степеней свободы, описывается уравнениями Лагранжа, представляющими собой систему из s обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Они не являются математически более сложными, чем дифференциальные уравнения движения, полученные непосредственно из II закона Ньютона (табл.2). (33)

Ещё в 1760-1761 г.г. Жозеф Луи Лагранж ввёл строгое понятие вариации функции и придал вариационному исчислению современный вид. Он обосновал, развил и применил первый из вариационных принципов классической механики - принцип возможных (виртуальных) перемещений. Этот принцип устанавливает условие равновесия механической системы с идеальными связями. Согласно этому принципу, положения равновесия механической системы, отличаются от всех других возможных для нее положений тем, что только для положений равновесия сумма элементарных работ всех приложенных к системе (активных и реактивных) сил на любом возможном (виртуальном) перемещении равна нулю.

$$\delta A_R = \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \delta \vec{r}_i = 0. \tag{1.1}$$

Фундаментальным понятием классической аналитической механики является действие (20,32). Впервые понятие действия сформулировано Лейбницем в XVIII веке. В 1744 г. Мопертюи сформулировал принцип наименьшего действия и возвёл его в ранг основных законов природы, управляющих физическими явлениями (24). Действие в механике Лагранжа определяется через лагранжиан $T - U = L\,(q, \dot{q}, t)$:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)\, dt, \quad [S] = [\text{Дж} * \text{с}]. \tag{1.2}$$

Лагранж сыграл решающую роль в развитии принципа наименьшего действия. Он распространил этот принцип на произвольную механическую систему (то есть не только на свободные материальные точки).

«Аналитическая механика» Лагранжа открыла новый этап в развитии механики. Высокую оценку этой работе дал Гамильтон: «При этом красота метода настолько соответствует достоинству результата, что эта великая работа превращается в своего рода математическую поэму» (24). Значение лагранжева формализма выходит далеко за рамки механики. Он нашел эффективное применение также в теории поля.

Дальнейшее развитие аналитической механики в XIX веке связано в основном с трудами Гамильтона, Якоби, Остроградского.

§3. Гамильтонов формализм.

В 1834 году Гамильтон получил более простую форму универсального уравнения Лагранжа. Гамильтон указал метод преобразования s-уравнений Лагранжа к системе 2s обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Независимыми переменными являются s обобщенных координат и s обобщенных импульсов. Уравнения движения, записанные в форме дифференциальных уравнений 1-го порядка, называются каноническими уравнениями Гамильтона (табл.2).

В 1834 году в труде «Об общем принципе динамики» Гамильтон сформулировал принцип наименьшего действия, который рассматривается как исходный постулат аналитической механики (7,23). Принцип Гамильтона - принцип экстремального (наименьшего) действия записывается в виде:

$$\delta S = 0. \qquad (1.3)$$

И формулируется следующим образом: «Из всех возможных траекторий реально осуществляется только тот путь, который соответствует экстремальному значению функции действия».

Принцип наименьшего действия служит фундаментальной и стандартной основой лагранжевой и гамильтоновой формулировок механики. Преимущество вариационного принципа Гамильтона состоит в том, что его можно распространить на системы, имеющие бесконечно большое число степеней свободы.

§4. Три эквивалентных метода построения классической механики

Таблица 2

Три эквивалентных метода построения классической механики

	Метод Ньютона	Метод Лагранжа	Метод Гамильтона
Независимые переменные	Декартовые координаты, скорость, время $\vec{r}(x,y,z), v(v_x,v_y,v_z)$	Обобщенные координаты $q_\alpha, \alpha = 1,2,\dots s$	Обобщенные координаты и обобщенные импульсы; q_α, P_α
Число дифферен-циальных уравнений	3N дифференциальных уравнений 2-го порядка	S Дифференциаль-ных уравнений 2-го порядка	2S Дифференциаль-ных уравнений 1-го порядка
Уравнение движения	$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$	$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$ $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = P_\alpha;$ $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \dot{P}_\alpha$	$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial P_\alpha}$ $\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$
Применимость в системах координат	ИСО	ИСО, НИСО	ИСО, НИСО

Важнейшую роль в развитии механики сыграло уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(gradS)^2 + U(\vec{r}) = 0, \qquad (1.4)$$

которое явилось основанием для установления связи между классической механикой и волновой оптикой. Согласно оптико-механической аналогии Гамильтона (1834 г.) классическую механику можно рассматривать как аналог геометрической оптики. При этом роль поверхностей равной фазы световой волны играют поверхности постоянного действия, а роль траектории световых лучей играют классические траектории частиц вещества.

Значение основных принципов аналитической механики выходит далеко за рамки самой механики. Они играют важную роль в теории поля, в математической физике, в теории относительности, физике твёрдого тела, в частности, в микроскопической теории сверхпроводимости. Гамильтонов формализм оказался наиболее подходящим для формулировки волновой квантовой механики Шрёдингера.

Не случайно Ландау и Лифшиц (18) отмечают, что «метод Гамильтона-Якоби является наиболее могущественным методом нахождения общего интеграла движения». А само изложение механики в 1 томе Курса теоретической физики они начинают именно с принципа наименьшего действия. Предельно краткий, оригинальный и мастерский курс лекций по квантовой механике Э.Ферми (31) начинается с изложения принципа Мопертюи, из которого при использовании понятия волнового пакета и гипотезы де Бройля получается уравнение Шрёдингера.

«Могущество» метода Гамильтона-Якоби сохраняется и в квантовой области (25,26,27). Не случайно § 2 в (28), посвящённый уравнению Шрёдингера, начинается с обсуждения уравнения Гамильтона-Якоби и его обобщения в квантовой механике. Это уравнение, совершенно эквивалентное уравнению Шрёдингера, ясно демонстрирует роль оптико-механической аналогии Гамильтона, сыгравшей совместно с гипотезой де Бройля решающую роль в становлении квантовой механики.

Глава II. Изложение курса аналитической механики. Механика Лагранжа и Гамильтона

§1. Принцип Даламбера

1. Свободное движение материальной точки.

Как известно, второй закон Ньютона имеет вид

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}= \vec{F}. \tag{2.1}$$

Это уравнение можно переписать в эквивалентной форме:

$$m\ddot{\vec{r}}= \vec{F}, \tag{2.2}$$

$$\vec{F}+(- m\ddot{\vec{r}})= 0, \tag{2.3}$$

из которого следует сила инерции

$$\vec{I}= - m\ddot{\vec{r}}. \tag{2.4}$$

Отсюда вытекает принцип Даламбера:

$$\vec{F}+\vec{I}=0 . \tag{2.5}$$

При движении точки равнодействующая всех сил $\vec{F}$ и сил инерции $\vec{I}$ удовлетворяет условию равновесия. Поскольку сила инерции не приложена к точке, то ее часто называют фиктивной.

2. Свободное движение системы материальных точек.

В уравнении движения учтем как внутренние, так и внешние силы:

$$\vec{F}_{i,\text{внеш}} + \vec{F}_{i,\text{внут}} - m_i\ddot{\vec{r}}_i = 0, \tag{2.6}$$

где

$$\vec{F}_{i,\text{внеш.}} = \vec{F}_i^e\ ;\ \ \vec{F}_{i,\text{внут.}} = \vec{F}_i^i. \tag{2.7}$$

$$\sum_{=1}^{N}\vec{F}_i^e + \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^i + \sum_{i=1}^{N}(-m_i\ \ddot{\vec{r}_i}) = 0. \tag{2.8}$$

По третьему закону Ньютона

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^i = 0. \tag{2.9}$$

Из (2.8) с учетом (2.9) следует принцип Даламбера для системы материальных точек:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^e + \vec{I} = 0. \qquad (2.10)$$

3.Пусть на систему наложены голономные, идеальные, стационарные и удерживающие связи. Тогда будем иметь:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i,\text{акт.}} + \sum_{i} \vec{R}_i + \sum_{i=1}^{N} \left(-m_i \ddot{\vec{r}}_i\right) = 0, \qquad (2.11)$$

$\vec{F}_{i,\text{акт.}} = \vec{F}^{e}_{i,\text{внеш}} + \vec{F}^{i}_{i}$, R_i – равнодействующая всех сил реакций связи.

Таким образом, при движении несвободной механической системы сумма активных сил, сил реакций связей и сил инерции представляют собой систему сил эквивалентную нулю. Из уравнения (2.11) вытекает уравнение для моментов сил:

$$\sum_{i} [\vec{r}_i \vec{F}_i] + \sum_{i} [\vec{r}_i \vec{R}_i] + \sum_{i} [\vec{r}_i \left(-m_i \ddot{\vec{r}}_i\right) = 0. \qquad (2.12)$$

Из уравнений (2.11), (2.12) следует: принцип Даламбера позволяет записать уравнения движения в виде уравнений равновесия, т.е. позволяет составить уравнения динамики методами статики.

§2. Принцип виртуальных перемещений. Общее уравнение динамики

Виртуальным перемещением точки называется бесконечно малое перемещение, которое точка могла бы иметь при наложенных на нее связях. Виртуальное перемещение не обусловлено действием каких-либо сил, и поэтому не обладает длительностью. Это чисто геометрическое понятие, характеризующее структуру наложенных на систему связей. В отличие от этого действительное перемещение точки происходит в определенном направлении под действием системы приложенных сил, при непрерывном изменении аргумента (t). Поэтому виртуальное перемещение точки – это вариация $\delta\vec{r}_i$, когда t=const, $d\vec{r}_i$– дифференциал за время dt. Вариация δx связана с варьированием самой функции, т.е. с переходом $x_1(t)$ в $x_2(t)$ при фиксированном времени t. Дифференциал dx обусловлен приращением времени dt.

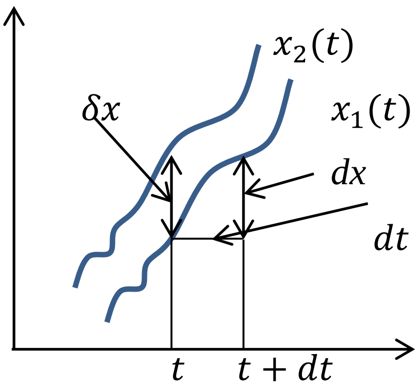


Рис. 1. Иллюстрация понятий «вариация» и «дифференциал».

Работа равнодействующей приложенных к точке сил на виртуальном перемещении называется виртуальной работой:

$$\delta A_R = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \delta\vec{r}_i. \tag{2.13}$$

Принцип виртуальных перемещений был сформулирован в 1717 г. Бернулли и применен Лагранжем для построения аналитической механики.

Для равновесия механической системы с голономными, идеальными, стационарными и удерживающими связями необходимо и достаточно, чтобы сумма виртуальных работ всех активных сил обращалась в нуль.

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i\, \delta\vec{r}_i = 0. \tag{2.14}$$

Докажем необходимость этого условия (прямая теорема Лагранжа). Если система находится в равновесии, то каждая точка будет находиться в покое. Это возможно, если равнодействующая всех активных сил, приложенных к точке, уравновешивается равнодействующей $\vec{R}_i$ всех сил реакции связи, ограничивающих её свободу перемещения.

Умножим сумму сил скалярно на виртуальное перемещение:

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0 \,/\, \delta\vec{r}_i\,,$$

затем сложим уравнения для всех точек

$$\underbrace{\textstyle\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \delta\vec{r}_i}_{\text{Вирт.акт.силы}} + \underbrace{\textstyle\sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \delta\vec{r}_i}_{\text{Вирт.силы реакций связи}} = 0.$$

В случае идеальных и удерживающих связей

$$\delta A_R = \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \delta\vec{r}_i = 0. \tag{2.15}$$

Сумма виртуальных работ всех сил реакции связи на любом виртуальном перемещении равна нулю. Выражение (2.15) является определением идеальных связей (постулат идеальных связей). Примером проявления этого условия является перемещение материальной точки на гладкой поверхности. При этом сила реакции связей ортогональна к поверхности, а виртуальные перемещения лежат в касательной плоскости.

Условие (2.14) является необходимым. Докажем его достаточность (т.е. обратную теорему Лагранжа). Предположим, что условие (2.14) выполнено, но система, тем не менее, выходит из состояния покоя, начинает двигаться, тогда за время dt действительные перемещения dr будут направлены вдоль равнодействующих сил, при этом $dr = \delta r.$ Тогда

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i + \vec{R}_i)\delta\vec{r}_i > 0. \tag{2.16}$$

Но согласно постулату идеальных связей,

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \delta \vec{r}_i = 0. \tag{2.17}$$

Поэтому из (2.16) получим, что

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \, \delta \vec{r}_i > 0, \tag{2.18}$$

что противоречит условию (2.14). Таким образом, (2.14) есть не только необходимое, но и достаточное условие равновесия.

Теперь рассмотрим движение системы материальных точек при наличии идеальных, голономных и удерживающих связей. Умножим каждый член уравнения движения i - той материальной точки на $\delta\vec{r}_i$, получим:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i / * \delta \vec{r}_i, \tag{2.19}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \, \ddot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \delta \vec{r}_i, \tag{2.20}$$

Согласно (2.17),

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \delta \vec{r}_i = 0, \tag{2.21}$$

следовательно,

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \delta \vec{r}_i = 0, \tag{2.22}$$

или

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i + \vec{I}_i) \delta \vec{r}_i = 0. \tag{2.23}$$

Сумма работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях точек системы равна нулю. Формула (2.23) - это дифференциальный вариационный принцип Даламбера-Лагранжа.

Таким образом, введение сил инерции позволяет по аналогии с принципом возможных перемещений в статике сформулировать динамический принцип виртуальных перемещений. Уравнение (2.23) называется общим или универсальным уравнением динамики системы материальных точек.

§3. Уравнения Лагранжа первого рода. Метод неопределенных множителей Лагранжа

Пусть на систему N материальных точек наложено k голономных, идеальных, стационарных связей вида

$$f_\gamma\big(x_1, y_{1,} z_1, \dots \dots . x_N, y_N, z_N\big) = 0, \qquad (2.24)$$

$\gamma = 1,2,3, \dots \dots k.$

Всего может быть 3N виртуальных перемещений точек: $\delta x_{1,}$ $\delta x_{2,} \dots .$ δz_N, из них независимых: (3N-k). Для каждой связи под номером γ: $df_\gamma = 0$,

$$df_\gamma = \sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial f_\gamma}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_\gamma}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_\gamma}{\partial z_i}\delta z_i) = 0. \qquad (2.25)$$

Умножим каждое уравнение этой системы на неопределенные множители Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{3 \dots \dots \dots} \lambda_k$ и сложим с общим уравнением динамики:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{\gamma=1}^{k} (\lambda_\gamma \frac{\partial f_\gamma}{\partial x_i}\delta x_i + \lambda_\gamma \frac{\partial f_\gamma}{\partial y_i}\delta y_i + \lambda_\gamma \frac{\partial f_\gamma}{\partial z_i})$$

$$+$$

$$\sum_{i=1}^{N} [(F_{i,x} - m_i\ddot{x}_i)\delta x_i + \big(F_{i,y} - m_i\ddot{y}_i\big)\delta y_i + (F_{i,z} - m_i\ddot{z}_i)\delta z_i$$

$$=$$

$$\sum_{i=1}^{N} [\ (F_{i,x} - m_i\ddot{x}_i + \sum_{\gamma=1}^{k}\lambda_\gamma \frac{\partial f_\gamma}{\partial x_i})\ \delta x_i + \left(F_{i,y} - m_i\ddot{y}_i + \sum_{\gamma=1}^{k}\lambda_\gamma \frac{\partial f_\gamma}{\partial y_i}\right)\delta y_i$$

$$+ \left(F_{i,z} - m_i\ddot{z}_i + \sum_{\gamma=1}^{k}\lambda_\gamma \frac{\partial f_\gamma}{\partial z_i}\right)\delta z_i = 0. \qquad (2.26)$$

Выберем множители так, чтобы коэффициенты при k зависимых перемещений обратились в ноль. Тогда коэффициенты при (3N-k) независимых перемещениях тоже будут равны нулю. Получим систему уравнений:

$$m_i\ddot{x}_i = F_{i,x} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + \lambda_\gamma \frac{\partial f_\gamma}{\partial x_i} = 0,$$

$$m_i\ddot{y}_i = F_{i,y} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_i} + \dots + \lambda_\gamma \frac{\partial f_\gamma}{\partial y_i} = 0,$$

$$m_i\ddot{z}_i = F_{i,z} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_i} + \dots + \lambda_\gamma \frac{\partial f_\gamma}{\partial z_i} = 0.$$

Мы получили уравнения Лагранжа первого рода (уравнения Лагранжа с реакциями связей).

В результате решения этой системы определяются реакции связи. Например, проекции силы реакции, возникающей от связи $f_1 = 0$, равны

$$R_{i,x} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i},\ R_{i,y} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_i}, R_{i,z} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_i}. \tag{2.27}$$

Зная множитель Лагранжа, можно найти реакции всех наложенных на систему связей. Уравнение Лагранжа I рода целесообразно применять, когда число точек системы N и число связей k не велико. Когда N>>1, удобно перейти от декартовых координат к новым координатам, которые называются обобщенными, число которых равно числу степеней свободы системы.

Метод обобщенных координат приводит к уравнению Лагранжа II-го рода.

§4. Уравнения Лагранжа в обобщенных координатах. Уравнение Лагранжа II-го рода

Дадим вывод этого уравнения из принципа Даламбера. Пусть на систему N материальных точек наложено k голономных, идеальных, нестационарных связей вида

$$f_k(x_1, y_1, z_1, \dots . x_N, y_N, z_N, t) = 0,$$

из которых (3N-k) – независимых.

Таким образом, система имеет $s = 3N - k$ степеней свободы.

Введем s независимых переменных, задание которых полностью определяет состояние системы; $q_1, q_2, \dots . q_s -$ обобщенные координаты. При этом декартовые координаты можно выразить через обобщенные:

$x_1 = x_1(q_1, q_2, q_3, \dots q_s, t),$

$y_1 = y_1(q_1, q_2, q_3, \dots q_s, t),$

$z_1 = z_1(q_1, q_2, q_3, \dots q_s, t)$

Все виртуальные перемещения выразим через δq:

$$\delta\vec{r}_1 = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \dots + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_s} = \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha.$$

В общем случае:

$$\delta\vec{r}_N = \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_N}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha.$$

Подставляя их в универсальное уравнение механики, получим:

$$\sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i)\delta\vec{r}_i = 0.$$

Далее будем иметь:

$$\sum_{\alpha=1}^{s}[\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha} - \sum_{i=1}^{N}m_i\vec{a}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}]\,\delta q_\alpha = 0, \qquad (2.28)$$

Здесь

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha\,. \qquad (2.29)$$

есть обобщенная сила, отнесенная к координате q_α. Второе слагаемое в (2.28) можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}. \qquad (2.30)$$

С учетом (2.29) и (2.30) уравнение (2.28) примет вид:

$$\sum_{\alpha=1}^{s} [Q_\alpha - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}]\delta q_\alpha = 0.$$

Отсюда вытекает система уравнений

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2, (2.31) \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s. \end{cases}$$

Это система s-уравнений, представляющих собой дифференциальные уравнения Лагранжа II-го рода. Число этих уравнений равно числу степеней свободы механической системы.

Для любой степени свободы α:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha. \qquad (2.32)$$

В случае потенциальных сил, когда $Q_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$, получаем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha},$$

или

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}(T - U) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}(T - U) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}(T - U) = 0,$$

где $T - U = L$.

В результате получим следующее уравнение, представляющее собой уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0. \qquad (2.33)$$

Доказательство соотношения (2.30):

1) Сначала покажем, что

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}. \qquad (2.34)$$

Полагая, что $\vec{r}_i(q_\alpha, t)$, запишем дифференциал радиуса-вектора

$$d\vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t};$$

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \dot{\vec{r}}_i = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\frac{dt}{dt}.$$

Взяв производную по обобщенной скорости, получим

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha},$$

что совпадает с формулой (2.34).

2) Докажем что полная производная равна частной производной

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha}, \qquad (2.35)$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_1 \partial q_\alpha}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_2 \partial q_\alpha}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_s \partial q_\alpha}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_\alpha}, \qquad (2.36)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\alpha \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\alpha \partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\alpha \partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\alpha \partial t}. \qquad (2.37)$$

Формула (2.36) эквивалентна формуле (2.37).

С учетом формул (2.34) и (2.35) преобразуем второе слагаемое формулы (2.28):

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{a}_i\,\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}=\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{v}}_i\,\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}=\sum_{i=1}^{N} m_i\,\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i\,\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)-\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{N} m_i\,\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i\,\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)-\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i\,\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha}$$

$$=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i\,\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i\vec{v}_i^{\,2}}{2}=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_\alpha}\left(\frac{m_i\vec{v}_i^{\,2}}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial q_\alpha}T.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{a}_i\,\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\,. \tag{2.30}$$

Формула (2.30) доказана.

В отличие от механики Ньютона, в аналитической механике Лагранжа вводятся обобщенные координаты, число которых совпадает с числом степеней свободы s. Система, имеющая s степеней свободы, описывается уравнениями Лагранжа, представляющими собой систему из s обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка.

Для составления уравнений Лагранжа необходимо:

1. Определить число степеней свободы.
2. Установить, какие координаты принимаются за обобщенные.
3. Вычислить кинетическую энергию $E_{\text{кин.}}=\text{T}$.
4. Найти производные: $\frac{\partial\text{T}}{\partial q_\alpha}, \frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}$.
5. Определить обобщенные силы Q_α.

Покажем, что формализм Лагранжа математически эквивалентен механике Ньютона.

<u>Пример 1.</u> Рассмотрим свободно движущуюся частицу в ИСО (инерциальная система отсчета).

U=0; $q=r;\ \dot{q}=v.$

Составим лагранжиан:

$L=T-U; L=\frac{mv^2}{2}; \frac{\partial L}{\partial r}=0;\ \frac{\partial L}{\partial v}=mv.$

Подставляем в уравнение (2.33):

$\frac{d}{dt}(mv) = 0$ =>$mv = const$; =>v=*const.*

<u>Вывод</u>: В ИСО всякое свободное движение происходит с постоянной скоростью, то есть в отсутствие внешних сил тело сохраняет состояние равномерного и прямолинейного движения или покоится – а это как раз и есть закон инерции (первый закон Ньютона).

<u>Пример 2.</u> Рассмотрим систему материальных точек во внешнем силовом поле U≠0. В этом случае функция Лагранжа имеет вид

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} - U(r_1, r_2, \dots, r_N).$$

Вычисляя все необходимые производные, получим:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \frac{\partial L}{\partial v_i} = m_i v_i;\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i} = m_i \frac{dv_i}{dt};\ \frac{\partial L}{\partial r_i} = -\frac{\partial U}{\partial r_i},$$

$$\frac{m_i dv_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial r_i} = 0,$$

$$\frac{m_i dv_i}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial r_i} = F_i \quad => \ m_i a_i = F_i\ .$$

Таким образом, из уравнения Лагранжа получается II закон Ньютона.

<u>Вывод</u>: Уравнения Лагранжа – это обыкновенные дифференциальные уравнения 2-го порядка относительно обобщенных координат. Они не являются математически более сложными, чем дифференциальные уравнения движения, полученные непосредственно из II закона Ньютона.

§5. Примеры функции Лагранжа и уравнения Лагранжа

1. Материальная точка в поле потенциальных сил в декартовой системе координат.

В этом случае роль обобщенных координат играют декартовые координаты:

$$q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z.$$

Лагранжиан имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z).$$

Поэтому уравнение движения для каждой координаты принимает вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \ => m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \ => m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \ => m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Таким образом, система уравнений Лагранжа тождественна уравнениям Ньютона.

2. Материальная точка в потенциальном силовом поле в цилиндрической системе координат.

Полагая $q_1 = \rho, q_2 = \varphi, q_3 = z,$

получим:

$$(dS)^2 = (d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2 + (dz)^2,$$

$$v^2 = (\frac{dS}{dt})^2,$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U.$$

1) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0\,, m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial U}{\partial \rho} = 0;\ m\ddot{\rho} = m\rho\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial \rho}.$

2) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0\,, \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}) = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}.$

3) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0\ , m\ddot{z}\ = -\frac{\partial U}{\partial z}$.

3. Уравнение Лагранжа для относительного движения замкнутой системы двух материальных точек

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F = -grad\ U.$$

Эта задача сводится к движению во внешнем поле одной материальной точки с приведённой массы

$$m_{\text{пр.}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

4. Материальная точка в сферической системе координат.

Обобщенными координатами являются

$$q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi.$$

$$(dS)^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2 + (rsin\theta d\varphi)^2.$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - U(r, \theta, \varphi).$$

Рассмотрим случай центральных внешних сил:

$$U = U(r).$$

Запишем уравнение Лагранжа для каждой степени свободы:

1) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0\ => m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mrsin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial U}{\partial t} = 0.$

2) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0\ => m\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) - mr^2 sin\theta cos\theta\dot{\varphi}^2.$

3) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 => \frac{d}{dt}(mr^2 sin^2\theta\dot{\varphi}) = 0\ => \frac{d}{dt}K_z = 0 =>\ K_z = const.$

5. Лагранжиан заряженной частицы, движущейся в электромагнитном поле.

Сила Лоренца, действующая на заряженную частицу, имеет вид $\vec{F}_{\text{л}} = e\vec{\varepsilon} + \frac{e}{c}\left[\vec{v}\vec{B}\right]$.

a) $\vec{B} = 0, \vec{\varepsilon} = -grad\varphi, \varphi -$ скалярный потенциал

b) $\vec{B} \neq 0,\quad rot\vec{\varepsilon} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},\ \vec{B} = rot\vec{A},\ \overrightarrow{A} -$ векторный потенциал,

$$rot\vec{\varepsilon} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}rot\vec{A}, \quad rot\left(\vec{\varepsilon} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0, \qquad \vec{\varepsilon} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

c) $\vec{\varepsilon} = -grad\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, тогда:

$$\vec{F}_{л} = -egrad\varphi - \frac{e}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}\left[\vec{v} * rot\vec{A}\right]. \qquad (2.38)$$

Вычислим векторное произведение:

$$\left[\vec{v} * rot\vec{A}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ rot_x\vec{A} & rot_y\vec{A} & rot_z\vec{A} \end{vmatrix};$$

$$[\vec{v} * rot\vec{A}]_x = v_y rot_z\vec{A} - v_z rot_y\vec{A}.$$

$$rot\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}; \quad \begin{cases} rot_z\vec{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \\ rot_y\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \end{cases}$$

$$\left[\vec{v} * rot\vec{A}\right]_x = v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - v_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial x} + v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z\frac{\partial A_x}{\partial z} - v_x\frac{\partial A_x}{\partial x}. \qquad (2.39)$$

Рассмотрим производную (при $\vec{v} = const$):

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{v}\vec{A}\right) = v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial x}$, то есть первые три члена в формуле (2.39).

Учитывая, что $\vec{A}(x, y, z)$, получим

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right), \text{ отсюда:} \qquad (2.40)$$

$$-\left(v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial z}\right) = \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{dA_x}{dt}. \qquad (2.41)$$

Подставим (2.40) и (2.41) в (2.39):

$$\left[\vec{v} * rot\vec{A}\right]_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{v}\vec{A}\right) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}. \qquad (2.42)$$

Подставим (2.42) в выражение (2.38) для силы Лоренца $F_{л,x}$:

$$F_x = -e\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{e}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{v}\vec{A}\right) - \frac{e}{c}\frac{dA_x}{dt} + \frac{e}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}.$$

$$F_x = e\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi - \frac{1}{c}\vec{v}\vec{A}\right) - \frac{1}{c}\frac{dA_x}{dt}\right\}. \quad (2.43)$$

Учтём, что $\vec{A} \neq f(v)$, то есть $\frac{d}{dt}A_x = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial v_x}\left(\vec{A}\vec{v}\right)\right]$.

$\frac{dA_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A_x\frac{\partial v_x}{\partial v_x} + A_y\frac{\partial v_y}{\partial v_x} + A_z\frac{\partial v_z}{\partial v_x}\right]$, так как $\left(\frac{\partial v_y}{\partial v_x} = 0, \frac{\partial v_z}{\partial v_x} = 0\right)$

$\frac{dA_x}{dt} = \frac{dA_x}{dt}$, что и требовалось доказать.

Поэтому (2.43) примет вид:

$$F_x = e\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi - \frac{1}{c}\vec{v}\vec{A}\right) - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial v_x}\left(\vec{A}\vec{v}\right)\right]\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial v_x}\left(\vec{v}\vec{A}\right) = \frac{\partial}{\partial v_x}\left(\varphi - \frac{1}{c}\vec{A}\vec{v}\right), \text{так как } \varphi \neq f(v).$$

$$F_x = e\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi - \frac{1}{c}\vec{v}\vec{A}\right) + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial v_x}\left(\varphi - \frac{1}{c}\vec{v}\vec{A}\right)\right]\right\}. \quad (2.44)$$

В общем случае сила имеет вид

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial v_x}. \quad (2.45)$$

Из сравнения (2.44) и (2.45) следует: $U = e\left(\varphi - \frac{1}{c}\vec{v}\vec{A}\right)$.

$$U = e\varphi - \frac{e}{c}\left(\vec{A}\vec{v}\right). \quad (2.46)$$

- обобщенный потенциал.

Лагранжиан заряженной частицы с учётом (2.46) имеет вид:

$$L = T - U = T - e\varphi + \frac{e}{c}\left(\vec{v}\vec{A}\right).$$

Подставляя в эту формулу $T = \frac{mv^2}{2}$, окончательно получаем:

$$L = \frac{mv^2}{2} - e\varphi + \frac{e}{c}\left(\vec{v}\vec{A}\right). \quad (2.47)$$

§6. Законы сохранения и их связь со свойствами симметрии пространства и времени

1. Теорема Нетер.

В 1918 году немецкий математик Эмми Нетер доказала теорему, устанавливающую связь между преобразованиями, которые оставляют Лагранжиан неизменным, и законами сохранения в механике.

Любому непрерывному обратимому преобразованию координат, при котором Лагранжиан остается инвариантным, соответствует первый интеграл уравнений движения. 1-й интеграл (или просто интеграл) движения – это такая функция координат точек, скоростей и времени, которая при движении сохраняет постоянное значение, определяемое начальными условиями:

$$f(q_1, q_2, q_3, \dots q_s;\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots \dot{q}_s; t) = C\ .$$

Среди таких интегралов движения особую роль играют те интегралы, происхождение которых связано с основными свойствами пространства (П) и времени (t). П – однородно, изотропно; t – однородно.

<u>Связь закона сохранения энергии с однородностью времени</u>

В общем случае лагранжиан является функцией обобщенных координат, скоростей и времени:

$L(q, \dot{q}, t)$, пусть $L \neq f(t)$ явно, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$. Найдём производную:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\frac{dq_\alpha}{dt} + \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{d\dot{q}_\alpha}{dt}.$$

Согласно уравнению Лагранжа,

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha},$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha.$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right).$$

Соберем всё в одну (левую) часть, получим:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - L\right) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - L = const.$$

Эта сохраняющаяся величина называется полной механической энергией системы:

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - L = E.$$

Это новое определение механической энергии совпадает с обычным определением полной энергии как суммы кинетической и потенциальной энергий. Очевидно, что

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha = v * mv = mv^2 = 2T,$$

$$2T - L = 2T - (T - U) = T + U = E.$$

Таким образом, закон сохранения энергии является непосредственным следствием однородности времени.

2. Циклические координаты. Сохранение обобщенных импульсов как следствие однородности пространства

Обобщенными импульсами механической системы называют скалярные величин, определяемые равенствами

$$P_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}, \qquad \alpha = 1,2,\ldots.$$

Обобщенный импульс P_α, соответствующий q_α, часто называют каноническим импульсом.

Если $q_\alpha = x, y, z$, то $P_\alpha => P_x, P_y, P_z$ (компоненты обычного импульса). Теперь уравнения Лагранжа можно записать в виде

$\frac{d}{dt}P_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0;\ \dot{P}_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$,или $\dot{P}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$.

Если какие либо обобщенные координаты сами не входят в функцию Лагранжа, а входят лишь их производные по времени, то такие координаты называются циклическими. Такое название обусловлено тем, что чаще всего такими координатами являются угловые переменные.

Если координата циклическая, то

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \dot{P}_\alpha = 0 => P_\alpha = const. \qquad (2.48)$$

Из формулы (2.48) следует, что цикличность обобщенной координаты означает инвариантность лагранжиана относительно любых бесконечно малых трансляций. То есть цикличность обобщенной координаты связана с однородностью пространства.

С учетом (2.48)

$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = 0$, если $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \rightarrow P_\alpha = const.$

Закон сохранения обобщенного импульса есть следствие однородности пространства.

Пример: Частица в центрально - симметричном поле. В сферической системе координат

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - U(r),$$

$$P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},$$

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta},$$

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 sin^2\theta\dot{\varphi},$$

В данном случае циклической координатой является азимутальный угол φ. Поэтому

$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \rightarrow P_\varphi = const.$

$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 sin^2\theta\dot{\varphi}.$

$K_z = mr^2 sin^2\theta\dot{\varphi} = const.$

Вследствие сферической симметрии силового поля в качестве полярной оси можно выбрать любую ось. Следовательно, при движении в центрально-симметричном поле $\vec{K} = const$, то есть момент импульса сохраняется. Если за полярную ось выбрать прямую параллельную $\vec{K}$ и положить угол $\theta = \frac{\pi}{2}$, то $\dot{\theta} = 0$.

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r),$$

$$E = T + U = L + U + U = L + 2U,$$

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = const,$$

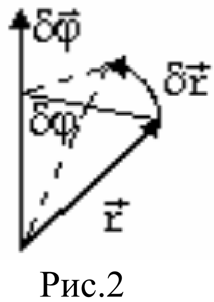
$$K_z = mr^2\dot{\varphi} = const.$$

Первые интегралы движения E и K появились из инвариантности Лагранжиана относительно сдвига по времени и бесконечно малых поворотов относительно полярной оси.

3. Закон сохранения момента импульса как следствие изотропности пространства.

Изотропность пространства означает, что механические свойства замкнутой системы не меняются при любом бесконечно малом повороте системы в пространстве как целого.

Рассмотрим бесконечно малый поворот на угол $\delta\varphi$ и потребуем, чтобы лагранжиан при этом не изменился: $L = invar$.



$$|\delta\vec{\varphi}| = \delta\varphi; \ |\delta\vec{r}| = MN\delta\varphi = r\sin\theta\,\delta\varphi;$$

$$\delta\vec{r} = [\delta\vec{\varphi}\vec{r}], \qquad \delta\vec{v} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t}, \qquad \delta\vec{v} = [\delta\vec{\varphi}\vec{v}].$$

Бесконечно малое изменение лагранжиана можно записать в виде:

Рис.2

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial r_i}\delta r_i + \frac{\partial L}{\partial v_i}\delta v_i\right) = 0.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = P_i, \ \frac{\partial L}{\partial r_i} = F_i = \dot{P}_i,$$

получаем следующее равенство:

$$\sum_i (\dot{\vec{P}}_i\,[\delta\vec{\varphi}\vec{r}_i] + \vec{P}_i[\delta\vec{\varphi}\vec{v}_i]) = 0.$$

Используя свойство векторного произведения, получим:

$$\delta\vec{\varphi}\sum_i (\left[\vec{r}_i\dot{\vec{P}}_i\right] + \left[\vec{v}_i\vec{P}_i\right]) = \delta\vec{\varphi}\frac{d}{dt}\sum_i [\vec{r}_i\,\vec{P}_i] = 0.$$

Поскольку $\delta\varphi \neq 0$, имеем

$$\frac{d}{dt}\sum_i [\vec{r}_i\,\vec{P}_i] = 0,$$

$$\sum_i [\vec{r}_i\,\vec{P}_i] = const,$$

$$\vec{\mathrm{K}} = \mathrm{const}.$$

Таким образом, имеются семь аддитивных интегралов движения: $E, P_x, P_y, P_z, K_x, K_y, K_z$.

<u>Примеры</u>:

1.Материальная точка в однородном поле силы тяжести, в декартовой системе координат, $U = mgz$.

Лагранжиан имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz,$$

x, y —циклические (игнорируемые) координаты. Поэтому

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0,$$

$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = mv_x = const,$

$P_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = mv_y = const.$ Т.е. имеет место сохранение двух проекций импульса (P_x, P_y).

2.Материальная точка в цилиндрической системе координат в том же поле:

$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz, \varphi$ —циклическая координата.

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} = const,$$

$$K_z = m\rho^2\dot{\varphi} = const,$$

т.е. сохранятся обобщенный импульс, представляющий собой проекцию момента импульса на ось z.

Выводы:

1) Сохранение проекций импульса $P_x = const, P_y = const$ при движении материальной точки в поле силы тяжести вдоль оси z есть следствие инвариантности лагранжиана относительно трансляций частицы вдоль направлений x и y.
2) Сохранение проекции момента импульса на ось z $(K_z = const)$ означает инвариантность лагранжиана относительно поворотов частицы вокруг оси z.
3) Цикличность обобщенных координат и сохранение соответствующих обобщенных импульсов связаны с инвариантностью лагранжиана относительно тех или иных преобразований.

3.Заряженная частица в электромагнитном поле.

Согласно (2.47)

$L = \frac{mv^2}{2} - e\varphi + \frac{e}{c}(\vec{v}\vec{A}),\quad \varphi -$ скалярный потенциал.

$L = \frac{mv_x^2}{2} - e\varphi + \frac{e}{c}\,A_x v_x = \frac{m\dot{x}^2}{2} - e\varphi + \frac{e}{c}A_x\dot{x},\ x -$циклическая координата

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{e}{c}A_x = const$$

В этом случае сохраняющей величиной является не обычное механическое количество движения, а сохраняться будет сумма механической и немеханической составляющих количества движения:

$$m\dot{x} = P_x - \frac{e}{c}A_x,$$

$$m\vec{v} = \vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}.$$

Покажем, что из условия цикличности обобщенной координаты следует III закон Ньютона.

$$q_\alpha \to \vec{r}_i.$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial r_i} = \sum_{i=1}^{N} (-\frac{\partial U}{\partial r_i}) = \sum_{i=1}^{N} F_i,$$

$T \neq f(r_i)$, $L = T - U$. Для замкнутой системы:

$$\sum_{i=1}^{N} F_i = 0.$$

Пусть $N = 2$, тогда

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$, $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, т.е. получается III закон Ньютона.

§7. Интегральный вариационный принцип Гамильтона-Остроградского

Вариационные принципы показывают, чем истинное значение перемещения механической системы отличается от всех кинематически возможных в условиях наложенных связей. Вариационные принципы подразделяются на дифференциальные и интегральные.

Дифференциальные: выражают различия истинного и возможных перемещений в каждый данный момент времени (время фиксированное).

Интегральные: устанавливают различия между истинным перемещением за конечный промежуток времени и всеми возможными перемещениями (Δt≠0).

Основными дифференциальными принципами в механике являются:

1) Принцип возможных перемещений;
2) Принцип Даламбера-Лагранжа – этот принцип, называемый общим уравнением механики, становится неудобным и громоздким для систем с большим числом степеней свободы.

В 1834 году Гамильтон получил более простую форму универсального уравнения механики. Установленное им уравнение получило название вариационного принципа Гамильтона. Преимущество вариационного принципа Гамильтона состоит в том, что его можно распространить на системы, имеющие бесконечно большое число степеней свободы. Обычно принцип Гамильтона рассматривается как исходный постулат аналитической механики. Однако принцип Гамильтона можно получить из принципа Даламбера. Действительно, согласно (2.22)

$$\sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i)\delta\vec{r}_i = 0.$$

Учтем, что $\vec{F}_i = -grad\ U$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\delta\vec{r}_i = -\delta U.$$

Преобразуем слагаемое, содержащее силы инерции

$m_i\vec{a}_i\delta\vec{r}_i = m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\delta\vec{r}_i = \frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i\delta\vec{r}_i) - m_i\vec{v}_i\frac{d}{dt}\delta\vec{r}_i = \frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i\delta\vec{r}_i) - m_i\vec{v}_i\delta\vec{v}_i = \frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i\delta\vec{r}_i) - \delta\left(\frac{m_i\vec{v}_i^2}{2}\right)$;

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{a}_i\delta\vec{r}_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i\delta\vec{r}_i\right) - \delta T.$$

Подставим это выражение в универсальное уравнение динамики:

$$-\delta U + \delta T - \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i\,\delta\vec{r}_i\right) = 0,\ \ \delta(T-U) = \delta L.$$

Проинтегрируем от t_0 до t_1, затем умножим на dt:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i\delta\vec{r}_i\right)|\ dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i\delta\vec{r}_i\right)\Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Это эквивалентно следующему выражению:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L dt = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i\delta\vec{r}_i\right)\Big|_{t_0}^{t_1}, \qquad \Delta t = t_1 - t_0.$$

За это время точка опишет действительную траекторию. В моменты t_0 и t_1 действительная и виртуальная траектория совпадут: $\delta\vec{r}_i = 0$, поэтому

$$\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i\delta\vec{r}_i\right)\Big|_{t_0}^{t_1} = 0,$$

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L dt = 0.$$

Интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} L dt = S$$

называется функцией действия (или просто действием). Эта величина имеет размерность (энергия * время). Таким образом, мы приходим к принципу Гамильтона:

$$\delta S = 0.$$

Из всех возможных траекторий реально осуществляется только тот путь, который соответствует экстремальному значению функции действия. Для большинства траекторий действие минимально.

Принцип Гамильтона называется принципом экстремального, или наименьшего действия. Из принципа Гамильтона вытекают уравнения Лагранжа в обобщенных координатах.

§8. Вывод уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона

Воспользуемся определением лагранжиана:

$$T - U = L\,(q, \dot{q}, t).$$

Вычислим вариацию функции действия:

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} (\frac{\partial L}{\partial q} \delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha) dt.$$

Рассмотрим второе слагаемое

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{d}{dt} (\delta q_\alpha) dt = \int_{t_0}^{t_1} d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha\right) - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha dt$$

$$= \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha\right)\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha dt.$$

Учитывая, что $\delta q_\alpha(t_0) = \delta q_\alpha(t_1) = 0$, получаем:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} (\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha) dt = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0.$$

А это есть ничто иное, как уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0.$$

Для каждой степени свободы оно принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \dfrac{\partial L}{\partial q_1} = 0, \\ \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \dfrac{\partial L}{\partial q_2} = 0, \\ \dots \dots \dots \dots . \dots \dots \dots . . \\ \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \dfrac{\partial L}{\partial q_s} = 0. \end{cases}$$

§9. Кинетическая энергия как квадратичная функция обобщенных скоростей

В декартовой системе координат кинетическая энергия

$$T=\frac{mv^2}{2}=\frac{m\dot{r}^2}{2}=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2).$$

Получим выражение для кинетической энергии в случае, когда для описания системы используются не декартовые координаты, а обобщенные.

Учтем зависимость $\vec{r}(q,t)$. Кинетическая энергия имеет вид

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r}}_i^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r}}_i\dot{\vec{r}}_i.$$

Рассмотрим произведение скоростей:

$$\dot{r}_i\dot{r}_i=\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial r_i}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial r_i}{\partial q_s}\frac{dq_s}{dt}+\frac{\partial r_i}{\partial t}\frac{dt}{dt}\right)$$

$$*\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial r_i}{\partial q_2}\dot{q}_2+\cdots+\frac{\partial r_i}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial r_i}{\partial t}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial r_i}{\partial t}\right)^2+2\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial r_i}{\partial t}\frac{\partial r_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+2\sum_{\beta=1}^{s}\sum_{\gamma=1}^{s}\frac{\partial r_i}{\partial q_\beta}\frac{\partial r_i}{\partial q_\gamma}\dot{q}_\beta\dot{q}_\gamma.$$

Подставим это выражение в формулу для кинетической энергии:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\,(\frac{\partial r_i}{\partial t})^2+\sum_{\beta=1}^{s}\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial r_i}{\partial t}\frac{\partial r_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{s}\sum_{\gamma=1}^{s}\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial r_i}{\partial q_\beta}\frac{\partial r_i}{\partial q_\gamma}\dot{q}_\beta\dot{q}_\gamma.$$

Мы видим, что кинетическую энергию можно представить в виде трех слагаемых

$$T=T_0+T_1+T_2,$$

$$T_0=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\,(\frac{\partial r_i}{\partial t})^2,\qquad T_1=\sum_{\beta=1}^{s}\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial r_i}{\partial t}\frac{\partial r_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta,$$

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{s}\sum_{\gamma=1}^{s}\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial r_i}{\partial q_\beta}\frac{\partial r_i}{\partial q_\gamma}\dot{q}_\beta\dot{q}_\gamma.$$

Первое слагаемое T_0 не зависит от обобщенных скоростей. Следующее слагаемое

$$T_1 = \sum_{\beta=1}^{s} b_\beta \, \dot{q}_\beta \text{ есть линейная функция обобщенных скоростей.}$$

Наконец, третье слагаемое является квадратичной функцией обобщенных скоростей:

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{s}\sum_{\gamma=1}^{s} a_{\beta\gamma}\, \dot{q}_\beta \dot{q}_\gamma.$$

В обобщенных координатах кинетическая энергия равна

$$T = T_0 + \sum_{\beta=1}^{s} b_\beta \, \dot{q}_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{s}\sum_{\gamma=1}^{s} a_{\beta\gamma}\, \dot{q}_\beta \dot{q}_\gamma.$$

Выводы:

Если наложенные на систему связи нестационарные, то:

1. Кинетическая энергия оказывается неоднородной квадратичной формой обобщенных скоростей;
2. Кинетическая энергия и лагранжиан становятся явно зависящими от времени.

$$L = T_0 + \sum_{\beta=1}^{s} b_\beta \, \dot{q}_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{s}\sum_{\gamma=1}^{s} a_{\beta\gamma}\, \dot{q}_\beta \dot{q}_\gamma - U(q_1, q_2, \dots, q_s).$$

Если наложенные на систему связи являются стационарными, т.е. не зависят явно от времени, то получаем:

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0, \qquad T_0 = T_1 = 0,$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{s}\sum_{\gamma=1}^{s} a_{\beta\gamma}\, \dot{q}_\beta \dot{q}_\gamma,$$

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{s}\sum_{\gamma=1}^{s} a_{\beta\gamma}\, \dot{q}_\beta \dot{q}_\gamma - U(q_1, q_2, \dots, q_s).$$

И мы снова приходим к уравнениям Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0\,; \; \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} - \frac{\partial L}{\partial q_\beta} = 0.$$

§10. Канонические уравнения Гамильтона

Гамильтон указал метод преобразования s уравнений Лагранжа к системе 2s обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка. В методе Гамильтона независимыми переменными являются s обобщенных координат и s обобщенных импульсов. Уравнения движения, записанные в форме дифференциальных уравнений 1-го порядка, называются каноническими уравнениями Гамильтона. Получим их.

Лагранжиан $L(q, \dot{q}, t)$ есть функция обобщённых координат, скоростей и времени, поэтому полный дифференциал

$$dL = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

$$dL = \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{P}_\alpha \, dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Вычислим дифференциал

$$d\left(\sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha \, d\dot{q}_\alpha\right) = \sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha d\dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{q}_\alpha dP_\alpha.$$

Отсюда следует, что

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha \, d\dot{q}_\alpha\right) = d\left(\sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha d\dot{q}_\alpha\right) - \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{q}_\alpha dP_\alpha.$$

Подставим это выражение в исходный дифференциал:

$$d\left(L - \sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha \, d\dot{q}_\alpha\right) = \left(\sum_{\alpha=1}^{s} \dot{P}_\alpha dq_\alpha\right) - \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{q}_\alpha dP_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Умножим обе части этого уравнение на (-1):

$$d\left(\sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha \, d\dot{q}_\alpha - L\right) = -\left(\sum_{\alpha=1}^{s} \dot{P}_\alpha dq_\alpha\right) + \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{q}_\alpha dP_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (2.49)$$

Здесь появляется новая функция:

$$H(q,P,t)=\sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha\dot{q}_\alpha-L. \tag{2.50}$$

Формула (2.50) определяет функцию Гамильтона (гамильтониан) механической системы. Согласно (2.50)

$$dH=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}dq_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial P_\alpha}dP_\alpha+\frac{\partial H}{\partial t}dt. \tag{2.51}$$

Отсюда следуют канонические уравнения Гамильтона:

$$\dot{P}_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha};\ \dot{q}_\alpha=\frac{\partial H}{\partial P_\alpha}.$$

Уравнения Гамильтона симметричны относительно обобщенных координат и обобщенных импульсов. Видно также, что

$$\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Рассмотрим гамильтониан и канонические уравнения движения частицы в поле. $U=U(\vec{r})$ в декартовой системе координат.

Построим лагранжиан

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-U(x,y,z),$$

далее вычислим

$$P_\alpha\dot{q}_\alpha-L=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha-L=\dot{q}_\alpha\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}-L,\quad P_\alpha=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha},$$

$$v\frac{\partial L}{\partial t}-L=\dot{x}\frac{\partial L}{\partial v_x}+\dot{y}\frac{\partial L}{\partial v_y}+\dot{z}\frac{\partial L}{\partial v_z}-L$$

$$=m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+U(x,y,z),$$

$$v\frac{\partial L}{\partial t}-L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+U(x,y,z).$$

Учтем, что

$$\dot{x}=\frac{P_x}{m},\qquad \dot{y}=\frac{P_y}{m},\qquad \dot{z}=\frac{P_z}{m},$$

тогда получим гамильтониан в следующем виде:

$$H=\frac{m}{2}\left(\frac{P_x^2+P_y^2+P_z^2}{m^2}\right)+U(x,y,z),$$

$$H = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}{2m} + U(x, y, z),$$

$$H = \frac{P^2}{2m} + U(x, y, z) = T + U, H = T + U.$$

Канонические уравнения движения в декартовой системе координат будут иметь вид:

$$\dot{P}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial P_x} = \frac{P_x}{m}, \qquad -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x,$$

$$\dot{P}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial P_y} = \frac{P_y}{m}, \qquad -\frac{\partial U}{\partial y} = F_{y,}$$

$$\dot{P}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial U}{\partial z}, \qquad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial P_z} = \frac{P_z}{m}, \qquad -\frac{\partial U}{\partial z} = F_{z.}$$

А это есть уравнения движения в ньютоновской форме:

$$\frac{dP_x}{dt} = F_x, \qquad \frac{dP_y}{dt} = F_y, \qquad \frac{dP_z}{dt} = F_{z,}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} - II \text{ закон Ньютона.}$$

Вывод: Уравнения движения по Гамильтону совпадают с уравнениями движения Ньютона, как и уравнения Лагранжа. Следовательно, все три формулировки классической механики физически эквивалентны. Преимущество метода Гамильтона состоит в том, что он позволяет упростить проблему отыскания интегралов движения (т.к. содержит дифференциальные уравнения 1-го порядка). Но главное преимущество этого метода заключается в том, что он дает необходимую математическую основу для построения квантовой механики и статистической физики.

§11. Функция Гамильтона (H)

1) Покажем, что если наложенные на систему связи являются стационарными, то функция Гамильтона совпадает с полной энергией системы.

$$\sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha \dot{q}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha; \;\; L = T - U.$$

В §9 показано, что кинетическая энергия есть квадратичная функция обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{s} \sum_{\gamma=1}^{s} a_{\beta\gamma} \, \dot{q}_\beta \dot{q}_\gamma.$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\gamma=1}^{s} a_{\alpha\gamma} \, \dot{q}_\gamma + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{s} a_{\beta\alpha} \, \dot{q}_\beta = \frac{1}{2} \sum_{\gamma=1}^{s} a_{\alpha\gamma} \, \dot{q}_\gamma + \frac{1}{2} \sum_{\gamma=1}^{s} a_{\gamma\alpha} \, \dot{q}_\gamma = \sum_{\gamma=1}^{s} a_{\gamma\alpha},$$

$$\sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha \dot{q}_\alpha = \sum_{\alpha\gamma}^{s} a_{\alpha\gamma} \dot{q}_\gamma \dot{q}_\alpha = 2T.$$

В результате этих преобразований получим:

$H = 2T - L = 2T - (T - U) = T + U, \; H = T + U.$

$H = E -$ полная механическая энергия системы.

2) Покажем, что полная производная от функции Гамильтона равна частной производной:

$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \; H(q_\alpha, P_\alpha, t).$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial P_\alpha} \dot{P}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t} = -\sum_{\alpha=1}^{s} \dot{P}_\alpha \dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{P}_\alpha \dot{q}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Отсюда следует, что если наложенные на систему связи стационарные, то функция Гамильтона явно от времени не зависит.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \; \to H = const, \qquad T + U = const,$$

где $H -$ интеграл движения.

§12. Скобки Пуассона

Пусть дана некоторая функция

$$f(q,P,t) = const,$$

которая является первым интегралом уравнений движения. Тогда

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial f}{\partial P_\alpha}\dot{P}_\alpha\right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial P_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial P_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right),$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H,f\},$$

где $\{H,f\}$ - классические скобки Пуассона

$$\{H,f\} = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial P_\alpha}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial P_\alpha}\right).$$

Вывод:

1. Чтобы найти полную производную по времени от функции f необходимо найти частную производную и добавить скобки Пуассона;
2. Если $f=const$

$$\frac{df}{dt} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \{H,f\} = 0.$$

Отсюда вытекают условия, при которых величина f будет сохраняющейся:

a) $\frac{\partial f}{\partial t} = 0,$ f не зависит явно от времени;

b) $\{H,f\} = 0.$

Пусть $f=H$, тогда

a) $\frac{\partial H}{\partial t} = 0,$

b) $\{H,\mathrm{H}\} = 0.$

В этих условиях $H = E = const.$

§13. Действие как функция координат и времени

В §7 при формулировке принципа Гамильтона была введена функция действия

$$S=\int\limits_{t_0}^{t_1} L(q,\dot{q}\,,t)\,dt,\qquad [S]=[\text{Дж}*\text{с}].$$

Выразим Лагранжиан через функцию Гамильтона

$$L=\sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha\,\dot{q}_\alpha-H.$$

Тогда будем иметь

$$S=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha\dot{q}_\alpha-H\right)dt=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha\frac{\partial q_\alpha}{\partial t}dt-Hdt\right)$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t_1}\sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha dq_\alpha-\int\limits_{t_0}^{t_1} Hdt,$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}=P_\alpha;\ \ \frac{\partial S}{\partial t}=-H. \tag{2.52}$$

Для консервативной системы, когда выполняется закон сохранения энергии $H=E=const$,

$$S(q,t)=S_0-E(t_1-t_0,$$

$$S_0(q)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha dq_\alpha-\text{укороченное действие.}$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial q_\alpha}=P_\alpha;\frac{\partial S}{\partial t}=-E. \tag{2.53}$$

Из формул (2.52) и (2.53) следует, что энергия и время образуют такую же пару канонически сопряженных величин, как и пары (q_α,P_α). Этот вывод важен для механики специальной теории относительности (СТО), где время входит в уравнения равноправно вместе с пространственными координатами.

§14. Уравнение Гамильтона-Якоби

Согласно формулам (2.52) из §13

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, P, t) = 0, \qquad P_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha},$$

или подробнее

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \dots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial S}{\partial q_s}; t\right) = 0. \qquad (2.54)$$

Это уравнение в частных производных 1-го порядка называется уравнением Гамильтона-Якоби.

Для частицы в потенциальном поле $U(\vec{r})$ в декартовой системе координат функция Гамильтона имеет вид

$$H = \frac{P^2}{2m} + U(\vec{r}) = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}{2m} + U(\vec{r}) = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + U(\vec{r}),$$

Поэтому согласно (2.54) получаем нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(gradS)^2 + U(\vec{r}) = 0. \qquad (2.55)$$

Это уравнение Гамильтона-Якоби для частицы в силовом поле.

Для консервативных систем гамильтониан не содержит время в явном виде:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0, \qquad S = S_0(q) - Et.$$

Уравнение Гамильтона-Якоби принимает более простой вид

$$H\left(q_1, q_2, \dots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial S}{\partial q_s}\right) = E. \qquad (2.56)$$

Отсюда получается стационарное уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{1}{2m}(gradS)^2 + U(\vec{r}) = E. \qquad (2.57)$$

Главное значение уравнения Гамильтона-Якоби состоит в том, что оно явилось основанием для установления аналогии между классической механикой и геометрической оптикой.

§15. Оптико-механическая аналогия

В декартовой системе координат функцию действия можно представить в следующем виде:

$$S(\vec{r};t) = -Et + S_0(\vec{r}). \qquad (2.58)$$

Тогда:

$$\frac{1}{2m}(gradS_0)^2 + U(\vec{r}) = E; \;\; (gradS_0)^2 = 2m[E - U(r)]. \quad (2.59)$$

Определим поверхность равного действия как геометрическое место точек, в которых действие S=const. Движение поверхности равного действия подобно распространению фронта некоторой волны.

Скорость волнового фронта $u = \frac{dl}{dt}$, $dl -$ расстояние, которое проходит волна в направлении перпендикулярном к S. Имеем:

$$gradS = \frac{dS}{dl} = \frac{Edt}{dl}, \qquad (2.60)$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{E}{gradS}; \;\; u = \frac{E}{gradS}.$$

$$u = \frac{E}{\sqrt{2m(E-U)}} = \frac{E}{\sqrt{2mT}} = \frac{E}{P} = \frac{E}{mv}. \qquad (2.62)$$

v – скорость движения частицы, скорость волнового фронта $u \sim \frac{1}{v}$.

Траектория точки перпендикулярна к поверхности постоянного действия, поскольку

$$P_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}; \quad P = gradS_0.$$

Перейдем к оптике. Распространение световых волн подчиняется волновому уравнению Даламбера.

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0,$$

где $u -$ скорость света в среде с показателем преломления n, $\varphi = |\vec{E}|, |\vec{H}|$, $u = \frac{c}{n}$.

В оптически однородной среде ($n = const$) решением уравнения Даламбера является плоская монохроматическая волна

$$\varphi = \varphi_0 e^{i(kr - \omega t)},$$

где волновое число

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{u/_\nu} = \frac{2\pi\nu}{u} = \frac{\omega}{c/_n} = \frac{n\omega}{c}.$$

Пусть волновой вектор имеет направление вдоль оси z:

$$k \uparrow\uparrow z;\ k = k_0 n.$$

В этом случае:

$$\varphi = \varphi_0 e^{i(nk_0 z - ck_0 t)} = \varphi_0 e^{ik_0(nz - ct)}.$$

Если среда оптически неоднородна, т.е. $n = n(r),$ тогда

$$\varphi = \varphi_0 e^{ik_0[L(\vec{r}) - ct]}.$$

Т.е. вместо nz надо ввести эйконал $L(\vec{r})$ - оптическую длину пути светового луча в геометрической оптике [13], с. 210. Уравнение эйконала имеет вид

$$(\nabla L)^2 = n^2. \qquad (2.63)$$

Условие L=const определяет поверхность постоянной фазы, т.е. волновой фронт. Все световые лучи перпендикулярны этим поверхностям. Уравнение Гамильтона-Якоби (2.59) по форме совпадает с уравнением эйконала (2.63), т.е. движение частиц в классической механике по траекториям аналогично распространению световых лучей в геометрической оптике. Аналогия между механикой и геометрической оптикой представлена в таблице 3.

Аналогия механики и геометрической оптики

Таблица 3

Механика	Геометрическая оптика
$(\nabla S_0)^2 = 2m[E - U(r)]$	$(\nabla L)^2 = n^2$
S=const (поверхности равного действия)	L=const (поверхности постоянной фазы)
Траектория точки ⊥ к поверхности S=const	Световые лучи ⊥ к волновой поверхности const фазы

Принцип наименьшего действия $$\Delta S_0 = 0, \Delta = \int \sqrt{2mT}\, dl = 0$$ Интегральный вариационный принцип Мопертюи.	Принцип Ферма – путь светового луча между точками А и В соответствует наименьшему времени τ $$\Delta\tau = \Delta \int_{A}^{B} \frac{dl}{u} = 0,$$ u- скорость света в среде.

Таким образом, классическую механику можно рассматривать как аналог геометрической оптики. При этом роль поверхностей движущейся волны и ортогональных к ним световых лучей играют поверхности постоянного действия и ортогональные к ним траектории движения частицы. Эта оптико-механическая аналогия, установленная в 1834г. Гамильтоном, явилась (почти 100 лет спустя) основанием для создания волновой квантовой механики (Эрвин Шредингер,1926г.), где основной константой является квант действия (постоянная Планка $\hbar = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$Дж $\cdot$ с).

Уравнение Шрёдингера имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}\,. \tag{2.64}$$

При подстановке волновой функции в виде

$$\psi = Ae^{\frac{i}{\hbar}S(\vec{r},t)}, \tag{2.65}$$

где S – функция, имеющая размерность действия $[S] = [E \cdot t]$, уравнение Шрёдингера переходит в уравнение, которое называется квантовым обобщением уравнения Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(grad\, S)^2 + \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2 S + U = 0. \tag{2.66}$$

При $\hbar \to 0$ наблюдается формальный переход к классическому уравнению Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(grad\, S)^2 + U = 0, \tag{2.67}$$

которое совпадает с уравнением (2.55).

Переход от классической механике к волновой (квантовой) механике представлен в таблице 4.

Таблица 4

Классическая механика	Квантовая механика
$E = -\frac{\partial S}{\partial t}$	$E \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$
$P_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}$	$P_\alpha \to \hat{P}_\alpha = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_\alpha} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_\alpha}$
$P_x = \frac{\partial S}{\partial x}$	$\hat{P}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$
$-\frac{\partial S}{\partial t} = H$ Уравнение Гамильтона-Якоби	$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$ Уравнение Шредингера $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\vec{r})$

Оптико-механическая аналогия Гамильтона

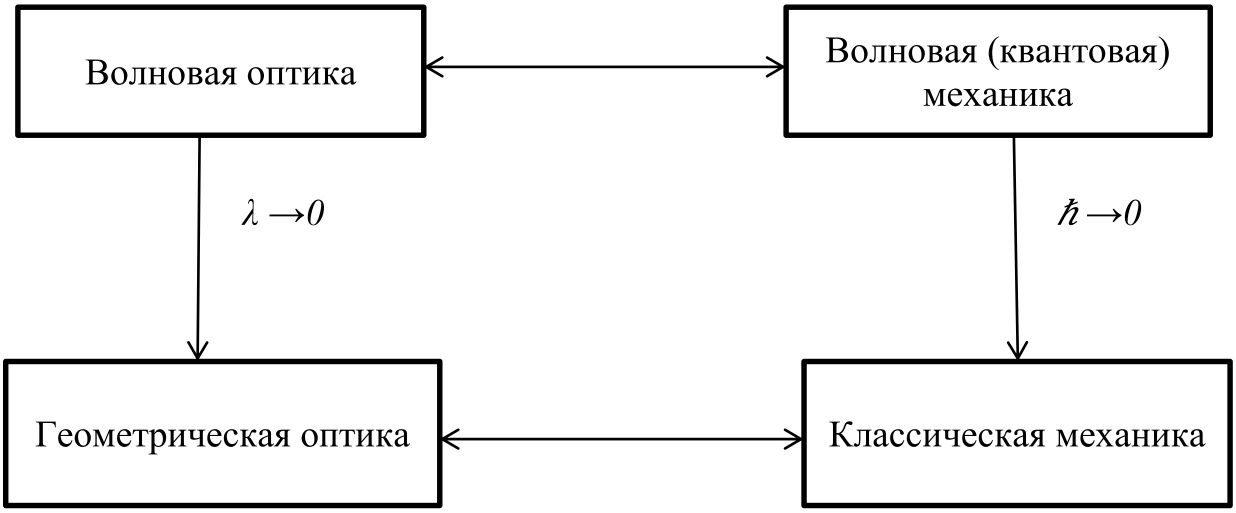


Рис. 3 Оптико-механическая аналогия Гамильтона.

Вывод: Классическая механика содержит в себе зерна квантовой механики. При $\hbar \to 0$ наблюдается предельный переход от квантовой механики к классической, т.е. выполняется принцип соответствия. Принцип соответствия утверждает, что всякая новая неклассическая теория в частном предельном случае должна содержать старую классическую теорию.

Малые колебания в аналитической механике

§16. Малые свободные колебания одномерной механической системы

Малые колебания – колебания, совершаемые механической системой вблизи положения устойчивого равновесия. В состоянии устойчивого равновесия потенциальная энергия имеет минимальное значение:

$$q_0 \text{ – положение равновесия, } U(q_0) = U_{min}.$$

При отклонении системы от положения равновесия возникает сила, стремящаяся вернуть систему в положение равновесия.

$$F = -\frac{\partial U}{\partial q}.$$

Вблизи положения равновесия потенциальную энергию можно разложить в ряд Тейлора по степеням смещения $(q - q_0) = x$

$$U(q) = U(q_0) + \left.\frac{\partial U}{\partial q}\right|_{q=q_0}(q - q_0) + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|_{q=q_0}(q - q_0)^2 + \cdots \quad (2.68)$$

В положении устойчивого равновесия

$$F|_{q_0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial q}\right|_{q=q_0} = 0, \qquad k = \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} > 0, U(q_0) = 0.$$

Тогда будем иметь

$$U(q) = \frac{1}{2}k(q - q_0)^2; \;\; U(q) = \frac{1}{2}kx^2.$$

k – силовой коэффициент. Согласно § 9

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{s}\sum_{\gamma=1}^{s} a_{\beta\gamma}\dot{q}_\beta\dot{q}_\gamma\,; \quad a_{\beta\gamma} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\beta}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\gamma}.$$

Для одномерного движения число степеней свободы s=1. Введем обозначение

$$a = \sum_i m_i \left(\frac{\partial r_i}{\partial q}\right)^2.$$

Тогда для кинетической энергии T и лагранжиана L получим выражения

$$T = \frac{1}{2}a\dot{q}^2, \qquad T = \frac{1}{2}a\dot{x}^2,$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}a\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2.$$

В декартовой системе координат $\vec{r}_i = \vec{\imath}x_i + \vec{\jmath}y_i + \vec{k}z_i$,

$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial x_i} = \vec{\imath}$, $\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_i}\right)^2 = (\vec{\imath})^2 = 1$, поэтому

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2,$$

или

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2.$$

Отсюда вытекает уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}m\dot{x} + kx = 0,$$

$$m\ddot{x} + kx = 0. \qquad (2.69)$$

Уравнение (2.69)– это уравнение движения, описывающее малые колебания. Его можно записать в виде

$$m\ddot{x} = -kx,$$

где $(-kx)$ – обобщенная квазиупругая сила. В её роли могут выступать разные силы. Например: сила упругой деформации пружины или электростатическая сила, заставляющая электрон в модели Томсона совершать гармонические колебания относительно положения равновесия. Преобразуем последнее уравнение:

$$m\ddot{x} = -kx \mid \frac{1}{m},$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Введем обозначение $\frac{k}{m} = \omega_0^2$,

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – частота собственных колебаний. Тогда получим

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (2.70)$$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка, которое описывает линейные колебания. Такие колебания называются свободными или собственными колебания линейного гармонического осциллятора (ЛГО). Общее решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \sin \omega_0 t.$$

Учтем, что

$$\cos \omega_0 t = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}, \qquad \sin \omega_0 t = \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2}.$$

Тогда будем иметь

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}.$$

$$C_2 = C_1^*; \qquad C_1 = \frac{A}{2} e^{i\alpha}, \qquad C_2 = \frac{A}{2} e^{-i\alpha},$$

$$x(t) = \frac{A}{2}\left[e^{i(\omega_0 t + \alpha)} + e^{-i(\omega_0 t + \alpha)}\right].$$

Таким образом,

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Это - гармонические колебания, A – амплитуда, т.е. максимальное отклонение от положения равновесия. Введем фазу

$$\omega_0 t + \alpha = \varphi, \qquad \alpha = \varphi_0,$$

тогда

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Полная энергия осциллятора есть сумма кинетической и потенциальной энергий:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2,$$

$$E = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2),$$

$$E = \frac{m}{2} [A^2 \omega_0^2 sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \omega_0^2 A^2 cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)],$$ или

$$E = \frac{1}{2} A^2 m \omega_0^2.$$

Таким образом, полная энергия пропорциональна квадрату амплитуды колебаний: $E{\sim}A^2$. При этом средние значения кинетической и потенциальной энергии равны между собой:

$$\bar{T} = \bar{U} = \frac{m\omega_0^2}{4} A^2.$$

Здесь учтено, что средние по периоду колебаний.

$$\overline{sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)} = \overline{cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)} = \frac{1}{2}.$$

§17. Вынужденные колебания гармонического осциллятора

Собственные колебания линейного гармонического осциллятора происходят в отсутствие переменных внешних полей и сил трения, действующих на колеблющуюся систему со стороны окружающей среды. Рассмотрим, какие изменения в характер малых колебаний системы вносит действие переменного внешнего поля.

Разлагая внешнюю часть (обусловленную внешней силой) потенциальной энергии системы в ряд по малому параметру *x,* получим:

$$U(q,t) \approx U(q_0,t) + \left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)_{q=q_0} x; \;\; x = q - q_0. \qquad (2.71)$$

Первый член $U(q_0,t)$ может быть представлен в виде полной производной по времени от некоторой функции времени и поэтому при подстановке в лагранжиан системы может быть опущен. Во втором члене производная - $\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)_{q=q_0}$ представляет обобщенную силу, действующую на колеблющуюся систему в положении равновесия со стороны переменного внешнего поля. Эту силу называют возмущающей, или вынуждающей; она является заданной функцией времени, т.е.

$$-\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)_{q=q_0} = F(t). \qquad (2.72)$$

Таким образом, при наличии переменного внешнего поля функция Лагранжа для ЛГО принимает вид

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega_0^2 x^2) + xF(t), \qquad (2.73)$$

где ω_0 – частота свободных колебаний осциллятора.

Уравнением движения осциллятора является линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m}F(t). \qquad (2.74)$$

Частный интеграл уравнения (2.74) можно представить в виде

$$x_1 = \frac{P}{m\omega_0^2},$$

а его общее решение записать следующим образом

$$x = a\cos(\omega_0\, t + \alpha) + \frac{P}{m\omega_0^2},$$

или

$$x' = a\cos(\omega_0 t + \alpha)\,;\; x' = x - \lambda_{\text{ст}} = x - \frac{P}{m\omega_0^2}. \qquad (2.75)$$

Таким образом, единственным изменением, которое вносится в характер малых колебаний одномерной системы действием постоянной вынуждающей силы, является смещение центра колебаний на отрезок $\lambda_{\text{ст}}$ называемый статистическим смещением положения равновесия.

Наибольший практический интерес представляет случай, когда вынуждающая сила – периодическая функция времени

$$F(t) = F_0\cos(\gamma t + \beta), \qquad (2.76)$$

где F_0, γ – амплитуда и частота вынуждающей силы, а β – ее начальная фаза. Уравнения движения (2.74) принимает вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\gamma t + \beta). \qquad (2.77)$$

Частное решение этого уравнения будем искать в следующем виде

$$x_1 = B\cos(\gamma t + \beta). \qquad (2.78)$$

При подстановке этого выражения в уравнение (2.77) последнее должно обращаться в тождество, т.е.

$$(\omega_0^2 - \gamma^2)B\cos(\gamma t + \beta) \equiv \frac{F_0}{m}(\gamma t + \beta).$$

Отсюда следует, что

$$B = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \gamma^2)}. \qquad (2.79)$$

После сложения (2.78) и общего решения уравнения (2.79), получим закон малых колебаний линейного осциллятора:

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \gamma^2)}\cos(\gamma t + \beta), \qquad (2.80)$$

где произвольные постоянные a и α определяются из начальных условий движения системы.

Пусть на систему действует вынуждающая сила, меняющаяся по гармоническому закону, $F = F_0\cos\gamma t$, где $2\gamma = \omega_0$. Закон движения рассматриваемой системы согласно (2.80) имеет вид

$$x(t) = a\cos(2\gamma t + \alpha) + \frac{F_0}{3m\gamma^2}\cos\gamma t.$$

С помощью начальных условий находим: $\alpha = 0$ и $a = -\frac{F_0}{3m\gamma^2}$. Поэтому окончательно можно записать:

$$x(t) = \frac{F_0}{3m\gamma^2}(\cos\gamma t - \cos 2\gamma t), \qquad \dot{x}\,(t) = \frac{F_0}{3m\gamma}(2\sin 2\gamma t - \sin\gamma t). \qquad (2.81)$$

Полная энергия колеблющейся системы:

$$E_0(t) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2).$$

Подставляя сюда выражения (2.81), находим:

$$E_0(t) = \frac{F_0^2}{18m\gamma^2}(5 + 3\cos^2\gamma t - 8\cos^3\gamma t),$$

откуда следует, что

$$\frac{dE_0}{dt} = \frac{F_0^2}{6m\gamma}(4\cos\gamma t - 1)\sin 2\gamma t. \qquad (2.82)$$

С другой стороны, энергия, затрачиваемая в единицу времени на раскачку системы источником вынуждающей силы (т.е. переменным внешним полем), равна:

$$N = -\dot{x}F(t) = -\frac{F_0}{6m\gamma}(4\cos\gamma t - 1)\sin 2\gamma t. \qquad (2.83)$$

Из выражений (2.82) и (2.83) следует, что в процессе вынужденных колебаний системы происходит непрерывный обмен энергией между колеблющейся системой и источником вынуждающей силы. При этом суммарная энергия колеблющейся системы и внешнего поля остается неизменной (этот результат оказывается вполне естественным: в отсутствие сил трения никакого поглощения механической энергии не происходит).

Чтобы получить общее решение уравнения (2.77), пригодное и для случая $\gamma = \omega_0$, необходимо учесть, что в силу произвольности постоянных a и α решение (2.80) можно переписать в виде

$$x(t) = a\cos(\omega_0\, t + \alpha) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \gamma^2)}[\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega_0 t + \beta)]. \qquad (2.84)$$

При $\gamma \to \omega_0$ второй член в правой части выражения (2.84) приводит к неопределенности вида 0/0. Эту неопределенность следует раскрыть по правилу Лопиталя, в результате находим:

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{F_0}{2m\omega_0}\sin(\omega_0\, t + \beta) \qquad (2.85a)$$

или

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{F_0 t}{2m\omega_0}\left(\omega_0 t + \beta - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (2.85b)$$

Таким образом, при резонансе амплитуда вынужденных колебаний нарастает по линейному закону. Кроме того, вынужденные колебания (даже в отсутствие сил трения) оказываются сдвинутыми по фазе относительно вынуждающей силы на угол $\pi/2$. Необходимо отметить, что закон колебаний осциллятора (2.85) справедлив только до тех пор, пока колебания не перестанут быть достаточно малыми.

§18. Колебания систем со многими степенями свободы

18.1Функция Лагранжа для малых колебаний системы

Рассмотрим механическую систему с s степенями свободы, совершающую малые колебания около положения равновесия.

Вблизи точек равновесия конфигурационного пространства q_{i0} ($i = 1,2,3, \dots s$) потенциальную энергию можно разложить в ряд Тейлора по малым смещениям от равновесия:

$$U(q_1, q_2, \dots, q_s) = U(q_{10}, q_{20}, \dots, q_{s0}) + \sum_{i=1}^{s} \left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_{q_i = q_{i0}} (q_i - q_{i0}) +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{q=q_0} (q_i - q_{i0})(q_j - q_{j0}) + \cdots .$$

В положении равновесия

$$U(q_0) = 0, \left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_{q_i = q_{i0}} = 0 \text{ (экстремум).}$$

Обозначим

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{q=q_0} = k_{ij} = const.$$

Это коэффициент упругости; $k_{ij} = k_{ji}$, $F_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \sim kq$ (Закон Гука)

В гармоническом приближении потенциальная энергия есть однородная квадратичная форма обобщенных координат:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} k_{ij} x_i x_j.$$

Согласно §9 (глава II) кинетическая энергия есть однородная квадратичная форма обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} a_{ij}(q) \dot{x}_i \dot{x}_j.$$

Обозначим постоянные коэффициенты $a_{ij}(q) = a_{ij}(q_0) = m_{ij}$, это коэффициенты инерции системы. Тогда функция Лагранжа системы с s степенями свободы принимает следующий вид

$$L = T - U = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \left(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_i x_j\right).$$

Это выражение будет использовано далее для подстановки в уравнение Лагранжа.

18.2. Вековое уравнение

Составим уравнения движения (т.е. уравнения Лагранжа). Для определения входящих в них производных найдем dL:

$$dL = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j (m_{ij}\dot{x}_i d\dot{x}_j + m_{ij}\dot{x}_j d\dot{x}_i - k_{ij}x_i dx_j - k_{ij}x_j dx_i).$$

Поскольку индексы суммирования пробегают одни и те же значения, а коэффициенты упругости и инерции симметричны, то

$$dL = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\left(m_{ij}\dot{x}_j d\dot{x}_i - k_{ij}x_j dx_i\right).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_{j=1}^{s} m_{ij}\,\dot{x}_j, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\sum_{j=1}^{s} k_{ij}x_j.$$

Тогда уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

можно представить в виде:

$$\sum_{j=1}^{s}\left(m_{ij}\ddot{x}_j + k_{ij}x_j\right) = 0 \quad (i = 1,2,3, \dots s). \tag{2.86}$$

Они образуют систему s линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Решениями (2.86) являются s неизвестных функций

$$x_j(t) = A_j e^{i\omega t} \text{ – частные решения;} \tag{2.87}$$

$A_j = const.$

Подставляя (2.87) в (2.86) и сокращая на $e^{i\omega t}$, получим систему линейных и однородных алгебраических уравнений относительно A_j:

$$\sum_{j=1}^{s} \left(k_{ij} - \omega^2 m_{ij}\right) A_j = 0. \tag{2.88}$$

Система (2.88) имеет нетривиальные (≠0) решения, если определитель $\left|k_{ij} - \omega^2 m_{ij}\right| = 0$, т.е.

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \omega^2 m_{11} & k_{12} - \omega^2 m_{12} & \dots & k_{1s} - \omega^2 m_{1s} \\ k_{21} - \omega^2 m_{21} & k_{22} - \omega^2 m_{22} & \dots & k_{2s} - \omega^2 m_{2s} \\ k_{s1} - \omega^2 m_{s1} & k_{s2} - \omega^2 m_{s2} & \dots & k_{ss} - \omega^2 m_{ss} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.89}$$

Уравнение (2.89) называется характеристическим или вековым уравнением. Это алгебраическое уравнение степени S относительно ω^2, в общем случае имеет S различных вещественных и положительных корней: ω_α^2, где $\alpha = 1,2,3, \dots s$. Определенные таким образом величины ω_α называются собственными частотами системы. В частных случаях некоторые из этих корней могут совпадать. Совпадающие собственные частоты ω_α называются вырожденными.

Зная частоты ω_α, можно определить собственные им амплитуды A_j^α. Если все ω_α различны, то A_j пропорциональны минорам определителя (2.88), где $\omega \to \omega_\alpha$.

$\Delta(\omega_\alpha^2) = \left|k_{ij} - \omega_\alpha^2 m_{ij}\right|$. Эти миноры $\Delta_{j\alpha}$ получаются из $\Delta(\omega_\alpha^2)$ вычеркиванием j –го столбца и какой-нибудь строки.

$$A_j^\alpha = C_\alpha \Delta_{j\alpha}\,, \tag{2.90}$$

где C_α – произвольная комплексная const.

С учётом (2.90) частное решение (2.87) имеет вид

$$x_j(t) = C_\alpha \Delta_{j\alpha} e^{i\omega_\alpha t}. \tag{2.91}$$

Общее решение есть сумма частных решений (2.91). Переходя к вещественной (т.е. действительной) части, получим

$$x_j = R_e\left\{\sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_{j\alpha}\, C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\right\} = \sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_{j\alpha} R_e\left\{C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\right\}. \qquad (2.92)$$

18.3.Нормальные (или независимые) колебания

Введем обозначение $\theta_\alpha = R_e\{C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\}$ – это простое гармоническое колебание, $\theta_\alpha = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. Тогда из (2.92) следует:

$$x_j(t) = \sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_{j\alpha}\, \theta_\alpha. \qquad (2.93)$$

Из (2.93) видно, что изменение каждой обобщенной координаты системы со временем есть наложение S гармонических колебаний $\theta_1, \theta_2 \dots$ с произвольными амплитудами и фазами, но с определенными ω_α.

Нельзя ли выбрать обобщенные координаты системы так, чтобы каждая из них совершала только одно простое колебание по гармоническому закону?

Разрешив систему s уравнений (2.93) относительно неизвестных θ_α, мы можем выразить $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_s$ через смещения x_j т.е. $x_1, x_2, \dots, x_s$. Следовательно, величины θ_α можно рассматривать как новые обобщенные координаты. Они называются нормальными координатами, а описываемые ими гармонические колебания – нормальными колебаниями.

Нормальные координаты θ_α удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{\theta}_\alpha + \omega^2 \theta_\alpha = 0 \ (9) \ (\alpha = 1,2,3, \dots s). \qquad (2.94)$$

Это означает, что уравнения движения системы в нормальных координатах распадаются на S независимых друг от друга уравнений. Поэтому нормальные колебания системы являются полностью независимыми.

Вывод: С помощью нормальных координат задача о свободных колебаниях S-мерной механической системы сводится к исследованию колебаний совокупности S независимых линейных гармонических осцилляторов.

Тогда функция Лагранжа, выраженная через нормальные колебания, есть сумма лагранжианов одномерных колебаний

$$L = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{m_\alpha}{2}\left(\dot{\theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \theta_\alpha^2\right). \tag{2.95}$$

Обычно нормальные координаты выбирают так, чтобы коэффициенты при квадратах скоростей были равны единице. Для этого вводятся нормированные нормальные координаты $Q_\alpha = \sqrt{m_\alpha}\theta_\alpha$. Тогда

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2\right), \qquad E = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}(\dot{Q}_\alpha^2 + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2)$$

Теория малых колебаний систем с несколькими степенями свободы находит широкое применение при исследовании колебательных спектров многоатомных молекул и в физике твердого тела.

§19. Примеры задач аналитической механики

19.1. Принцип виртуальных перемещений

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = 0.$$

<u>Задача:</u> Две стороны стремянки одинаковой длины AC=CB шарнирно соединены в точке C, а концами упираются в выступы пола. Вес каждой стороны равен P. В точке D стоит человек весом P_1. Определить опорную реакции в точке B, если AC=CB=4CD, AC=CB=2l (рис. 4).

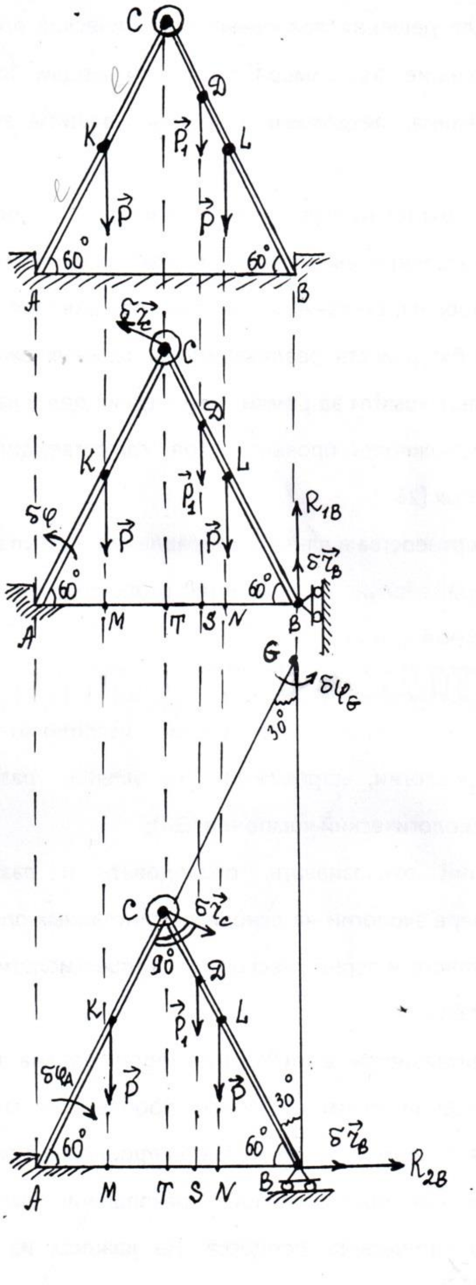


Рис. 4. Виртуальные перемещения стремянки.

Дано:	Решение:
$AC=CB=4CD$	1.Определим вертикальную составляющую реакции опоры R_{2B}
$AC=2l$	$-PAM\delta\varphi - P_1AS\delta\varphi - PAN\delta\varphi + R_{1B}AB\delta\varphi = 0$ (1)
P	$AM = AK\cos 60 = \frac{l}{2}$
P_1	$AS = AT + TS = 2l\cos 60 + \frac{l}{2}\cos 60 = \frac{5}{4}l$
$CAB=CBA=60°$	$AN = AT + TN = l + \frac{l}{2} = \frac{3}{2}l$
R_{1B} =?	$AB = AT + TB = 2l$
R_{2B} =?	$-P\frac{l}{2} - P_1\frac{5}{4}l - P\frac{3}{2}l + R_{1B}2l = 0$

$$2R_{1B} = 2P + P_1\frac{5}{4}$$

$R_{1B} = \frac{2P+\frac{5P_1}{4}}{2}$; $R_{1B} = P + \frac{5}{8}P_1$

2.Определим горизонтальную составляющую реакции опоры R_{2B}. Установим связь между угловыми перемещениями

$\delta r_c = AC\delta\varphi_A, \delta r_c = CG\delta\varphi_G, \rightarrow AC\delta\varphi_A = CG\delta\varphi_G$

$\delta\varphi_G = \dfrac{AC}{CG}\delta\varphi_A$; $\delta\varphi_G = \delta\varphi_A$

из ΔBCG $\rightarrow CG = AC$

$PAM\delta\varphi_A + P_1SB\delta\varphi_G + PNB\delta\varphi_G + R_{2B}GB\delta\varphi_G = 0$ (2)

$AM = \frac{l}{2}$;

$SB = BDcos60 = \frac{3}{2}l\frac{1}{2} = \frac{3}{4}l$;

$NB = LBcos60 = \frac{l}{2}$;

$GB = (QC + CB)cos60 = 2l\sqrt{3}$

$P\dfrac{l}{2} + P_1\dfrac{3}{4}l + P\dfrac{l}{2} + R_{2B}2l\sqrt{3} = 0$; $R_{2B}2l\sqrt{3} = Pl + P_1\dfrac{3}{4}l$

$$R_{2B} = -\frac{\left(Pl + P_1\frac{3l}{4}\right)}{2l\sqrt{3}} = -\frac{\left(P + P_1\frac{3}{4}\right)}{2\sqrt{3}} = -\frac{(4P + 3P_1)}{8\sqrt{3}};$$

Ответ: $R_{2B} = -\frac{(4P+3P_1)}{8\sqrt{3}}$

19.2. Принцип Даламбера-Лагранжа (Общее уравнение аналитической динамики)

При движении системы материальных точек, подчиненной идеальным связям, сумма работ активных сил и сил инерции на любых возможных перемещениях равна нулю.

$$\sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i + \vec{I}_i)\delta\vec{r}_i = 0, \qquad \vec{I}_i = -m\vec{a}_i, \qquad \vec{I}_i \uparrow\downarrow \vec{a}_i$$

Вычислим сумму работ сил инерции:

1) $\delta A = \vec{I}\delta\vec{r}$ – при поступательном движении
2) $\delta A = M_z^{(\text{ин})}\delta\varphi$ – при вращательном движении, ось вращения z, $\delta\varphi$ – возможное угловое перемещение
3) $\delta A = -m\vec{a}_c\delta\vec{r}_c + M_z^{(\text{ин})}\delta\varphi$ – плоское движение

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i\right)\delta r_i = 0$$

<u>Задача</u>: Три груза массой М каждый соединены нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный блок А. Два груза лежат на гладкой горизонтальной плоскости, а третий груз подвешен вертикально. Определить ускорение системы и натяжение нити в сечении ab. Массой нити и блока пренебречь (рис.5).

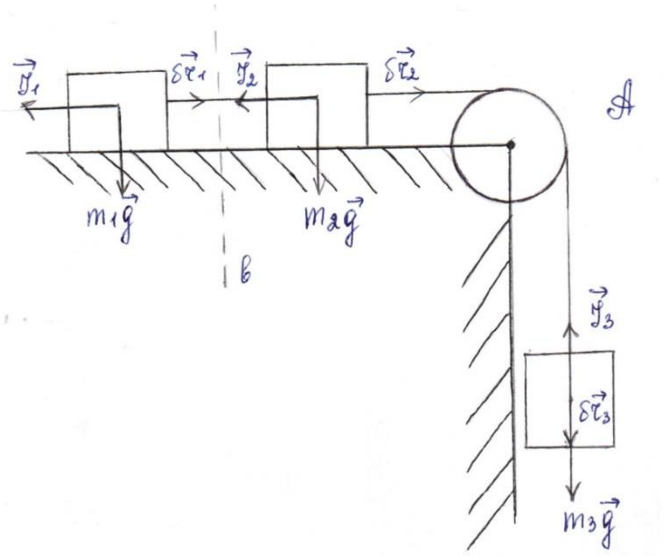


Рис. 5. Система грузов.

Дано:	Решение:
$m_1 = m_2 = m_3 = m$	$a_1 = a_2 = a_3 = a$
$m_A = 0$	1)Определим ускорение системы
a–? T_{ab}–?	$\delta r_1 = \delta r_2 = \delta r_3$

$$m_1 g\delta r_1 - m_1 a\delta r_1 + m_2 g\delta r_2 - m_2 a\delta r_2 + m_3 g\delta r_3 - m_3 a\delta r_3 = 0$$

$g - a + g - a + g - a = 0 \rightarrow a = {}^{g}/_{3}$

2)Определим натяжение нити в сечении ab

$T\delta r_1 - I_1\delta r_1 = 0,\ T = I_1\ \rightarrow T = ma = \frac{mg}{3}$

Ответ:

$a = \frac{g}{3}, T = \frac{mg}{3}$

19.3. Уравнения Лагранжа II-го рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \,, \alpha = 1,2,3 \ldots$$

$$Q_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

$$L = T - U$$

Задача: В эпициклическом механизме бегающая шестеренка радиуса r_1 насажена на кривошип с противовесом, вращающийся вокруг оси неподвижной шестеренки под действием приложенного момента М. Определить угловое ускорение вращения кривошипа в окружное усилие S в точке касания шестеренок, если расстояние между осями шестеренок равно l, момент инерции кривошипа с противовесом относительно оси вращения кривошипа равен I_0, масса бегающей шестеренки m_1, момент инерции шестеренки относительно ее оси I_1; трением пренебречь, центр масс шестеренки и кривошипа с противовесом находится на оси вращения кривошипа.

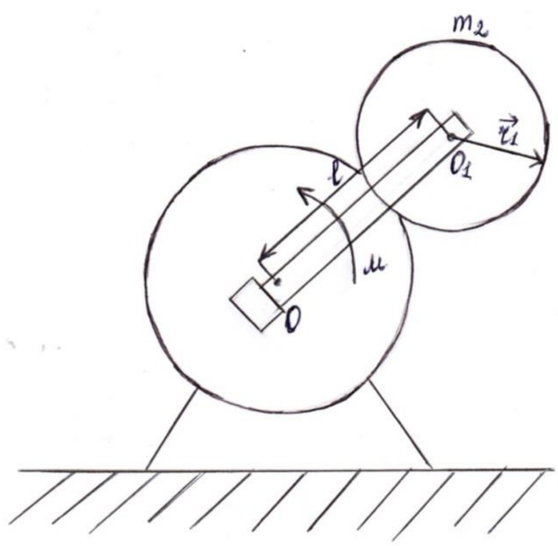


Рис. 6. Эпициклический механизм.

Дано:	Решение:
r_1	$\alpha = 1$
M	$q_\alpha = \varphi$
l	$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_\alpha} = Q$
I_0	1. Определим кинетическую энергию
m_1	$T = T_0 + T_1$
I_1	$T_0 = \frac{I_0\omega_0^2}{2} = \frac{I_0\dot{\varphi}^2}{2}$; $T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{I_1\omega_1^2}{2}$
ε=?	$v_1 = \omega_1 r_1 = \dot{\varphi} l \to \omega_1 = \frac{\dot{\varphi} l}{r_1}$
S=?	$T_1 = \frac{m_1}{2}\dot{\varphi}^2 l^2 + \frac{I_1}{2}\frac{\dot{\varphi}^2 l^2}{r_1^2}$

$$T = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\left(I_0 + m_1 l^2 + I_1\frac{l^2}{r_1^2}\right)$$

1. $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \left(I_0 + m_1 l^2 + I_1\frac{l^2}{r_1^2}\right)\dot{\varphi}$

2. $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \left(I_0 + m_1 l^2 + I_1\frac{l^2}{r_1^2}\right)\varepsilon$

3. $\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$

4. $\delta A = Q\delta\varphi$

$$\delta A = M\delta\varphi$$

$$Q = M$$

$$\left(I_0 + m_1 l^2 + I_1\frac{l^2}{r_1^2}\right)\varepsilon = M$$

$$\varepsilon = \frac{M}{I_0 + m_1 l^2 + I_1\frac{l^2}{r_1^2}}$$

$$S \cdot r_1 = M_1 = I_1\varepsilon_1$$

$$S = \frac{I_1\varepsilon_1}{r_1}$$

$$\varepsilon_1 = \dot{\omega}_1 = \frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi}\frac{l}{r_1}\right) = \frac{l}{r_1}\ddot{\varphi} = \frac{l}{r_1}\varepsilon$$

$$S = \frac{I_1}{r_1}\frac{l}{r_1}\varepsilon = \frac{I_1 l}{r_1^2}\varepsilon$$

Ответ: $\varepsilon = \frac{M}{I_0 + m_1 l^2 + I_1 \frac{l^2}{r_1^2}}$; $S = \frac{I_1 l}{r_1^2}\varepsilon$; $S = \frac{I_1 l}{r_1^2}\frac{M}{\left(I_0 + m_1 l^2 + I_1 \frac{l^2}{r_1^2}\right)}$

Задача: Призма A массы m скользит по гладкой боковой грани призмы B массы m_1, образующей угол α с горизонтом. Определить ускорение призмы B. Трением между призмой B и горизонтальной плоскостью пренебречь (рис. 7).

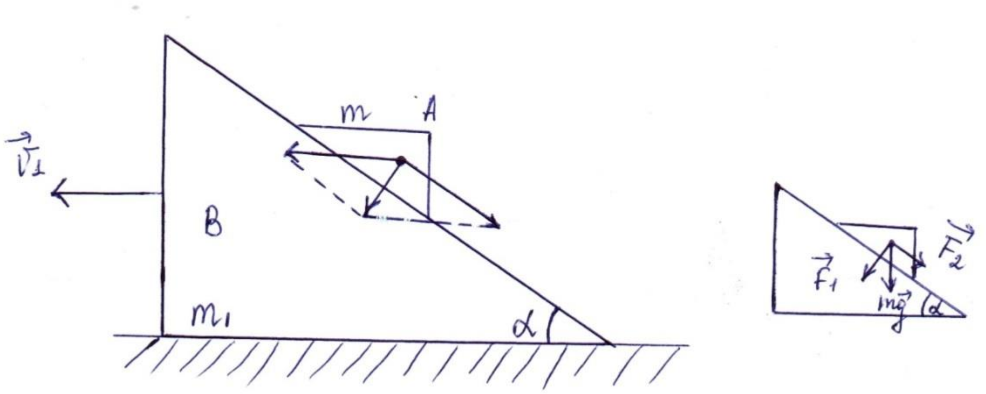


Рис. 7

Дано:	Решение:
$m(A)$	Число степеней свободы S=2, x_1, x_2 – перемещения призм.
$m_1(B)$	$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = 0, L = T - U$
α	1. Определим кинетическую энергию системы:
a_i–?	

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m v_2^2}{2}; \ \vec{v}_2 = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}}$$

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \dot{x}_2, \qquad \vec{v}_{\text{пер}} = \dot{x}_1$$

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{x}_1^2 - 2\dot{x}_1\dot{x}_2\cos\alpha$$

$$T = \frac{m_1 \dot{x}_1}{2} + \frac{m}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{x}_1^2 - 2\dot{x}_1\dot{x}_2\cos\alpha)$$

2. $U = -mg\sin\alpha \cdot x_2$; $F = -grad\ U$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = mg\sin\alpha$$

3. Составим Лагранжиан

$$L = \frac{m_1 \dot{x}_1}{2} + \frac{m}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{x}_1^2 - 2\dot{x}_1\dot{x}_2 \cos\alpha) + mg\sin\alpha\, x_2$$

4.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 + m\dot{x}_1 - m\dot{x}_2\cos\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m)\ddot{x}_1 - m\ddot{x}_2\cos\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1\cos\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m\ddot{x}_2 - m\ddot{x}_1\cos\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = mg\sin\alpha$$

5. Запишем уравнения движения:

$$\begin{cases} (m_1 + m)\ddot{x}_1 - m\ddot{x}_2\cos\alpha = 0 & (1) \\ m\ddot{x}_2 - m\ddot{x}_1\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0 \;\; | \;\; \cdot\cos\alpha & (2) \end{cases}$$

$$(m + m_1)\ddot{x}_1 - m\ddot{x}_1\cos^2\alpha - mg\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

$$\ddot{x}_1(m + m_1 - m\cos\alpha) = mg\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}mg\sin 2\alpha$$

$$\ddot{x}_1[m(1 - \cos^2\alpha) + m_1] = \frac{1}{2}mg\sin 2\alpha$$

$$\ddot{x}_1(m\sin^2\alpha + m_1) = \frac{1}{2}mg\sin 2\alpha$$

$$\ddot{x}_1 = a_B = \frac{mg\sin\alpha}{2(m_1 + m\sin^2\alpha)}$$

<u>Ответ:</u>

$$a_B = \frac{mg\sin\alpha}{2(m_1 + m\sin^2\alpha)}$$

Глава III. Методические проблемы изучения аналитической механики и анализ результатов её освоения студентами III курса

§1. Результаты изучения аналитической механики студентами 3 курса и магистрантами 1 курса.

С целью выявления типичных проблем, возникающих при изучении аналитической механики, нами проанализированы результаты усвоения данного раздела классической механики студентами 3 курса нескольких последних лет обучения (2014 – 2017) и магистрантов 1 курса 2016-2017 уч.г. Для доказательства выдвинутой гипотезы, при обучении курсу использовалась методика подробного, пошагового изучения аналитической механики, что должно было способствовать успешному освоению первой ступени курса «Основы теоретической физики» и формированию общекультурных компетенций будущего учителя.

На конечном этапе изучения курса студенты писали итоговую контрольную работу, которая состояла из следующих заданий:

Вариант I

<u>А) Вопросы теоретической части</u>

1. Сформулируйте фундаментальные принципы аналитической механики.
2. Что называется функцией Лагранжа? Примеры лагранжиана.
3. Записать уравнение Лагранжа II рода и привести примеры этого уравнения.
4. Записать канонические уравнения Гамильтона и показать их тождественность уравнениям движения Ньютона.
5. В чём заключается оптико-механическая аналогия Гамильтона и какова её роль в появлении квантовой механики?

Б) Задача

На конце тонкого однородного стержня длиной ℓ и массой m_1 находится шарик массой m_2, который можно принять за материальную точку. К стержню прикреплены две пружины одинаковой длины и с одинаковым коэффициентом жёсткости κ на расстоянии h от его верхнего конца. Противоположные концы пружин закреплены. Найти циклическую частоту ω и период T_0 малых свободных колебаний маятника.

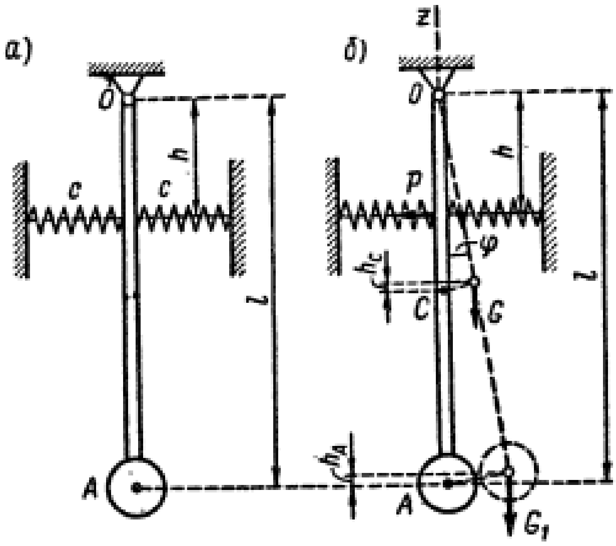


Рис. 8.

Вариант II

А) Вопросы теоретической части

1. Проведите сравнение двух методов построения механики:

	Метод Ньютона	Метод Гамильтона
Независимые переменные		
Число дифференциальных уравнений		
Уравнения движения		
Для каких систем отсчёта применим		

2. Сформулируйте фундаментальные вариационные принципы:

   а) принцип виртуальных перемещений

б) принцип Даламбера-Лагранжа

в) принцип наименьшего действия (принцип Гамильтона)

3. Что называется действием в классической механике? Какова его размерность?
4. Что такое циклические координаты?
5. Согласно теореме Э.Нётер, все законы сохранения связаны со свойствами симметрии пространства и времени:
6. а) закон сохранения импульса есть следствие……………………………

   б) закон сохранения момента импульса есть следствие…………………..

   в) закон сохранения энергии есть следствие……………………………

   Все **сохраняющиеся** величины называются………………………………

Б) Задача

Через блок массой m и радиусом R, который может вращаться вокруг горизонтальной оси O, перекинута нерастяжимая нить. Один конец нити прикреплён к пружине с коэффициентом жесткости k, а к другому её концу прикреплён груз массой m_1. Грузу, первоначально находящемуся в состоянии покоя, сообщается начальная скорость v_0, направленная вниз.

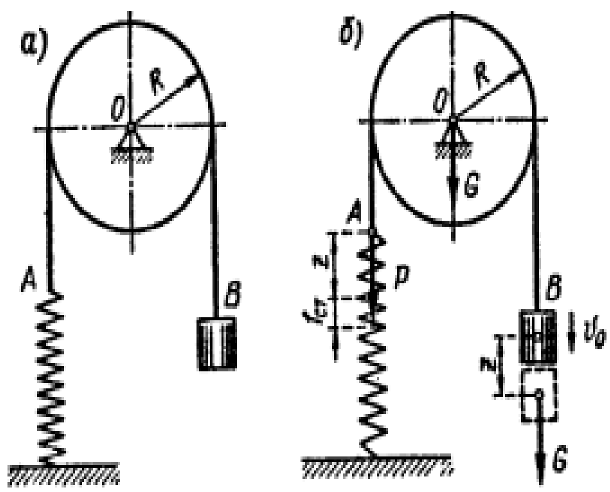


Рис. 9.

Получить дифференциальное уравнение движения, а затем найти циклическую частоту ω и период T_0 малых свободных колебаний системы. Массами пружины, нити и трением пренебречь. Скольжение нити отсутствует. Считать блок однородным диском.

Нами были получены следующие результаты:

Диаграмма 1. Итоги выполнения теоретической части контрольной работы (2016-17 уч. г.)

Диаграмма 2. Итоги выполнения практической части контрольной работы (2016-17 уч. г.)

Для сравнения приведем результаты подобных итоговых работ студентов предыдущих годов обучения:

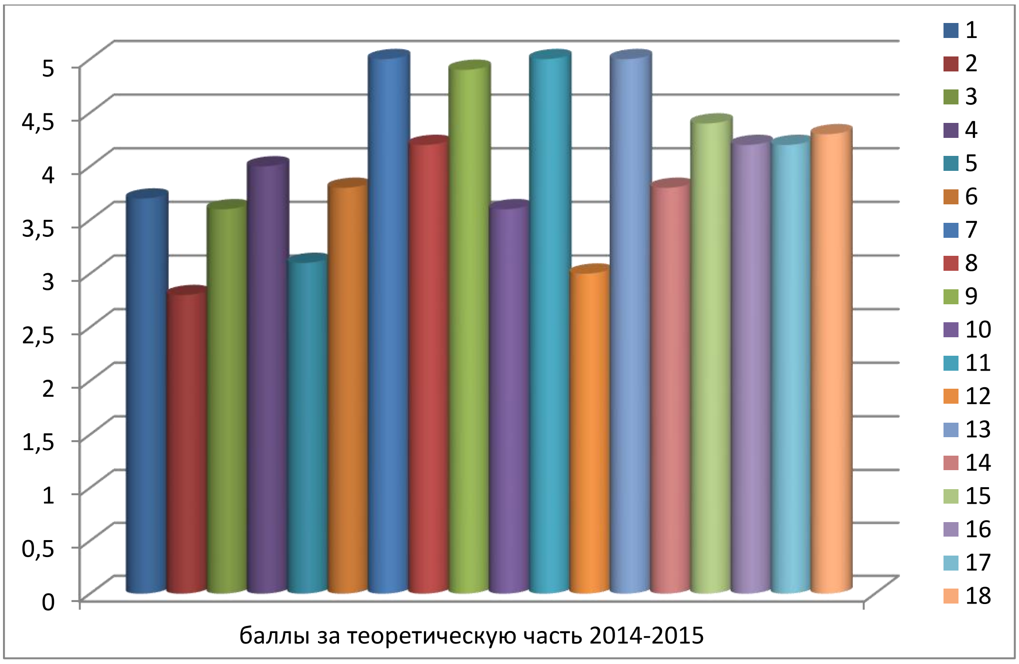


Диаграмма 3. Результаты выполнения теоретической части (2014-15 уч. г.)

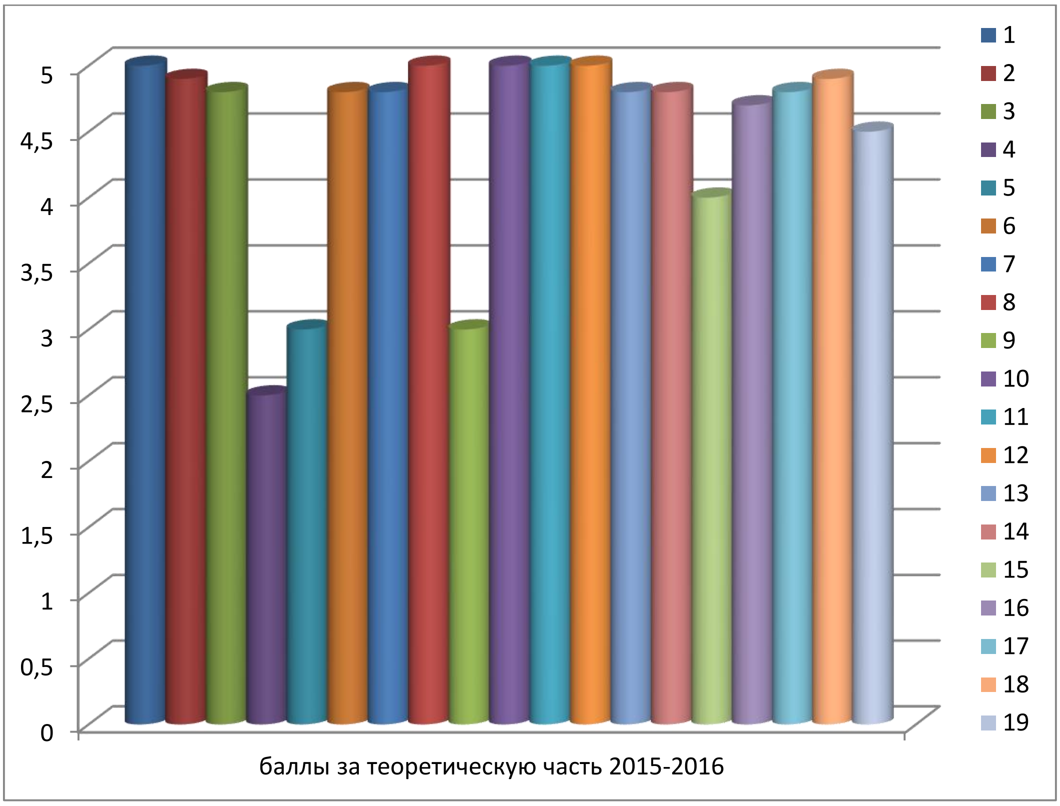


Диаграмма 4. Результаты выполнения текоретической части (2015-16 уч.г.)

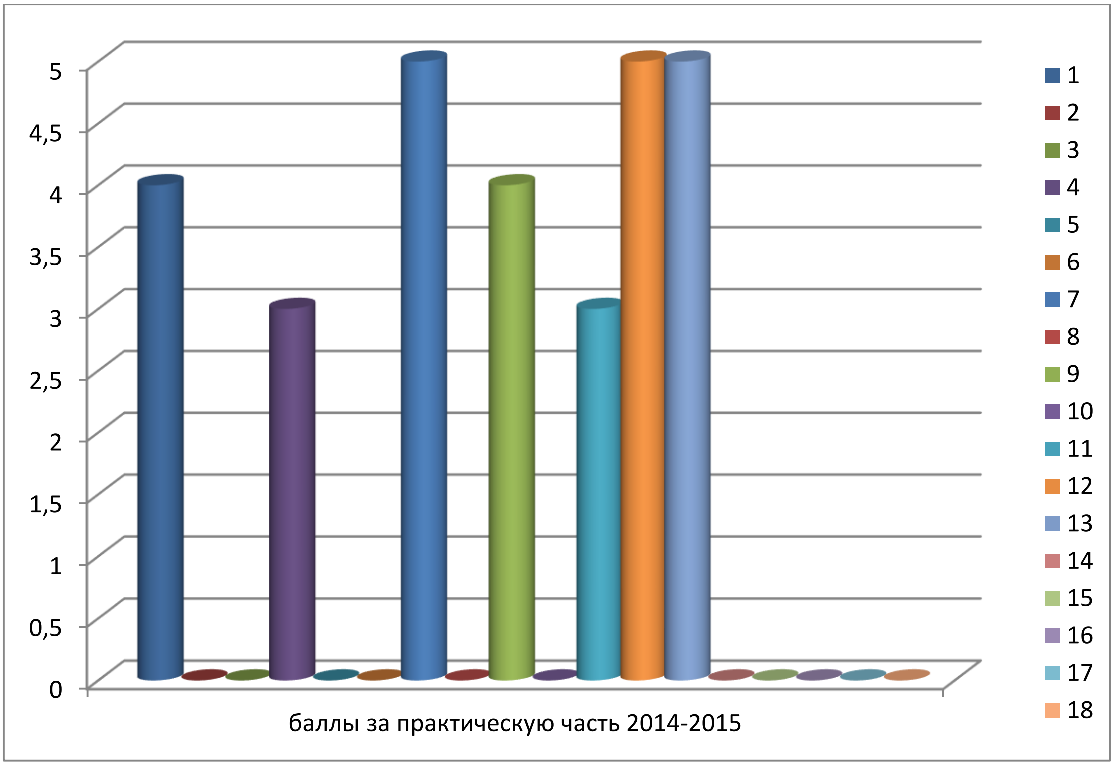


Диаграмма 5. Итоги выполнения практической части (2014-15 уч.г.)

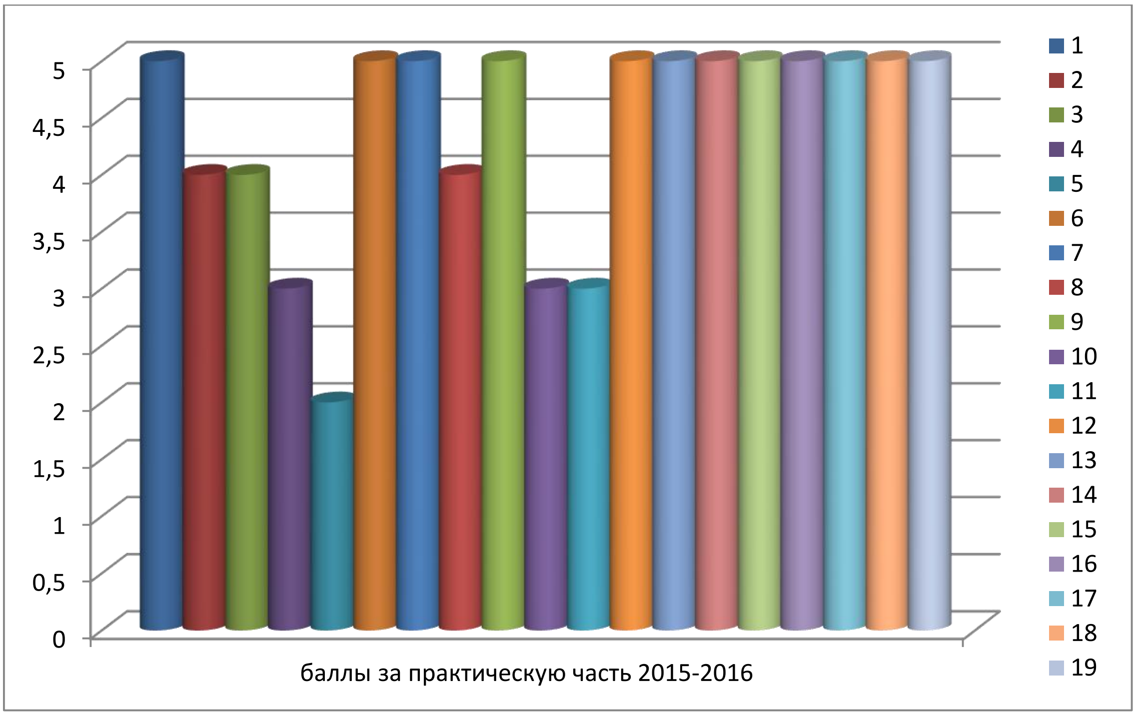


Диаграмма 6. Итоги выполнения практической части (2015-16 уч. г.)

Были определены средние баллы по результатам выполнения теоретической и практической части контрольной работы (2013 – 2014, 2015 – 16 и 2016 – 17 уч. г.г.):

Рис. 10. Средний балл за теоретическую часть

Рис. 11. Средний балл за практическую часть.

Для более качественной оценки степени усвоения раздела «Аналитическая механика» нами был проведен опрос учащихся после изучения курса с целью выявления остаточных знаний:

1. Что называется действием в классической механике? Какова его размерность?
2. Что такое функция Лагранжа?

3. Объясните происхождение законов сохранения энергии, импульса, момента импульса, В чём состоит содержание теоремы Нётер?
4. Какие координаты называются циклическими, и как они связаны с сохраняющимися механическими величинами?
5. Какие три формы классической механики Вам известны?
6. Уравнение Лагранжа, как и второй закон Ньютона, является дифференциальным уравнением второго порядка. В чём же тогда состоит преимущество метода Лагранжа по сравнению с Ньютоновской механикой? (Ведь не зря же Гамильтон назвал «Аналитическую механику» Лагранжа «научной поэмой»!).
7. Сформулируйте фундаментальные вариационные принципы аналитической механики.
8. Что такое функция Гамильтона?
9. В чём состоит преимущество метода Гамильтона по сравнению с методами Ньютона и Лагранжа?
10. Какую роль сыграла оптико-механическая аналогия Гамильтона в появлении квантовой (волновой) механики Шрёдингера?

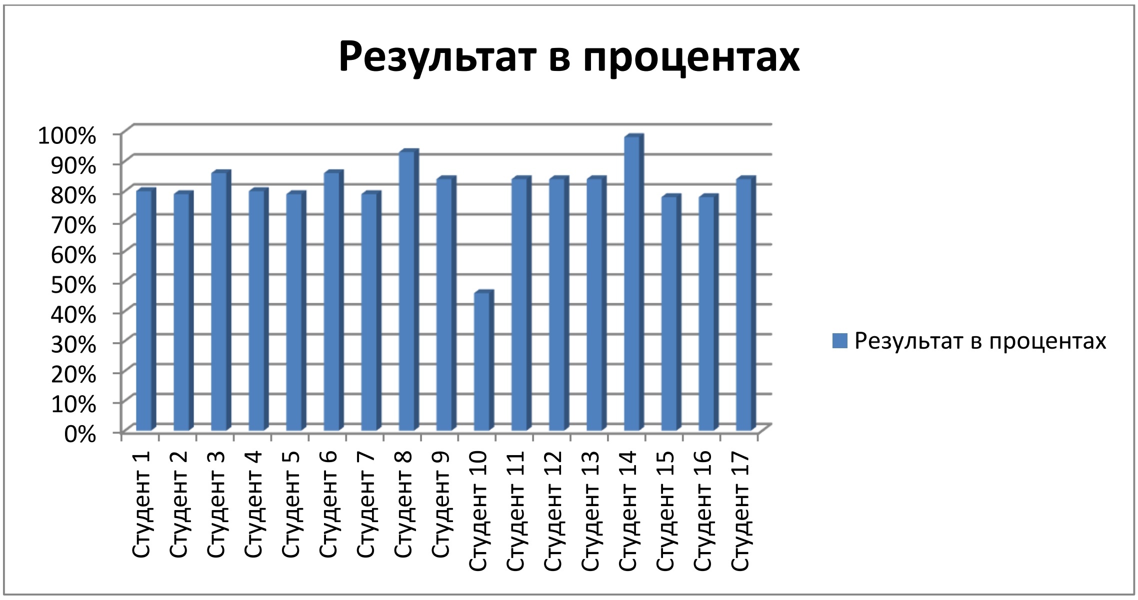


Диаграмма 7. Результаты проверки «остаточных» знаний.

Для выявления остаточных знаний по курсу Аналитическая механика у студентов-магистрантов 1 курса ОЗО нами был проведен опрос в рамках дисциплины «Актуальные проблемы физических наук» (январь 2017 г.)

Студентам были предложены следующие вопросы:

1. Что называется действием в классической механике? Какова его размерность?
2. Какая существует связь между классической функцией действия и постоянной Планка?
3. Что такое функция Лагранжа?
4. Что такое функция Гамильтона, и как она трансформируется в квантовой механике?
5. Объясните происхождение законов сохранения энергии, импульса и момента импульса. В чём состоит содержание теоремы Нётер?

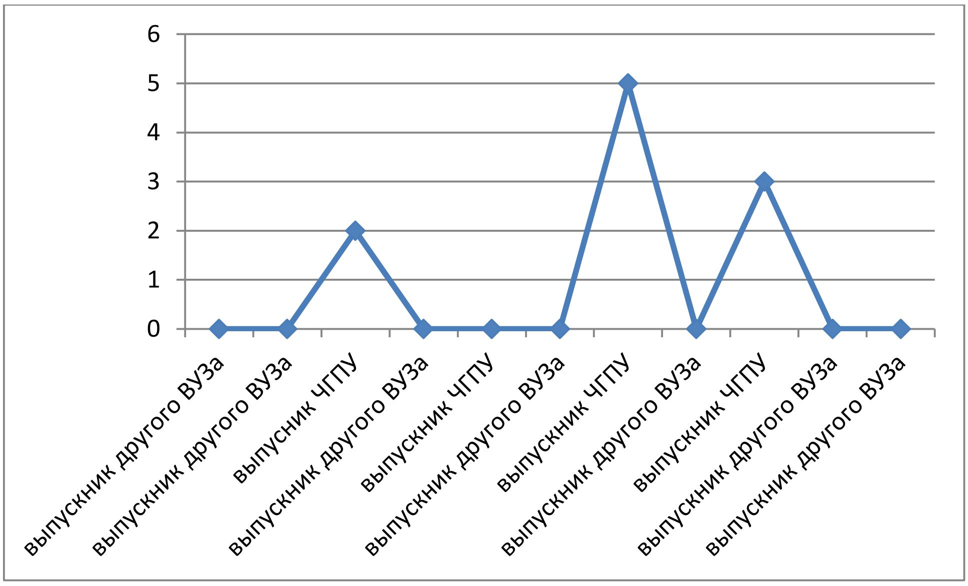


Диаграмма 8. Результаты проверки остаточных знаний студетов-магистрантов 1 курса ОЗО.

§2. Анализ освоения раздела «Аналитическая механика» в курсе «Основы теоретической физики».

Итоговая контрольная работа отразила степень усвоения учебного материала студентами 3 курса. Основываясь на приведенных выше данных, можем сделать вывод о том, что студенты показали лучшие результаты за теоретическую часть итоговой работы. За практическую часть баллы несколько ниже, причем, стоит отметить, что студенты, имеющие максимальное количество баллов за теоретическую часть, за практическую часть получали более низкие баллы.

Тем не менее, сравнив с результатами подобных итоговых работ студентов предыдущих лет обучения, можно сделать вывод о повышении уровня усвоения учебного материала, о значительном повышении качества выполнения практической части работы.

По итогам опроса по выявлению остаточных знаний студентов 3 курса были получены следующие результаты:

Было установлено, что знания, полученные в ходе изучения курса, соответствуют определенному минимуму, необходимому для дальнейшего изучения курса «Основы теоретической физики». Студенты продемонстрировали понимание логики аналитической механики, знание её основных понятий, принципов и методов, умение обосновать законы сохранения в механике, выявить преимущества гамильтонова формализма по сравнению с методами Ньютона и Лагранжа и его решающую роль на пути создания волновой (квантовой) механики Шрёдингера.

Несмотря на естественное снижение показателей по сравнению с первичным контролем, в целом студенты показали достаточный уровень остаточных знаний, что свидетельствует об успешном усвоении курса «Аналитическая механика».

Проанализировав результаты опроса по выявлению остаточных знаний у студентов-магистрантов 1 курса ОЗО, было обнаружено, что с работой справились лишь 3 студента из 11. Все 3 студента являются выпускниками нашего университета (Диаграмма 8). Эти результаты можно интерпретировать следующим образом. Зачастую раздел «Аналитическая механика» относят к дополнительным главам теоретической физики, тем самым ограничивая объём и глубину изучаемого материала. Наш подход к изучению этого раздела основан на понимании роли аналитической механики не только как «венца», или высшей формы классической механики, но и как фундамента, без которого невозможно было бы построение волновой (квантовой) механики Шрёдингера и фейнмановской формулировки квантовой механики в форме интегралов по траекториям. Поэтому изучению аналитической механики в ЮУрГГПУ уделяется очень большое внимание. Отсюда – соответствующие требования к стилю изложения материала (с детальным анализом новых идей, принципов и понятий, сопровождаемым подробными математическим преобразованиями) и к системе самостоятельной работы студентов над курсом классической механики. По существу, классическая механика с её важнейшим разделом «Аналитическая механика» представляет собой «первый кирпич» в стройном здании курса теоретической физики.

В нашем исследовании мы выявили ряд основных проблем, возникающих при изучении аналитической механики:

1.Основная трудность связана с необходимостью применения серьёзного математического аппарата. Эта трудность присутствует при изучении всех разделов теоретической физики, требующих владения методами решения дифференциальных уравнений и приемами интегрирования. Как правило, в книгах по теоретической физике не приводятся подробные математические преобразования, вместо них можно встретить фразы: «Как нетрудно показать…», «После несложных преобразований получим…» и т.п. Но именно эти, так называемые «несложные преобразования», и являются «камнем преткновения» для начинающих изучение соответствующего курса теоретической физики.

2. Неумение интерпретировать уравнения и распознавать информацию, содержащуюся в них. К началу изучения классической механики у студентов оказывается ещё не сформированным в достаточной степени правило прочтения уравнений и физических законов: в правой части уравнения содержится причина какого-либо эффекта, а в левой части – следствие.

3. Сложности в применении основных принципов и теоретических положений в процессе решения задач.

4. Наличие психологического барьера, возникающего при переходе от простой ньютоновской формы механики к аппарату аналитической механики.

5. Неумение увидеть эстетическую сторону изучаемых уравнений, разглядеть за набором символов красоту, гармонию и элегантность теоретических построений.

Нами также были найдены возможные пути преодоления этих трудностей:

1) обсуждение теоретических вопросов со всеми подробными математическими преобразованиями;

2) разработка пошагового алгоритма решения задач с подробным анализом каждого этапа решения;

3) сопоставление механики Ньютона с аналитической механикой Лагранжа и Гамильтона, а также сравнительный анализ различных методов внутри самой аналитической механики;

4) проведение коллоквиума, включающего проверку знания основных формул и понимание содержания принципов и уравнений;

5) проведение заключительной контрольной работы и тестирования обобщающего характера, позволяющих выявить степень сформированности основных компетенций.(32)

На основании проделанного нами исследования результатов изучения курса аналитической механики и остаточных знаний, можно сформулировать следующие заключения:

1. Студенты продемонстрировали понимание логики аналитической механики, имеют достаточно ясное представление об её основных идеях, понятиях, принципах и уравнениях.

2.Показали понимание преимущества методов аналитической механики по сравнению с ньютоновской формулировкой механики.

3.Могут объяснить происхождение законов сохранения в механике, опираясь на их связь со свойствами симметрии пространства и времени, установленную теоремой Э. Нётер.

4. Способны выявить преимущества гамильтонова формализма по сравнению с методами Ньютона и Лагранжа и его решающую роль на пути создания волновой (квантовой) механики Шрёдингера.

Заключение

В процессе написания выпускной квалификационной работы на тему: «Методика изучения аналитической механики в курсе теоретической физики педагогического университета» нами были проанализированы издания, содержащие раздел «Аналитическая механика», проведен ряд опросов, а также проанализированы результаты итоговых контрольных работ студентов различных ступеней обучения, сформирована основа для создания учебного пособия по аналитической механики с пошаговыми, подробными объяснениями тех аспектов, которые недостаточно освещаются в учебной литературе.

При решении задачи: проанализировать учебные издания, содержащие раздел «Аналитическая механика», в работе приведены сведения об основных учебных изданиях по данному курсу, а также дан их краткий анализ с точки зрения изучения данного курса в педагогическом университете.

При решении задачи: подготовить методическое пособие по аналитической механике, рассматривая её как основу для изучения последующих разделов курса «Основы теоретической физики», в работе:

- Приведен основной теоретический материал по курсу, а также краткие исторические сведения о становлении раздела физической науки – Механика;
- Рассмотрены типовые задачи курса и способы их решения с подробным, пошаговым объяснением;
- Проведены итоговые работы, оценивающие уровень усвоения материала студентами на разных ступенях обучения (студенты III курса бакалавриата и студенты I курса магистратуры);
- Проанализированы и представлены графически результаты этих работ;

- Выявлены основные проблемы, возникающие при изучении курса аналитической механики, и возможные пути их преодоления.

Таким образом, задачи решены в полном объеме, цель (разработка методических материалов по разделу «Аналитическая механика», предназначенных для будущего учителя физики) достигнута.

В ходе проведения исследования доказана гипотеза о том, что применение методики подробного, пошагового изучения аналитической механики должно способствовать успешному освоению первой ступени курса «Основы теоретической физики» и формированию общекультурных компетенций будущего учителя.

Библиографический список

1. Gibbs W., On the fundamental Formulae of Dynamics. American Journal of Mathematics, т. II, 1879. — 64 с.
2. Jourdain, On Gauss principle of least constraint and the equations of Mechanics*Math. Gazette, т. II, 1903, с. 337—340.
3. Kirchhoff G.Vorlesungen uber theoretische Physik, т. I, Mechanik. Leipzig, 1872, с. 1.
4. Koenigsberger L. Die Principien der Mechanik, Mathematische Unter-suchungen, Leipzig, 1901.
5. Lipschitz R., Journ. fur Mathem., Bd. LXXXII, 1877, с. 316.
6. Mayer A., Ober die Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung fur reibungslose Punktsysteme und zur Regulierung der StoBe in rejbungslosen Systemen, die dem Zwange von Bedingungsleichungen unterliegen. Ber." der. Math. Phys. Kl. d. Kunigl. Sachs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzing. Sitzung 3.VII. 1899.
7. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. — М.: Наука, 1974.- 432 с.
8. Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах, т. 3 / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – М.: Наука. 1973. —608 с.
9. Вронская Е.С., Павлов Г.В., Элекина Е.Н. Основы аналитической механики [Электронный ресурс]: учебное пособие.— Электрон. текстовые данные.— Самара: Самарский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2013.— 110 с.
10. Гаусс К., Об одном новом общем принципе механики. Цит. по приложению к книге: Лагранж, Аналитическая механика, т. 2. М.—Л., Гостехиздат, 1950, стр. 411—414; «Сборник», стр. 170—172.
11. Герц Г. Принципы механики, изложенные в новой связи, изд. АН СССР, М., 1959, стр. 29-30, 32, 43, 46-47, 49, 169, 173, 189, 158, 200

12. Голдстейн Г., Пул Ч., Сафко Дж. Классическая механика. М.: URSS, 2012.- 828 с.
13. Жирнов, Н.И. Классическая механика / Н.И. Жирнов. - Учеб. пособие для студентов физ.-мат. факультетов педагогических институтов. —М.: Просвещение, 1980.—303 с.
14. Зоммерфельд А. Механика. – НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. —298 с.
15. Космодемьянский А.А. Курс теоретической механики. - М.: Просвещение, 1965. — 509 с.
16. Котов В. Ф. Механика Герца, Учен, записки МГУ, вып. 7, 1957, стр. 201—257.
17. Ландау Л.Д., Краткий курс теоретической физики, книга 1. Механика. Электродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1969. — 271 с.
18. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Т. 1. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.— М.: Физматлит, 2004. — 224 с.
19. Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике/ И.В. Мещерский. - Спб, Лань, 2005. — 448 с.
20. Мултановский, В. В. Курс теоретической физики. Классическая механика / В.В. Мултановский. – М.: Дрофа, 2008. – 384 с.
21. Ольховский, И.И. Курс теоретической механики для физиков/ И.И. Ольховский – М.: МГУ, 1978. – 447 с.
22. Паншина, А.В. Теоретическая механика в решениях задач из сборника И.В. Мещерского. Аналитическая механика / А.В. Паншина, В.М. Чуркин. - М.: URSS, 2012. – 200 с.
23. Полак, Л.С. Вариационные принципы механики: Их развитие и применения в физике / Л.С. Полак. – М.: URSS, 2016. – 600 с.
24. Полак, Л.С. Уильям Гамильтон / Л.С. Полак. – М: Наука, 1993. – 270 с.
25. Свирская, Л.М. Квантовое обобщение уравнения Гамильтона-Якоби как основа для решения задач квантовой механики в педагогическом

вузе / Л.М. Свирская. – Новации и традиции в преподавании физики: от школы до вуза. Материалы V Международной научно-практической конференции. – Тула: ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2015. – С. 95-99.

26. Свирская, Л.М. О квантовом обобщении уравнения Гамильтона-Якоби / Л.М. Свирская. - Вестник Челябинского государственного педагогического университета. Серия 4: Естественные науки. – Челябинск, 2005.- № 6. - С. 6-10.
27. Свирский, М.С. Квантовое уравнение Гамильтона-Якоби и первые принципы / М.С. Свирский, Л.М. Свирская. - Методология и методика формирования научных понятий у учащихся школ и студентов вузов. Материалы XIII Международной научно-практической конференции. – Часть 2. - Челябинск, 2006. - С. 138-142.
28. Соколов, А.А. Квантовая механика / А.А. Соколов, И.М. Тернов, В.Ч. Жуковский – М.: Наука, 1979. – 529 с.
29. Суслов Г.К. Механика Герца, Изв. Киевского университета, 1898 г. – 32 с.
30. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики/ С.М. Тарг. – М.: Высшая школа, 1998. – 416 с.
31. Ферми, Э. Квантовая механика / Э. Ферми. – М.: Мир, 1965. – 367 с.
32. Шинкина, Я.С. Методические проблемы изучения аналитической механики / Я.С. Шинкина. – Актуальные проблемы развития среднего и высшего образования: XIII Межвузовский сборник научных трудов. - Челябинск, «Край Ра», 2017, с. 164 – 166.
33. Шинкина, Я.С. Три формы классической механики и их историческая роль в физике / Я.С. Шинкина. – Актуальные проблемы развития среднего и высшего образования: XII Межвузовский сборник научных трудов. - Челябинск, «Край Ра», 2016, с. 181 – 186.
34. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – М.: КноРус, 2011. – 608 с.