МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика обучения решению функциональных уравнений обучающихся средней школы в рамках внеурочной деятельности по математике

Выпускная квалификационная работа по направлению

44.03.05 Педагогические образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность программы бакалавриата

«Математика. Информатика»

Форма обучения очная

Проверка на объем заимствований:
64,07 % авторского текста

Работа рекомендована к защите
рекомендована / не рекомендована
«30» мая 2024 г.
зав. кафедрой математики и МОМ
__________ Звягин К. А.

Выполнила:
Студентка группы
ОФ-513/204-5-1
Андреева Дарья Андреевна

Научный руководитель:
доцент, к. ф.-м. н.,
доцент кафедры МиМОМ
__________ Вагина М. Ю.

Челябинск

2024

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Современный мир претерпевает постоянные изменения, бросая новые вызовы молодому поколению. Чтобы соответствовать требованиям 21 века, каждый школьник, покидая стены своего образовательного учреждения и выбирая дальнейший профессиональный путь, должен обладать большим количеством научных знаний и компетенций. При этом, различные педагоги-предметники сталкиваются с тем, что в 40-45 минут классического урока зачастую невозможно вместить и материал основной программы, и дополнительный – повышенного уровня сложности или прикладного характера, чтобы дать своим воспитанникам возможность развиваться «сверх» установленной программы. Так, за последние годы, внеурочная деятельность стала неотъемлемой частью учебно-воспитательного процесса школ: она позволила реализовать требования федерального государственного образовательного стандарта различных уровней образования, удовлетворить запрос обучающихся на более детальный разбор проблемных предметных разделов, а также дала возможность педагогам познакомить обучающихся с абсолютно новыми для них темами, не входящими в календарно-тематическое планирование, но имеющими место быть на едином государственном экзамене, олимпиадах и в бытовой жизни [27].

Не обошла стороной внеурочная деятельность и учителей математики. Для таких педагогов «ВУД» стала возможностью качественно отработать с детьми вычислительные навыки путем прорешивания большого количества разнообразных примеров; рассмотреть разнообразные логически задачи и нестандартные, усложненные задачи в рамках уже изученных на уроках тем и, кроме того, углубиться в математику, открыв для обучающихся ранее неизвестные типы задач.

Функция – одно из важнейших понятий математики, которое используется для описания реальных процессов и явлений [6]. Существуют различные задачи, связанные с функциями, которые встречаются учащимся как в школе, так и в высших учебных заведениях [14-16]. Типичными задачами школьного курса математики являются задачи на нахождение области определения и области значений, выявление свойств и построение графиков.

Известны различные методы решения таких задач. Они изучены достаточно полно и имеют стандартные алгоритмы, а потому, как правило, не вызывают затруднений при решении. Однако, существуют типы задач, решение которых не так широко представлено в литературе, а методы их решения требуют дополнительных знаний из разных разделов математики.

К таким задачам можно отнести функциональные уравнения. Некоторые методы решения функциональных уравнений изложены в классических пособиях таких авторов как Андреев А.А., Бродский Я.С., Лихтарников Л.М., Просветов Г.И. и других [1; 5; 12; 19]. Функциональные уравнения в небольшом количестве встречаются и в школьных учебниках алгебры под редакцией А.Г. Мордковича за 8-10 классы, а также А.Г. Мерзляка за 8 класс, а также сборниках задач таких авторов как А.Н. Рурукин, Н.П. Кострикина, В.К. Смышляев и других [10; 14-16; 21; 24]. Они не выходят за рамки школьной программы и решаются доступными для школьников методами.

Актуальность исследования заключается в том, что в последние годы на математических олимпиадах различного уровня и вступительных испытаниях технических ВУЗов регулярно предлагаются функциональные уравнения, для решения которых не подходит ни один отработанный в школе алгоритм, и базовых знаний обучающихся, полученных только на уроках математики, оказывается недостаточно.

Проблемой исследования является недостаточность (или полное отсутствие) теоретических знаний и практических навыков решения задач подобного вида у обучающихся. При этом, сами учителя математики не имеют специализированных учебных пособий и задачников по функциональным уравнениям, содержащих материал, доступный для изучения в старшей школе.

Гипотеза: проведение курса внеурочной деятельности для обучающихся средней школы «Функциональные уравнения и методы их решения» будет обеспечивать потребности обучающихся в углубленном изучении математики и способствовать эффективной подготовке к математическим олимпиадам различного уровня.

Цель исследования: разработать курс внеурочной деятельности для обучающихся средней школы, направленный на знакомство с функциональными уравнениями и обучение решению функциональных уравнений различными методами.

Задачи исследования:

1. Изучить теоретический материал о роли внеурочной деятельности обучающихся в учебно-воспитательном процессе и ее видах по ФГОС.
2. Рассмотреть особенности организации внеурочной деятельности по математике.
3. Изучить историю развития функциональных уравнений.
4. Определить основные понятия, связанные с функциональными уравнениями.
5. Рассмотреть методы решения функциональных уравнений.
6. Проанализировать учебные пособия и материалы олимпиад по математике на наличие задач по функциональным уравнениям.
7. Разработать курс внеурочной деятельности для обучающихся средней школы «Функциональные уравнения и методы их решения».

Объект исследования: процесс обучения математике в средней школе.

Предмет исследования: методика обучения решению функциональных уравнений обучающихся средней школы.

Методы исследования: теоретический анализ и синтез научной литературы, учебно-методических пособий по теме; обобщение и интерпретация математических исследований; подбор и решение задач.

Практическая значимость: разработанный курс внеурочной деятельности может быть использован учителями математики при подготовке обучающихся средней школы к математическим олимпиадам различных уровней и к вступительным испытаниям технических ВУЗов.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В РАМКАХ ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПО МАТЕМАТИКЕ

1.1 Роль внеурочной деятельности в учебно-воспитательном процессе, ее виды и особенности по ФГОС

Современный учитель в своей педагогической деятельности уделяет пристальное внимание нормативным документам и стандартам. Колоссальное значение в этом ряду занимают федеральные государственные образовательные стандарты (далее – ФГОС), устанавливающие обязательные качественные и количественные критерии в образовании.

Стандартизация в образовании отличается широким спектром функционального назначения. В первую очередь, единые стандарты в образовании нужны для того, чтобы задавать общее для всех принципиальное понимание: кем становится выпускник к моменту окончания школы, и что он приобретает за время обучения. Для этого вводятся некоторые общие характеристики того, чему и как он должен быть обучен. Во-вторых, стандарт используется как инструмент государственного контроля в широком смысле: во время государственной аккредитации и лицензирования, лицензионного контроля, федерального государственного контроля качества образования, федерального государственного надзора в сфере образования.

Одним из значимых разделов современных стандартов является внеурочная деятельность. Под внеурочной деятельностью (далее – ВУД) в рамках реализации федерального государственного образовательного стандарта понимается образовательная деятельность, осуществляемая в формах, отличных от классно-урочной, и направленная на достижение планируемых результатов освоения основной образовательной программы [18]. Регулируется ВУД посредством СанПиН 2.4.2.2821-10.

Согласно статье № 28 Федерального Закона «Об образовании», каждая школа принимает самостоятельное решение о степени обязательности посещения внеурочной деятельности обучающимися [26]. Тем не менее, в Письме Минобрнауки России от 18.08.2017 № 09-1672 «О направлении Методических рекомендаций по уточнению понятия и содержания внеурочной деятельности в рамках реализации основных общеобразовательных программ, в том числе в части проектной деятельности» внеурочную деятельность называют неотъемлемой частью основной общеобразовательной программы, поэтому многие современные школы настаивают на ее посещении [17].

Согласно ФГОС, целью такого рода деятельности является помощь детям в достижении результатов в освоении учебной программы. Кроме того, ВУД помогает ребёнку адаптироваться в школе, улучшить навыки социализации, проявить себя в отличных от класса малых социальных группах, развить свои способности в интересующей области, а также улучшить условия для развития обучающегося, учитывая его возрастные и индивидуальные особенности.

Для достижения данной цели, внеурочная деятельность строится на определенных принципах:

1. Принцип дифференциации – выявление и развитие склонностей и способностей учащихся к определённой творческой деятельности, предоставление выбора учащимся.

2. Принцип единства – целостность образования, воспитания и развития.

3. Принцип экологизации – развитие бережного отношения к окружающей среде.

4. Практико-деятельностный принцип – обучение методом апробирования теоретических знаний в практической деятельности.

Внеурочная деятельность может реализовываться в формате кружков, секций, экскурсий, соревнований, исследований и так далее [22]. Согласно

ФГОС, продолжительность внеурочной деятельности зависит от возраста ребенка и характера самой ВУД. Так творческие кружки, основная деятельность которых направлена на развитие мелкой моторики у учеников начальной школы, должны длиться не больше 50 минут. В основной и средней школах длительность занятия не должна превышать 1,5 часа.

По ФГОС, современная внеурочная деятельность может реализовываться в рамках нескольких основных направлений, среди которых:

- духовно-нравственное;
- физкультурно-спортивное и оздоровительное;
- социальное;
- общеинтеллектуальное;
- общекультурное.

К предпоследнему, общеинтеллектуальному направлению, могут быть отнесены интересующие нас математические кружки.

1.2 Особенности организации внеурочной деятельности по математике

Главная цель внеурочной деятельности по математике – это повышение заинтересованности школьников математикой, развитие у них логического мышления и вычислительных навыков. ВУД по математике помогает обучающимся расширить и дополнить основную образовательную программу, получить более глубокие знания и узнать о множестве способов решения нестандартных задач, что является ключевым аспектом для подготовки школьников к участию в олимпиадах [23].

Согласно М.В. Дербуш и С.Н. Скарбич, специфика математики как учебного предмета, позволяет выделить характерные особенности внеурочной деятельности в процессе обучения математике [7].

К их числу относятся:

– занимательность разделов математики, не входящих в основную программу обучения, что обеспечивает развитие интереса к математике и формирование мировоззрения в целом;

– специфика математического терминологического аппарата, опора на абстрактное мышление, строгая логическая основа математики позволяет развивать творческую активность и формировать навыки исследовательской культуры обучающихся, показывая ее становление как науки;

– универсальность математических знаний, состоящая в том, что математика проникает во все сферы жизни людей, говорит о необходимости

– формирования математической грамотности обучающихся не только в урочное время;

– появление новых отраслей знаний на стыке математики и наук, где она применяется (математическая физика, математическая лингвистика и другие), и соответственно их рассмотрение во внеурочной деятельности способствует формированию ценностных жизненных ориентиров обучающихся с последующим личностным и профессиональным самоопределением.

Ю.М. Колягин выделяет несколько вариантов организации внеурочной деятельности по математике [9].

К ним относятся:

1. *Занятия со школьниками, которые отстают от своих сверстников в изучении учебной программы.* Для этого вида внеурочной деятельности выявление и восполнение пробелов в знаниях по предмету является целью приобщения таких обучающихся к внеклассной деятельности. Существует мнение о том, что недостаточно хорошая организация работы учителя на уроках вынуждает организовывать данный вид внеклассной деятельности. Однако работу с данным типом учащихся необходимо осуществлять индивидуально, а также она требует хорошей подготовки со стороны педагога.

2. *Занятия со школьниками, проявляющими интерес к математике.* Существует несколько разных целей осуществления этого вида внеурочной деятельности по математике.

Среди них:

- совершенствовать и развивать знание материала, включенного в
- учебную программу;
- подтолкнуть школьников к исследовательской работе и
- стимулировать их начинания;
- сформировать и развить математическую речь, а также
- нестандартное мышление.

3. *Занятия с обучающимися, способствующие развитию интереса школьников к углублению знаний в данной дисциплине.* Этот вид внеурочных занятий проводится именно для того, чтобы вызвать интерес у школьников к изучению математики. Для этого вида занятий привлекаются всевозможные формы внеклассной работы. Так или иначе, все они оказывают эффективное влияние на успешное обучение школьников: устраняют пробелы в знаниях обучающихся, совершенствуют логику, мышление и память [9].

Именно в условной третьей группе ВУД по математике могут подлежать рассмотрению функциональные уравнения, выходящие за рамки образовательной программы.

1.3 История развития и основные понятия, связанные с функциональными уравнениями

Задача решения функциональных уравнений является одной из самых древних в математическом анализе, возникшая практически одновременно с первыми исследованиями по теории функций.

Рассмотрим историю развития классических функциональных уравнений.

Первые исследования этого раздела связаны с проблемой параллелограмма сил – геометрического построения, выражающего закон сложения сил. В 1769 году Ж.Л. Д’Аламбер свёл обоснование закона сложения сил к решению функционального уравнения:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

Это же уравнение с той же целью было рассмотрено С.Д. Пуассоном в 1804 году при некотором предположении аналитичности. В 1821 году О.Л. Коши нашёл общие решения этого уравнения, предполагая непрерывность только $f(x)$:

$$f(x)=\cos ax\,;$$

$$f(x)=ch\,ax=\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2};$$

$$f(x)\equiv 0.$$

Известная формула неевклидовой геометрии для угла параллельности $f(x)=\tan\frac{1}{2}\prod(x)=e^{-\frac{x}{k}}$ также была получена Н.И. Лобачевским из функционального уравнения $f^2(x)=f(x+y)\cdot f(x-y)$, которое он решил методом, аналогичным методу Коши. Это уравнение можно привести к уравнению вида $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$. Его решением является непрерывная функция $f(x)=ac^x$.

Ряд геометрических задач, приводящих к функциональным уравнениям, рассматривал английский математик Ч. Баббедж. Он изучал периодические кривые второго порядка, определяемые следующим свойством для любой пары точек кривой: если абсцисса второй точки равна ординате первой, то ордината второй точки равна абсциссе первой. Пусть такая кривая является графиком функции $y=f(x)$, где $(x,f(x))$ – произвольная ее точка. Тогда, согласно условию, точка с абсциссой $f(x)$ имеет ординату x. Следовательно, $f\big(f(x)\big)=x$.

Этому функциональному уравнению удовлетворяют, в частности, функции:

$$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, x \in [0; |a|];$$

$$f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0.$$

Широко известны одни из простейших функциональных уравнений Коши [4]. Французский математик подробно изучил их в своем «Курсе Анализа», изданном в 1821 году:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (1)$$

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y) \quad (2)$$

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad (3)$$

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y) \quad (4)$$

Непрерывные решения этих четырех основных уравнений имеют соответственно вид (при $x > 0$):

$$f(x) = ax;$$

$$f(x) = a^x;$$

$$f(x) = \log_a x.$$

Однако, в классе разрывных функций эти уравнения могут иметь и другие решения.

Уравнение (1) ранее рассматривалось Лежандром и Гауссом при выводе основной теоремы проективной геометрии и при исследовании гауссовского закона распределения вероятностей.

Функциональное уравнение (1) было вновь применено Г. Дарбу к проблеме параллелограмма сил и к основной теореме проективной геометрии; его главное достижение − значительное ослабление предположений. Известно, что функциональное уравнение Коши (1) характеризует в классе непрерывных функций линейную однородную функцию $f(x) = ax$. Дарбу же показал, что всякое решение, непрерывное хотя бы в одной точке или же ограниченное сверху (или снизу) в произвольно малом интервале, также должно иметь вид $f(x) = ax$. К дальнейшим результатам по ослаблению предположений можно отнести: интегрируемость, измеримость на множестве положительной меры, мажорируемость измеримой функцией. Возник вопрос, существует ли какая-нибудь аддитивная функция, удовлетворяющая (1) и отличная от линейной однородной?

Первый пример отличного от $f(x) = ax$ разрывного решения функционального уравнения (1) построил в 1905 году немецкий математик Г. Гамель с помощью введенного им базиса действительных чисел.

Дальнейшие исследования и открытия в области функциональных уравнений строились на приведенных классических функциональных уравнениях.

Так сформировались основные понятия, связанные с функциональными уравнениями. В работе рассматривается терминология учебного пособия Андреева А.А. [1].

Определение 1. Функциональное уравнение – это уравнение, которое содержит одну или несколько неизвестных функций (с заданными областями определения и значений).

В общем виде функциональное уравнение можно записать как $F(f_1, f_2, \dots, f_n) = 0$, где $f_1, f_2, \dots, f_n$ – это функции от одной или двух переменных.

Термин «функциональное уравнение» обычно используется для уравнений, несводимых простыми способами к алгебраическим уравнениям. Эта несводимость чаще всего обусловлена тем, что аргументами неизвестной функции в уравнении являются не сами независимые переменные, а некоторые данные функции от них.

Определение 2. Соотношения, задающие функциональные уравнения, называются тождествами относительно некоторых переменных, а уравнениями они являются потому, что неизвестные функции — искомые.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется решением данного функционального уравнения, если она удовлетворяет ему при всех значениях аргумента в области ее определения.

Решить функциональное уравнение – значит, найти все функции, которые тождественно ему удовлетворяют.

Многие функциональные уравнения содержат несколько переменных. Все эти переменные, если на них не наложены какие-то ограничения, являются независимыми.

Четко должно быть оговорено, на каком множестве функциональное уравнение задается, т.е. какова область определения каждой неизвестной функции. Общее решение функционального уравнения может зависеть от этого множества.

Кроме области определения функций, важно знать, в каком классе функций ищется решение. Количество и поведение решений очень строго зависит от этого класса.

Некоторые функциональные уравнения знакомы учащимся еще из школьного курса. Такие уравнения не определяют конкретную функцию, а задают широкий класс функций, т. е. выражают свойство, характеризующее тот или иной класс функций. Это уравнения вида $f(x) = f(-x)$, $f(-x) = -f(x)$, $f(x + T) = f(x)$, которые задают такие свойства функций, как чётность и нечётность, периодичность. Кроме того, например, уравнение вида $f(1 + x) = f(1 - x)$ задает класс функций, симметричных относительно прямой $x = 1$ и так далее.

Простейшим видом функционального уравнения является рекуррентное соотношение, знакомое школьникам по теме «Последовательности». Такое функциональное уравнение, говоря формально, содержит неизвестную функцию от целых чисел и оператор сдвига, например:

$$a(n) = 2a(n - 1) + 5a(n - 2).$$

Так исследованные и описанные функциональные уравнения дошли до наших дней. Решить их предлагается уже не только научным умам, но и педагогам, а также обучающимся различных уровней образования.

В настоящее время, школьники и студенты часто используют математические сервисы, компьютерные программы и приложения для решения различных математических задач, в том числе для решения уравнений, а также построения графиков функций. Подобные цифровые ресурсы осознанно используются учителями не только с целью упрощения решения той или иной задачи, минимизации затраченного времени или наглядной демонстрации ее результатов, но и для формирования у обучающихся следующих цифровых компетенций: способность решать задачи по построению и исследованию графиков функций на основе информационной культуры с применением информационных технологий; просмотр и оценка цифрового контента, управление цифровым контентом, взаимодействие и обмен посредством цифровых технологий, создание цифрового контента [3].

Можно ли с помощью таких цифровых ресурсов верно решить функциональные уравнения и использовать их на уроках или занятиях по математике на соответствующих темах? Ранее нами было изучено, что на данный момент такие популярные среди школьников приложения как Photomath и Geogebra не могут выполнить эту задачу [2].

База знаний и набор вычислительных алгоритмов Wolfram Alpha, зарекомендовавшая себя как надежная программа, разработанная для решения математических задач, также не всегда может справиться с решением функциональных уравнений.

Wolfram Alpha содержит минимальные сведения по данной теме, а потому ресурс решает лишь простейшие виды функциональных уравнений (рисунки 1, 2).

Более сложные виды функциональных уравнений Wolfram Alpha пытается решить как рекуррентные соотношения (рисунок 3).

Большую же часть функциональных уравнений Wolfram Alpha не решает вовсе. Программа выражает $f(x)$ из исходного уравнения и на этом заканчивает свои вычисления (рисунок 4).

Рисунок 1 – Решение функционального уравнения в Wolfram Alpha

Рисунок 2 – Решение функционального уравнения в Wolfram Alpha

Рисунок 3 – Решение функционального уравнения в Wolfram Alpha

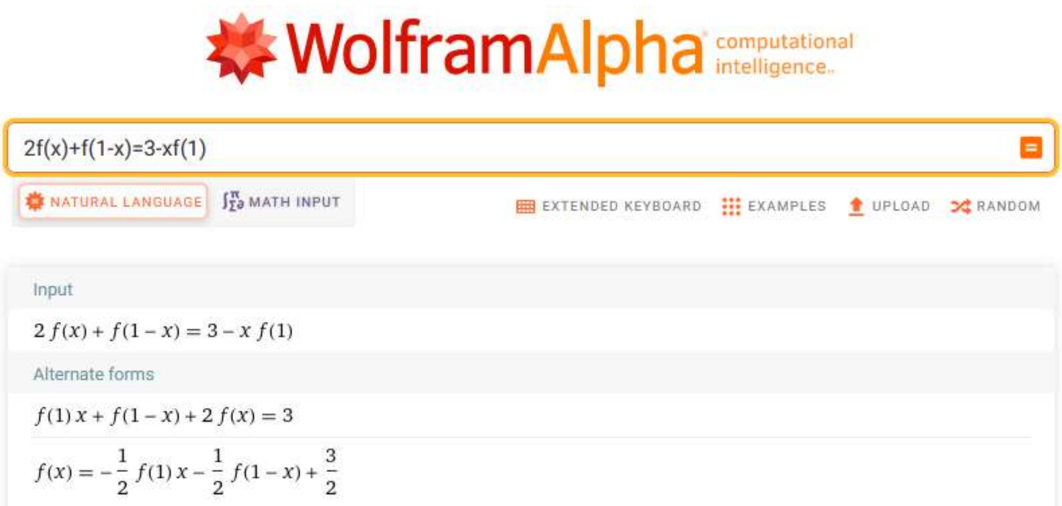

Рисунок 4 – Решение функционального уравнения в Wolfram Alpha

Можно сделать вывод, что в настоящее время компьютерные программы и приложения не способны полноценно решать разнообразные функциональные уравнения. Поэтому решение таких задач классическими методами математического анализа является, по-видимому, единственно возможным и грамотным.

1.4 Основные методы решения функциональных уравнений

На данный момент, для функциональных уравнений, не сводящихся к дифференциальным или интегральным, известно достаточно мало общих методов решения. Простейшие функциональные уравнения могут быть решены при помощи применения математических теорем, в том числе, известных из школьного курса. Для других же заданий теорем бывает недостаточно – необходимо действовать по определенному алгоритму. Рассмотрим доступные школьникам и студентам классические приемы, помогающие найти решения таких уравнений [4; 20; 25-26].

К ним относятся методы:

1. *Метод использования значений функции в некоторых точках*. Бывают ситуации, когда невозможно найти подстановку, которая значительно упростила бы вид уравнения. Однако, если зафиксировать одну из свободных переменных, некоторые члены уравнения могут также оказаться фиксированными. Для них можно ввести удобные обозначения и

использовать при решении как обычные константы. Если эти константы войдут в ответ, проверка покажет, какие их значения являются допустимыми.

2. *Метод сведения функционального уравнения к известному уравнению с помощью замены переменной и функции.* Существуют определенные типы функциональных уравнений, которые можно свести к уравнениям, общие решения которых нам уже известны. Как правило, такие уравнения сводятся к основным уравнениям Коши, рассмотренным ранее.

Метод основан на введении вспомогательной функции, которую следует подобрать таким образом, чтобы после преобразований было ясно, что она удовлетворяет одному из известных функциональных уравнений.

3. *Метод подстановок.* Метод заключается в замене некоторых переменных функционального уравнения либо конкретными значениями, либо какими-либо другими выражениями с целью упростить это уравнение или же привести его к такому виду, что дальнейшее решение станет очевидным. Особенность применяемого метода состоит в том, что в ряде случаев он позволяет отыскать решения в классе всевозможных функций.

4. *Применение теории матриц.* В случае, когда под знаком неизвестной функции стоят дробно-линейные выражения вида $\frac{ax+b}{cx+d}$, мы можем применить знания о теории матриц. Такие дроби полностью определяются заданием матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, составленной из коэффициентов a, b, c, d.

Стоит также отметить, что группа дробно-рациональных функций изоморфна группе матриц размерности 2×2. С точки зрения теории групп, изоморфные группы имеют одни и те же свойства, а потому их можно не различать.

В данном случае, нам проще работать с группой матриц размерности 2×2. Это значительно упростит вычисления – вместо нахождения композиции функций нам необходимо возводить нужную матрицу в квадрат.

5. *Применение элементов математического анализа.* В данном случае для решения функционального уравнения применяется предельный переход.

6. *Применение теории групп.* Данный метод может оказаться достаточно сложным для понимания школьников, поскольку он требует владения информацией, изучающейся в рамках курса математики высших учебных заведений. Тем не менее, метод может быть затронут с учениками профильных классов (с математическим уклоном) или с особо пытливыми, одаренными учениками, активно участвующими в олимпиадах по математике.

Существует несколько основных понятий из курса алгебры, необходимых для понимания данного метода.

Определение 4. Группа – это непустое множество G с бинарной операцией $*$ (умножение), удовлетворяющей условиям: ассоциативность, существование нейтрального элемента и существование обратного элемента. Группа называется конечной, если множество ее элементов конечно.

Определение 5. Мощность множества элементов группы G называют порядком группы.

Известно, что конечная группа является циклической (группа, которая может быть порождена одним элементом a, то есть все её элементы являются степенями a).

Если элементами группы являются функции, то умножение элементов для в некоторых случаях (например, для дробно-линейных функций) можно рассматривать как композицию функций с нейтральным элементом вида $f(x) = x$.

Рассмотрим основные идеи решения функционального уравнения с применением теории групп по Я.С. Бродскому [5].

Пусть в функциональном уравнении

$$a_0 g(f_0) + a_1 g(f_1) + \cdots + a_{n-1} g(f_{n-1}) = b$$

выражения $f_0(x)$, …, $f_{n-1}(x)$, стоящие под знаком неизвестной функции $g(x)$, являются элементами конечной группы порядка n. При этом коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b$ в общем случае зависят от x, и некоторые из них могут быть равны 0. Выполним последовательные подстановки $x \to$ $\to f_1(x), x \to f_2(x), \dots, x \to f_{n-1}(x)$. В дробно-линейных функциях рано или поздно мы будем возвращаться к x, так как он является нейтральным элементом.

Получим систему n линейных уравнений с n неизвестными. Решая эту систему, находим неизвестную функцию $g(f_0) = g(x)$, если, конечно, система имеет решение.

Выполним проверку. Непосредственной подстановкой следует убедиться, что полученная функция удовлетворяет исходному уравнению. Заметим, что этап проверки является важной частью решения, так как на нем могут быть исключены посторонние решения.

Рассмотренный метод ограничивает область определения функции, так как приходится отбрасывать те значения аргумента, при которых элементы группы не имеют смысла.

7. *Графическое решение функциональных уравнений*. Существуют задачи, целью которых является построение графика сложной функции. Для того, чтобы выполнить это задание, необходимо решить функциональное уравнение.

Кроме того, подобные задания могут также содержать параметры (один или несколько) в описании функции, определив которые, можно назвать удовлетворяющую условию функцию однозначно. В таком случае рассматриваются разные значения, которые могут принимать параметры. Оценивает вид функции и ее график. При построении графика становится очевидным, удовлетворяют ли выбранные значения параметра условию задачи.

Известны также и другие методы решения функциональных уравнений. Однако, их использование не целесообразно для обучающихся школ.

Для нахождения решений общих функциональных уравнений развит ряд методов, таких как метод бесконечных степенных рядов, метод последовательных приближений, метод Галеркина (метод моментов), метод касательных гипербол, метод Чебышева (касательных парабол), метод Ньютона–Канторовича и его модификации, метод наискорейшего спуска и др., а также методы вариации параметра (прямые, итерационные и комбинированные) определенных типов и их различные модификации, в том числе и с последовательной аппроксимацией обратного оператора. Общие методы применяются к решению различных конкретных функциональных уравнений математического анализа.

Кроме того, существуют специальные методы решения конкретных функциональных уравнений, в том числе и численные методы, например, метод сеток и другие [8]. Метод вариации параметра, метод Ньютона-Канторовича и некоторые другие из указанных методов имеют также и теоретическое значение, так как с их помощью можно делать заключение о существовании, единственности и области расположения решения функционального уравнения, не находя самого решения.

Выводы по главе 1

Одним из неотъемлемых направлений учебно-воспитательной деятельности образовательного учреждения в современном мире становится внеурочная деятельность. Согласно ФГОС, целью такого рода деятельности является помощь детям в достижении результатов в освоении учебной программы, в адаптации к школьной среде, улучшении навыков социализации, проявлении себя в отличных от класса малых социальных группах, развитии своих способностей в интересующей области.

Главная цель внеурочной деятельности по математике – это повышение заинтересованности школьников математикой, развитие у них логического мышления и вычислительных навыков. ВУД по математике помогает обучающимся расширить и дополнить основную образовательную программу, получить более глубокие знания и узнать о множестве способов решения нестандартных задач, что является ключевым аспектом для подготовки школьников к различным научным испытаниям – будь то олимпиадная деятельность, проектная деятельность или вступительные экзамены в высшие учебные заведения.

Одним из типов задач, рассматриваемых на внеурочных занятиях по математике, могут стать задачи, связанные с решением функциональных уравнений, то есть уравнений, несводимых простыми способами к алгебраическим уравнениям. Эта несводимость чаще всего обусловлена тем, что аргументами неизвестной функции в уравнении являются не сами независимые переменные, а некоторые данные функции от них.

Простейшие функциональные уравнения могут быть решены при помощи применения математических теорем, в том числе, известных из школьного курса. Для других же заданий теорем бывает недостаточно – необходимо действовать по определенному алгоритму. В настоящее время компьютерные программы и приложения не способны полноценно решать разнообразные функциональные уравнения. Поэтому решение таких задач классическими методами математического анализа является, по-видимому, единственно возможным и грамотным, а обучением им – важной частью углубленной математической подготовки.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ В РАМКАХ ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПО МАТЕМАТИКЕ

2.1 Анализ учебных пособий и материалов олимпиад по математике на наличие задач по функциональным уравнениям

Поскольку задачи, связанные с решением функциональных уравнений, относятся к числу наиболее сложных задач школьной математики, тема «Функциональные уравнения» зачастую вовсе не рассматривается в курсе школьной математики на базовом уровне. На углубленном уровне функциональные уравнения, как таковые, не отражены в календарно-тематических планированиях по математике разных авторов. Тем не менее, в контексте определенных глав, связанных с функцией и ее свойствами, в учебниках основной и старшей школы могут встречаться задачи на функциональные уравнения. Кроме того, подходящие задания можно найти в сборниках задач повышенной трудности в курсе школьной алгебры.

Рассмотрим некоторые учебные пособия по математике, в которых нам встретились задачи, связанные с решением функциональных уравнений. В Таблице 1 отражены авторы этих учебников, главы и представленные формулировки задач по функциональным уравнениям.

Таблица 1 – Функциональные уравнения в учебных пособиях по математике

Учебное пособие	Глава	Формулировка задания
1	*2*	*3*
Мерзляк А.Г., Поляков В.М. Алгебра: 8 класс, учебник для учащихся общеобразовательных организаций (углубленный уровень) [14]	Глава 2. Рациональные выражения §15. Функция $y=\frac{k}{x}$ и ее график	№ 15.36. Пусть $f(x)=x$. Постройте график функции $y=-f\left(-\frac{1}{x}\right)$. № 15.37. Пусть $f(x)=-\frac{1}{x}$. Постройте график функции $y=-f\left(-\frac{1}{x}\right)$. № 15.38. Функция f такова, что $f(x)=\frac{4}{x}$. Докажите, что $f(x+1)-f(x-1)=$ $=-\frac{1}{2}f(x+1)\cdot f(x-1)$.

Продолжение таблицы 1

1	*2*	*3*
		№ 15.38. Функция f такова, что $f(x) = \frac{4}{x}$. Докажите, что $f(x+1) - f(x-1) =$ $= -\frac{1}{2} f(x+1) \cdot f(x-1)$. № 15.39. Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию $$3f(x) + 2f(-x) = -\frac{2}{x}.$$ № 15.40. Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию $$2f(x) + f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{3x^2 - 6}{x}.$$
Мерзляк А.Г., Поляков В.М. Алгебра: 9 класс, учебник для учащихся общеобразовательных организаций (углубленный уровень) [15]	Глава 1. Квадратичная функция §1. Функция	№ 1.40. Найдите функцию $f(x)$ такую, что $D(f) = R$ и для любого х $\in R$ выполняется равенство $f(3x-1) = x+2$. № 1.41. Найдите функцию $g(x)$ такую, что $D(g) = R$ и для любого х $\in R$ выполняется равенство $g(x-4) = 3x+1$. № 1.42. Дана функция $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Постройте график функции: $y = f\left(f\left(f(x)\right)\right)$. № 1.43. Найти функцию $f(x)$ такую, что $D(f) = R$ и для любого $x \in R$ выполняется равенство $f(x) + 2f(-x) = x+1$. № 1.44. Найти функцию $f(x)$ такую, что $D(f) \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, и для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $$f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x}.$$ № 1.45. Найти функцию $f(x)$ такую, что $D(f) = R$ и для любого $x \in R$ выполняется равенство $2f(x) - f(1-x) = x+3$. № 1.46. Дана функция $f(x) = x^2 + 2x$. Решите уравнение $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = 0$. № 1.47. Дана функция $f(x) = x^2 + 10x +$ $+20$. Решите уравнение $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = x$. № 1.48. Дана функция $f(x) = x^2 - x + 1$. Решите уравнение $f\left(f(x)\right) = x$.
Руркин А.Н., Гусев Н.Н. Сборник задач по алгебре: 7 класс (углубленный уровень) [21]	-	№ 252. Найдите $P(x^2+1)$ и $P(3x^2-2)$, если: а) $P(x) = 4x - 3$; б) $P(x) = 3 - 5x$; в) $P(x) = 3x^2 + 9x$; г) $P(x) = 4x - 5x^2$.

Продолжение таблицы 1

1	2	3
		№ 253. Найдите $P\big(P(x)\big)$, если: а) $P(x) = 3 - 8x$; б) $P(x) = 7 - 4x$; в) $P(x) = 2x^2 + 3x$; г) $P(x) = 5x - 6x^2$. № 254. Решите уравнение $P\big(P(x)\big) = 4$, если: а) $P(x) = 3x - 2$; б) $P(x) = 7 - 2x$. № 255. Решите уравнение $P\big(P(x)\big) = a$, если: а) $P(x) = 5x - 4$; б) $P(x) = 3 - 4x$. № 258. Найдите многочлен $P(x)$, если: а) $P(x - 3) = 3x^2 - 4x + 5$; б) $P(2 - x) = -5x^2 + 7x - 1$.
Латонин Л.А., Чеботаревский Б.Д. Математика, 11 класс [11]	Раздел VI. Повторение курса математики §21. Уравнения и неравенства	№ 361. Решите уравнение $f\left(f\left(f\left(f\big(f(x)\big)\right)\right)\right) = 0$, где $f(x) = x^2 +$ $+10x + 20$.
Кострикина Н.П. Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7-9 классов [10]	§8. Задачи повышенной трудности в курсе алгебры VIII класса	№ 136. Найдите значение $f(2)$, если для любого $x \neq 0$ выполняется равенство $$f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2.$$ №137. Постройте график функции $y = f\left(f\big(f(x)\big)\right)$, если $f(x) = \frac{1}{1-x}$.
Смышляев В.К. Практикум по решению задач школьной математики (повышенной трудности) [24]	Глава 1. Уравнения §4. Функциональные уравнения	№ 54. Решите следующие функциональные уравнения: а) $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = 2f\left(\frac{x-1}{x}\right)$; б) $f(x) + f\left(\frac{4}{2-x}\right) = x$; в) $af(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = ax$; г) $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) \cdot \cos y$. № 56*. Решите следующие функциональные уравнения: в) $f(x + y) + 2f(x - y) = 3f(x) - y$; г) $f(x + y) = f(x) + y$.

Кроме того, в Таблице 2 рассмотрим некоторые олимпиады по математике школьного и ВУЗовского уровня, в которых нам встретились задачи, связанные с решением функциональных уравнений.

Таблица 2 – Функциональные уравнения в олимпиадах

Олимпиада	Формулировка задания
Всероссийская олимпиада школьников по математике, 1994 г. (областной этап, 11 класс)	№ 11.6. Найдите все функции, определённые на множестве $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, удовлетворяющие соотношению $$(x-1)\cdot f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x.$$
Всероссийская олимпиада школьников по математике, 2023 г. (муниципальный этап, 11 класс)	№ 11.7. Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами, отличный от константы, таков, что для всех действительных x верно $$P(x^2) = x(1 + +x^2)P(x).$$ а) Найдите $P(-1)$. б) Найдите $\frac{P(5)}{P(2)}$.
Всероссийская олимпиада школьников «Высшая проба» по математике, 2023-2024 гг. (10 класс)	№ 10.2. Сколько существует таких приведённых квадратных трёхчленов $f(x) = x^2 + \ px + q$ с целыми коэффициентами, что $f\big(f(1000)\big) = 0$?
Международная олимпиада по элементарной математике среди студентов педагогических вузов и вузов, осуществляющих подготовку учителей математики, 2022 г.	№ 5. Найдите все функции, удовлетворяющие соотношению $$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x.$$
Международная олимпиада по элементарной математике среди студентов педагогических вузов и вузов, осуществляющих подготовку учителей математики, 2023 г.	№ 5. Найдите $f_{2023}(2023)$, если $f_1(x) = x, f_n(x) =$ $= \frac{n}{1-\frac{1}{n-1}\cdot f_{n-1}(x)}$ $(n \geq 2)$.
Международная олимпиада по высшей математике среди студентов педагогических вузов и вузов, осуществляющих подготовку учителей математики, 2023 г.	№ 5. Пусть $f_0(x) = x^2 + 190x + 8930$. Определим $f_i(x) = f_0\big(f_{i-1}(x)\big)$, где $i \geq 1$ Найдите все действительные решения уравнения $f_{2023}(x)$.

Таким образом, проанализировав учебные пособия основной и средней школы по математике, можно сделать вывод, что задания, связанные с решением функциональных уравнений, представлены в них в небольшом количестве. Зачастую они служат углублению понимания определения функции и ее свойств, а также выступают в качестве задач повышенной сложности по теме «Уравнения».

Подобные задания также нередко встречаются на школьных олимпиадах, поэтому подготовка обучающихся, заинтересованных в математике и активно участвующих в математических олимпиадах, к решению задач, связанных с функциональными уравнениями, является целесообразной. Кроме того, работа с подобными заданиями предстоит и студентам педагогических ВУЗов, готовящихся стать учителями математики.

Примеры, найденные в учебных пособиях основной и средней школы, а также в материалах олимпиад по математике, станут основой для разрабатываемого курса. Кроме того, в него будут включены примеры из пособий ВУЗовского уровня по высшей математике для студентов, а также примеры, разработанные нами самостоятельно по аналогии с изученными.

2.2. Анализ материалов ВПР и ЕГЭ по математике на наличие задач по функциональным уравнениям

В ходе анализа учебных материалов по математике было обнаружено, что задания, связанные с решением функциональных уравнений, можно встретить во всероссийских проверочных работах (далее – ВПР) по математике, а также в вариантах единого государственного экзамена (далее – ЕГЭ) по математике.

В случае с ВПР, это задачи базового уровня, встречающиеся в задании № 5 под названием «Формула линейной функции». В случае с ЕГЭ, наличие и отражение заданий, связанных с функциональными уравнениями, претерпело изменения с течением лет. В 2020 году такие задачи появились в ЕГЭ профильного уровня, в задании № 9 под названием «Задачи с прикладным содержанием». В настоящее время, подобные задачи встречаются в задании № 7 под названием «Преобразования алгебраических выражений и дробей». Функциональные уравнения неоднократно появлялись в материалах для подготовки к профильному ЕГЭ по математике, однако в контрольно-измерительные материалы самого экзамена так и не были включены.

Рассмотрим конкретные найденные задания разных уровней проверки знаний школьников и их источники, которые отражены в Таблице 3.

Таблица 3 – Функциональные уравнения в ВПР и ЕГЭ

Уровень работы	Источник	Формулировка задания
1	*2*	*3*
ВПР	Образовательный портал для подготовки к экзаменам «СДАМ ГИА: РЕШУ ВПР»	№ 3922. Дана функция $y(x) = 6x + 2$. Найдите $y(a+1) - y(a)$. № 3982. Дана функция $y(x) = 3x - 6$. Найдите $y(a+1) - y(a)$. № 4078. Дана функция $y(x) = 7x + 4$. Найдите $y(a+1) - y(a)$. № 4211. Дана функция $y(x) = -7x - 1$. Найдите $y(a+1) - y(a)$. № 5557. Дана функция $y(x) = -8x + 1$. Найдите $y(a+1) - y(a)$.
ЕГЭ	Образовательный портал для подготовки к экзаменам «СДАМ ГИА: РЕШУ ЕГЭ»	№ 26804. Найдите $p(x) + p(6 - x)$, если $p(x) = \frac{x(6-x)}{x-3}$ при $x \neq 3$. № 26803. Найдите $\frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}$, если $p(b) = \left(b + \right.$ $\left. + \frac{3}{b}\right)\left(3b + \frac{1}{b}\right)$ при $b \neq 0$. № 26818. Найдите значение выражения $3p(a) - 6a + 7$, если $p(a) = 2a - 3$. № 26820. Найдите значение выражения $q(b-2) - q(b+2)$, если $q(b) = 3b$. № 26821. Найдите значение выражения $5(p(2x) - 2p(x+5)$, если $p(x) = x - 10$. № 26822. Найдите $p(x-7) + p(13-x)$, если $p(x) = 2x + 1$. № 26823. Найдите $2p(x-7) - p(2x)$, если $p(x) = x - 3$.

Продолжение таблицы 3

1	*2*	*3*
ЕГЭ	Открытый банк задач ЕГЭ по математике «МатЕГЭ»	№ 9.1. Найдите значение выражения $10p(a) - 60a - 4$, если $p(a) = 6a - 2$. № 9.2. Найдите значение выражения $q(b - -4) - q(b + 4)$, если $q(b) = -9b$. № 9.3. Найдите значение выражения $\frac{g(x-10)}{g(x-11)}$, если $g(x) = 11^x$. № 9.4. Найдите $p(x - 3) + p(6 - x)$, если $p(x) = 2x - 5$. № 9.5. Найдите $\frac{g(2-x)}{g(2+x)}$, если при $\|x\| \neq 2$ $g(x) = \sqrt[3]{x(4 - x)}$. № 9.6. Найдите $p(x) + p(8 - x)$, если $p(x) = \frac{x(8-x)}{x-4}$ при $x \neq 4$. № 9.7. Найдите $h(3 + x) + h(3 - x)$, если $h(x) = \sqrt[9]{x} + \sqrt[9]{x - 6}$.

2.3 Курс внеурочной деятельности «Функциональные уравнения и методы их решения»

2.3.1 Пояснительная записка курса внеурочной деятельности «Функциональные уравнения и методы их решения»

«Математика – это язык, на котором написана Вселенная» – сказал в XVII веке итальянский ученый, физик, механик и астроном, Галилео Галилей. И действительно – роль этой науки настолько велика, что едва ли можно представить себе всю ее многогранность, все ее величие и широту понятий, правил, законов.

Еще с момента зарождения учебных заведений и до наших дней, математика является неотъемлемой частью школьного курса, а одной из основных ее линий изучения – рассмотрение понятия и свойств функции. Понятие функции фундаментально в науке, поскольку имеет мировоззренческое и общекультурное значение. Функциональные зависимости можно встретить во многих областях нашей жизни, а сведение описания изучаемых процессов и явлений к математическим моделям на основе функций позволяет проводить точный анализ, получать решения и иллюстративные прогностические картины.

В общеобразовательной школе основное внимание уделяется числовым функциям. Понятие соответствия, лежащее в основе определения понятия функции, доступно учащимся уже с 5 класса, в дальнейшем же происходит углубление этого понятия, рассматриваются различные виды функций и их свойства, выполняются задачи на построение графиков. Но, кроме того, существует и другой класс задач, объединяющий в себе сразу две основные содержательно-методические линии школьного курса математики – «функцию» и «уравнения». Речь идет о функциональных уравнениях, изучение которых было ознаменовано в 1769 году Ж.Л. Д'Аламбером при обосновании закона сложения сил. Исследования в этой области ведутся и по сей день, поскольку методов решения задач, связанных с функциональными уравнениями, открыто сравнительно мало.

Функциональное уравнение – это уравнение, которое содержит одну или несколько неизвестных функций (с заданными областями определения и значений). Данный термин обычно используется для уравнений, несводимых простыми способами к алгебраическим уравнениям. Эта несводимость чаще всего обусловлена тем, что аргументами неизвестной функции в уравнении являются не сами независимые переменные, а некоторые данные функции от них. Решить такое уравнение – значит найти все функции, которые тождественно удовлетворяют исходному уравнению.

Задачи, связанные с решением функциональных уравнений, относятся к числу наиболее сложных задач школьной математики, а тема «Функциональные уравнения» зачастую вовсе не рассматривается в курсе школьной математики на базовом уровне. На углубленном же уровне, в контексте определенных глав, связанных с функцией и ее свойствами, в учебниках основной и старшей школы могут встречаться задачи на функциональные уравнения. Кроме того, подходящие задания можно встретить в сборниках задач повышенной трудности в курсе школьной алгебры.

Значимость данного курса внеурочной деятельности обоснована тем, что в последние годы на математических олимпиадах различного уровня и вступительных испытаниях технических ВУЗов регулярно предлагаются функциональные уравнения, для решения которых не подходит ни один отработанный в школе алгоритм, и базовых знаний обучающихся, полученных только на уроках математики, оказывается недостаточно.

Разработанный нами курс внеурочной деятельности «Функциональные уравнения и методы их решения» предназначен для обучающихся средней школы, а именно 10-ых и 11-ых классов. Рекомендован обучающимся, осваивающим школьный курс математики на повышенном (углубленном) уровне, что связано с повышенной сложностью рассматриваемых задач.

Данный курс расширяет представление о понятии функции и ее свойствах, позволяет отточить навыки решения нестандартных уравнений. Роль нестандартных задач в процессе изучения математики в школе очень важна: они развивают логику математического мышления, учат детей активно использовать весь арсенал средств элементарной математики, комбинировать самые разнообразные математические идеи и факты; помогают учащимся при сдаче ЕГЭ.

Цель курса: формирование представления обучающихся средней школы о функциональных уравнениях, их роли в науке, истории возникновения и различных методах их решения.

Задачи курса:

1. Обучающие:

– расширить знания о числовых функциях и их свойствах;

– рассмотреть основные понятия, связанные с функциональными уравнениями;

– изучить различные способы решения функциональных уравнений.

2. Развивающие:

– пробудить интерес к изучению математики, истории ее становления и развития;

– совершенствовать навык логически мыслить и применять имеющиеся математические знания для решения поставленных задач.

3. Воспитательные:

– содействовать воспитанию сосредоточенности, ответственности и организованности;

– содействовать формированию понимания о роли и значимости науки в современном мире.

Курс предусматривает использование лекционно-практической системы. Для текущего контроля на занятиях для обучающихся разработана серия заданий, часть которых выполняется в классе совместно с учителем, а часть является домашней работой и выполняется самостоятельно. Критериями эффективности предлагаемого курса внеурочной деятельности по обучению старшеклассников решению задач, связанных с функциональными уравнениями, служат качество овладения обучающимися предметным содержанием курса по выбору и способность применять имеющиеся знания, а также различные изученные методы для решения задач.

Программа определяет содержание курса внеурочной деятельности, представляет распределение учебных часов по темам курса и определяет последовательность изучения тем. Курс для обучающихся 10-11 классов реализуется в объеме 17 часов, из расчета 1 академический час в неделю. При этом, раздел 2 «Более сложные методы решения функциональных уравнений» является вариативным и может быть рассмотрен учителем из учета наличия учебного время и уровня знаний обучающихся, их готовности познакомиться с функциональными уравнениями и методами их решения повышенного уровня.

Итоги курса подводятся на заключительном занятии в форме контрольной работы, беседы с учителем и выведения рейтинга обучающихся.

В качестве методического сопровождения для данного курса ВУД «Функциональные уравнения и методы их решения» предложены презентация к уроку № 1 (ПРИЛОЖЕНИЕ А) и технологическая карта урока к уроку № 2 (ПРИЛОЖЕНИЕ Б).

2.3.2 Тематическое планирование курса внеурочной деятельности «Функциональные уравнения и методы их решения»

Тематическое планирование курса представлено в Таблице 4. В тематическом планировании отражены: разделы курса; темы занятий; количество часов, выделяемых на каждую тему; форма проведения занятий и форма контроля.

Таблица 4 – Тематическое планирование курса внеурочной деятельности «Функциональные уравнения и методы их решения»

№ п/п	Тема занятия	Количество часов	Форма проведения занятия	Форма контроля
1	*2*	*3*	*4*	*5*
Раздел 1. Понятие функционального уравнения и методы решения				
1	Понятие функционального уравнения и историческая справка	1	Лекция	Фронтальная
2	Простейшие функциональные уравнения	2	Лекция. Практикум по решению задач	Комбинированная
3	Простейшие функциональные уравнения. Материалы ВПР и ЕГЭ	1	Лекция. Практикум по решению задач	Комбинированная
4	Метод использования значений функции в некоторых точках	2	Лекция. Практикум по решению задач	Комбинированная

Продолжение таблицы 4

1	2	3	4	5
5	Метод замены переменной или функции (метод подстановок)	3	Лекция. Практикум по решению задач	Комбинированная
6	Построение графиков функций, связанных с функциональными уравнениями	1	Лекция. Практикум по решению задач	Комбинированная
7	Решение функциональных неравенств с помощью функциональных уравнений	1	Лекция. Практикум по решению задач	Комбинированная
Раздел 2. Более сложные методы решения функциональных уравнений				
8	Применение теории матриц для решения функциональных уравнений	1	Лекция. Практикум по решению задач	Комбинированная
9	Применение теории групп для решения функциональных уравнений	4	Лекция. Практикум по решению задач	Комбинированная
Раздел 3. Подведение итогов				
10	Подведение итогов курса	1	Контрольная работа. Беседа	Индивидуальная
	Итого	17		

2.3.3 Содержание курса внеурочной деятельности «Функциональные уравнения и методы их решения»

Урок № 1. Понятие функционального уравнения и историческая справка (1 час)

На уроке рассматривается история развития функциональных уравнений, основные деятели этой области математики, а также понятия, необходимые школьникам для дальнейшего изучения курса.

Кроме того, обучающимся будут продемонстрированы функциональные уравнения, знакомые им из школьного курса в качестве свойств функций (Приложение А).

Урок № 2. Простейшие функциональные уравнения (1 час)

Пример 1. Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на R. Решите:

а) уравнение $f(3x+2) = f(4x^2+x)$;

б) неравенство $f(3x-48) \leq f(-x^2+x)$.

Решение:

а) $f(3x+2) = f(4x^2+x)$.

Известно, что, если функция монотонна на некотором промежутке, то каждое свое значение она принимает в единственной точке. Исходная функция возрастает, поэтому переходим к равенству между аргументами функций:

$$3x + 2 = 4x^2 + x.$$

Найдем корни квадратного уравнения – это и будет решением исходного функционального уравнения.

$$4x^2 - 2x - 2 = 0;$$

$$2x^2 - x - 1 = 0;$$

$$x_1 = 1 \text{ и } x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$.

б) $f(3x-48) \leq f(-x^2+x)$.

Аналогично пункту а), перейдем к неравенству между аргументами, сохраняя знак неравенства, поскольку функция возрастает по условию:

$$3x - 48 \leq -x^2 + x;$$

$$x^2 + 2x - 48 \leq 0;$$

$$(x-6)(x+8) \leq 0.$$

Отметим множество решений неравенства на числовой прямой и выделим удовлетворяющие условию промежутки (рисунок 5).

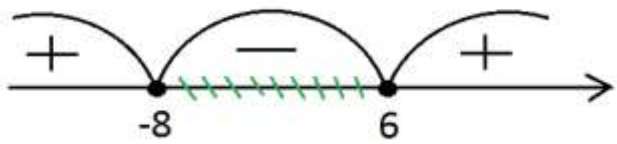

Рисунок 5 – Решение неравенства

Ответ: $[-8; 6]$.

Пример 2. Пусть функция $y = f(x)$ убывает на R. Решите неравенство $f(2x-3) > f(x+2)$.

Решение:

Известно, что, если функция монотонна на некотором промежутке, то каждое свое значение она принимает в единственной точке. Поэтому рассмотрим аргументы функций, изменив знак неравенства на противоположный, исходя из условия об убывании функции:

$$2x - 3 < x + 2;$$

$$x < 5.$$

Ответ: $(-\infty; 5)$.

Пример 3 ([21], № 252). Найдите $P(x^2+1)$, если:

а) $P(x) = 4x - 3$;

б) $P(x) = 3x^2 + 9x$.

Решение:

а) выполним подстановку:

$$P(x^2+1) = 4(x^2+1) - 3 = 4x^2 + 4 - 3 = 4x^2 + 1.$$

Ответ: $P(x^2+1) = 4x^2 + 1$.

б) выполним подстановку:

$$P(x^2+1) = 3(x^2+1)^2 + 9(x^2+1) = 3(x^4 + 2x^2 + 1) + 9(x^2+1) =$$

$$= 3x^4 + 6x^2 + 3 + 9x^2 + 9 = 3x^4 + 15x^2 + 12.$$

Ответ: $P(x^2+1) = 3x^4 + 15x^2 + 12$.

Пример 4 ([21], № 253). Найдите $P\big(P(x)\big)$, если:

а) $P(x) = 3 - 8x$;

б) $P(x) = 7 - 4x$;

в) $P(x) = 2x^2 + 3x$;

г) $P(x) = 5x - 6x^2$.

Решение:

а) выполним подстановку:

$$P(3-8x)=3-8(3-8x)=3-24+64x=64x-21.$$

Ответ: $P\big(P(x)\big)=64x-21.$

б) выполним подстановку:

$$P(7-4x)=7-4(7-4x)=7-28+16x=16x-21.$$

Ответ: $P\big(P(x)\big)=16x-21.$

в) выполним подстановку:

$$P(2x^2+3x)=2(2x^2+3x)^2+3(2x^2+3x)=$$
$$=2(4x^2+12x^3+9x^2)+3(2x^2+3x)=8x^4+24x^3+18x^2+6x^2+9x=$$
$$=8x^4+24x^3+24x^2+9x.$$

Ответ: $P\big(P(x)\big)=8x^4+24x^3+24x^2+9x.$

г) выполним подстановку:

$$P(5x-6x^2)=5(5x-6x^2)-6(5x-6x^2)^2=$$
$$=5(5x-6x^2)-6(25x^2-60x^3+36x^4)=$$
$$=25x-30x^2-150x^2+360x^3-216x^4=$$
$$=-216x^4+360x^3-180x^2+25x.$$

Ответ: $P\big(P(x)\big)=-216x^4+360x^3-180x^2+25x.$

Пример 5 ([21], № 254). Решите уравнение $P\big(P(x)\big)=4$, если:

а) $P(x)=3x-2$;

б) $P(x)=7-2x$.

Решение:

а) выполним подстановку:

$$P\big(P(x)\big)=3(3x-2)-2=9x-6-2=9x-8.$$

Так как по условию $P\big(P(x)\big)=4$, то $9x-8=4$. Отсюда $x=\frac{4}{3}$.

Ответ: $x=\frac{4}{3}$.

б) выполним подстановку:

$$P\big(P(x)\big)=7-2(7-2x)=7-14+4x=-7+4x.$$

Так как по условию $P\big(P(x)\big)=4$, то $-7+4x=4$. Отсюда $x=\frac{11}{4}$.

Ответ: $x=\frac{11}{4}$.

Задания для самостоятельной работы:

Задание 1. Найдите $P(x^2+1)$, если:

а) $P(x)=3-5x$;

б) $P(x)=4x-5x^2$.

Задание 2. Найдите $P(3x^2-2)$, если:

а) $P(x)=4x-3$;

б) $P(x)=3x^2+9x$.

Урок № 3. Простейшие функциональные уравнения (1 час)

Пример 1 ([21], № 255). Решите уравнение $P\big(P(x)\big)=a$, если:

а) $P(x)=5x-4$;

б) $P(x)=3-4x$.

Решение:

а) выполним подстановку:

$$P\big(P(x)\big)=5(5x-4)-4=25x-20-4=25x-24.$$

Так как по условию $P\big(P(x)\big)=a$, то $25x-24=a$. Отсюда $x=\frac{a+24}{25}$.

Ответ: $x=\frac{a+24}{25}$.

б) выполним подстановку:

$$P\big(P(x)\big)=3-4(3-4x)=3-12+16x=-9+16x.$$

Так как по условию $P\big(P(x)\big)=a$, то $-9+16x=a$. Отсюда $x=\frac{a+9}{16}$.

Ответ: $x=\frac{a+9}{16}$.

Пример 2 ([11], № 361). Решите уравнение $f\left(f\left(f\left(f\big(f(x)\big)\right)\right)\right)=0$, где $f(x)=x^2+10x+20$.

Решение:

Пусть $f\left(f\left(f\big(f(x)\big)\right)\right)=a$, тогда $f(a)=0$. Подставим в условие и получим выражение $a^2+10a+20=0$.

Воспользуемся методом сведения к квадратному уравнению, чтобы определить корни:

$$a^2 + 10a + 20 + 5 = 5;$$

$$(a + 5)^2 = 5;$$

$$a_1 = 5^{\frac{1}{2}} - 5 \text{ и } a_2 = -5^{\frac{1}{2}} - 5.$$

Пусть $f\left(f\big(f(x)\big)\right) = b$, тогда $f(b) = a$:

$$b^2 + 10b + 20 = \pm 5^{\frac{1}{2}} - 5;$$

$$b^2 + 10b + 25 = \pm 5^{\frac{1}{2}};$$

$$(b + 5)^2 = 5^{\frac{1}{2}};$$

$$b_1 = 5^{\frac{1}{4}} - 5 \text{ и } a_2 = -5^{\frac{1}{4}} - 5.$$

Пусть $f\big(f(x)\big) = c$, тогда $f(\text{c}) = b$:

$$c^2 + 10c + 20 = \pm 5^{\frac{1}{4}} - 5;$$

$$c^2 + 10c + 25 = \pm 5^{\frac{1}{4}};$$

$$(c + 5)^2 = 5^{\frac{1}{4}};$$

$$c_1 = 5^{\frac{1}{8}} - 5 \text{ и } c_2 = -5^{\frac{1}{8}} - 5.$$

Пусть $f(x) = d$, тогда $f(d) = c$:

$$d^2 + 10d + 20 = \pm 5^{\frac{1}{8}} - 5;$$

$$d^2 + 10d + 25 = \pm 5^{\frac{1}{8}};$$

$$(d + 5)^2 = 5^{\frac{1}{8}};$$

$$c_1 = 5^{\frac{1}{16}} - 5 \text{ и } c_2 = -5^{\frac{1}{16}} - 5.$$

Таким образом, получили, что:

$$f(x) = x^2 + 10x + 20 = \pm 5^{\frac{1}{16}} - 5;$$

$$x^2 + 10x + 25 = \pm 5^{\frac{1}{16}};$$

$$(x + 5)^2 = 5^{\frac{1}{16}};$$

$$x_1 = 5^{\frac{1}{32}} - 5 \text{ и } x_2 = -5^{\frac{1}{32}} - 5.$$

Ответ: $x = \pm 5^{\frac{1}{32}} - 5$.

Пример 3 ([14], № 15.38). Функция f такова, что $f(x) = \frac{4}{x}$. Докажите, что $f(x+1) - f(x-1) = -\frac{1}{2} f(x+1) \cdot f(x-1)$.

Решение:

Так как $f(x) = \frac{4}{x}$, выполним подстановку в равенство, которое необходимо доказать:

$$\frac{4}{x+1} - \frac{4}{x-1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{x+1} \cdot \frac{4}{x-1}.$$

Выполним преобразования в левой и правой частях:

$$\frac{4x - 4 - 4x - 4}{x^2 - 1} = -\frac{16}{2(x^2 - 1)};$$

$$\frac{-8}{x^2 - 1} = -\frac{8}{(x^2 - 1)}$$

– это верно. Что и требовалось доказать.

Пример 4 (МО по ЭМ, 2023, № 5). Найдите $f_{2023}(2023)$, если $f_1(x) = x$, $f_n(x) = \frac{n}{1 - \frac{1}{n-1} \cdot f_{n-1}(x)}$ $(n \geq 2)$.

Решение:

Вычислим несколько первых элементов последовательности:

$$f_2(x) = \frac{2}{1 - \frac{1}{2-1} \cdot f_{2-1}(x)} = \frac{2}{1 - x};$$

$$f_3(x) = \frac{3}{1 - \frac{1}{3-1} \cdot f_{3-1}(x)} = \frac{3}{\frac{-x}{1-x}} = \frac{3(x-1)}{x};$$

$$f_4(x) = \frac{4}{1 - \frac{1}{4-1} \cdot f_{4-1}(x)} = \frac{4}{\frac{1}{x}} = 4x;$$

$$f_5(x) = \frac{5}{1 - \frac{1}{5-1} \cdot f_{5-1}(x)} = \frac{5}{1 - x};$$

$$f_6(x) = \frac{6}{1 - \frac{1}{6-1} \cdot f_{6-1}(x)} = \frac{6}{\frac{-x}{1-x}} = \frac{6(x-1)}{x};$$

$$f_7(x) = \frac{7}{1 - \frac{1}{7-1} \cdot f_{7-1}(x)} = \frac{7}{\frac{1}{x}} = 7x.$$

И так далее. Заметим закономерность, которую можем записать в виде системы формул в общем виде:

$$f_n(x) = \begin{cases} n \cdot x, & n = 3k-2 \\ \frac{n}{1-x}, & n = 3k-1 \\ \frac{n\cdot(x-1)}{x}, & n = 3k \end{cases}, k \in N.$$

Нам необходимо найти $f_{2023}(x)$. Число $2023 = 3 \cdot 675 - 2$. Получим: $f_{2023}(x) = 2023x$. Осталось найти $f_{2023}(2023) = 2023 \cdot 2023 = 4092529$.

Ответ: $f_{2023}(2023) = 4092529$.

Задания для самостоятельной работы:

Задание 1. Найдите $f_{2024}(2024)$, если $f_1(x) = x, f_n(x) = \frac{n}{1-\frac{1}{n-1}\cdot f_{n-1}(x)}$ $(n \geq 2)$.

Задание 2 (МО по ВМ, 2023 г.). Пусть $f_0(x) = x^2 + 190x + 8930$. Определим $f_i(x) = f_0\big(f_{i-1}(x)\big)$, где $i \geq 1$ Найдите все действительные решения уравнения $f_{2023}(x)$.

Урок № 4. Простейшие функциональные уравнения. Материалы ВПР и ЕГЭ (1 час)

Пример 1 («РЕШУ ВПР», № 3922, № 4211).

а) Дана функция $y(x) = 6x + 2$. Найдите $y(a+1) - y(a)$.

б) Дана функция $y(x) = -7x - 1$. Найдите $y(a+1) - y(a)$.

Решение:

а) исходя из данной функции, получаем: $y(a) = 6a + 2$ и $y(a+1) =$ $= 6(a+1) + 2 = 6a + 8$.

Следовательно, $y(a+1) - y(a) = 6a + 8 - (6a + 2\ ) = 6$.

Ответ: 6.

б) исходя из данной функции, получаем: $y(a) = -7a - 1$ и $y(a+ +1) = -7(a+1) - 1 = -7a - 8$.

Следовательно, $y(a+1) - y(a) = -7a - 8 - (-7a - 1\ ) = -7$.

Ответ: -7.

Пример 2 («РЕШУ ЕГЭ», № 26804). Найдите $p(x) + p(6-x)$, если $p(x) = \frac{x(6-x)}{x-3}$ при $x \neq 3$.

Решение:

Исходя из данной функции, получаем: $p(6-x) = \frac{(6-x)\cdot(6-(6-x))}{(6-x)-3} = = \frac{(6-x)\cdot x}{3-x} = \frac{6x-x^2}{3-x}$.

Следовательно,

$$p(x) + p(6-x) = \frac{x(6-x)}{x-3} + \frac{6x-x^2}{3-x} = \frac{6x-x^2-6x+x^2}{x-3} = \frac{0}{x-3} = 0.$$

Ответ: 0.

Пример 3 («РЕШУ ЕГЭ», № 26821). Найдите значение выражения $5(p(2x) - 2p(x+5)$, если $p(x) = x - 10$.

Решение:

Исходя из данной функции, получаем: $p(2x) = 2x - 10$ и $p(x+5) = = (x+5) - 10 = x - 5$.

Следовательно, $5(p(2x) - 2p(x+5)) = 5(2x - 10 - 2(x-5)) = 0$.

Ответ: 0.

Пример 4 («РЕШУ ЕГЭ», № 26803). Найдите $\frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}$, если при $b \neq 0$ $p(b) = \left(b + \frac{3}{b}\right)\left(3b + \frac{1}{b}\right)$.

Решение:

Исходя из данной функции, получаем: $p\left(\frac{1}{b}\right) = \left(\frac{1}{b} + \frac{3}{\frac{1}{b}}\right)\left(3\frac{1}{b} + \frac{1}{\frac{1}{b}}\right) = = \left(\frac{1}{b} + 3b\right)\left(\frac{3}{b} + b\right)$.

Следовательно, $p\frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)} = \frac{\left(b+\frac{3}{b}\right)\left(3b+\frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{b}+3b\right)\left(\frac{3}{b}+b\right)} = 1$.

Ответ: 1.

Пример 5 («МатЕГЭ»). Найдите значение выражения $\frac{g(x-10)}{g(x-11)}$, если $g(x) = 11^x$.

Решение:

Исходя из данной функции, получаем: $g(x-10) = 11^{x-10} = \frac{11^x}{11^{10}}$ и $g(x-11) = 11^{x-11} = \frac{11^x}{11^{11}}$.

Следовательно, $\frac{g(x-10)}{g(x-11)} = \frac{11^x}{11^{10}} : \frac{11^x}{11^{11}} = \frac{11^x}{11^{10}} \cdot \frac{11^{11}}{11^x} = 11$.

Ответ: 11.

Пример 6 («МатЕГЭ»). Найдите $\frac{g(2-x)}{g(2+x)}$, если $g(x) = \sqrt[3]{x(4-x)}$ при $|x| \neq 2$.

Решение:

Исходя из данной функции, получаем:

$$g(2-x) = \sqrt[3]{(2-x)\big(4-(2-x)\big)} = \sqrt[3]{(2-x)(2+x)} = \sqrt[3]{4-x^2};$$

$$g(2+x) = \sqrt[3]{(2+x)\big(4-(2+x)\big)} = \sqrt[3]{(2+x)(2-x)} = \sqrt[3]{4-x^2}.$$

Следовательно, $\frac{g(2-x)}{g(2+x)} = \frac{\sqrt[3]{4-x^2}}{\sqrt[3]{4-x^2}} = 1$.

Ответ: 1.

Задания для самостоятельной работы:

Задание 1 («РЕШУ ВПР», № 5557). Дана функция $y(x) = -8x + 1$. Найдите $y(a+1) - y(a)$.

Задание 2 («РЕШУ ЕГЭ», №26823). Найдите $2p(x-7) - p(2x)$, если $p(x) = x - 3$.

Задание 3 («МатЕГЭ»). Найдите $p(x) + p(8-x)$, если $p(x) = \frac{x(8-x)}{x-4}$ при $x \neq 4$.

Задание 4 («МатЕГЭ»). Найдите $h(3+x) + h(3-x)$, если $h(x) = \sqrt[9]{x} + \sqrt[9]{x-6}$.

Урок № 5. Метод использования значений функции в некоторых точках (1 час)

Пример 1. Найдите все функции $f: R \to R$, которые при всех $x, y \in R$ удовлетворяют уравнению $f(x+y) = x + y \cdot f(x) + (1-x) \cdot y$.

Решение:

Пусть f – функция, удовлетворяющая заданному уравнению. Поскольку это уравнение выполняется при всех значениях переменных x и y, то оно будет выполнятся и при конкретных значениях этих переменных.

Избавимся от одной из переменных.

Подставив, например, $y = 0$ в исходное уравнение, мы получим $f(x) = x$. Это равенство должно выполнятся при любом действительном x. Таким образом, $f(x) = x$ является решением исходного функционального уравнения. Проверка показывает, что найденная функция действительно удовлетворяет уравнению при всех $x, y \in R$.

Ответ: $f(x) = x$.

Пример 2. Найдите все функции $f: R \to R$, которые при всех $x, y \in R$ удовлетворяют уравнению $f(x+y) = x + y \cdot f(x) + (1 - \sin x) \cdot y$.

Решение:

Аналогично предыдущей задаче, устанавливаем, что для функции f, которая удовлетворяет исходному уравнению, должно выполнятся тождество $f(x) = x$ при подстановке $y = 0$. Однако, подставив функцию $f(x) = x$ в исходное уравнение, мы не получим тождества. Поскольку никакие другие функции также не могут быть решениям и исходного функционального уравнения, то данное уравнение решений не имеет.

Ответ: нет решений.

Пример 3. Найдите все функции $f: R \to R$, которые при всех $x, y \in R$ удовлетворяют уравнению $f(x + y^2 + 2y + 1) = y^4 + 4y^3 + 2xy^2 + 5y^2 +$ $+4xy + 2y + x^2 + x + 1$.

Решение:

Чтобы получить значение $f(x)$, избавимся от слагаемого $y^2 + 2y + 1$ под знаком функции.

Уравнение $y^2 + 2y + 1$ имеет одно решение $y = -1$. Тогда, подставляя $y = -1$ в исходное функциональное уравнение, мы получаем $f(x) = x^2 - x + 1$. Проверка показывает, что найденная функция действительно удовлетворяет уравнению при всех $x, y \in R$. А это значит, что $f(x) = x^2 - x + 1$ является решением исходного уравнения.

Ответ: $f(x) = x^2 - x + 1$.

Пример 4. Найдите все функции $f: R \to R$, которые при всех $x, y \in R$ удовлетворяют уравнению $f\big((x^2 + 6x + 6)y\big) = y^2x^4 + 12y^2x^3 + +48y^2x^2 - 4yx^2 + 72y^2x - 24yx + 36y^2 - 24$.

Решение:

Как и в прошлом примере, нам нужно получить под знаком функции свободную переменную – x или y. В данном случае проще получить y.

Избавимся от множителя $x^2 + 6x + 6$. Решив уравнение $x^2 + 6x + +6 = 0$, получим $x_1 = -1$ и $x_2 = -5$. Подстановка любого из этих значений в исходное функциональное уравнение даст $f(y) = y^2 - 4y$. Найденная функция и будет являться решением.

Ответ: $f(y) = y^2 - 4y$.

Пример 5. При положительных значениях переменных x, y для функции $f(x)$ имеет место равенство $f(xy) = f(x) + f(y)$. Найдите $f(2020)$, если известно, что $f\left(\frac{1}{2020}\right) = 1$.

Решение:

Пусть $x = 1, y = 1$. Тогда по условию:

$$f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1);$$

$$f(1) = 2f(1).$$

Следовательно, $f(1) = 0$.

Для всех положительных x будет выполняться равенство:

$$f(1) = f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Следовательно, $f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Тогда при $x = 2020$, получим: $f(2020) = -f\left(\frac{1}{2020}\right) = -1$.

Ответ: $f(2020) = -1$.

Задания для самостоятельной работы:

Задание 1 ([24], № 54). Решите функциональное уравнение: $f(x + +y) + f(x - y) = 2f(x) \cdot \cos y$.

Урок № 6. Метод использования значений функции в некоторых точках (1 час)

Пример 1 (ВСОШ, 2023, МЭ, № 11.7). Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами, отличный от константы, таков, что для всех действительных x верно $P(x^2) = x(1 + x^2)P(x)$.

а) Найдите $P(-1)$.

б) Найдите $\frac{P(5)}{P(2)}$.

Решение:

а) подставим для начала некоторые значения x в данное равенство. Пусть $x = 0$, тогда:

$$P(0) = 0 \cdot 1 \cdot P(0);$$

$$P(0) = 0.$$

Пусть $x = 1$, тогда:

$$P(1) = 1 \cdot 2 \cdot P(1);$$

$$P(1) = 0.$$

И, наконец, пусть $x = -1$, тогда:

$$P(1) = -1 \cdot 2 \cdot P(-1);$$

$$0 = -2 \cdot P(-1);$$

$$P(-1) = 0.$$

Ответ: $P(-1) = 0$.

б) пусть степень многочлена $P(x)$ равна d. Тогда степень $P(x^2)$ равна $2d$. Степень же многочлена $x(1+x^2)P(x)$ равна $3+d$.

Из исходного уравнения получаем $2d = 3 + d$, откуда $d = 3$. Значит, степень многочлена $P(x)$ равна 3, а в пункте (а) мы нашли три его различных корня. Так как по теореме Безу $P(x)$ представим в виде $a \cdot x(x-1)(x+1)$, запишем искомое выражение:

$$\frac{P(5)}{P(2)} = \frac{a \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6}{a \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3} = 20.$$

Ответ: $\frac{P(5)}{P(2)} = 20$.

Пример 2 ([10], № 136). Найдите значение $f(2)$, если выполняется равенство $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$ для любого $x \neq 0$.

Решение:

Подставив в данное равенство x=2, получим: $f(2) + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$.

Но мы не знаем значение $f\left(\frac{1}{2}\right)$. Подставив в данное равенство x=$\frac{1}{2}$, получим: $f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(2) = \frac{1}{4}$. Откуда выразим $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 3f(2)$.

Подставим $f\left(\frac{1}{2}\right)$ в первое уравнение:

$$f(2) + 3\left(\frac{1}{4} - 3f(2)\right) = 4;$$

$$-8f(2) = \frac{13}{4};$$

$$f(2) = -\frac{13}{32}.$$

Ответ: $f(2) = -\frac{13}{32}$.

Пример 3 (ВСОШ «Высшая проба», 2023-2024, № 10.2). Сколько существует таких приведённых квадратных трёхчленов $f(x) = x^2 + px +$ $+q$ с целыми коэффициентами, что $f\big(f(1000)\big) = 0$?

Решение:

Поскольку $f(f(1000)) = 0$, то $f(1000)^2 + f(1000)p + q = 0$. Выразим отсюда $q = -f(1000)^2 - f(1000)p$.

Тогда с учетом выраженного q:

$$f(1000) = 1000^2 + 1000p + q;$$

$$f(1000) = 1000^2 + 1000p - f(1000)^2 - f(1000)p;$$

$$f(1000)^2 + f(1000) - 1000^2 = p(1000 - f(1000));$$

$$p = \frac{f(1000)^2 + f(1000) - 1000^2}{1000 - f(1000)};$$

$$p = -f(1000) - 1000 + \frac{f(1000)}{1000 - f(1000)};$$

$$p = -f(1000) - 1000 - 1 + \frac{1000}{1000 - f(1000)}.$$

Согласно условию задачи, $-f(1000) - 1000 - 1 + \frac{1000}{1000 - f(1000)}$ принадлежит множеству целых чисел, как коэффициент искомого квадратного трёхчлена. Тогда и $\frac{1000}{1000 - f(1000)} \in Z$. Чтобы числитель нацело поделился на знаменатель, последний должен относиться к множеству делителей 1000, то есть

$$1000 - f(1000) \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \ldots, \pm 500, \pm 1000\}.$$

Так как $1000 = 2^3 \cdot 5^3$, то количество делителей 1000 в натуральных числах равно 16, а в целых равно 32.

Выполним проверку. Для каждого $f(1000)$ справедливо:

1) $p \in Z$ и $q \in Z$;

2) $f(f(1000)) = 0$.

Ответ: 32.

Задания для самостоятельной работы:

Задание 1 ([24], № 56). Решите следующие функциональные уравнения:

а) $f(x + y) + 2f(x - y) = 3f(x) - y$;

б) $f(x + y) = f(x) + y$.

Урок № 7. Метод замены переменной или функции (метод подстановок) (1 час)

Пример 1. Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию

$$2f(x) + f(1-x) = x^2.$$

Решение:

В уравнении заменим x на $1-x$: $2f(1-x) + f(x) = (1-x)^2$.

Получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 2f(x) + f(1-x) = x^2, \\ 2f(1-x) + f(x) = (1-x)^2. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на -2 и сложим уравнения системы:

$$-3f(x) = -2x^2 + 1 - 2x + x^2;$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}.$$

Ответ: $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$.

Пример 2. Найдите $f(x)$, такую что $f(2x+1) = x^2 + 3x + 5$.

Решение:

Сделаем замену $t = 2x + 1$. Получим $x = \frac{t-1}{2}$. Значит, $f(t) = \left(\frac{t-1}{2}\right)^2 +$ $+3 \cdot \frac{t-1}{2} + 5 = \frac{1}{4}t^2 + t + \frac{15}{4}$.

Ответ: $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + \frac{15}{4}$

Пример 3. Найдите $f(x)$, удовлетворяющую соотношению

$$2 \cdot f(3-x) + 3 \cdot f(x-1) = 2x - 1.$$

Решение:

Сделаем замену x на те аргументы, которые стоят под знаком функции. Пусть $t = 3 - x$. Значит, $x = 3 - t$, а исходное функциональное уравнение примет вид:

$$2 \cdot f(3-3+t) + 3 \cdot f(3-t-1) = 2(3-t) - 1;$$

$$2 \cdot f(t) + 3 \cdot f(2-t) = 5 - 2t.$$

Пусть $t = x - 1$. Значит, $x = t + 1$, а исходное функциональное уравнение примет вид:

$$2 \cdot f(3-t-1) + 3 \cdot f(t+1-1) = 2(t+1) - 1;$$

$$2 \cdot f(2-t) + 3 \cdot f(t) = 2t + 1.$$

Теперь нам необходимо решить систему из двух полученных уравнений:

$$\begin{cases} 2 \cdot f(t) + 3 \cdot f(2-t) = 5 - 2t, \\ 2 \cdot f(2-t) + 3 \cdot f(t) = 2t + 1. \end{cases}$$

Чтобы выразить $f(t)$, умножим первое уравнение системы на 2, второе уравнение на -3 и сложим уравнения. Получим:

$$-5 \cdot f(t) = 10 - 4t - 6t - 3;$$

$$-5 \cdot f(t) = 7 - 10t;$$

$$f(t) = \frac{7}{5} - 2t.$$

Следовательно, $f(x) = \frac{7}{5} - 2t$.

Ответ: $f(x) = \frac{7}{5} - 2t$.

Пример 4 ([14], № 15.39). Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию

$$3f(x) + 2f(-x) = -\frac{2}{x}.$$

Решение:

В уравнении заменим x на $-x$: $3f(-x) + 2f(x) = \frac{2}{x}$.

Получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 3f(x) + 2f(-x) = -\dfrac{2}{x}, \\ 3f(-x) + 2f(x) = \dfrac{2}{x}. \end{cases}$$

Из второго уравнения $f(-x) = \frac{\frac{2}{x} - 2f(x)}{3} = \frac{2 - 2xf(x)}{3x}$. Подставим в первое уравнение, получим:

$$3f(x) + 2 \cdot \frac{2 - 2xf(x)}{3x} = -\frac{2}{x};$$

$$3f(x) - \frac{4}{3}f(x) = -\frac{2}{x} - \frac{4}{3x};$$

$$\frac{5}{3}f(x) = -\frac{10}{3x};$$

$$f(x) = -\frac{2}{x}.$$

Ответ: $f(x) = -\frac{2}{x}$.

Задания для самостоятельной работы:

Задание 1. Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию $f(x) + +x \cdot f(1-x) = 1 + x$.

Урок № 8. Метод замены переменной или функции (метод подстановок) (1 час)

Пример 1 ([14], № 15.40). Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию

$$2f(x) + f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{3x^2 - 6}{x}.$$

Решение:

В уравнении заменим x на $-\frac{1}{x}$, получим:

$$2f\left(-\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{6x^2 - 3}{x}.$$

Получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 2f(x) + f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{3x^2 - 6}{x}, \\ 2f\left(-\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{6x^2 - 3}{x}. \end{cases}$$

Чтобы выразить $f(x)$, умножим первое уравнение системы на -2 и сложим уравнения. Получим:

$$-3f(x) = \frac{9}{x};$$

$$f(x) = -\frac{3}{x}.$$

Ответ: $f(x) = -\frac{3}{x}$.

Пример 2. Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию

$$f\left(\frac{x+1}{x+2}\right)+2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x.$$

Решение:

Сделаем замену аргумента второй функции. Пусть $\frac{x+1}{x+2}=t$, тогда $x = = \frac{t+2}{1-t}$, где $t \neq 0, t \neq 1$. Подставим в исходное уравнение и получим:

$$f\left(\frac{1}{t}\right)+2f(t)=\frac{t+2}{1-t}.$$

Заменим t на $\frac{1}{t}$, получим:

$$f(t)+2f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1+2t}{t-1}.$$

Теперь нам необходимо решить систему из двух полученных уравнений:

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{t}\right)+2f(t)=\frac{t+2}{1-t}, \\ f(t)+2f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1+2t}{t-1}. \end{cases}$$

Чтобы выразить $f(t)$, умножим первое уравнение системы на -2 и сложим уравнения. Получим:

$$-2\cdot f\left(\frac{1}{t}\right)-4f(t)=\frac{-2t-4}{1-t};$$

$$-3\cdot f(t)=\frac{2t+4+1+2t}{t-1};$$

$$f(t)=\frac{4t+5}{t-1}.$$

Следовательно, $f(x)=\frac{4x+5}{x-1}$.

Ответ: $f(x)=\frac{4x+5}{x-1}$.

Пример 3 (МО по ЭМ, 2022, № 5). Найдите все функции, удовлетворяющие соотношению

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x.$$

Решение:

Сделаем замену x на $\frac{1}{1-x}$. Получим:

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(-\frac{1-x}{x}\right)=\frac{1}{1-x}.$$

У нас появилось три функции с разными аргументами, а значит, для решения системы с тремя переменными нужно три уравнения. Вновь заменим x на $\frac{1}{1-x}$. Получим:

$$f\left(-\frac{1-x}{x}\right)+f(x)=-\frac{1-x}{x}.$$

Составим и решим систему из трех полученных уравнений:

$$\begin{cases} f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x, \\ f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(-\frac{1-x}{x}\right)=\frac{1}{1-x}, \\ f\left(-\frac{1-x}{x}\right)+f(x)=-\frac{1-x}{x}. \end{cases}$$

Чтобы выразить $f(x)$, вычтем из первого уравнения системы второе, а результат сложим с третьим уравнением. Получим:

$$2\cdot f(x)=\frac{-x^2+x-1}{1-x}-\frac{1-x}{x};$$

$$2\cdot f(x)=\frac{-x^3+x-1}{-x^2+x};$$

$$f(x)=\frac{-x^3+x-1}{-2x^2+2x}.$$

Ответ: $f(x)=\frac{-x^3+x-1}{-2x^2+2x}$.

Задания для самостоятельной работы:

Задание 1. Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию $f(x)+$ $+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3-x^2}{x}$.

Урок № 9. Метод замены переменной или функции (метод подстановок) (1 час)

Пример 1. Пусть $a \neq \pm 1$ – некоторое действительное число. Найти функцию $f(x)$, определенную для всех $x \neq 1$ и удовлетворяющую условию $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = af(x) + g(x)$, где g – заданная функция, определенная при $x \neq 1$.

Решение:

Сделав замену $\frac{x}{x-1} = x$, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = af(x) + g(x), \\ f(x) = af\left(\dfrac{x}{x-1}\right) + g\left(\dfrac{x}{x-1}\right). \end{cases}$$

Домножим первое уравнение системы на $-a$ и сложим уравнения:

$$f(x) = -a^2 f(x) - ag(x) + g\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

Выразим из этого равенства $f(x)$:

$$f(x)(1 + a^2) = g\left(\frac{x}{x-1}\right) - ag(x);$$

$$f(x) = \frac{g\left(\frac{x}{x-1}\right) - ag(x)}{1 + a^2}.$$

При $a \neq \pm 1$ эта функция будет являться решением.

Ответ: $f(x) = \frac{g\left(\frac{x}{x-1}\right) - ag(x)}{1+a^2}$.

Пример 2. Найти решение системы функциональных уравнений относительно неизвестных функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\begin{cases} f(2x) + 2g(2x) = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x}, \\ f\left(\dfrac{1}{x}\right) + g\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}. \end{cases}$$

Решение:

В первом уравнении сделаем подстановку $2x = \frac{1}{t}$, а $x = \frac{1}{2t}$. При этом правая часть уравнения также будет преобразована:

$$\frac{2x^2 + x + 1}{x} = \frac{2\left(\frac{1}{2t}\right)^2 + \frac{1}{2t} + 1}{\frac{1}{2t}} = \frac{2t^2 + t + 1}{t}.$$

Следовательно, $f\left(\frac{1}{t}\right)+2g\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{2t^2+t+1}{t}$ или $f\left(\frac{1}{x}\right)+2g\left(\frac{1}{x}\right)=$ $=\frac{2x^2+x+1}{x}$.

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2g\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{2x^2+x+1}{x}, \\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)+g\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+x+1}{x}. \end{cases}$$

Вычтем второе уравнение из первого, а потом домножим второе уравнение на -2 и сложим оба уравнения системы. Получим решение:

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+1}{x}, \\ g\left(\dfrac{1}{x}\right)=x. \end{cases}$$

Сделав замену $\frac{1}{x}=x$ получим:

$$\begin{cases} f(x)=x+1, \\ g(x)=\dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Ответ: $f(x)=x+1;\ g(x)=\frac{1}{x}$.

Задания для самостоятельной работы:

Задание 1. Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию $f\left(\frac{x}{x-1}\right)=2f\left(\frac{x-1}{x}\right)$.

Задание 2. Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию $af(x)+$ $+f\left(\frac{1}{x}\right)=ax$.

Урок №10. Построение графиков функций, связанных с функциональными уравнениями (1 час)

Пример 1 ([14], № 15.36). Пусть $f(x)=x$. Постройте график функции $y=-f\left(-\frac{1}{x}\right)$.

Решение:

Найдем $f\left(-\frac{1}{x}\right)$, выполнив подстановку:

$$f\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}.$$

Следовательно, $y = -f\left(-\frac{1}{x}\right) = -\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}.$

Это обратная пропорциональность, графиком которой является гипербола (рисунок 6).

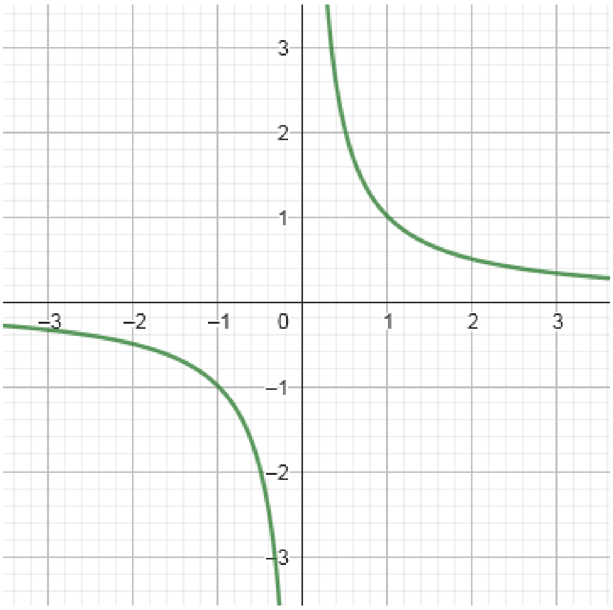

Рисунок 6 – График обратной пропорциональности

Ответ: рисунок 6.

Пример 2 ([14], № 15.37). Пусть $f(x) = -\frac{1}{x}$. Постройте график функции $y = -f\left(-\frac{1}{x}\right)$.

Решение:

Найдем $f\left(-\frac{1}{x}\right)$, выполнив подстановку:

$$f\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{-\frac{1}{x}} = x.$$

Следовательно, $y = -f\left(-\frac{1}{x}\right) = -x.$

График данной функции – прямая, являющаяся биссектрисой II и IV координатных четвертей, где $x \neq 0$ (рисунок 7).

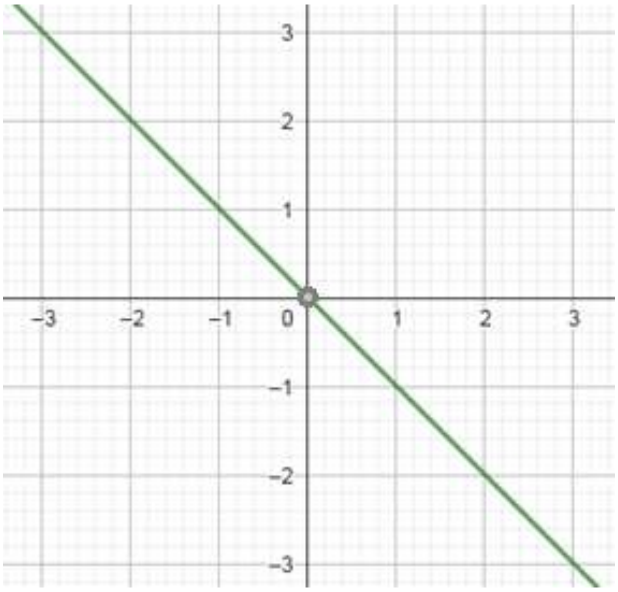

Рисунок 7 – Биссектриса II и IV координатных четвертей

Ответ: рисунок 7.

Пример 3 ([10], № 137). Постройте график функции $y = f\left(f\big(f(x)\big)\right)$, если $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Решение:

Область определения функции $f(x)$ – это все действительные числа, за исключением единицы. Далее будем выполнять последовательные подстановки и описывать область определения получившихся функций.

Значит,

$$f\big(f(x)\big) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}.$$

Область определения полученной функции состоит из всех действительных чисел, кроме 1 и 0.

И, наконец,

$$f\left(f\big(f(x)\big)\right) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = x.$$

Следовательно, рассматриваемая функция на всей области определения совпадает с функцией $y = x$.

Таким образом, графиком заданной функции является график функции $y = x$ (биссектриса I и III координатных углов), где $x \neq 0$ и $x \neq 1$ (рисунок 8).

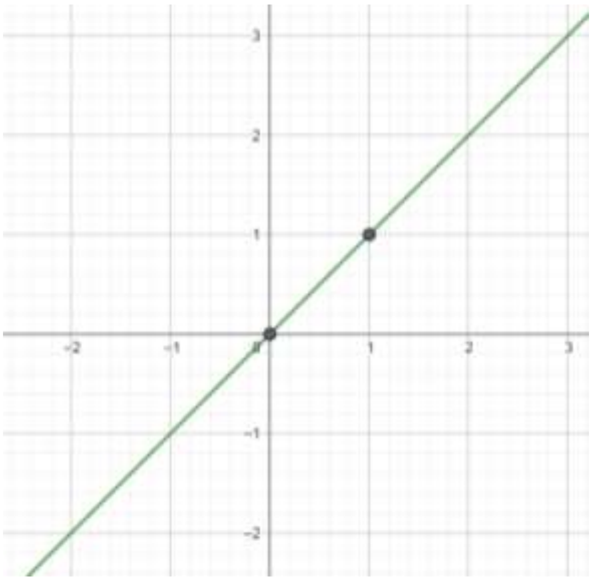

Рисунок 8 – Биссектриса I и III координатных четвертей

Ответ: рисунок 8.

Задания для самостоятельной работы:

Задание 1. Постройте график функции $y = f\left(f\left(f\big(f(x)\big)\right)\right)$, если $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

Урок № 11. Решение функциональных неравенств с помощью функциональных уравнений (1 час)

Пример 1. Решите неравенство $4f(x) + g(x) \leq 0$, если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} f(2x+1) + g(x-1) = x, \\ f(2x+1) - 2x^2 - 2g(x-1) = 0. \end{cases}$$

Решение:

Для начала, решим предложенную систему функциональных уравнений. Найдем функции $f(x)$ и $g(x)$, необходимые для решения неравенства. Для этого, умножим второе уравнение на -1 и сложим с первым:

$$\begin{cases} f(2x+1)+g(x-1)=x, \\ 2x^2+3g(x-1)=x. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения $g(x-1)$, получим $g(x-1)=\frac{x-2x^2}{3}$. Найдем $g(x)$. Для этого введем замену $t=x-1 => x=t+1$. Тогда:

$$g(t)=\frac{(t+1)-2(t+1)^2}{3}=\frac{t+1-2t^2-4t-2}{3}=\frac{-2t^2-3t-1}{3}.$$

Следовательно, $g(x)=\frac{-2x^2-3x-1}{3}$.

Вернемся к исходной системе функциональных уравнений. Умножим первое уравнение на 2 и сложим со вторым уравнением:

$$\begin{cases} 3f(2x+1)-2x^2=2x, \\ f(2x+1)-2x^2-2g(x-1)=0. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения $f(2x+1)$, получим $f(2x+1)=$ $=\frac{2x+2x^2}{3}$. Найдем $f(x)$. Для этого введем замену $s=2x+1 => x=\frac{s-1}{2}$. Тогда:

$$f(s)=\frac{2(\frac{s-1}{2})+2(\frac{s-1}{2})^2}{3}=\frac{2s-2+s^2-2s+1}{6}=\frac{s^2-1}{6}.$$

Следовательно, $f(x)=\frac{x^2-1}{6}$.

Теперь, зная $f(x)$ и $g(x)$, решим неравенство:

$$4\cdot\frac{x^2-1}{6}+\frac{-2x^2-3x-1}{3}\leq 0;$$

$$\frac{2x^2-2-2x^2-3x-1}{3}\leq 0;$$

$$\frac{-3x-3}{3}\leq 0;$$

$$-x-1\leq 0;$$

$$x\geq -1.$$

Ответ: $x\in[-1;+\infty)$.

Урок № 12. Применение теории матриц для решения функциональных уравнений (1 час)

Теоретическая справка:

Дробно-линейные выражения вида $\frac{ax+b}{cx+d}$ определяются заданием матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, составленной из коэффициентов a, b, c, d.

Имея в исходном уравнении функции с двумя различными дробно-линейными аргументами, можно составить матрицы А и В. Решая матричное уравнение $A \cdot X = B$ или $X = A^{-1} \cdot B$, определим дробно-линейное выражение, которое можно использовать для замены.

Пример 1. Найдите функцию f, определенную при х $\neq 0; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{3}; 1$ и удовлетворяющую уравнению $3f\left(\frac{x+1}{-3x+2}\right) - 5f\left(\frac{-x+1}{x-2}\right) = \frac{8}{x-1}$.

Решение:

Под знаком функции видим дробно-линейные выражения, значит, можем применить теорию матриц. Решим матричное уравнение $A \cdot X = B$, или $X = A^{-1} \cdot B$, где матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, а матрица $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Для матрицы A обратной является матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда:

$$A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

В таком случае, выполним замену x на $\frac{x}{2x-1}$. Это также удобно выполнить в матричном виде. Таким образом, получим:

$$3f\left(\frac{-x+1}{x-2}\right) - 5f\left(\frac{x-1}{-3x+2}\right) = \frac{16x-8}{-x+1}.$$

Составим систему из исходного уравнения и полученного:

$$\begin{cases} 3f\left(\frac{x+1}{-3x+2}\right) - 5f\left(\frac{-x+1}{x-2}\right) = \frac{8}{x-1}, \\ 3f\left(\frac{-x+1}{x-2}\right) - 5f\left(\frac{x-1}{-3x+2}\right) = \frac{16x-8}{-x+1}. \end{cases}$$

Решим систему, исключив из нее $f\left(\frac{x+1}{-3x+2}\right)$. Домножим первое уравнение на 5, второе на 3 и сложим их. Выразив $f\left(\frac{-x+1}{x-2}\right)$, получим $f\left(\frac{-x+1}{x-2}\right) = \frac{3x-4}{x-1}$.

Из исходного уравнения видим, что $x \neq \frac{2}{3}; 2; 1$. Подстановка сохранила эти ограничения и, кроме того, появилось условие, что $x \neq \frac{1}{2}$.

Сделаем замену $t = \frac{-x+1}{x-2} => x = \frac{2t+1}{t+1}$. Так как $x \neq \frac{2}{3}; \frac{1}{2}; 2; 1$, то $t \neq$ $\neq -\frac{1}{4}; 0; -\frac{1}{3}$. Тогда: $f(t) = \frac{3(\frac{2t+1}{t+1})-4}{(\frac{2t+1}{t+1})-1} = \frac{2t-1}{t}$, $t \neq -\frac{1}{4};\ 0; -\frac{1}{3}; -1$.

Проверка показывает, что функция $f(x) = \frac{2x-1}{x}$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $f(x) = \frac{2x-1}{x}$.

Урок № 13. Применение теории групп для решения функциональных уравнений (1 час)

Теоретическая справка:

Группа – это непустое множество G с бинарной операцией $*$ (умножение), удовлетворяющей условиям: ассоциативность, существование нейтрального элемента и существование обратного элемента.

Группа называется конечной, если множество ее элементов конечно.

Количество элементов, входящих в группу, G называют порядком группы.

Известно, что конечная группа является циклической (группа, которая может быть порождена одним элементом a, то есть все её элементы являются степенями a).

Если элементами группы являются функции, то умножение элементов для в некоторых случаях (например, для дробно-линейных) можно рассматривать как композицию функций с нейтральным элементом вида $f(x) = x$.

Для упрощения записи композиций функций можно использовать таблицу Кэли – квадратную таблицу, описывающую структуру конечной алгебраической системы и состоящую из результатов применения бинарной операции к её элементам. Таблица позволяет определить обратные элементы по отношению к другим элементам в этой группе.

Пример 1 ([9], № 1.43). Найти функцию $f(x)$ такую, что $D(f) = R$ и для любого $x \in R$ выполняется равенство

$$f(x) + 2f(-x) = x + 1.$$

Решение:

Заметим, что функции $g_1(x) = x$ и $g_2(x) = -x$ образуют группу второго порядка относительно композиции функций. Поэтому, заменив x на $-x$ получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} f(x) + 2f(-x) = x + 1, \\ f(-x) + 2f(x) = -x + 1. \end{cases}$$

Решив систему, линейную относительно неизвестных $f(x)$ и $f(-x)$, получим $f(x) = -x + \frac{1}{3}$.

Подстановка $f(x) = -x + \frac{1}{3}$ в исходное уравнение подтверждает правильность найденного решения.

Ответ: $f(x) = -x + \frac{1}{3}$.

Пример 2 ([9], № 1.45). Найти функцию $f(x)$ такую, что $D(f) = R$ и для любого $x \in R$ выполняется равенство

$$2f(x) - f(1 - x) = x + 3.$$

Решение:

Заметим, что функции $g_1(x) = x$ и $g_2(x) = 1 - x$ образуют группу второго порядка относительно композиции функций. Поэтому, заменив x на $1 - x$ получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 2f(x) - f(1 - x) = x + 3, \\ 2f(1 - x) - f(x) = -x + 4. \end{cases}$$

Решив систему, линейную относительно неизвестных $f(x)$ и $f(1 - x)$, получим $f(x) = \frac{x+10}{3}$.

Выполнив проверку, убеждаемся, что функция удовлетворяет уравнению.

Ответ: $f(x)=\frac{x+10}{3}$.

Пример 3 ([8], № 15.40). Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию

$$2f(x)+f\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{3x^2-6}{x}.$$

Решение:

Заметим, что функции $g_1(x)=x$ и $g_2(x)=-\frac{1}{x}$ образуют группу второго порядка относительно композиции функций, причем $g_2(x)$ – образующий элемент группы. Поэтому, заменив x на $-\frac{1}{x}$ получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 2f(x)+f\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{3x^2-6}{x}, \\ 2f\left(-\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{6x^2-3}{x}. \end{cases}$$

Решив систему, линейную относительно неизвестных $f(x)$ и $f\left(-\frac{1}{x}\right)$, получим $f(x)=-\frac{3}{x}$.

Подстановка $f(x)=-\frac{3}{x}$ в исходное уравнение подтверждает правильность найденного решения.

Ответ: $f(x)=-\frac{3}{x}$.

Урок № 14. Применение теории групп для решения функциональных уравнений (1 час)

Пример 1 (ВСОШ, 1994, ОЭ, № 11.6). Найдите все функции, определённые на множестве $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, удовлетворяющие соотношению

$$(x-1)\cdot f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-f(x)=x.$$

Решение:

Заметим, что функции $g_1(x) = x$ и $g_2(x) = \frac{x+1}{x-1}$ образуют группу второго порядка относительно композиции функций, причем $g_2\big(g_2(x)\big) = g_1(x)$. Поэтому, заменив x на $\frac{x+1}{x-1}$ получим уравнение $\frac{2}{x-1} \cdot f(x) - f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{x+1}{x-1}$.

Составим систему из двух линейных уравнений относительно неизвестных $f(x)$ и $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$:

$$\begin{cases} (x-1) \cdot f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x, \\ \dfrac{2}{x-1} \cdot f(x) - f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \dfrac{x+1}{x-1}. \end{cases}$$

Решив систему, получим $f(x) = 2x + 1$. Подставив в исходное соотношение, для всех допустимых x будет выполняется равенство:

$$(x-1)\left(2 \cdot \frac{x+1}{x-1} + 1\right) - (2x+1) = x.$$

Ответ: $f(x) = 2x + 1$.

Пример 2. Найти функцию $f(x)$, определенную при всех действительных $x \neq a$, $x \neq 0$ и удовлетворяющую уравнению

$$(a-x)f(x) - 2xf(a-x) = 1.$$

Решение:

Заметим, что в уравнении под знаком неизвестной функции f стоят функции $g_1 = x$ и $g_2 = a - x$. В результате замены $x = a - x$ получится уравнение, содержащее те же функции $f(x)$ и $f(a-x)$. Можно сказать, что функции g_1 и g_2 образуют группу второго порядка относительно относительно композиции функций. Составим систему:

$$\begin{cases} (a-x)f(x) - 2xf(a-x) = 1, \\ xf(a-x) - 2(a-x)f(x) = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим $f(a-x)$, подставим во второе уравнение и упростим. Получим $f(x) = \frac{1}{x-a}$.

Выполнив проверку, убеждаемся, что найденная функция удовлетворяет уравнению.

Ответ: $f(x) = \frac{1}{x-a}$.

Пример 3. Найти при $x < 0$ решение функционального уравнения

$$\ln(1-e^x)\, f(x) - 2xf(\ln(1-e^x)) = 1.$$

Решение:

Заметим, что функции $g_1(x) = x$ и $g_2(x) = \ln(1-e^x)$ образуют группу второго порядка относительно композиции функций, причем заметим, что $g_2\big(g_2(x)\big) = g_1(x)$. Поэтому, заменив x на $\ln(1-e^x)$ получим уравнение

$$xf(\ln(1-e^x)) - 2\ln(1-e^x)\, f(x) = 1.$$

Составим систему:

$$\begin{cases} \ln(1-e^x)\, f(x) - 2xf(\ln(1-e^x)) = 1, \\ xf(\ln(1-e^x)) - 2\ln(1-e^x)\, f(x) = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим $f(\ln(1-e^x))$, подставим во второе уравнение и упростим. Получим $f(x) = -\frac{1}{\ln(1-e^x)}$.

Проверка показывает, что найденная функция удовлетворяет уравнению.

Ответ: $f(x) = -\frac{1}{\ln(1-e^x)}$.

Урок № 15. Применение теории групп для решения функциональных уравнений (1 час)

Пример 1. Найти функцию $f(x)$, такую, что $x \neq a$, $x \neq 0$ и удовлетворяющую уравнению $f(x) + f\left(\frac{a^2}{a-x}\right) = x$.

Решение:

Обозначим $g_1(x) = x$, $g_2(x) = \frac{a^2}{a-x}$. Последовательно находим $g_2\big(g_2(x)\big)$, $g_2\big(g_2(g_2(x))\big)$…

Для упрощения работы с функциями удобно составить таблицу Кэли (Таблица 5).

Таблица 5 – Таблица Кэли для Урока № 15, Примера 1

$\cdot$	x	$\frac{a^2}{a-x}$	$\frac{ax-a^2}{x}$
x	x	$\frac{a^2}{a-x}$	$\frac{ax-a^2}{x}$
$\frac{a^2}{a-x}$	$\frac{a^2}{a-x}$	$\frac{ax-a^2}{x}$	x
$\frac{ax-a^2}{x}$	$\frac{ax-a^2}{x}$	x	$\frac{a^2}{a-x}$

Получим, что функции $g_1(x) = x,\ g_2(x) = \frac{a^2}{a-x},\ g_3(x) = \frac{ax-a^2}{x}$ образуют группу третьего порядка, поэтому мы получаем систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными $f(x),\ f\left(\frac{a^2}{a-x}\right), f\left(\frac{ax-a^2}{x}\right)$:

$$\begin{cases} f(x) + f\left(\dfrac{a^2}{a-x}\right) = x, \\ f\left(\dfrac{a^2}{a-x}\right) + f\left(\dfrac{ax-a^2}{x}\right) = \dfrac{a^2}{a-x}, \\ f\left(\dfrac{ax-a^2}{x}\right) + f(x) = \dfrac{ax-a^2}{x}. \end{cases}$$

Систему можно быстро решить, сложив первое и третье уравнения, и, вычитая из суммы второе уравнение. Получаем, что $f(x) = \frac{x^3-a^2x+a^3}{2x(x-a)}$.

Выполнив проверку, убеждаемся, что функция удовлетворяет уравнению.

Ответ: $f(x) = \frac{x^3-a^2x+a^3}{2x(x-a)}$.

Пример 2. Найти функцию $f(x)$, такую, что $x \neq 0,\ x \neq 1$ и удовлетворяющую уравнению $f(x) + f\left(\sqrt[n]{\frac{x^n-1}{x^n}}\right) = \sqrt[n]{1+x^n}$, где n – это нечетное число.

Решение:

Заметим, что функции $g_1(x) = x$ и $g_2(x) = \sqrt[n]{\frac{x^n-1}{x^n}}$ вместе с функцией $g_3(x) = \sqrt[n]{\frac{1}{1-x^n}}$ образуют группу третьего порядка относительно композиции функций.

Последовательно находим композиции функций $g_2(g_2(x))$, $g_2(g_2(g_2(x)))$… Таблица Кэли здесь имеет вид (Таблица 6):

Таблица 6 – Таблица Кэли для Урока № 15, Примера 2

$\cdot$	x	$\sqrt[n]{\frac{x^n-1}{x^n}}$	$\sqrt[n]{\frac{1}{1-x^n}}$
x	x	$\sqrt[n]{\frac{x^n-1}{x^n}}$	$\sqrt[n]{\frac{1}{1-x^n}}$
$\sqrt[n]{\frac{x^n-1}{x^n}}$	$\sqrt[n]{\frac{x^n-1}{x^n}}$	$\sqrt[n]{\frac{1}{1-x^n}}$	x
$\sqrt[n]{\frac{1}{1-x^n}}$	$\sqrt[n]{\frac{1}{1-x^n}}$	x	$\sqrt[n]{\frac{x^n-1}{x^n}}$

Получим систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными $f(x)$, $f\left(\sqrt[n]{\frac{x^n-1}{x^n}}\right)$, $f\left(\sqrt[n]{\frac{1}{1-x^n}}\right)$:

$$\begin{cases} f(x) + f\left(\sqrt[n]{\dfrac{x^n-1}{x^n}}\right) = \sqrt[n]{1+x^n}, \\ f\left(\sqrt[n]{\dfrac{x^n-1}{x^n}}\right) + f\left(\sqrt[n]{\dfrac{1}{1-x^n}}\right) = \sqrt[n]{\dfrac{2x^n-1}{x^n}}, \\ f\left(\sqrt[n]{\dfrac{1}{1-x^n}}\right) + f(x) = \sqrt[n]{\dfrac{2-x^n}{1-x^n}}. \end{cases}$$

Систему можно быстро решить, вычитая из первого уравнения второе, и, складывая разность со вторым уравнением. Отсюда:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{1+x^n} + \sqrt[n]{\frac{2-x^n}{1-x^n}} - \sqrt[n]{\frac{2x^n-1}{x^n}}\right).$$

Проверка показывает, что найденная функция удовлетворяет уравнению.

Ответ: $f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{1+x^n} + \sqrt[n]{\frac{2-x^n}{1-x^n}} - \sqrt[n]{\frac{2x^n-1}{x^n}}\right)$.

Урок № 16. Применение теории групп для решения функциональных уравнений (1 час)

Рассмотрим также пример функционального уравнения, где под знаком неизвестной функции, помимо выражений, зависящих от x, стоят константы.

Пример 1. Решить уравнение $2f(x) + f(1-x) = 3 - xf(1)$.

Решение:

Чтобы упростить выражение и не рассматривать 1, как функцию, тождественно равную константе, выполним подстановку $x = 1$. Заметим, что под знаком неизвестной функции появился 0. Выполним подстановку $x = 0$ и составим систему из двух получившихся уравнений:

$$\begin{cases} 2f(0) + f(1) = 3, \\ 2f(1) + f(0) + f(1) = 3. \end{cases}$$

Решив систему, получим $f(1) = \frac{3}{5}$. Теперь значение функции в единице можем подставить в исходное выражение, получив уже известный нам вид функционального уравнения:

$$2f(x) + f(1-x) = 3 - \frac{3}{5}x.$$

Обозначим $g_1(x) = x$, $g_2(x) = 1 - x$. Последовательно находим $g_2(g_2(x))$, $g_2(g_2(g_2(x)))$…

Таблица умножения, или же таблица Кэли, в данном случае имеет вид (Таблица 7):

Таблица 7 – Таблица Кэли для Урока № 16, Примера 1

$\cdot$	x	$1-x$
x	x	$1-x$
$1-x$	$1-x$	x

Из таблицы видно, что функции $g_1(x) = x,\ g_2(x) = 1 - x$ образуют группу второго порядка относительно композиции функций.

Получаем систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными $f(x),\ f(1-x)$:

$$\begin{cases} 2f(x) + f(1-x) + xf(1) = 3, \\ 2f(1-x) + f(x) + (1-x)f(1) = 3. \end{cases}$$

Выразив из первого уравнения $f(1-x)$ и подставив получившееся выражение во второе уравнение, найдем $f(x) = \frac{6-3x}{5}$.

Проверка показывает, что найденная функция удовлетворяет уравнению.

Ответ: $f(x) = \frac{6-3x}{5}$.

Рассмотрим также решение функционального уравнения с применением определителей матрицы.

Пример 2 ([4], упражнение 13). Найдите функцию, которая для всех $x \neq 0, x \neq 1$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{x}f(x) + xf\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1.$$

Решение:

Обозначим $g_1(x) = x,\quad g_2(x) = \frac{1}{1-x}$. Последовательно находим $g_2\big(g_2(x)\big), g_2\big(g_2(g_2(x))\big)\ldots$

Таблица умножения, или же таблица Кэли, в данном случае имеет вид (см. Таблицу 8):

Таблица 8 – Таблица Кэли для Урока № 16, Примера 2

$\cdot$	x	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x-1}{x}$
x	x	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x-1}{x}$
$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x-1}{x}$	x
$\frac{x-1}{x}$	$\frac{x-1}{x}$	x	$\frac{1}{1-x}$

Из таблицы видно, что функции $g_1(x) = x,\ g_2(x) = \frac{1}{1-x}$ и $g_3(x) = \frac{x-1}{x}$ образуют группу третьего порядка относительно композиции функций.

Получаем систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными $f(x),\ f\left(\frac{1}{1-x}\right), f\left(\frac{x-1}{x}\right)$:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}f(x) + xf\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1, \\ (1-x)f\left(\frac{1}{1-x}\right) + \frac{1}{1-x}f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1, \\ \left(1-\frac{1}{x}\right)f(x) - \frac{x}{1-x}f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1. \end{cases}$$

Нам нужно найти только значение $f(x)$, поэтому применим правило Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & x & 0 \\ 0 & 1-x & \frac{1}{1-x} \\ 1-\frac{1}{x} & 0 & -\frac{x}{1-x} \end{vmatrix} = -2;$$

$$\Delta_{f(x)} = \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & 1-x & \frac{1}{1-x} \\ 1 & 0 & -\frac{x}{1-x} \end{vmatrix} = \frac{2x^2}{1-x}.$$

Тогда $f(x) = \frac{\Delta_{f(x)}}{\Delta}$, а именно $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

Проверка показывает, что найденная функция удовлетворяет уравнению.

Ответ: $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

Урок № 17. Подведение итогов курса (1 час)

Контрольная работа:

Задание 1 ([15], № 1.46). Дана функция $f(x)=x^2+2x$. Решите уравнение $f\left(f\big(f(x)\big)\right)=0$.

Задание 2. Решить уравнение $f\big(x+f(y)\big)=x+y$, используя значения функций в некоторых точках.

Задание 3 ([15], № 1.44). Найти функцию $f(x)$ такую, что $D(f)\in$ $\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, и для любого $x\in D(f)$ выполняется равенство

$$f(x)-3f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\frac{1}{x}.$$

Задание 4 ([15], № 1.42). Дана функция $f(x)=\frac{1}{1-x}$. Постройте график функции $y=f\left(f\big(f(x)\big)\right)$.

Задание 5. Применив знания о теории групп, найдите все функции, удовлетворяющие соотношению

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x.$$

Выводы по главе 2

Поскольку задачи, связанные с решением функциональных уравнений, относятся к числу наиболее сложных задач школьной математики, тема «Функциональные уравнения» зачастую вовсе не рассматривается в курсе школьной математики на базовом уровне. На углубленном уровне функциональные уравнения, как таковые, не отражены в календарно-тематических планированиях по математике разных авторов. Тем не менее, в контексте определенных глав, связанных с функцией и ее свойствами, в учебниках основной и старшей школы могут встречаться задачи на функциональные уравнения. Кроме того, подходящие задания можно найти в сборниках задач повышенной трудности в курсе школьной алгебры.

Нами были рассмотрены некоторые учебные пособия по математике, в которых нам встретились задачи, связанные с решением функциональных уравнений. Кроме того, на наличие функциональных уравнений были отсмотрены олимпиады школьного и ВУЗовского уровня. Найденные примеры стали основой для курса внеурочной деятельности школьников. Кроме того, в курс были включены примеры из пособий ВУЗовского уровня, а также примеры, разработанные нами самостоятельно по аналогии с изученными.

Разработанный нами курс внеурочной деятельности «Решение функциональных уравнений различными методами» предназначен для обучающихся средней школы, а именно 10-ых и 11-ых классов. Данный курс расширяет представление о понятии функции и ее свойствах, позволяет отточить навыки решения нестандартных уравнений. Рекомендован обучающимся, осваивающим школьный курс математики на повышенном (углубленном) уровне, что связано с повышенной сложностью рассматриваемых задач.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В выпускной квалификационной работе были изучены и проанализированы методические особенности обучения решению функциональных уравнений обучающихся средней школы в рамках внеурочной деятельности по математике. Для этого был рассмотрен теоретический материал о роли ВУД обучающихся в учебно-воспитательном процессе и ее видах по ФГОС. Особое внимание было уделено организации внеурочной деятельности по математике, а в качестве подходящего варианта организации ВУД выбраны занятия, способствующие развитию интереса школьников к углублению знаний в данной дисциплине (по Ю.М. Колягину).

Были определены основные понятия, связанные с функциональными уравнениями, а также история их развития и методы решений. Выявлено, что в настоящее время компьютерные программы и приложения не способны полноценно решать разнообразные функциональные уравнения. Поэтому решение таких задач классическими методами математического анализа является, по-видимому, единственно возможным и грамотным, а обучение школьников таким методом – актуальным, в связи с регулярным включением заданий по функциональным уравнениям в математические олимпиады различных уровней и вступительные испытания технических ВУЗов.

Было также обнаружено, что задания, связанные с решением функциональных уравнений, можно найти во всероссийских проверочных работах по математике базового уровня, а также в вариантах единого государственного экзамена по математике профильного уровня. Поскольку участниками олимпиад становятся лишь некоторые обучающиеся школы, проявляющие повышенный интерес к предмету и обладающие большим количеством специальных знаний, а написать ВПР и ЕГЭ по математике будет необходимо каждому ребенку, в работе педагогов повышается актуальность рассмотренных заданий, а также необходимость изучения задач и методов, связанных с функциональными уравнениями.

На основе анализа учебных пособий, материалов олимпиад, ВПР и ЕГЭ по математике на наличие задач, связанных с функциональными уравнениями, был разработан курс внеурочной деятельности для обучающихся средней школы «Функциональные уравнения и методы их решения». Курс расширяет представление о понятии функции и ее свойствах, позволяет отточить навыки решения нестандартных уравнений; формирует представления обучающихся средней школы о функциональных уравнениях, их роли в науке, истории возникновения и различных методах их решения.

Программа курса рекомендуется обучающимся, осваивающим школьный курс математики на повышенном (углубленном) уровне и активно участвующим в олимпиадной деятельности, что связано с повышенной сложностью рассматриваемых задач. Курс предусматривает использование лекционно-практической системы. Для текущего контроля на занятиях для обучающихся разработана серия заданий, часть которых выполняется в классе совместно с учителем, а часть является домашней работой и выполняется самостоятельно.

Кроме того, в качестве методического сопровождения для курса внеурочной деятельности «Функциональные уравнения и методы их решения» для обучающихся средней школы нами была разработана презентация к уроку № 1 и технологическая карта урока к уроку № 2.

Таким образом, поставленные задачи были решены, а цель выпускной квалификационной работы достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Андреев, А. А.** Функциональные уравнения / А.А. Андреев, Ю.Н. Кузьмин, А.Н. Савин. – Самара : В мире науки, 1999. – 46 с.
2. **Андреева, Д.А.** Применение понятий теории групп к решению функциональных уравнений / Д.А. Андреева // Сборник научных статей 6-й Международной научной конференции перспективных разработок молодых ученых, в 5-х томах. – 2021. – Т. 4. – С. 11–15.
3. **Андреева, Д.А.** Формирование цифровых компетенций школьников при изучении свойств графиков элементарных функций / Д.А. Андреева // Вестник совета молодых ученых и специалистов Челябинской области. – 2021. – Т. 1, № 3 (34). – С. 51–55.
4. **Блюмин, С. Л.** Класс уравнений типа Коши / С.Л. Блюмин // Научный журнал "Фундаментальные исследования". Российская Академия Естествознания. – 2008. – № 2. – С. 84–85.
5. **Бродский, Я. С.** Функциональные уравнения / Я.С. Бродский, А.К. Слипенко. – Киев : Вища школа. Головное издательство, 1983. – 96 с.
6. **Григорьева, И. С.** Понятие «функция» в задачах / И.С. Григорьева // Математика в высшем образовании. – 2021. – № 19. – С. 57–72.
7. **Дербуш, М. В.** Организация внеурочной деятельности по математике в парадигме смешанного обучения / М.В. Дербуш, С.Н. Скарбич // Вестник Сибирского института бизнеса и информационных технологий. – 2022. – № 3. – С. 19–28.
8. **Ильин, В. А.** Итерационные методы решения функциональных уравнений / В.А. Ильин // Соросовский образовательный журнал. – 2001. – Т. 7, № 2. – С. 116–120.
9. **Колягин, Ю. М.** Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики / Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, Е.Л. Мокрушин. – Москва : Просвещение, – 1977. – 491 с.

10. **Кострикина, Н. П.** Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7-9 классов: книга для учителя / Н.П. Кострикина. – Москва : Просвещение, 1991. – 240 с.

11. **Латотин, Л. А.** Учебное пособие для 11 класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / Л.А. Латотин, Б.Д. Чеботаревский ; перевод с белорус. яз. И.П. Ефременко. – Минск : Нар. Асвета, 2013. – 462 с.

12. **Лихтарников, Л. М.** Элементарное введение в функциональные уравнения / Л.М. Лихтарников. – Санкт-Петербург : Лань, 1997. – 160 с.

13. **Мартынова, Е. В.** Формирование проектных умений бакалавров педагогического образования при изучении профильных математических дисциплин / Е.В. Мартынова, Р.М. Нигматулин, С.А. Севостьянова // Актуальные проблемы модернизации математического и естественно-научного образования. Сборник научных трудов по материалам Всероссийской научно-методической конференции. – Саратов : Издательство "Саратовский источник". – 2018. – С. 36–38.

14. **Мерзляк, А. Г.** Алгебра: 8 класс, учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков. – Москва : Вентана-Граф, 2017. – 384 с.

15. **Мерзляк, А. Г.** Алгебра: 9 класс, учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков. – Москва : Вентана-Граф, 2019. – 399 с.

16. **Мордкович, А. Г.** Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович // под редакцией А.Г. Мордковича. – 6-е изд., стер. – Москва : Мнемозина, 2009. – 343 с.

17. **Письмо Минобрнауки России от 18 августа 2017 г. № 09-1672 «О направлении Методических рекомендаций по уточнению понятия и содержания внеурочной деятельности в рамках реализации основных**

общеобразовательных программ, в том числе в части проектной деятельности» : 18.08.2017 г. – Москва, 2017, 11 с.

18. **Приказ Министерства просвещения РФ от 17 мая 2012 г. № 431 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования»** : принят 17.05.2012 г. – Москва, 2012, 126 с.

19. **Просветов, Г. И.** Функциональные уравнения: задачи и решения: учебно-практическое пособие / Г. И. Просветов. – Москва : Альфа-Пресс, 2010. – 47 с.

20. **Рубинштейн, А. И.** Методы решения функциональных уравнений / А.И. Рубинштейн // Лесной вестник. Математика. – 2012. – № 3. – С. 155–159.

21. **Рурукин, А. Н.** Сборник задач по алгебре. 7 класс / А.Н. Рурукин, Н.Н. Гусева, Е.А. Шуваева. – Москва : Вако, 2016. – 78 с.

22. **Салангина, Н. Я.** Классификация форм внеурочной деятельности / Н. Я. Салангина // Вестник Московского государственного университета культуры и искусств. – 2011. – № 3(41). – С. 231–235.

23. **Сефибеков, С. Р.** Внеклассная работа по математике / С. Р. Сефибеков. – Москва : Просвещение, 1988. – 572 с.

24. **Смышляев, В. К.** Практикум по решению задач школьной математики: учебное пособие / В.К. Смышляев. – Москва : Просвещение, 1978. – 96 с.

25. **Фалин, Г.** Функциональные уравнения и неравенства / Г. Фалин, А. Фалин // КВАНТ. – 2006. – № 5. – С. 38–47.

26. **Фалин, Г.** Функциональные уравнения и неравенства / Г. Фалин, А. Фалин // КВАНТ. – 2006. – № 6. – С. 34–40.

27. **Федеральный закон от 29 декабря 2012 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации»** (редакция от 29.07.2017). – Москва, 2017. – Текст : электронный.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Презентация к Уроку № 1 «Понятие функционального уравнения и историческая справка»

Рассмотрим презентацию к Уроку № 1, раскрывающую теоретический материал и знакомящую обучающих с темой (рисунки А.1-А.27).

Рисунок А.1 – Слайд 1

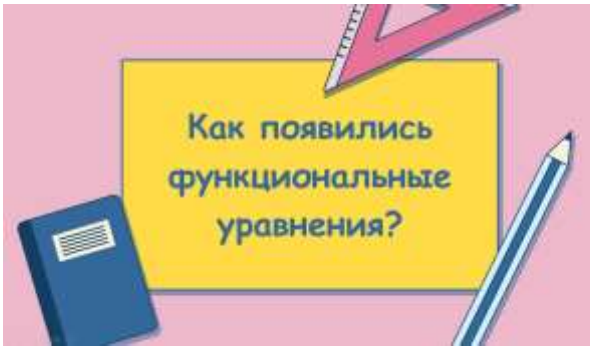

Рисунок А.2 – Слайд 2

Рисунок А.3 – Слайд 3

Рисунок А.4 – Слайд 4

Рисунок А.5 – Слайд 5

Рисунок А.6 – Слайд 6

Рисунок А.7 – Слайд 7

Рисунок А.8 – Слайд 8

Рисунок А.9 – Слайд 9

Рисунок А.10 – Слайд 10

Рисунок А.11 – Слайд 11

Рисунок А.12 – Слайд 12

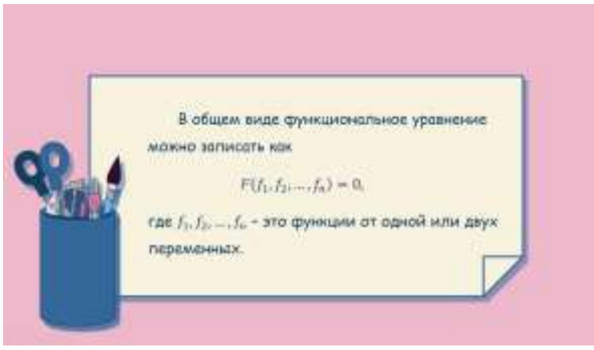

Рисунок А.13 – Слайд 13

Рисунок А.14 – Слайд 14

Рисунок А.15 – Слайд 15

Рисунок А.16 – Слайд 16

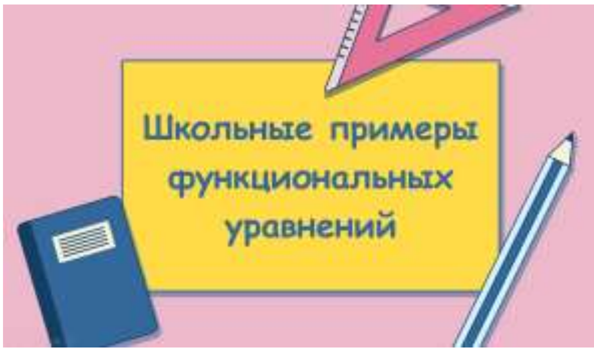

Рисунок А.17 – Слайд 17

Рисунок А.18 – Слайд 18

Рисунок А.19 – Слайд 19

Рисунок А.20 – Слайд 20

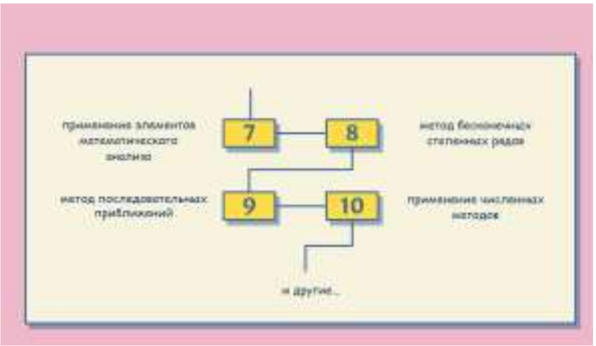

Рисунок А.21 – Слайд 21

Рисунок А.22 – Слайд 22

Рисунок А.23 – Слайд 23

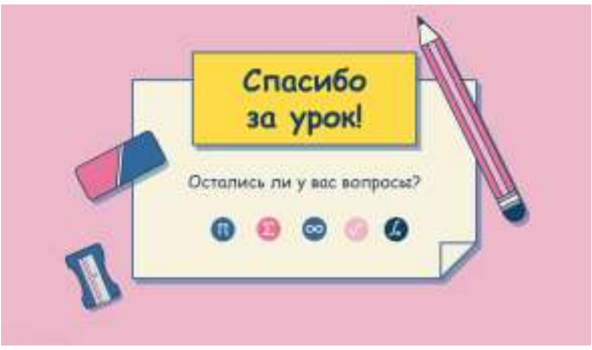

Рисунок А.24 – Слайд 24

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ТКУ к Уроку № 2 «Простейшие функциональные уравнения»

Рассмотрим основную информацию об уроке № 2 «Простейшие функциональные уравнения» (Таблица Б.1).

Таблица Б.1 – Основная информация о технологической карте урока

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА УРОКА	
Автор	Андреева Д.А.
Учебный предмет	Математика
Класс	10-11
Учебно-методический комплекс	Курс внеурочной деятельности для обучающихся средней школы «Функциональные уравнения и методы их решения»
Тема урока	Простейшие функциональные уравнения
Место данного урока в системе	Урок № 2 в тематическом планировании курса ВУД «Функциональные уравнения и методы их решения» *Первый урок в рамках изучения данной темы*
Тип урока	Урок отработки умений и рефлексии
Формы работы	Фронтальная, индивидуальная
Цель	Познакомиться с простейшими функциональными уравнениями и методами их решения
Планируемые результаты	1. *Личностные результаты*. Л1 – концентрация внимания; Л2 – понимание математической науки как сферы человеческой деятельности, овладение языком математики и математической культурой как средством познания мира. 2. *Метапредметные результаты*. Р1 – формулировать тему и цель урока в соответствии с задачами и нормами русского языка; Р2 – организовывать рабочее место, настраиваться на предстоящую учебную деятельность; Р3 – владеть способами самоконтроля и рефлексии, давать оценку приобретённому опыту; П1 – проводить самостоятельно доказательства математических утверждений, выстраивать аргументацию, обосновывать собственные суждения и выводы; П2 – выбирать способ решения учебной задачи (сравнивать несколько вариантов решения, выбирать наиболее подходящий с учётом самостоятельно выделенных критериев); К1 – ясно, точно, грамотно выражать свою точку зрения в устных и письменных текстах, давать пояснения по ходу решения задачи, комментировать полученный результат; К2 – слушать других участников диалога и вступать в диалог, аргументировать свое мнение.

Продолжение таблицы Б.1

	3. *Предметные результаты.* Пр1 – свободно оперировать понятиями: тождество, уравнение, неравенство; Пр2 – свободно оперировать понятиями: функция, функциональное уравнение, решение функционального уравнения; Пр3 – применять различные методы решения функциональных уравнений.
Методы	Объяснение, эвристическая беседа, практикум по решению задач
Опорные понятия	Функциональное уравнение, решение функционального уравнения, монотонность функции, возрастание и убывание функции, уравнение, неравенство
Новые понятия	-
Способы контроля	Устный опрос, проверка решения практических задач
Этапы урока	1) организационный момент (1 мин.); 2) актуализация знаний и мотивация к учебной деятельности (2 мин.); 3) пробное учебное действие и фиксирование затруднений (3 мин.); 4) построение проекта выхода из затруднения (1 мин.); 5) постановка темы и цели урока (1 мин.); 6) реализация построенного проекта (25 мин.); 7) самостоятельная работа с самопроверкой по эталону (10 мин.); 8) постановка домашнего задания (1 мин.); 9) рефлексия (1 мин.).

Рассмотрим подробное описание хода урока № 2 «Простейшие функциональные уравнения» (Таблица Б.2).

Таблица Б.2 – Описание хода урока

Ход урока				
Деятельность учителя	***Деятельность учащихся***	***Планируемые результаты***		***Приме-чание***
		Предм.	***УУД***	
1	*2*	*3*	*4*	*5*
Этап 1. Организационный момент (время – 1 мин.)				
Приветствует учеников.	Приветствуют учителя.	-	Р2	-
Проверяет готовность класса к уроку.	Проверяют готовность к уроку, устраняют недостатки.			
Настраивает учеников на работу.	Настраиваются на урок.			

Продолжение таблицы Б.2

1	2	3	4	5
Этап 2. Актуализация знаний и мотивация к учебной деятельности (время – 2 мин.)				
Организует связь с ранее пройденным учебным материалом.	Внимательно слушают.	Пр2	Л1; Л2; К1; К2	-
В диалоге подводит к припоминанию понятия функционального уравнения, методов их решения и плана курса ВУД.	Вступают в диалог и формулируют понятие функционального уравнения, оговоренные методы решения и план курса ВУД.			
Этап 3. Пробное учебное действие и фиксирование затруднений (время – 3 мин.)				
Предлагает рассмотреть первый пример.	Внимательно изучают пример и формулировку задания.	Пр1; Пр2	Л1; П1; П2; К1; К2	Пример 1
Сообщает о том, что у учеников есть 1-2 минуты на формулировку идей и способов решения данного примера.	В течение установленного времени пытаются сформулировать собственные идеи решения примера на основе математических знаний.			
Проводит обсуждение и узнает о способах решения примера.	По поднятой руке предлагают алгоритм решения примера, приводя в качестве аргументов математические теоремы или законы.			
Спрашивает, какие затруднения возникли в процессе формулировки алгоритма решения примера. Узнает, на каком этапе ученики зашли в тупик.	По поднятой руке формулируют возникшие трудности.			

Продолжение таблицы Б.2

1	2	3	4	5
Этап 4. Построение проекта выхода из затруднения (время – 1 мин.)				
Сообщает о том, что предложенный пример является простейшим функциональным уравнением, а для его решения не требуются специализированные навыки.	Внимательно слушают.	-	Л1; Л2	-
Предлагает в рамках урока вспомнить основные математические определения, теоремы и законы, изученные учениками ранее на уроках математики. А после – применить их для решения простейших функциональных уравнений.	Внимательно слушают.			
Этап 5. Постановка темы и цели урока (время – 1 мин.)				
Предлагает обучающимся записать число, «Классная работа» и тему урока: «Простейшие функциональные уравнения».	Делают необходимые записи в тетради.	-	Р1; К1; К2	-
Предлагает обучающимся сформулировать цель урока.	Формулируют цель урока и высказывают предположения по поднятой руке. Например: 1. Познакомиться с простейшими функциональными уравнениями. 2. Научиться решать простейшие функциональные уравнения.			

Продолжение таблицы Б.2

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th></tr>
<tr><td>Обобщив предположения учащихся, формулирует цель урока: «Познакомиться с простейшими функциональными уравнениями и методами их решения».</td><td>Внимательно слушают.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">Этап 6. Реализация построенного проекта (время – 25 мин.)</td></tr>
<tr><td>Предлагает вспомнить основные понятия и теоретические положения темы:
– функция;
– монотонность функции;
– возрастание и убывание функции.</td><td>Участвуют в обсуждении материала, называя по поднятой руке необходимые определения и математические законы.
Делают записи забытого материала в тетрадь.</td><td rowspan="4">Пр1;
Пр2;
Пр3</td><td rowspan="4">Л1;
П1;
П2;
К1;
К2</td><td rowspan="4">Пример 1</td></tr>
<tr><td>Предлагает обратить внимание на условие задачи. Спрашивает, какая важная информация о поведении функции в нем представлена.</td><td>Внимательно читают условие задачи и сообщают, что данная функция возрастает на всей области определения.</td></tr>
<tr><td>Формулирует правило: «если функция монотонна на некотором промежутке, то каждое свое значение она принимает в единственной точке».</td><td>Внимательно слушают.
Делают записи в тетрадь.</td></tr>
<tr><td>Сообщает о том, что в случае монотонности исходной функции мы можем перейти к равенству между аргументами. Спрашивает, что мы получим в данной ситуации.</td><td>Внимательно слушают.
По поднятой руке отвечают, что полученное тождество – это квадратное уравнение.</td></tr>
</table>

Продолжение таблицы Б.2

1	2	3	4	5
Предлагает найти корни полученного квадратного уравнения известным способом. Обобщив ответы обучающихся, демонстрирует на доске решение и грамотное оформление.	Находят корни квадратного уравнения. Сообщают ответ.			
Предлагает по аналогии с примером под буквой «а» решить пример «б». Акцентирует внимание на том, что под буквой «б» представлено неравенство. Спрашивает, какие изменения это может повлечь в процессе решения.	Внимательно изучают формулировку задания. Отвечают, на что необходимо обратить внимание: 1) сохранится или изменится знак неравенства при переходе к аргументам функций; 2) грамотное нахождение решения неравенства.			
Вызывает ученика к доске для решения примера под буквой «б».	Решает пример под буквой «б» по аналогии с предыдущим. Аргументирует каждый этап решения, основываясь на математических знаниях.			
Предлагает по аналогии самостоятельно решить пример 2.	Самостоятельно решают пример. По поднятой руке делятся ходом своего решения и полученным ответом. При необходимости, задают возникшие вопросы.			Пример 2
Предлагает рассмотреть пример 3. Сообщает о том, что это несколько иной вид простейших функциональных уравнений.	Внимательно изучают формулировку задания.			Пример 3

Продолжение таблицы Б.2

1	*2*	*3*	*4*	*5*
Сообщает о том, что такие задания решаются при помощи подстановки.	Внимательно слушают.			
Демонстрирует на доске решение и грамотное оформление примера 3.	Внимательно слушают. Делают записи в тетради.			
По очереди вызывает для решения примера 4 четырех учеников к доске (на каждую букву «а»-«г» примера по одному ученику). Контролирует верное и грамотное оформление решения.	Ученики, которых вызвали к доске, записывают решение своей буквы. Устно аргументируют каждый этап решения. Внимательно следят за ходом решения примера на доске. Делают записи в тетради. При необходимости, задают возникшие вопросы.			Пример 4
Этап 7. Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону (10 мин.)				
Предлагает ученикам проверить, насколько хорошо они усвоили изученный материал, выполнив небольшую самостоятельную работу. Сообщает о том, что для качественного выполнения работы необходимо придерживаться плана.	Настраиваются на выполнение самостоятельной работы в соответствии с указанными учителем особенностями ее выполнения.	Пр1; Пр2; Пр3	Л1; П1; П2; К1; К2	
Объясняет ход и требования к выполнению практической работы: 1) для выполнения работы необходимо решить пример 5 под буквами «а» и «б»;	Внимательно слушают план выполнения работы. Задают уточняющие вопросы по необходимости.			Пример 5

Продолжение таблицы Б.2

1	*2*	*3*	*4*	*5*
2) первую часть решения необходимо сделать по аналогии с изученным материалом; 3) для получения ответа необходимо выполнить также дополнительное действие; 4) время выполнения – 8 минут; 5) после истечения времени, пример будет обсужден, а решение вынесено на доску.				
Объявляет начало выполнения самостоятельной работы.	Выполняют самостоятельную работу. Размышляют о том, как верно завершить решение примера.			
Обсуждает с учениками ход выполнения самостоятельной работы, сделанные записи и итоговые ответы. При обнаружении ошибок или недочетов спрашивает альтернативное мнение выполнения задания у обучающихся. Обобщает предложения и формулирует ответ.	По поднятой руке делятся своими вариантами решения примера и итоговым ответом. Сообщают о том, как необходимо было учесть условие о равенстве композиции функций конкретному числу. Задают возникшие вопросы.			
Этап 8. Постановка домашнего задания (время – 1 мин.)				
Сообщает на том, что следующий урок будет посвящен рассмотрению других типов простейших функциональных уравнений.	Внимательно слушают.	-	Л1	

Продолжение таблицы Б.2

1	*2*	*3*	*4*	*5*
Предлагает в качестве домашнего задания закрепить изученный материал и выполнить задание 1-2.	Записывают домашнее задание.			Задание 1; Задание 2
Этап 9. Рефлексия (время – 1 мин.)				
Предлагает ученикам оценить урок, приобретенные знания и свою деятельность в рамках урока.	Делятся впечатлениями о прошедшем уроке.	-	Р3; К1; К2	-
Благодарит за урок, прощается и желает хорошего дня.	Благодарят за урок, прощаются и желают хорошего дня.			