



МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ» (ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

**Методика использования тестовых средств  
контроля знаний при изучении темы «Векторы» в  
школьном курсе геометрии**

**Выпускная квалификационная работа по направлению  
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями  
подготовки)**



**Направленность программы бакалавриата**

«Математика. Информатика»

**Форма обучения очная**

Проверка на объем заимствований:  
63,47 % авторского текста  
Работа рекомендована к защите  
рекомендована/не рекомендована  
«13» июня 2024 г.  
зав. кафедрой математики и МОМ

 Звягин К. А.

Выполнил (а):  
Студент (ка) группы ОФ-513/204-5-1   
Тиунова Дарья Денисовна  
Научный руководитель:  
к. ф. -м.н.,  
доцент кафедры МиМОМ  
 Шарафутдинова А. М.

Челябинск

2024

## Содержание

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕСТОВЫХ СРЕДСТВ КОНТРОЛЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ВЕКТОРЫ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ.....	6
1.1 Требования ФГОС к результатам изучения темы «Векторы» в школьном курсе геометрии .....	6
1.3 Теоретические аспекты применения тестовых средств контроля знаний учащихся .....	11
Выводы по 1 главе .....	16
ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОРГАНИЗАЦИИ ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЯ ПО ТЕМЕ «ВЕКТОРЫ».....	17
2.1 Сравнительный анализ изложения темы «Векторы» в учебно- методических комплексах школьного курса геометрии.....	17
2.2 Классификация задач по теме «Векторы» в заданиях Единого Государственного Экзамена.....	25
2.3 Методические материалы для организации тестового контроля по теме «Векторы» .....	28
2.3.1 Тест «Понятие вектора. Равенство векторов. Откладывание вектора от точки» .....	28
2.3.2 Тест «Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число» .....	33
2.3.3 Итоговый тест по теме «Векторы».....	42
2.4 Создание интерактивного тестирования в Geogebra.....	45
Выводы по 2 главе .....	50
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	52
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	53

ПРИЛОЖЕНИЕ А .....	55
Материалы к тесту 1 .....	55
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	58
Материалы к тесту 2 .....	58
ПРИЛОЖЕНИЕ В. ....	63
Материалы к тесту 3 .....	63

## ВВЕДЕНИЕ

В современном образовании тестовая технология является одной из наиболее рациональных и практичных форм контроля знаний, умений и навыков обучающихся. Тест позволяет диагностировать усвоение достаточно объемного материала каждым учащимся малыми дозами, при этом охватив большое число учащихся. Данная форма контроля усвоения знаний также исключает субъективизм со стороны педагога, дает возможность автоматизировать обработку результатов. У учащихся формируются навыки организованности, дисциплины.

Понятие вектора является одним из базовых понятий в школьном курсе геометрии и имеет широкое применение при решении геометрических, а также физических задач, доказательствах теорем. Вместе с тем большинство учащихся имеют довольно скудные знания по данному разделу, о чем свидетельствуют результаты Единого Государственного Экзамена по математике профильного уровня (далее – ЕГЭ). Только 0,4 % и 3 % учащихся успешно выполнили задания № 13 и № 16 соответственно. Данные задания проверяют умение учащихся выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами. Также стоит отметить, что с 2024 года в часть заданий с кратким ответом было введено задание, проверяющее знания по теме «Векторы».

Вышесказанное обуславливает актуальность выбранной темы выпускной квалификационной работы.

**Объект исследования** – процесс обучения математике в основной школе.

**Предмет исследования** – методика применения тестовых средств контроля в школьном курсе геометрии.

**Цель исследования** – рассмотреть методические особенности применения тестовых средств контроля при изучении темы «Векторы».

### **Задачи исследования:**

1. Рассмотреть подходы к определению понятия вектора в школьном курсе геометрии.
2. Проанализировать изложение темы «Векторы» в школьных учебниках Атанасяна Л. С., Погорелова А. В., Мерзляка А. Г. с целью определения учебного материала, подлежащего контролю.
3. Представить типы и разновидности тестовых форм контроля, определить их достоинства и недостатки.
4. Разработать тестовые материалы контроля знаний по теме «Векторы», в том числе с использованием электронных образовательных ресурсов, и апробировать их на учащихся.

**Гипотеза исследования:** использование тестовых форм контроля знаний при изучении темы «Векторы» будет способствовать формированию у обучающихся необходимых навыков работы с тестовыми заданиями, и, как следствие, повышению качества подготовки к ГИА.

# ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕСТОВЫХ СРЕДСТВ КОНТРОЛЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ВЕКТОРЫ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

1.1 Требования ФГОС к результатам изучения темы «Векторы» в школьном курсе геометрии

Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (далее – ФГОС ООО) представляет собой совокупность требований, обязательных при реализации основной образовательной программы основного общего образования.

Стандарт устанавливает требования к результатам освоения обучающимися основной общеобразовательной программы основного общего образования:

– *личностным*, включающим готовность и способность обучающихся к саморазвитию и личностному самоопределению, сформированность их мотивации к обучению и целенаправленной познавательной деятельности, системы значимых социальных и межличностных отношений, ценностно-смысловых установок, отражающих личностные и гражданские позиции в деятельности, социальные компетенции, правосознание, способность ставить цели и строить жизненные планы, способность к осознанию российской идентичности в поликультурном социуме;

– *метапредметным*, включающим освоенные обучающимися межпредметные понятия и универсальные учебные действия (регулятивные, познавательные, коммуникативные), способность их использования в учебной, познавательной и социальной практике, самостоятельность планирования и осуществления учебной деятельности и организации учебного сотрудничества с педагогами и сверстниками, построение индивидуальной образовательной траектории;

предметным, включающим освоенные обучающимися в ходе изучения

учебного предмета умения, специфические для данной предметной области, виды деятельности по получению нового знания в рамках учебного предмета, его преобразованию и применению в учебных, учебно-проектных и социально-проектных ситуациях, формирование научного типа мышления, научных представлений о ключевых теориях, типах и видах отношений, владение научной терминологией, ключевыми понятиями, методами и приемами [17].

Математическое образование является обязательной и неотъемлемой частью общего образования на всех ступенях школы. Без базовой математической подготовки невозможно стать образованным современным человеком. В школе математика служит опорным предметом для изучения смежных дисциплин. В послешкольной жизни реальной необходимостью в наши дни является непрерывное образование, что требует полноценной базовой общеобразовательной подготовки, в том числе и математической. И наконец, все больше специальностей, где необходим высокий уровень образования, связаны с непосредственным применением математики (экономика, бизнес, финансы, физика, химия, техника, информатика, биология, психология и др.). Таким образом, расширяется круг школьников, для которых математика становится значимым предметом.

Цель содержания раздела «Геометрия» — развить у учащихся пространственное воображение и логическое мышление путем систематического изучения свойств геометрических фигур на плоскости и в пространстве и применения этих свойств при решении задач вычислительного и конструктивного характера. Существенная роль при этом отводится развитию геометрической интуиции. Сочетание наглядности со строгостью является неотъемлемой частью геометрических знаний. Материал, относящийся к блокам «Координаты» и «Векторы», в значительной степени несет в себе межпредметные знания, которые находят применение, как в различных математических дисциплинах, так и в смежных предметах.

Планируемые результаты изучения темы «Векторы».

Ученик научится:

1. Формулировать определения и иллюстрировать понятия вектора, длины (модуля) вектора, коллинеарных векторов, равных векторов.
2. Вычислять длину и координаты вектора.
3. Находить угол между векторами.
4. Выполнять операции над векторами.
5. Выполнять проекты по темам использования векторного метода при решении задач на вычисления и доказательства [14].



## 1.2 Исторические аспекты развития векторного исчисления

Предпосылки к развитию векторной алгебры появились еще в Древней Греции. В «Началах» Евклида алгебраические операции сложения и вычитания сводились к сложению и вычитанию отрезков, умножение – к построению прямоугольников на отрезках, соответствующих по длине их множителям. Так было положено начало геометрической теории отношений Евдокса (408-355 гг. до н.э.), а позднее «геометрической алгебре» [7].

В 1587 г. фламандский ученый С. Стевин выпускает трактат «Начала статики». В работе ученый исследует сложение сил и заключает, что для вычисления результата сложения двух сил, которые взаимодействуют под углом, необходимо использовать «параллелограмм сил». Для обозначения сил С. Стевин впервые использует отрезки со стрелками. Фактически он становится первым ученым, который вводит сложение двух векторов, перпендикулярных друг другу.

Уже в XVI-XVII вв. Леонардо да Винчи, Галилей, Кеплер пользовались направленными отрезками для наглядного представления сил в физике и астрономии.

Спустя 200 лет, в 1803 году, французский математик Л. Пуансо разработал целую теорию векторов, которую используют при рассмотрении сил, действующих в различных направлениях.

Наряду с исследованием комплексных чисел в работах многих математиков XVII-XVIII в. нарастает необходимость в геометрическом исчислении, подобном численному, но связанному с пространственной системой координат. И в 1845 г. «родитель векторного пространства», ирландский математик У. Гамильтон в работах по теории комплексных чисел и кватернионов вводит такие термины как «вектор», «скаляр», «скалярное произведение», «векторное произведение».

К середине XIX в. немецкий математик Г. Грассман в работе «Учение о протяженности» излагает учение о  $n$ -мерном евклидовом пространстве.

Вместо терминов «скалярное произведение», «векторное произведение» он использует термины «внутреннее произведение» и «внешнее произведение» соответственно.

Чуть позже У. Клиффорд в рамках общей теории обычного векторного исчисления объединяет подходы У. Гамильтона и Г. Грассмана.

В конце XX и XXI в.в, векторная алгебра и ее приложения активно развивались. Были подробно описаны векторная алгебра и векторный анализ, общая теория векторного пространства. Эти теории имели применение при построении специальной и общей теории относительности, которые играют исключительно важную роль в современной физике.

### 1.3 Теоретические аспекты применения тестовых средств контроля знаний учащихся

В данной работе будем придерживаться определения педагогического теста Т. М. Балыхиной: «Педагогический тест – комплекс заданий, измеряющих уровень учебных достижений, обученности, прогресс в учебной деятельности, эффективность учебного процесса. Отличие педагогических тестов от психологических состоит в том, что педагогические тесты измеряют уровень усвоения отдельного предмета, а психологические – свойства психики; в педагогических тестах отчетливее очерчен объект контроля (знания, умения), моделируется фрагмент естественной учебной ситуации, их выполнение вызывает включение мотивации.» [5]. Тесты являются одной из наиболее актуальных и часто используемых форм контроля знаний. Как известно, Государственная Итоговая Аттестация (далее – ГИА) учащихся 9-х и 11-х классов по математике проводится преимущественно в тестовой форме (за исключением заданий с развернутым ответом). Подготовка к проведению ГИА обуславливает необходимость формирования у учащихся навыков работы с тестами.

Педагогическое тестирование имеет как преимущества, так и недостатки. Они представлены в Таблице 1.

Таблица 1 – Преимущества и недостатки тестовой формы контроля знаний

Достоинства	Недостатки
<i>1</i>	<i>2</i>
Отсутствует субъективная оценка со стороны учителя	Отсутствует возможность проверить навыки рассуждения в ходе решения задачи, аргументации ответа
Возможность охватить большой объем содержания учебного предмета	Возможность проверки уровня усвоения материала ограничена

*Продолжение таблицы 1*

<i>1</i>	<i>2</i>
Возможность проверки знаний у большого количества учащихся одновременно	Комбинация случайности (угадывание ответов)
Возможность установить уровень знаний учащегося по каждой теме	

Для получения достоверной картины об уровне знаний учащихся тестовая форма контроля может использоваться в сочетании с другими формами контроля (например, устный опрос).

*Требования к тестовым заданиям.*

1. *Краткость.* Тестовое задание должно быть сформулировано лаконично. Сложноподчиненные предложения желательно разбить на несколько простых предложений. Повторы и двойные отрицания крайне нежелательны, так как учащимся будет трудно понять такое задание, и, соответственно, решить.

2. *Адекватность.* При выборе задания учитель выделяет существенные и несущественные элементы знаний. Эталонный ответ содержит существенные признаки, а другие варианты – несущественные признаки с характерными ошибками.

3. *Определенность.* Задание сформулировано таким образом, что учащийся понимает, какое действие или какое знание от него требуется после прочтения задания.

4. *Однозначность.* Задание имеет один эталонный ответ. При этом формулировка задания не содержит подсказки для учащегося. Задания также не должны содержать явно неподходящих ответов.

5. *Отсутствие субъективизма.* Использование оценочных суждений, формулировок «что самое важное», «что самое главное» не допускается.

6. *Достоверность результатов.* Заданий должно быть достаточно, чтобы проверить требуемый объем изученного материала. В то же время,

сами задания различаются по уровню сложности (от простого к сложному). Это позволит избежать утомления учащегося.

#### *Классификация тестов.*

Существуют разнообразные подходы к классификации тестовых форм контроля. Рассмотрим некоторые из них.

##### По процедуре создания:

1. *Стандартизированные.* Тесты разработаны единообразно, то есть вопросы, условия проведения, процедура выставления оценок проводятся заранее определенным способом.

2. *Нестандартизированные.* Тесты, не прошедшие процедуру стандартизации. Как правило, такие тесты разрабатываются педагогом самостоятельно для личного использования. Качество нестандартизированных тестов может быть достаточно высоким, если разработчик тщательно подходит к созданию теста.

##### По типу ответа:

1. *Тесты закрытого типа.* Простой вариант задания данного типа предполагает выбор одного правильного ответа из нескольких предложенных вариантов. Усложненный вариант – задание с множественным выбором ответа (checkbox), где можно выбрать несколько вариантов ответа, но верным может быть как один вариант, так и несколько. Эталонным ответом в таком случае является тот, где нет ни лишних, ни недостающих вариантов.

2. *Тесты открытого типа.* В таком тесте ответом является короткая фраза, слово или символ, который учащийся самостоятельно вписывает или печатает.

3. *Тесты на установление соответствия.* Задача учащегося в таком тесте состоит в том, чтобы установить соответствие между элементами двух множеств (списков).

4. *Тесты на восстановление последовательности.* Учащемуся приводится последовательность действий или процессов, приведенных в

случайном порядке. Эталонным ответом является верно-восстановленная последовательность.

Существует подразделение тестов по временным ограничениям:

1. Тесты, которые учитывают скорость выполнения заданий.
2. Тесты, учитывающие результативность.

По уровню сложности тестовые задания разделяют на четыре группы:

1. Задания на узнавание.
2. Задания на понимание.
3. Задания на применение.
4. Задания на перенос, творческие.

Тест называется однородным (гомогенным), когда все задания теста одинаковы по уровню и типу.

Если тест содержит задания разных типов или разных уровней, он называется комбинированным (гетерогенным). Задания каждого уровня или типа в тесте располагаются в одной группе. Причем группы заданий размещаются в тесте в порядке возрастания уровня сложности.

Задания с разной формой представления информации (словесная, числовая, графическая) желательно в тесте чередовать.

Также можно выделить следующие виды тестов:

1. Установочные тесты, направленные на определение уровня знаний учащихся на момент начала обучения.
2. Диагностические тесты, направленные на выявление затруднений непосредственно в процессе обучения или изучения конкретной темы [8].

*Проектирование тестов включает теоретический и практический этапы.*

Теоретический этап:

1. Определение цели тестирования (например, входной, текущий, тематический или итоговый контроль).
2. Изучение программных требований и материалов учебника по данной теме.

### 3. Выбор вида тестовых заданий.

#### Практический этап:

1. Спецификация, т. е. определение структуры теста (количество вариантов теста, типы тестовых заданий, число заданий каждого типа, число ответов к заданиям с выбором вариантов, «вес» каждого задания при подсчете баллов, время выполнения теста учащимися исходя из времени на выполнение каждого задания).
2. Разработка тестовых заданий.
3. Экспертиза тестовых заданий.
4. Корректировка.
5. Разработка методического обеспечения теста.

#### Экспериментальный этап:

1. Предварительное тестирование.
2. Анализ результатов предварительного тестирования.
3. Обработка теста на основе результатов предварительного тестирования.
4. Составление окончательного варианта теста.

Тестовая технология является эффективной формой контроля знаний. Она позволяет учителю объективно оценить знания каждого учащегося. А сам учащийся, работая с тестами, развивает внимательность, логическое мышление. В силу разнообразия тестовых форм контроля, учитель имеет возможность комбинировать их. Такие комбинации, с одной стороны, дают учащимся опыт работы с различными формами тестов, а с другой – делают процесс контроля знаний менее однообразным.

## Выводы по 1 главе

Подведем итоги по первой главе:

1. Раздел векторной алгебры имеет богатую историю развития, в которой принимало участие большое количество ученых. Теория векторной алгебры имеет большое прикладное значение. В частности, в физике.

2. Тема «Векторы» занимает важное место в школьном курсе геометрии. Кроме того, векторы встречаются учащимся и в школьном курсе физики. Неспособность решить физические задачи будет являться следствием того, что ученик не усвоил вышеупомянутую тему. Межпредметная связь таким образом нарушается.

3. Использование тестовой технологии при соблюдении требований, предъявляемых к составлению тестов, использовании различных форм тестового контроля позволяет дифференцировать и индивидуализировать учебный процесс.



## ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОРГАНИЗАЦИИ ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЯ ПО ТЕМЕ «ВЕКТОРЫ»

2.1 Сравнительный анализ изложения темы «Векторы» в учебно-методических комплексах школьного курса геометрии

На сегодняшний день существуют различные школьные учебники геометрии. Наиболее распространенными являются следующие:

1. Геометрия. 7 – 9 классы. Автор: Л. С. Атанасян [4].
2. Геометрия. 7 – 9 классы. Автор: А. В. Погорелов [13].
3. Геометрия: 9 класс. А. Г. Мерзляк [11].

Рассмотрим особенности каждого из них в контексте содержания теоретического материала, задачного материала, а также содержания тематического планирования по теме «Векторы».

Краткий анализ учебно-методических комплектов (далее – УМК) представлен в Таблице 2.

Таблица 2 – Анализ УМК Л. С. Атанасяна, А. В. Погорелова, А. Г. Мерзляка

	Геометрия. 7-9 классы. Л. С. Атанасян	Геометрия. 7-9 классы. А. В. Погорелов.	Геометрия: 9 класс. А. Г. Мерзляк.
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
Класс, в котором предусмотрено изучение темы	8 класс (второе полугодие)	8 класс (второе полугодие)	9 класс (первое полугодие)
Количество часов	15	10	15

Продолжение таблицы 2

1	2	3	4
<p>Порядок изложения учебных тем</p>	<p>1. Понятие вектора.                  2. Равенство векторов.                  3. Откладывание вектора от данной точки.                  4. Сумма двух векторов.                  5. Законы сложения векторов. Правило параллелограмма.                  6. Сумма нескольких векторов.                  7. Вычитание векторов.                  8. Произведение вектора на число.                  9. Применение векторов к решению задач.                  10. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам.</p>	<p>1. Абсолютная величина векторов и направление вектора.                  2. Равенство векторов .                  3. Координаты вектора.                  4. Сложение векторов.                  5. Сложение сил.                  6. Умножение вектора на число.                  7. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам.                  8. Скалярное произведение векторов.                  9. Разложение вектора по координатным осям.</p>	<p>1. Понятие вектора.                  2. Координаты вектора.                  3. Сложение и вычитание векторов.                  4. Умножение вектора на число.                  5. Применение векторов.                  6. Скалярное произведение векторов.</p>

Продолжение таблицы 2

1	2	3	4
	11. Координаты вектора. 12. Связь между координатами вектора и координатами его конца и начала. 13. Простейшие задачи в координатах. 14. Скалярное произведение векторов.		
Задачный материал базового уровня	80 задач базового уровня сложности	40 задач базового уровня сложности	103 задачи базового уровня сложности
Задачный материал повышенного уровня сложности	70 задач повышенного уровня сложности	15 задач повышенного уровня сложности	85 задач повышенного уровня сложности
Наличие дидактических материалов	Отсутствует	Присутствует	Присутствует

*Продолжение таблицы 2*

<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
Наличие рабочей тетради для учащихся	Присутствует	Присутствует	Присутствует
Наличие методических рекомендаций с формулировкой предметных требований, комментариями для учителя	Присутствует	Присутствует	Присутствует
Наличие готовых технологических карт к уроку	Отсутствует	Отсутствует	Присутствует

*Изложение теоретического материала.*

В учебном пособии Л. С. Атанасяна тема «Векторы» является заключительной в курсе геометрии 8 класса. Автор дает определение вектора:

«Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек является началом, а какая концом, называется направленным отрезком или вектором».

Далее определяется нулевой вектор, как точка плоскости.

Введению понятия равных векторов предшествует определение длины(модуля) вектора, определение коллинеарных, сонаправленных и противоположно-направленных векторов, демонстрируются примеры и

соответствующие обозначения ( $|\vec{a}|, \vec{a} \parallel \vec{b}, \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}, \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ ).

Определение равных векторов: «Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны».

Рассматриваются 3 правила сложения векторов: правило треугольника, правило параллелограмма, правило многоугольника.

Разность векторов определяется следующим образом: «Разностью векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется такой вектор, сумма которого с вектором  $\vec{b}$  равна вектору  $\vec{a}$ ».

Определение произведения вектора на число: «Произведение ненулевого вектора  $\vec{a}$  на число  $k$  называется такой вектор  $\vec{b}$ , длина которого равна  $|k| \cdot |\vec{a}|$ , причем векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  сонаправлены при  $k \geq 0$  и противоположно направлены при  $k < 0$ ». За определением следуют свойства произведения вектора на число.

За изложением основного материала следует параграф «Применение векторов к решению задач», где автор рассматривает применение векторов при решении геометрических задач, в том числе на доказательство. Данный параграф является заключительным.

Отметим, что изложение материала проходит без использования координат, отчего могут возникать сложности при обосновании законов векторной алгебры. Такие темы как «Координаты вектора» и «Скалярное произведение векторов» учащиеся изучат уже в 9 классе.

*Учебное пособие А. В. Погорелова* также предполагает знакомство с векторами во втором полугодии 8 класса. Важно отметить, что на момент изучения параграфа «Векторы» учащиеся уже имеют представления о координатах из параграфа «Декартовы координаты на плоскости».

Само определение вектора в данном учебнике лаконично:

«Вектором мы будем называть направленный отрезок. Направление вектора определяется указанием его начала и конца». Далее вводятся понятия одинаково-направленных и противоположно-направленных

векторов, «длина вектора», «нулевой вектор». Такое понятие как «коллинеарность» излагается позже, хотя является более широким.

Равные векторы определяются:

1. Через параллельный перенос: «Два вектора называются равными, если они совмещаются параллельным переносом». А. Д. Александров отмечает, что при таком определении равных векторов автор упускает момент независимости параллельного переноса от выбора системы координат.

2. Через направление и длину: «равные векторы одинаковы направлены и равны по абсолютной величине(длине)».

3. Через равенство координат: «Равные векторы имеют равные соответствующие координаты».

Наличие у учащихся представлений о координатах вектора позволяет определить операции с векторами (сложение, вычитание, умножение на число) через операции с их координатами. Графическое изображение суммы и разности через соответствующие правила («правило треугольника», «правило параллелограмма») присутствуют, но не акцентируются.

В отдельном параграфе «Сложение сил» рассматривается применение векторов с точки зрения физики.

Определение коллинеарных векторов возникает при рассмотрении разложения вектора по двум неколлинеарным векторам.

Скалярное произведение векторов, как и операции с векторами, первоначально определяется в координатной форме, далее – через произведение абсолютных величин векторов на косинус угла между ними.

В учебном пособии А. Г. Мерзляка изучение темы «Векторы» приходится на 9 класс. Понятие вектора аналогично учебнику Л. С. Атанасяна:

«Если указано, какая точка является началом отрезка, а какая точка – его концом, то такой отрезок называют направленным отрезком, или вектором».

Рассматривается нуль-вектор, определение коллинеарных, сонаправленных и противоположно направленных, равных векторов. Изложение теоретического материала сопровождается иллюстрациями.

Из предыдущих параграфов учащиеся имеют представления о декартовых координатах. Это позволяет ввести координаты вектора, а также операции над векторами (сумма, разность, произведение вектора на число) не только наглядно, но и в координатной форме. Определено скалярное произведение.

*Изложение задачного материала.*

В методических рекомендациях к Учебно-методический комплекс (далее – УМК) по геометрии *Л. С. Атанасян* акцентирует внимание на практической значимости изучения темы «Векторы». Он пишет: «Следует иметь в виду, что изучение векторов в курсе геометрии преследует две цели: подготовить учащихся к восприятию действий над векторными величинами в физике и показать, как можно использовать векторы при решении геометрических задач. Поэтому основное внимание следует уделить не обоснованиям формул и теорем векторной алгебры, а умению выполнять действия над векторами и демонстрации возможностей векторного метода в геометрии».

Учебник содержит задачи базового уровня и повышенного уровня сложности. Кроме задачного материала, представленного в учебнике, учитель может использовать задания, представленные в рабочей тетради *Л. С. Атанасяна*, которая является дополнением к учебнику.

Учебник *А. В. Погорелова* содержит 50 задач по теме «Векторы». Большинство из них направлены на формирование навыков работы с координатами вектора, операциями над ними. Задачи на построение векторов и формирование наглядного представления о векторах, операций над ними присутствуют в минимальном количестве. Хочется также отметить задачу 13 [13], которая предполагает построение суммы трех векторов. Учитывая отсутствие правила многоугольника в теоретическом

материале учебника и, соответственно, опыта построения суммы двух и более векторов, можно предположить, что выполнение подобной задачи будет затруднительно для учащихся.

В качестве дополнения к учебнику, А. В. Погорелов предлагает рабочую тетрадь, задания которой предназначены для организации самостоятельной работы учащихся, направленной на усвоение ими основных теоретических фактов и практических умений в процессе решения задач.

*Учебник А. Г. Мерзляка* содержит задачи базового и повышенного уровней сложности, которые соответствуют теоретическому материалу. Помимо учебника, учитель может использовать рабочую тетрадь.

Проанализировав учебно-методические комплекты авторов, можно выделить особенности изложения темы «Векторы» каждого из учебных пособий:

1. Вектор, как правило, определяется как направленный отрезок с указанием его конца и начала, которые и определяют его направление.

2. Л. С. Атанасян излагает первоначальные сведения о векторах без введения координат. Связь векторов и координат устанавливается позже, уже в курсе геометрии 9 класса. Такой подход может приводить к трудностям усвоения материала (установлению этой связи) у учащихся. Л. С. Атанасян предлагает обширный задачный материал. Задачи соответствуют теоретическому материалу, имеют различные уровни сложности, что позволяет не только закрепить базовые понятия и навыки, но и связать новый материал с предыдущим.

3. А. В. Погорелов делает акцент, по большей части, на исчислении векторов как пар чисел с геометрической интерпретацией. Наглядное представление векторов и операций над ними в координатной форме становятся второстепенными. Задачный материал небольшой. Предлагаются задачи базового и повышенного уровней сложности. Некоторые задачи не соответствуют теоретическому материалу учебника.



4. Учебный комплект А. Г. Мерзляка показался нам наиболее сбалансированным в изложении. Одинаковое внимание автор уделяет формированию представлений о векторах как в координатной форме, так и в наглядной. Задачный материал позволяет сформировать как наглядные, аналитические представления о векторах, а также математический аппарат для работы с ними.

## 2.2 Классификация задач по теме «Векторы» в заданиях Единого Государственного Экзамена

Данный параграф посвящен рассмотрению основных типов задач по теме «Векторы», представленных в заданиях Единого Государственного Экзамена по математике профильного уровня в 11 классе.

Представлен каждый тип задачи с решением.

*1 тип.* Нахождение скалярного произведения векторов по их координатам.

*Задача 1.* Даны векторы  $\vec{a}(5; -7)$  и  $\vec{b}(14; 1)$ . Найдите скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

*Решение:* для того, чтобы вычислить скалярное произведение двух векторов в координатной форме, достаточно найти сумму произведений соответствующих координат векторов  $\vec{a}(x_1; y_1)$  и  $\vec{b}(x_2; y_2)$ . То есть:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 5 \cdot 14 + (-7) \cdot 1 = 70 - 7 = 63.$$

*Ответ:* 63.

*Задача 2.* На координатной плоскости изображены векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , координатами которых являются целые числа. Найдите скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  (рисунок 1).

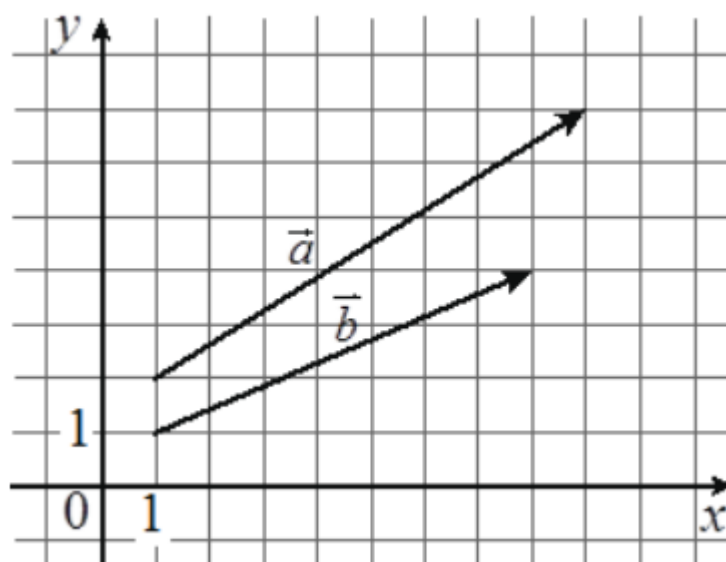


Рисунок 1 – Чертеж к задаче ЕГЭ

*Решение:* вычислим координаты векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Для этого из координат конца вектора вычтем соответствующие координаты начала вектора.

Тогда вектор  $\vec{a}$  имеет координаты:

$$\vec{a}(9 - 1; 7 - 2) = \vec{a}(8; 5).$$

Вектор  $\vec{b}$  имеет координаты:

$$\vec{b}(8 - 1; 4 - 1) = \vec{b}(7; 3).$$

Найдем скалярное произведение в координатной форме, вычислив сумму произведений соответствующих координат:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 8 \cdot 7 + 5 \cdot 3 = 56 + 15 = 71.$$

*Ответ:* 71.

*2 тип.* Нахождение скалярного произведения по длине векторов и углу между ними.

*Задача:* длины векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равны 3 и 7, а угол между ними равен  $60^\circ$ .

Найдите скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

*Решение:* Скалярное произведение двух векторов есть число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Известно, что угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $60^\circ$ . Тогда вычислим косинус угла:

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Вычислим скалярное произведение векторов:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 3 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = 10,5.$$

Ответ: 10,5.

3 тип. Нахождение длины вектора.

Задача: на координатной плоскости изображены векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , координатами которых являются целые числа. Найдите длину вектора  $\vec{a} + 4\vec{b}$  (рисунок 2).

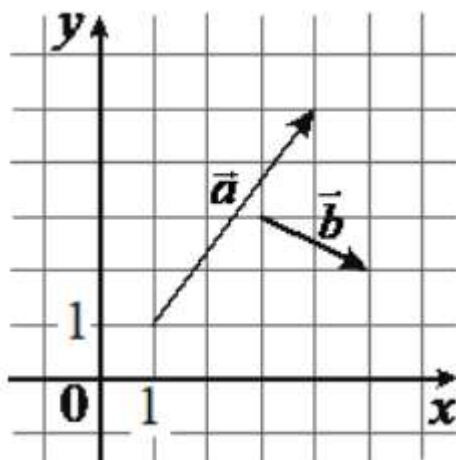


Рисунок 2 – Чертеж к задаче ЕГЭ

Решение: вычислим координаты векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

$$\vec{a}(4 - 1; 5 - 1) = \vec{a}(3; 4);$$

$$\vec{b}(5 - 3; 2 - 3) = \vec{b}(2; -1).$$

Умножим вектор  $\vec{b}$  на 4 и получим координаты вектора  $4\vec{b}$ :

$$4\vec{b}(2 \cdot 4; -1 \cdot 4);$$

$$4\vec{b}(8; -4).$$

Обозначим  $\vec{c} = \vec{a} + 4\vec{b}$  и вычислим координаты вектора  $\vec{c}$ :

$$\vec{c}(3 + 8; 4 + (-4));$$

$$\vec{c}(11; 0).$$

Длина вектора есть корень квадратный из суммы квадратов его координат.

$$|\vec{c}| = \sqrt{11^2 + 0^2} = \sqrt{121} = 11.$$

Ответ: 11.

## 2.3 Методические материалы для организации тестового контроля по теме «Векторы»

В соответствии с предметными результатами изучения темы «Векторы» были составлены 3 самостоятельные работы в тестовой форме. Работы предназначены для учащихся 9 классов, обучающихся по линии УМК Геометрия 7-9 классы автора Л. С. Атанасяна [3].

### 2.3.1 Тест «Понятие вектора. Равенство векторов. Откладывание вектора от точки»

Работа предназначена для учеников 9 класса.

Цель: контроль усвоения знаний по теме.

Тест содержит 5 заданий различного уровня сложности. Время выполнения: 15 минут.

Тест также представлен на электронном образовательном ресурсе Geogebra. Ссылка и QR-код представлены в Приложении А.

Ключи к заданиям представлены в Приложении А.

*Вариант I.*

*Задание 1.* Векторной величиной не является:

- А) скорость тела;
- Б) ускорение;
- В) масса тела;
- Г) сила.

Ответ: \_\_\_\_\_.

*Задание 2.*  $MNKP$  – параллелограмм. Укажите пары коллинеарных и противоположно-направленных векторов (рисунок 3).

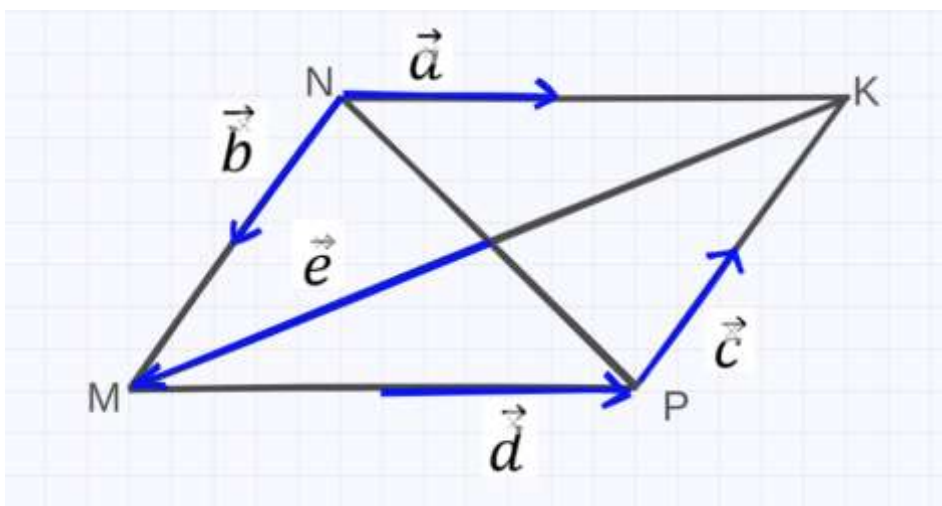


Рисунок 3 – Чертеж к тестовому заданию 2

Ответ:

Пары коллинеарных векторов: \_\_\_\_\_.

Пары противоположно-направленных векторов: \_\_\_\_\_.

Задание 3. Векторы называются равными, если \_\_\_\_\_

Задание 4. Дан  $\vec{a}$  и точка В. Отложите от точки В вектор, сонаправленный с вектором  $\vec{a}$  (рисунок 4).

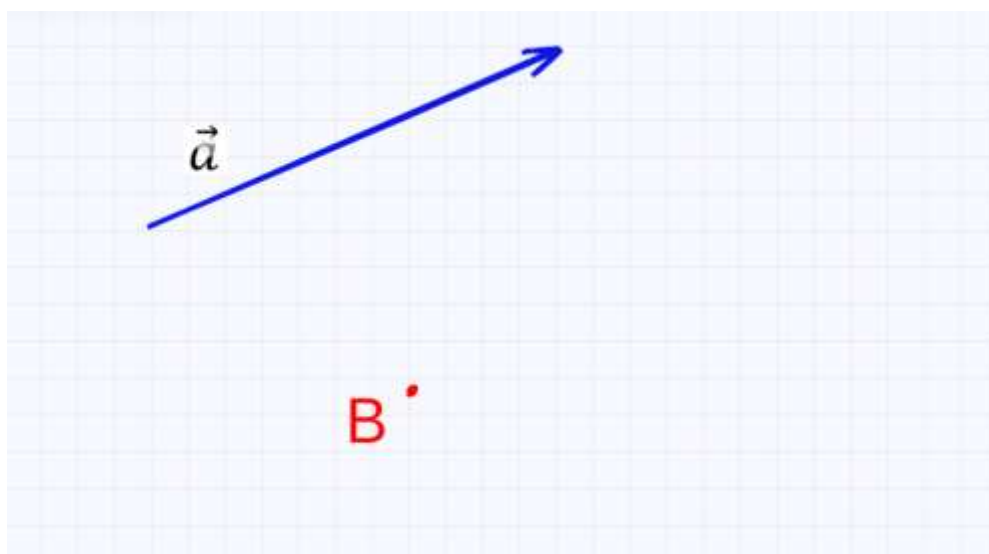


Рисунок 4 – Чертеж к заданию 4

Задание 5. Дан  $\vec{a}$  и точка E. Отложите от точки E вектор, равный вектору  $\vec{a}$  (рисунок 5).



Рисунок 5 – Чертеж к заданию 5

Вариант II.

Задание 1. Какая из данных величин является векторной?

А) температура;

Б) вес;

В) расстояние;

Г) ускорение.

Ответ: \_\_\_\_\_.

Задание 2.  $ABCD$  – квадрат (рисунок 6).

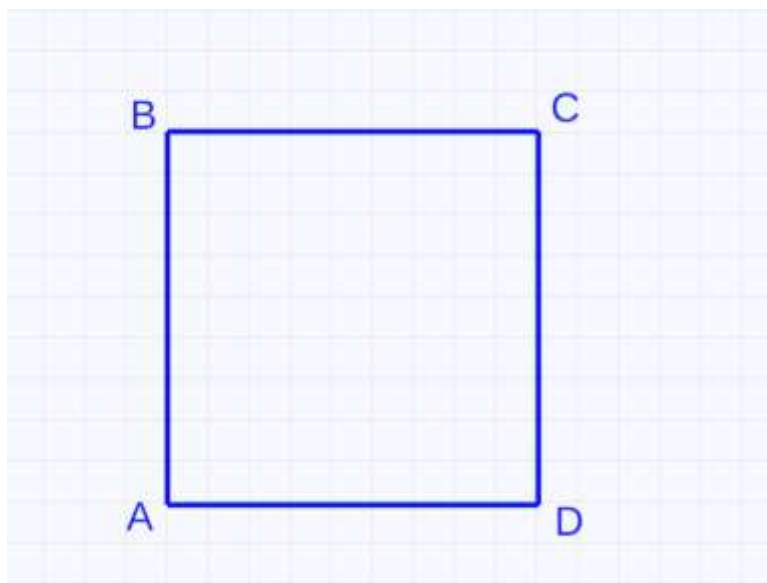


Рисунок 6 – Чертеж к заданию 2

Соедините пары векторов с соответствующим им названием:

$\overrightarrow{DC}$  и  $\overrightarrow{CD}$

равные

$\overrightarrow{DC}$  и  $\overrightarrow{CB}$

противоположно-направленные

$\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{DC}$

противоположные

$\overrightarrow{BA}$  и  $\overrightarrow{DC}$

ни одно название не подходит

Задание 3. Вектором или направленным отрезком называется \_\_\_\_\_.

Задание 4. Дан  $\vec{e}$  и точка А. Отложите от точки А вектор, противоположно-направленный с вектором  $\vec{e}$  (рисунок 7).



Рисунок 7 – Чертеж к заданию 4

Задание 5. Дан  $\vec{a}$  и точка М. Отложите от точки М вектор, равный вектору  $\vec{a}$  (рисунок 8).



Рисунок 8 – Чертеж к заданию 5



### 2.3.2 Тест «Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число»

Работа предназначена для учеников 9 класса.

Цель: применение контроль усвоения знаний по теме.

Тест содержит 10 заданий различного уровня сложности. Время выполнения: 25 минут.

Тест также представлен на электронном образовательном ресурсе Geogebra Ссылка и QR-код представлены в Приложении Б.

Ключи к заданиям оценивания представлены в Приложении Б.

*Вариант I.*

*Задание 1.* Равенство  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  называется \_\_\_\_\_.

*Задание 2.* Укажите рисунок, на котором вектор  $\vec{c}$  является суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (рисунок 9).

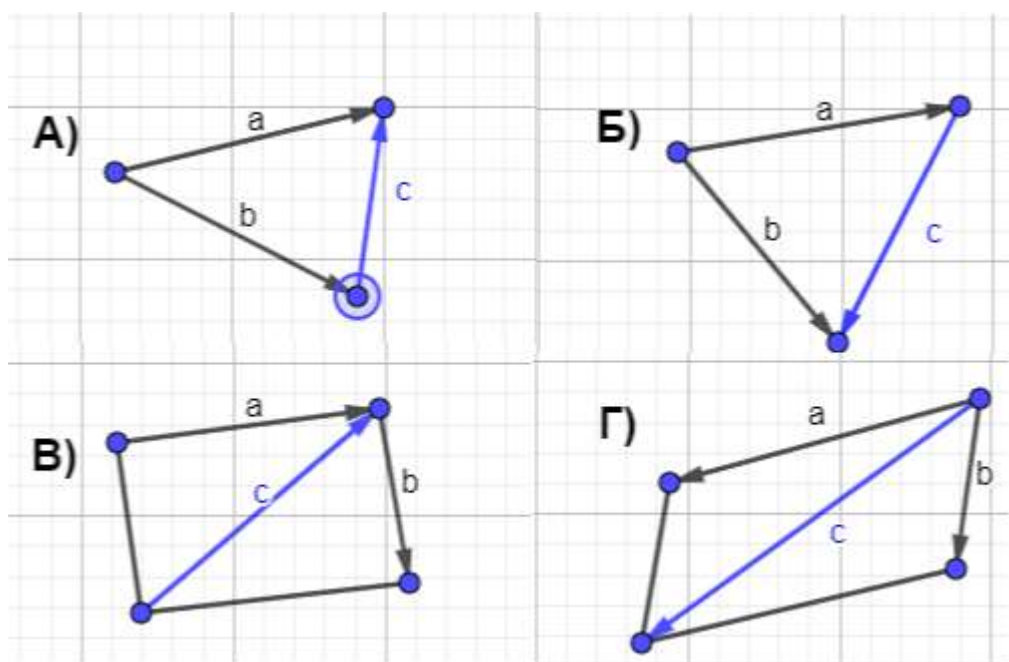


Рисунок 9 – Чертеж к заданию 2

Ответ: \_\_\_\_\_.

*Задание 3.* С помощью правила треугольника постройте сумму векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , изображенных на рисунке (рисунок 10).

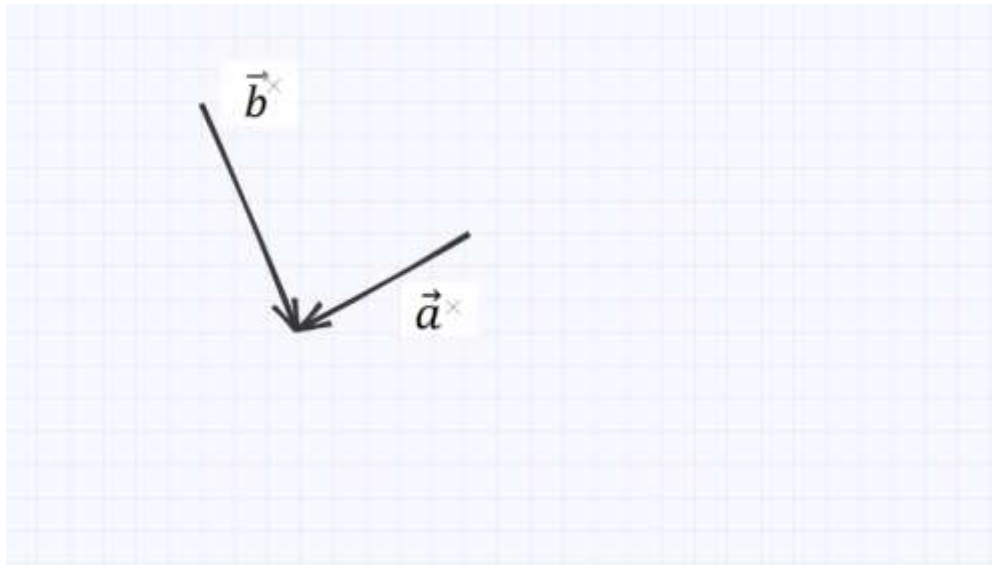


Рисунок 10 – Чертеж к заданию 3

Задание 4. С помощью правила параллелограмма постройте сумму векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , изображённых на рисунке (рисунок 11).

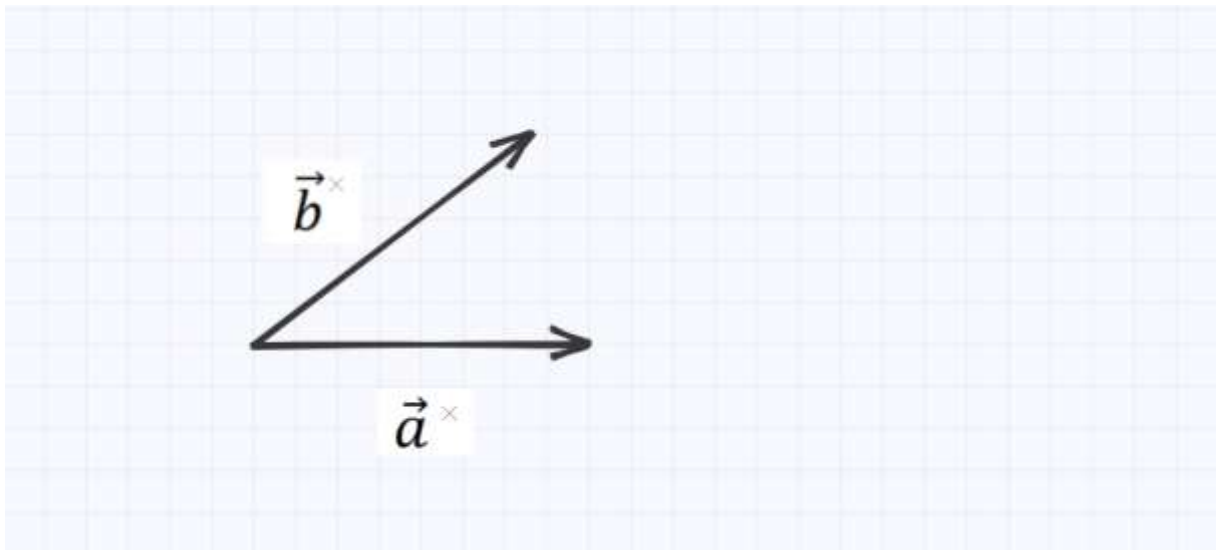


Рисунок 11 – Чертеж к заданию 4

Задание 5. Для векторов, изображённых на рисунке, постройте вектор  $\vec{a} - \vec{b}$  (рисунок 12).

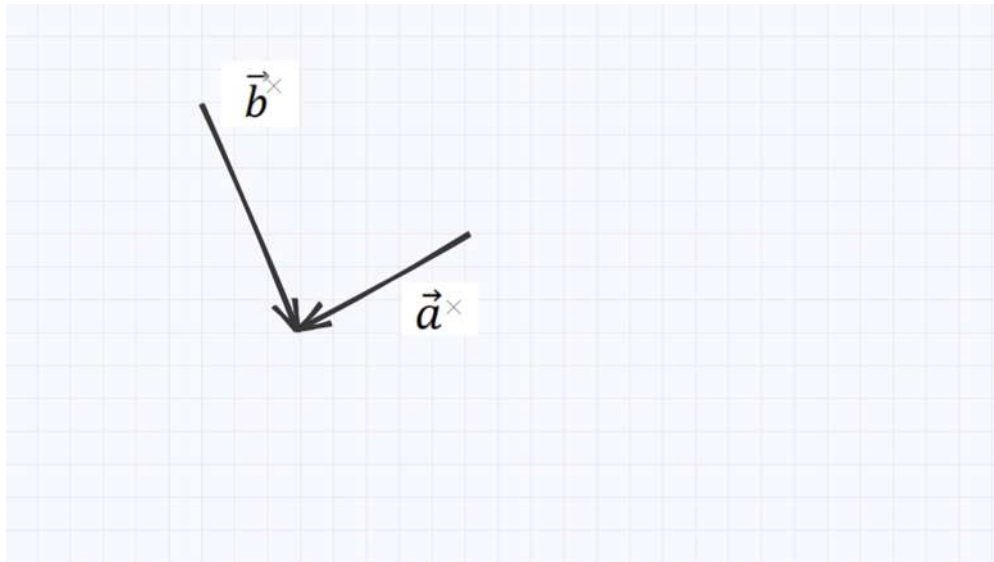


Рисунок 12 – Чертеж к заданию 5

Задание 6. Четырехугольник  $ABCD$  – параллелограмм. Найдите  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

Задание 7. Диагонали параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Выразите вектор  $\overrightarrow{AO}$  через векторы  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  и  $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$  (рисунок 13).

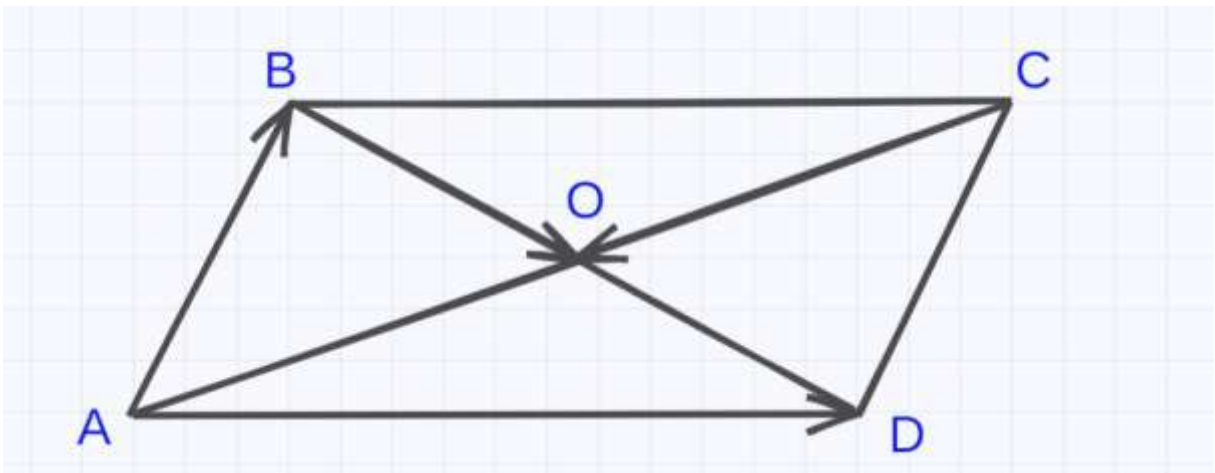


Рисунок 13 – Чертеж к заданию 7

Ответ: \_\_\_\_\_.

Задание 8. На рисунке изображены векторы (рисунок 14). Вектор, равный вектору  $3\vec{a}$ , это:

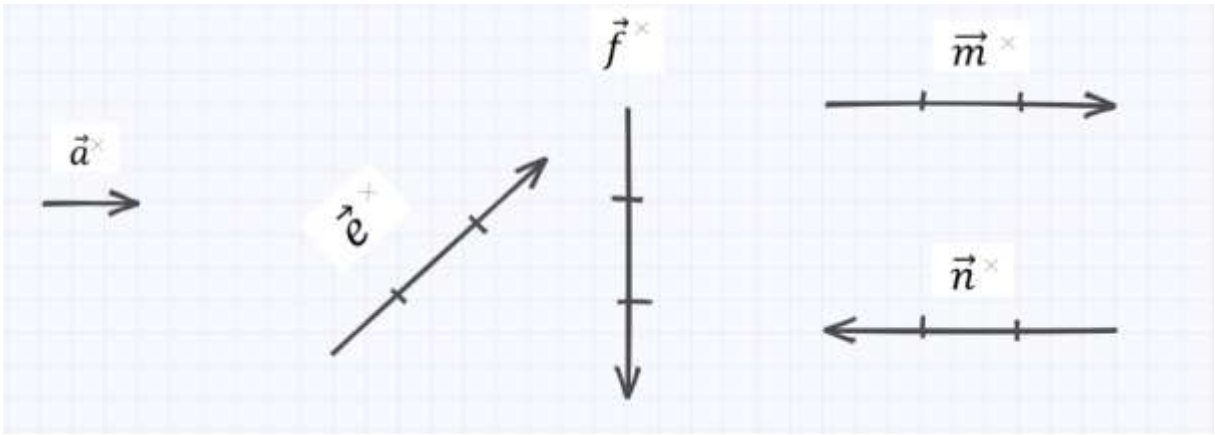


Рисунок 14 – Чертеж к заданию 8

- 1)  $\vec{e}$  2)  $\vec{f}$  3)  $\vec{m}$  4)  $\vec{n}$

Ответ: \_\_\_\_\_.

Задание 9. Дан вектор  $\vec{a}$ . Постройте вектор  $-\frac{2}{3}\vec{a}$  (рисунок 15).

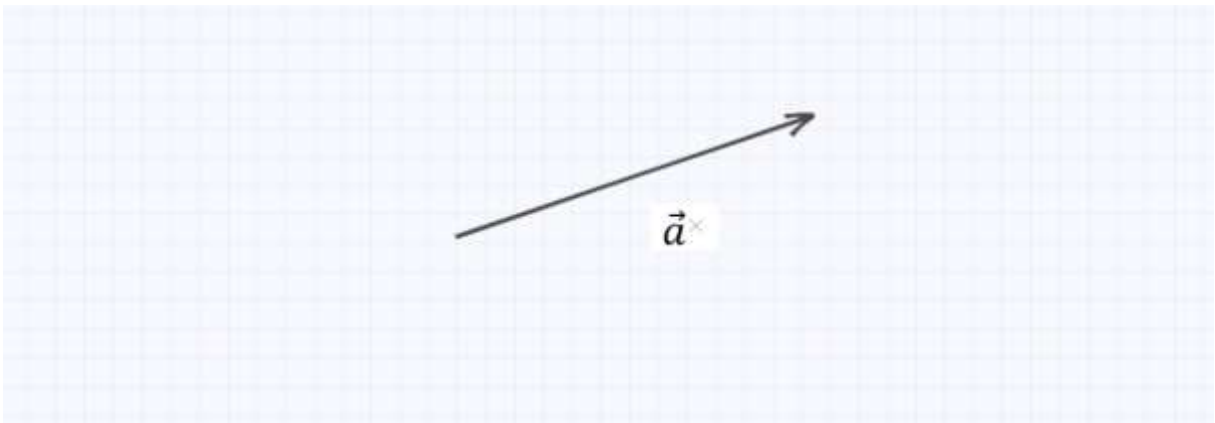


Рисунок 15 – Чертеж к заданию 9

Задание 10. Отрезок  $MN$  – средняя линия треугольника  $ABC$  (рисунок 16).

Число  $k$  такое, что  $\vec{AB} = k \cdot \vec{MA}$ , равно:

- 1) 2;  
 2)  $-2$ ;  
 3)  $\frac{1}{2}$ ;  
 4)  $-\frac{1}{2}$ .

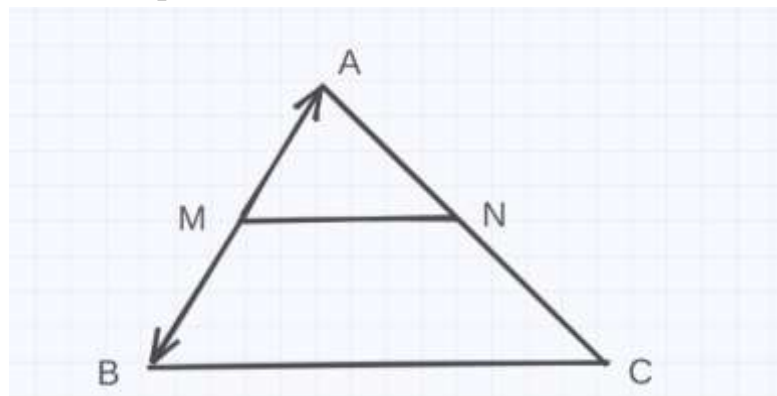


Рисунок 16 – Чертеж к заданию 10

Ответ:  
 \_\_\_\_\_.

Вариант II.

Задание 1. Сформулируйте переместительный закон сложения векторов:

\_\_\_\_\_.

Задание 2. Укажите рисунок, на котором вектор  $\vec{c}$  является разностью векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (рисунок 17).

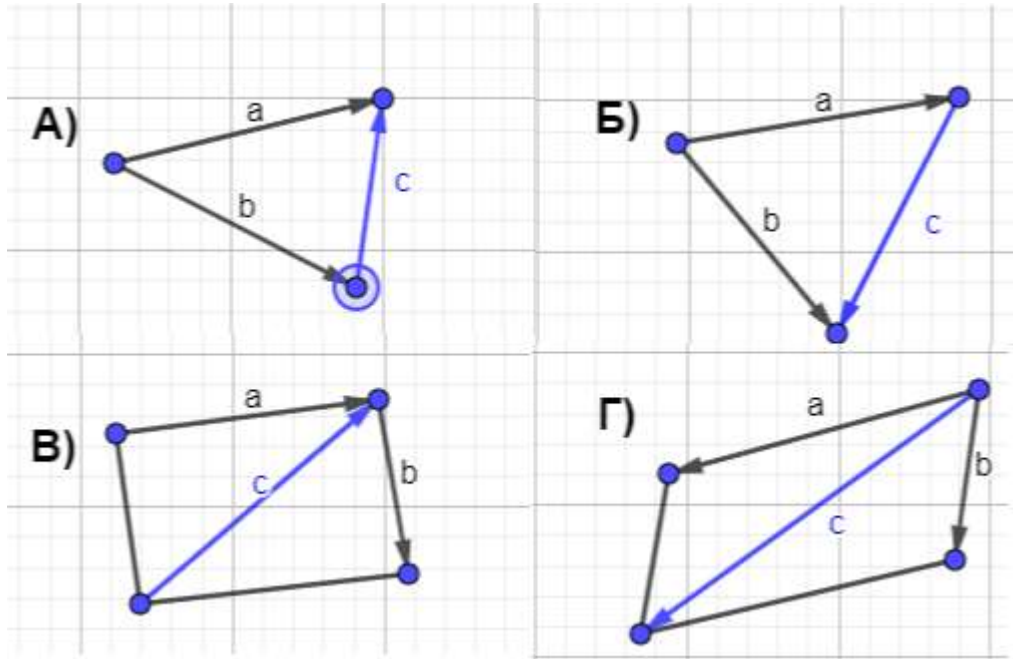


Рисунок 17 – Чертеж к заданию 2

Ответ: \_\_\_\_\_.

Задание 3. С помощью правила треугольника постройте сумму векторов  $\vec{e}$  и  $\vec{f}$ , изображённых на рисунке (рисунок 18).

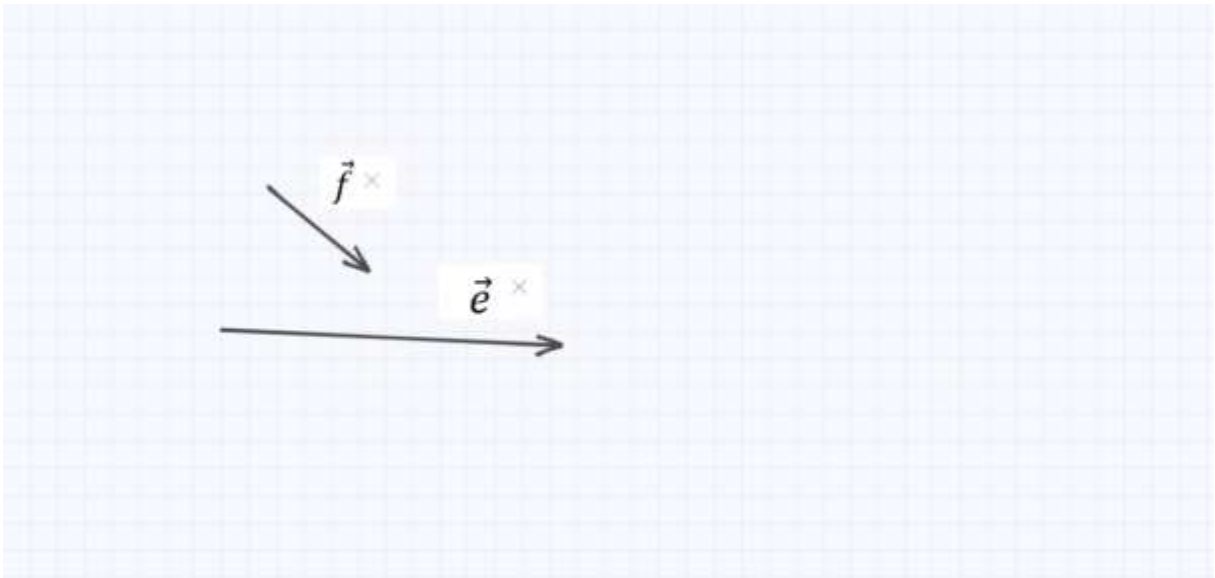


Рисунок 18 – Чертеж к заданию 3

Задание 4. С помощью правила многоугольника постройте сумму векторов  $\vec{e} + \vec{m} + \vec{n}$  (рисунок 19).



Рисунок 19 – Чертеж к заданию 4

Задание 5. Для векторов, изображённых на рисунке, постройте вектор  $\vec{e} - \vec{f}$  (рисунок 20).

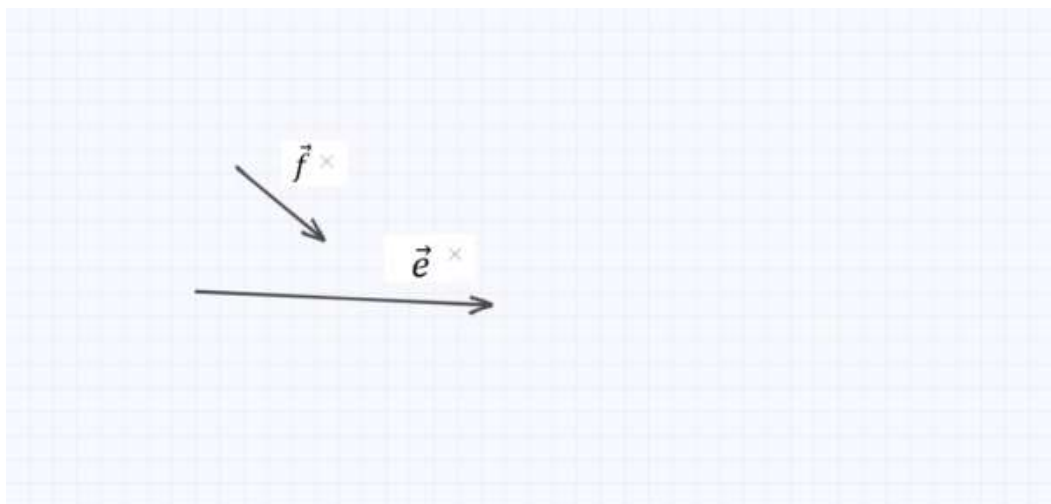


Рисунок 20 – Чертеж к заданию 5

Задание 6. Четырехугольник  $ABCD$  – параллелограмм. Найдите  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

Задание 7. Диагонали параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Выразите вектор  $\overrightarrow{AD}$  через векторы  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  и  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  (рисунок 21).

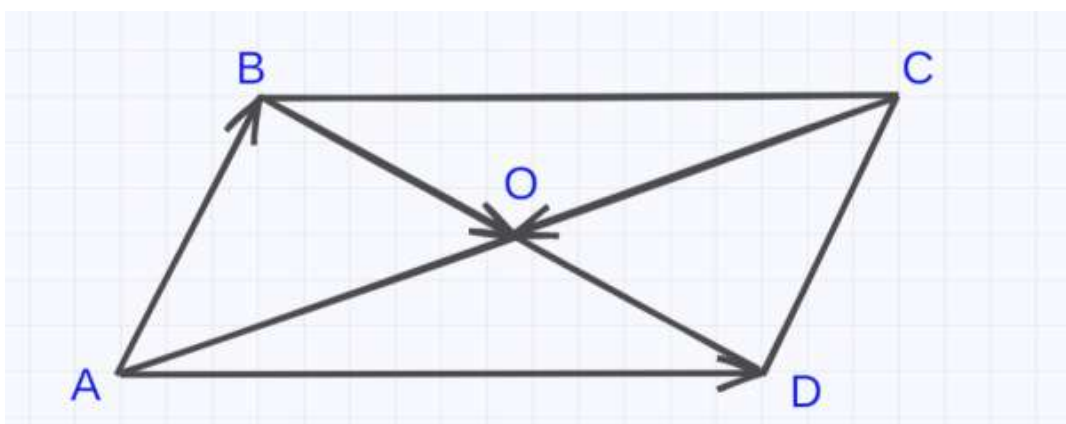


Рисунок 21 – Чертеж к заданию 7

Ответ: \_\_\_\_\_.

Задание 8. На рисунке изображены векторы (рисунок 22). Вектор, равный вектору  $-\frac{1}{2}\vec{b}$ , это:

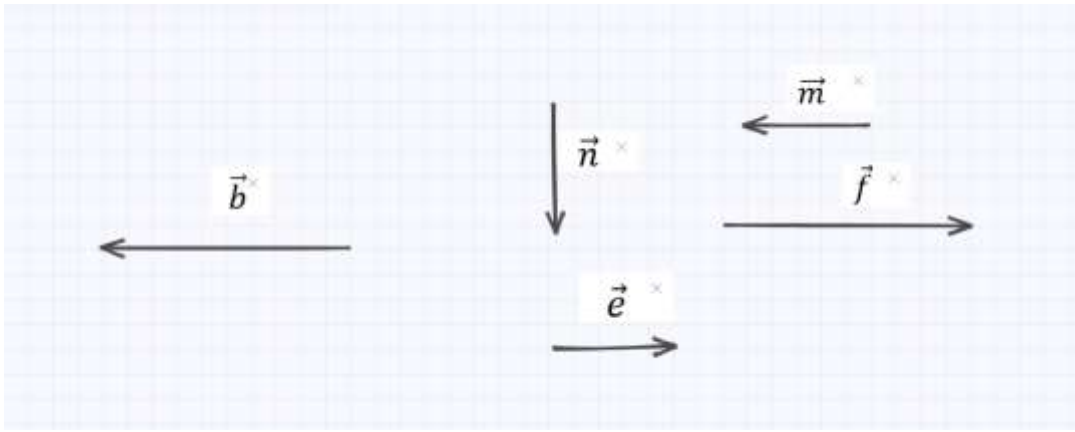


Рисунок 22 – Чертеж к заданию 8

- 1)  $\vec{n}$  2)  $\vec{m}$  3)  $\vec{f}$  4)  $\vec{e}$

Ответ: \_\_\_\_\_.

Задание 9. Дан вектор  $\vec{b}$ . Постройте вектор  $1,5\vec{b}$  (рисунок 23).

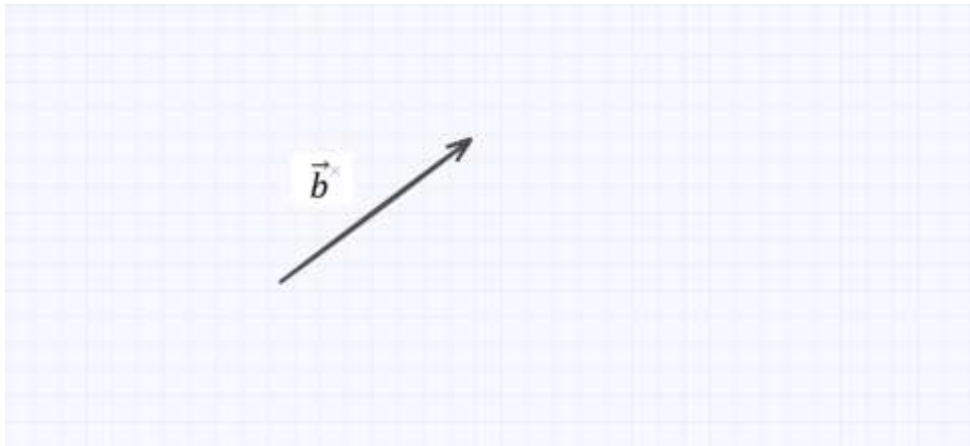


Рисунок 23 – Чертеж к заданию 9

Задание 10. Отрезок  $AM$  – медиана треугольника  $ABC$  (рисунок 24). Число  $k$  такое, что  $\vec{AM} = k(\vec{AB} + \vec{AC})$ , равно:

- 1) 2;  
 2)  $-2$ ;  
 3)  $\frac{1}{2}$ ;  
 4)  $-\frac{1}{2}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.



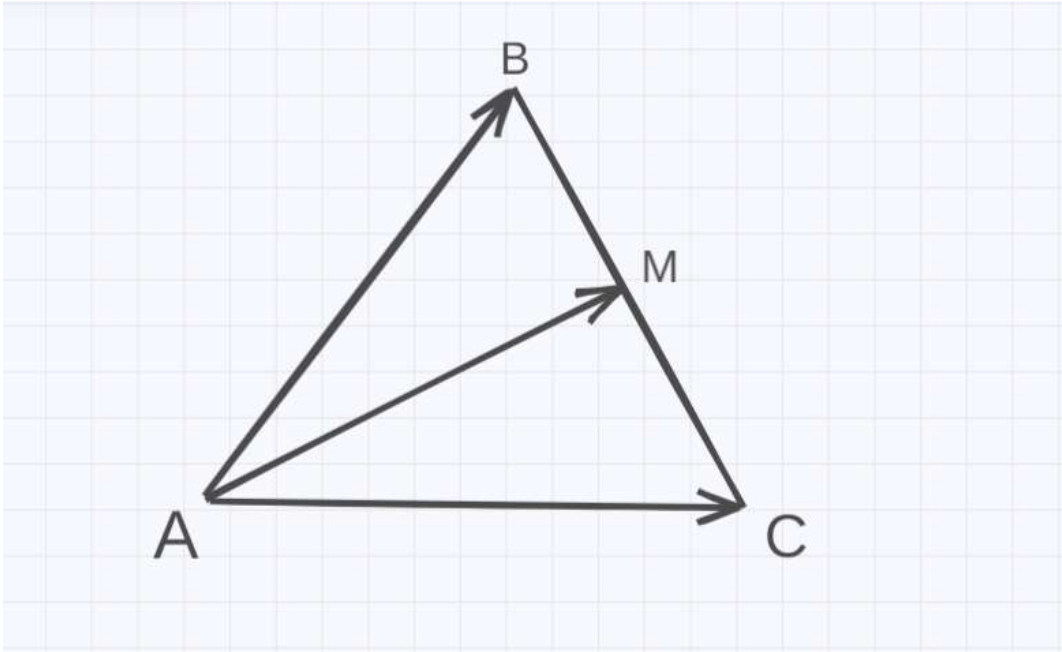


Рисунок 24 – Чертеж к заданию 10

### 2.3.3 Итоговый тест по теме «Векторы»

Работа предназначена для учеников 9 класса.

Цель: проверка глубины осмысления учащимися знаний и степени их обобщения, применения знаний в стандартных и нестандартных ситуациях.

Тест содержит 8 заданий различного уровня сложности. Время выполнения: 40 минут.

Тест также представлен на электронном образовательном ресурсе Geogebra. Ссылка и QR-код представлены в Приложении В.

Ключи к заданиям представлены в Приложении В.

*Задание 1.* Даны точки  $A(10;-2)$  и  $B(6;1)$ . Найдите координаты вектора  $\overrightarrow{AB}$  и его длину.

Ответ: \_\_\_\_\_.

*Задание 2.* По координатам точек  $A(5;-13)$  и  $B(x;-6)$  и координатам вектора  $\overrightarrow{AB}(9; y)$  найдите числа  $x$  и  $y$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

*Задание 3.* Какие из данных пар векторов коллинеарны?

а)  $\vec{a}(2; -4)$  и  $\vec{b}(1; 5)$ ;

б)  $\vec{c}(-3; 7)$  и  $\vec{d}(6; -14)$ ;

в)  $\vec{m}(1; 5)$  и  $\vec{n}(-2; 10)$ ;

г)  $\vec{e}(-6; -2)$  и  $\vec{f}(-3; -1)$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

*Задание 4.* Дан треугольник  $ABC$ . Выразите вектор  $\overrightarrow{AC}$  через векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{BC}$  (рисунок 25).

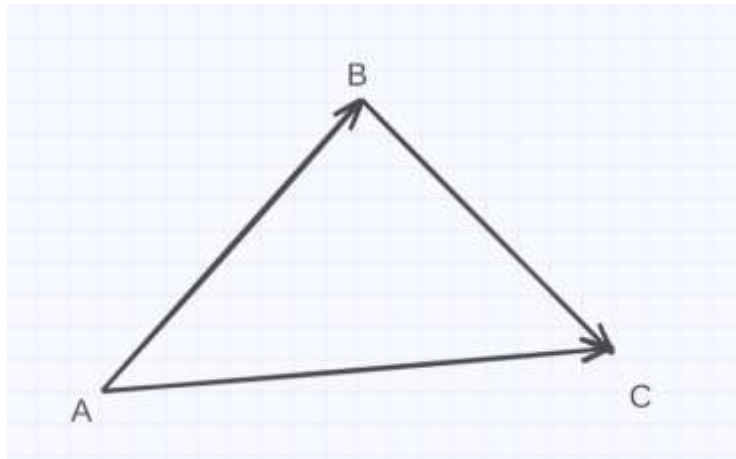


Рисунок 25 – Чертеж к заданию 3

Ответ: \_\_\_\_\_.

Задание 5. Даны произвольные точки  $M, N, E, F, K$ . Найдите сумму

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{FK}.$$

Ответ: \_\_\_\_\_.

Задание 6. Дан треугольник  $ABC$ . Выразите вектор  $\overrightarrow{CM}$  через векторы  $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$  и  $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$  (рисунок 26).

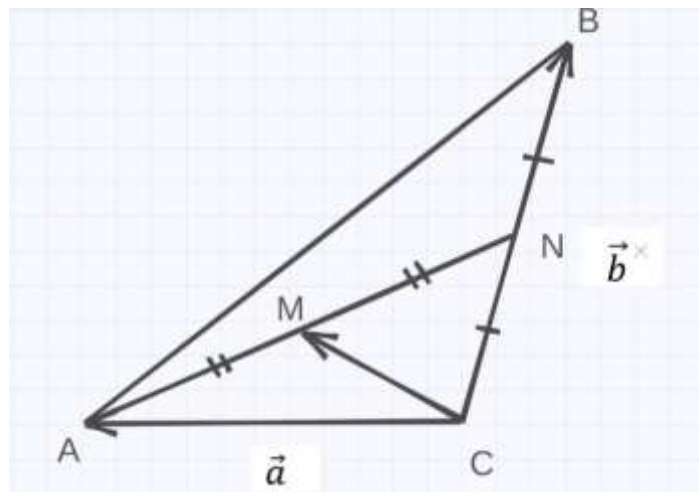


Рисунок 26 – Чертеж к заданию 5

Ответ: \_\_\_\_\_.

Задание 7. Вычислите скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $\vec{a}(-3; -3)$  и  $\vec{b}(6; -10)$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

Задание 8. В ромбе  $ABCD$  заданы координаты его вершин  $A(3; 4), B(8; 6)$ ,

$C(3; 8), D(-2; 6)$ . Найдите косинус угла между векторами  $\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{CD}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

## 2.4 Создание интерактивного тестирования в Geogebra

GeoGebra 3D является свободно-распространяемой математической программой. Она позволяет сочетать геометрическое, алгебраическое и числовое представление математических объектов в интерактивной форме. Данная программная среда не требует высоких компьютерных познаний и является интуитивно-понятной для пользователя.

В программе можно создавать всевозможные конструкции из точек, отрезков, прямых, векторов, строить графики функций, серединные перпендикуляры, биссектрисы углов, касательные, перпендикулярные и параллельные заданной прямой линии или отрезки, определять длины отрезков, площади многоугольников и другое. Использование такой программы в процессе обучения геометрии позволяет создать динамические образы математических объектов. При этом система операций соответствует законам геометрии. Таким образом учащиеся могут самостоятельно смоделировать геометрический объект, выявить его характеристики «опытным» путем.

Рассмотрим возможности применения Geogebra для создания тестов.

При создании теста можно оперировать следующими элементами:

1. *Текст.* Инструмент позволяет дополнить графическую информацию текстовой. Текст может быть статическим(неизменным), динамическим (изменяемый, например, в процессе общения с пользователем).

2. *Апплет Geogebra.* Апплетом называют небольшую программу, которая работает в контексте некоторого приложения и используется для выполнения некоторой узконаправленной задачи. GeoGebra позволяет добавлять апплеты других пользователей, которыми они поделились, загружать апплеты, а также создавать их самостоятельно.

3. *Question.* Данный инструмент позволяет создавать тестовое задание с открытым ответом (то есть ввод текста пользователем) и с

закрытым ответом (в качестве ответа возможен как одиночный, так и множественный выбор).

4. *Media*. Помимо вышеуказанных инструментов, составитель теста может добавить видео, рисунок, граффити, прикрепить PDF-файл или ссылку.

После разработки всех тестовых заданий автор может настроить формат доступа к тесту: доступ по ссылке или уникальному коду, общедоступный тест, личный (доступен только автору теста).

После того, как автор тестирования запускает его, тестируемые имеют доступ к заданиям и могут приступать к их выполнению. Автору доступна информация о количестве выполненных заданий в режиме реального времени.

Если тестирование предполагает ограниченное время выполнения, автор имеет возможность приостановить его с помощью кнопки «Pause». После этого тестируемые не смогут вносить изменения в задания и продолжать выполнение заданий.

Тестирование в среде Geogebra позволяет оценить результаты освоения материала как группы обучающихся, так и каждого обучающегося индивидуально, реализовав дифференцированный подход в обучении, оптимизировать учебный процесс, расширить кругозор обучающихся.

Рассмотрим процесс разработки в среде Geogebra на примере создания теста «Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число».

Для работы в данной среде необходимо пройти процесс регистрации. После регистрации автору необходимо пройти в раздел «Resources», где будут отображаться доступные автору уроки («Lesson»).

Нажмите кнопку «Create» и выпадающем окне выберите «Activity». Таким образом мы попадаем в конструктор «активности», который будем наполнять заданиями (элементами).

В поле «Заголовок» введем название нашего теста, указанное выше. Если тестирование вариативное, следует указать номер варианта.

В настройке видимости выберем «Доступен по ссылке». Таким образом, доступ к тесту получают только владельцы ссылки.

Задание 1 подразумевает краткий ответ. Выберем элемент «Question». Пользователю доступно 2 поля ввода: Первое – ввод вопроса, второе – ввод ответа. Для вставки математических элементов в текст будем использовать кнопку «Вставить математику». После нажатия кнопки «Готово» автору доступен конечный вид тестового задания. В нашем случае он будет выглядеть как на рисунке (рисунок 27).

Задание 1.

Равенство  $(a + b) + c = a + (b + c)$  называется




Рисунок 27 – Конечный вид тестового Задания 1

Задания 6 и 7 также подразумевают краткий ответ. Соответственно, их разработка в Geogebra аналогична.

Задание 2 подразумевает тестовое задание с выбором ответа. Кроме этого, необходимо выбрать верное изображение разности векторов. Для создания такого изображения будем использовать апплет Geogebra, а для вопроса – элемент «Question» с выбором ответа.

Работа над элементом «Question» будет отличаться тем, что в редакторе элемента выберем «Multiple choice», укажем варианты ответов, а галочкой отметим верный (если верных ответов нескольких, необходимо отметить галочкой каждый из них).

Приступим к созданию апплета. Он послужит рисунком с изображениями вариантов ответов. Выберем элемент «Апплет Geogebra» – «Создать апплет» – «Geometry». Окно создания апплета имеет следующий вид (рисунок 28).

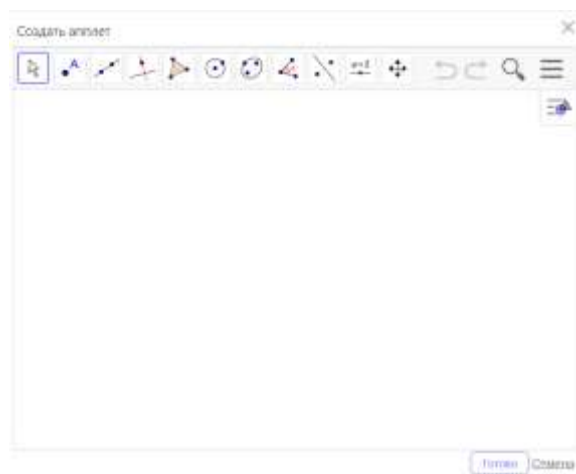


Рисунок 28 – Окно создания апплета Geogebra

Настроим сетку, выбрав на панели инструментов кнопку «Сетка». Таким образом мы выбираем систему координат, нам нужна прямоугольная декартова система координат. Можно приступить к добавлению векторов на апплет.

Отметим, что вектор можно построить, указав начальную и конечную точки. Следовательно, сначала эти точки необходимо отметить на апплете. После того, как точки отмечены, нужно выбрать кнопку «Вектор» и выбрать точки, начало и конец. Вектор построится автоматически. Для того, чтобы векторы и точки были неподвижны, необходимо в свойствах объекта отметить «Закрепить объект». Иначе тестируемый будет иметь возможность двигать точки и векторы. Добавим подписи каждого рисунка и апплет готов (рисунок 29).



Задание 2.

4 ученика попросили построить сумму двух векторов, изображенных черным цветом. Каждый из учеников синим вектором изобразил сумму; 3 ученика выполнили построение неверно, а 1 верно. Выберите вариант ответа, на котором сумма векторов изображена верно.

- А
- Б
- В
- Г

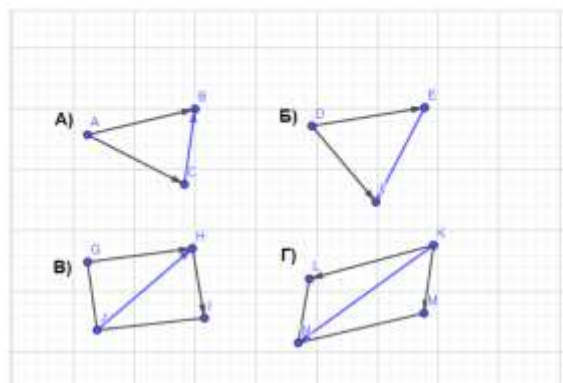


Рисунок 29 – Конечный вид Задания 2

Аналогичным образом могут быть построены чертежи для заданий 6, 8, 10.

Рассмотрим разработку задания 3. Оно предполагает построение учащимся суммы векторов по правилу треугольника. То есть для интерактивного построения суммы векторы должны быть подвижны. Создадим апплет, подобный апплету в задании 2. Отложим 2 вектора  $\overrightarrow{CB}$  и  $\overrightarrow{AD}$ , но закреплять объекты не станем. Так мы даем возможность учащимся двигать элементы. Добавим третий вектор  $\overrightarrow{EF}$ , который и будет изображение суммы. Он также будет подвижен, так как необходимо будет изменять не только его положение, но и размер. Конечный вид задания представлен на рисунке (рисунок 30).

Задание 3.  
Постройте сумму векторов  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

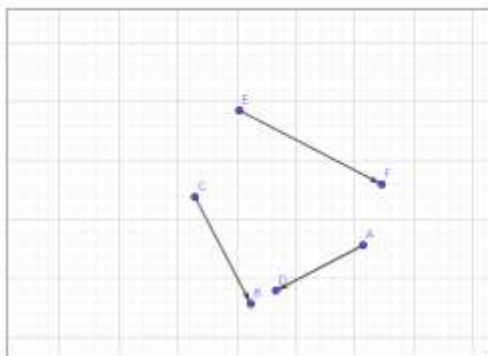


Рисунок 30 – Конечный вид Задания 3

Аналогичным образом могут быть построены чертежи для заданий 4,5,9.

Выводы по 2 главе

Подведем итоги по второй главе:

1. Анализ учебно-методических комплектов по геометрии показал, что разные авторы подходят к определению «вектор» по-разному. Наиболее часто авторы школьных учебников определяют вектор как направленный отрезок, реже – как параллельный перенос. Последовательность изучения темы «Векторы» в учебниках различна. Содержание также имеет некоторые, несущественные отличия. Рассмотренные учебно-методические комплекты предлагают большое количество задачного материала. Задачи имеют различные уровни сложности.

2. На основе анализа предметно-методической литературы, учебно-методических комплектов и рабочих программ по геометрии были разработаны комплекты тестовых средств контроля знаний по теме «Векторы». Тестовые средства разработаны на основе линии учебно-методических комплектов Л. С. Атанасяна. Тестовые задания представлены в том числе на цифровом образовательном ресурсе Geogebra.

3. Проанализированы все типы задач по теме «Векторы», представленные в заданиях Основного Государственного Экзамена (далее – ОГЭ) и Единого Государственного Экзамена (далее – ЕГЭ). Задания ОГЭ

задачи по теме «Векторы» отсутствуют. Задания ЕГЭ содержат задачи по теме «Векторы» базового уровня сложности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тема «Векторы» занимает важное место в курсе геометрии основной школы. Векторы используют в решении не только геометрических, но и физических задач. Таким образом, формируются предметные и межпредметные связи.

Рассмотрены учебники геометрии нескольких авторов. Последовательность изложения темы «Векторы» в каждом из учебников разная. Различно и содержание теоретического материала, подходы к определению вектора. Учебные комплекты содержат разнообразный задачный материал. Задачи соответствуют теоретическому материалу, различаются по уровню сложности.

Контроль знаний учащихся является неотъемлемым компонентом процесса обучения. Он дает возможность оценить уровень погруженности учащегося в учебный материал, выявить существующие пробелы в знаниях. Тестовая форма контроля знаний является одной из наиболее эффективных.

Анализ учебно-методической литературы, материала для контроля знаний учащихся по теме «Векторы» позволяет сделать вывод о том, что тестовые средства контроля знаний по теме «Векторы» могут успешно применяться в процессе изучения данной темы.

В работе были рассмотрены теоретические аспекты использования тестовых средств контроля знаний: требования, предъявляемые к тестовым заданиям, этапы разработки, основные разновидности тестовых заданий, недостатки и преимущества использования.

Вышеизложенный материал позволил нам разработать комплекты тестовых заданий для учащихся 9 классов по теме «Векторы» учебной линии Л. С. Атанасяна, с использованием цифрового образовательного ресурса Geogebra.

Подводя итог результатов выпускной квалификационной работы, можно заключить, что все задачи были выполнены, цель работы достигнута.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Аксаковская, Л. Н.** Трудности изучения темы «Векторы» в школьном курсе математики / Л. Н. Аксаковская, Г. М. Ёлкина // Инженерные и социальные системы. – 2016. – С. 83–90.
2. **Александров, А. Д.** Педагогические статьи разных лет / А. Д. Александров; составители А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – Санкт-Петербург : СМЮ Пресс, 2016. – 216 с. : ил. – ISBN 978-5-7704-0317-6.
3. **Атанасян, Л. С.** Геометрия. Методические рекомендации. 9 класс: учебное пособие для общеобразовательных организаций / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков. – Москва : Просвещение, 2015. – 96 с. – ISBN: 978-5-09-034833-1.
4. **Атанасян, Л. С.** Геометрия. 7-9 классы : учебник для общеобразовательных учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев. – 14-е издание – Москва : Просвещение, 2023. – 416 с. – ISBN: 978-5-09-102538-5.
5. **Балыхина, Т. М.** Словарь терминов и понятий тестологии / Т. М. Балыхина. – Москва : Русский язык. Курсы, 2006. – 96 с.
6. **Буцко, Е. В.** Геометрия: 8 класс : методическое пособие / Е. В. Буцко, А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский. – Москва : Вентана-Граф, 2015. – 152 с. – ISBN: 978-5-360-07614-8.
7. **Глейзер, Г. И.** История математики в школе, 9-10 классы : пособие для учителей / Г. И. Глейзер. – Москва : Просвещение, 1964. – 351 с.
8. **Денищева, Л. О.** Разработка педагогических тестов по математике / Л. О. Денищева, Т. Г. Михалева, Т. А. Корешкова. – Москва : Вако, 2014. – 192 с.
9. **Залесский, М. Л.** Дидактические возможности электронного тестирования / М. Л. Залесский // Школьные технологии. – 2018. – № 3. – С. 63–69.

10. **Мельникова, Н. Б.** Об изучении темы «Векторы на плоскости» / Н. Б. Мельникова // Математика в школе. – 2016. – № 3. – С. 83–90.
11. **Мерзляк, А. Г.** Геометрия : 9 класс : учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Москва : Вентана-Граф, 2014. – 240 с. – ISBN: 978-5-360-05311-8.
12. **Мищенко, Т. М.** Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии : 8 класс : к учебнику А.В. Погорелова «Геометрия. 7-9 классы» / Т. М. Мищенко. – Москва : Экзамен, 2014. – 206 с. – ISBN 978-5-377-07594-3.
13. **Погорелов, А. В.** Геометрия. 7-9 классы : учебник для общеобразовательных организаций / А. В. Погорелов. – 2-е издание – Москва : Просвещение, 2014. – 240 с. – ISBN: 978-5-09-032301-7.
14. Примерная основная образовательная программа основного общего образования // Реестр примерных основных общеобразовательных программ : [сайт]. – 2022. – URL: <https://fgosreestr.ru/poop/primernaia-osnovnaia-obrazovatelnaia-programma-osnovnogo-obshchego-obrazovaniia-2> (дата обращения: 5.04.2024).
15. **Равен, Д.** Педагогическое тестирование: проблемы, заблуждения, перспективы / Д. Равен. – Москва : Знание, 2017. – 144 с.
16. **Тимофеева, М. С.** Независимая оценка знаний обучающихся / М. С. Тимофеева // Инновации в образовании. – 2018. – № 10. – С. 80–87.
17. **Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования** [Текст]. – Москва : Просвещение, 2011. – 47 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Материалы к тесту 1

Ссылка на тест «Понятие вектора. Равенство векторов. Откладывание вектора от точки» на цифровом образовательном ресурсе Geogebra  
Вариант 1: <https://www.geogebra.org/classroom/jsrnn4bf> .

Вариант 2: <https://www.geogebra.org/classroom/fzx99wzm> .

QR-код на тест «Понятие вектора. Равенство векторов. Откладывание вектора от точки» на цифровом образовательном ресурсе Geogebra  
(рисунок А.1, рисунок А.2)



Рисунок А.1 – Вариант 1



Рисунок А.2 – Вариант 2

Ответы к тестовым заданиям по теме «Понятие вектора. Равенство векторов. Откладывание вектора от точки»

Вариант I

*Задание 1. В).*

Задание 2.

Пары коллинеарных векторов:  $\vec{a} \parallel \vec{d}$ ,  $\vec{b} \parallel \vec{c}$ .

Пары противоположно-направленных векторов:  $\vec{b} \updownarrow \vec{c}$ .

Задание 3. Векторы называются равными, если они сонаправлены и имеют равные длины(модули).

Задание 4. Комментарии к решению представлены на рисунке А.3.

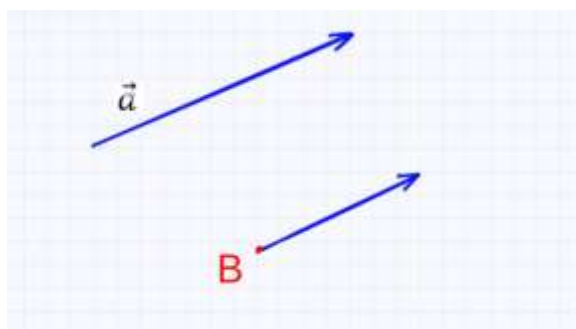


Рисунок А.3 – Комментарии к решению Задания 4

Задание 5. Комментарии к решению представлены на рисунке А.4.

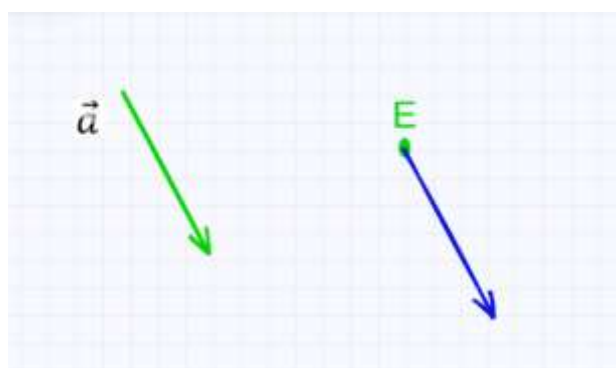


Рисунок А.4 – Комментарии к решению Задания 5

### Вариант II

Задание 1. Г)

Задание 2.  $\overrightarrow{DC}$  и  $\overrightarrow{CD}$  – противоположные.  $\overrightarrow{DC}$  и  $\overrightarrow{CB}$  – ни одно название не подходит.  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{DC}$  – равные.  $\overrightarrow{BA}$  и  $\overrightarrow{DC}$  – противоположно-направленные.

Задание 3. Вектором или направленным отрезком называется отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек является началом, а какая – концом.

Задание 4. Комментарии к решению представлены на рисунке А.5.





Рисунок А.5 – Комментарии к решению Задания 4

Задание 5. Комментарии к решению представлены на рисунке А.6.



Рисунок А.6 – Комментарии к решению Задания 5

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### Материалы к тесту 2

Ссылка на тест «Понятие вектора. Равенство векторов.

Откладывание вектора от точки» на цифровом образовательном ресурсе  
Geogebra

Вариант 1: <https://www.geogebra.org/classroom/tyfvguh3> .

Вариант 2: <https://www.geogebra.org/classroom/uysgrphy> .

QR-код на тест «Понятие вектора. Равенство векторов. Откладывание  
вектора от точки» на цифровом образовательном ресурсе Geogebra  
(рисунок Б.1, рисунок Б.2)



Рисунок Б.1 – Вариант 1



Рисунок Б.2 – Вариант 1

Ответы к тестовым заданиям по теме «Понятие вектора. Равенство  
векторов. Откладывание вектора от точки»

Вариант I

Задание 1. Равенство  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  называется ассоциативным (сочетательным) законом сложения векторов.

Задание 2. Г).

Задание 3. Комментарии к решению представлены на рисунке Б.3.

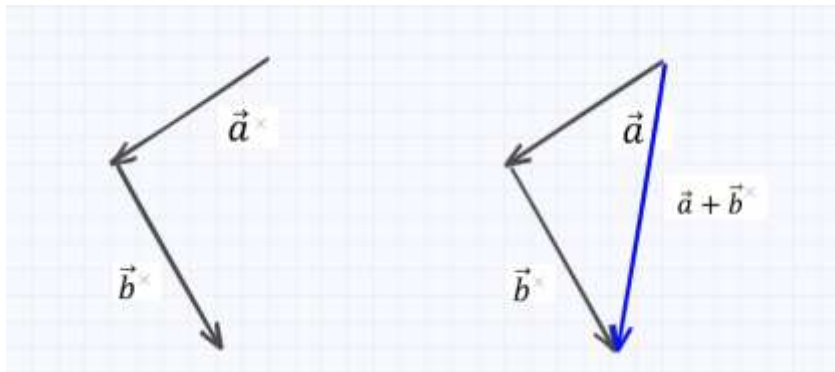


Рисунок Б.3 – Комментарии к решению Задания 3

Задание 4. Комментарии к решению представлены на рисунке Б.4.

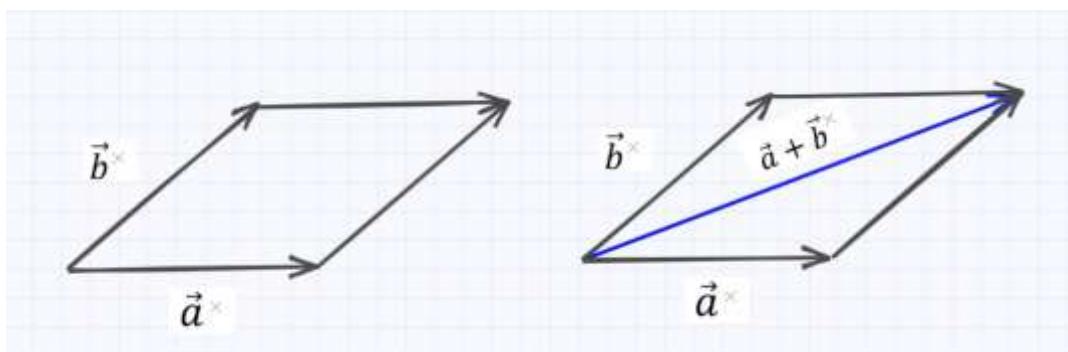


Рисунок Б.4 – Комментарии к решению Задания 4

Задание 5. Комментарии к решению представлены на рисунке Б.5.

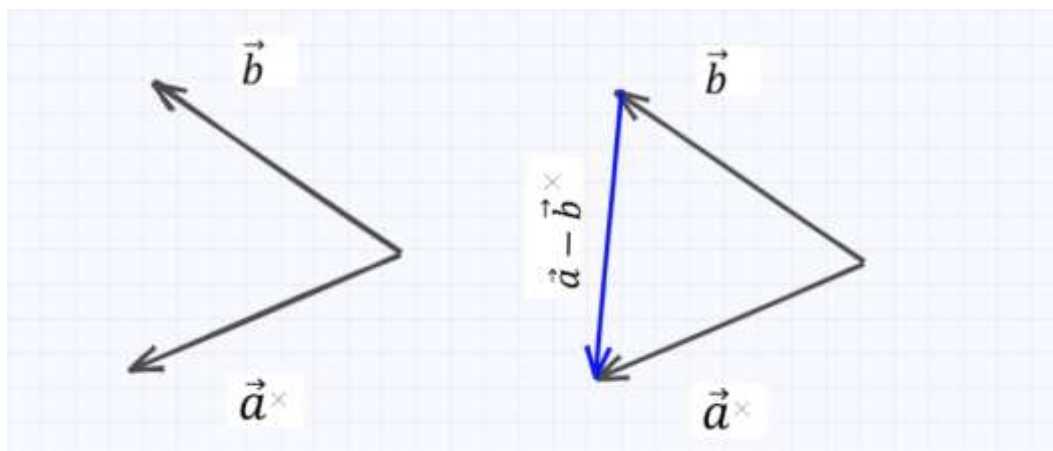


Рисунок Б.5 – Комментарии к решению Задания 5

Задание 6.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD}$ .

Ответ:  $\overrightarrow{AD}$ .

Задание 7.  $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ .

Задание 8. 3)  $\vec{m}$ .

Задание 9. Комментарии к решению представлены на рисунке Б.6.

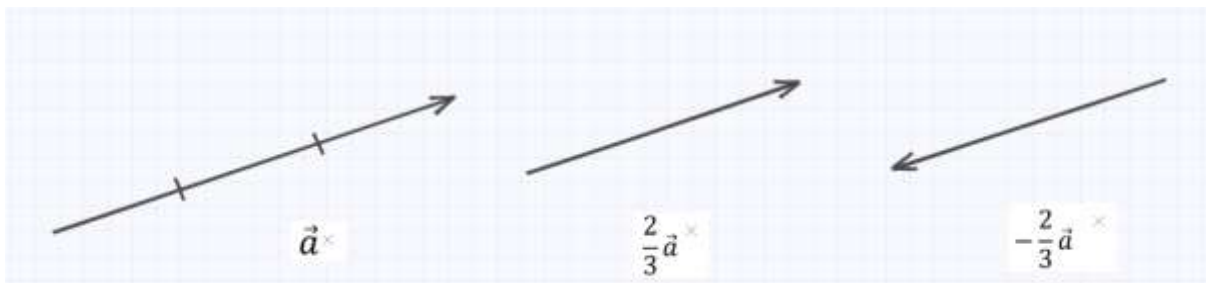


Рисунок Б.6 – Комментарии к решению Задания 9

Задание 10. 2).

### Вариант II

Задание 1.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ .

Задание 2. Б).

Задание 3. Комментарии к решению представлены на рисунке Б.7.

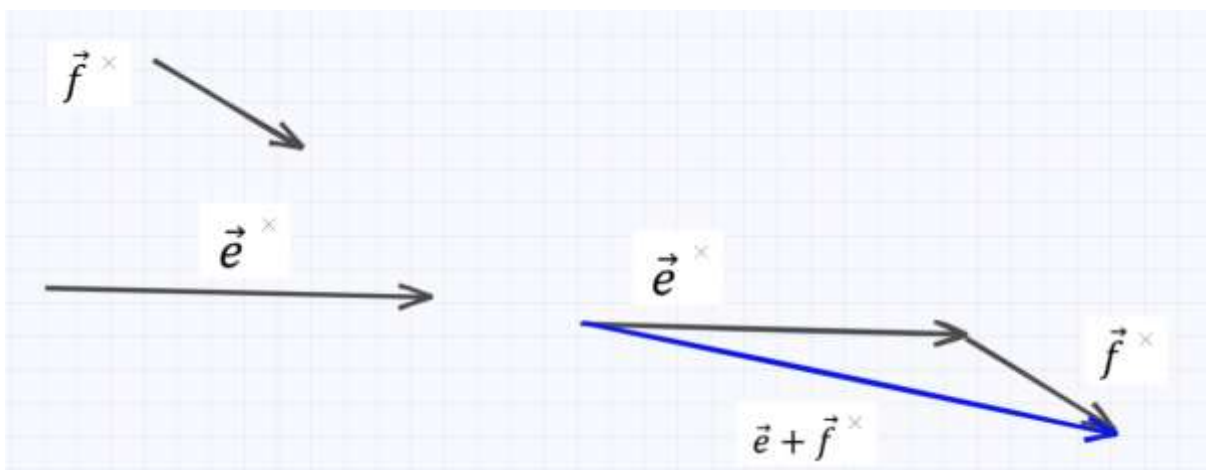


Рисунок Б.7 – Комментарии к решению Задания 3

Задание 4. Комментарии к решению представлены на рисунке Б.8.

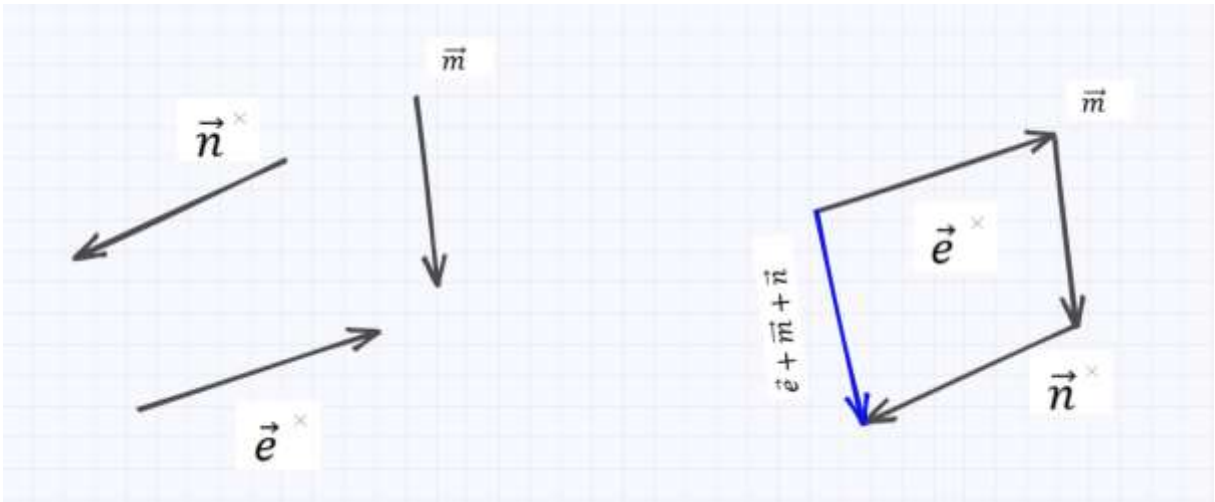


Рисунок Б.8 – Комментарии к решению Задания 4

Задание 5. Комментарии к решению представлены на рисунке Б.9.

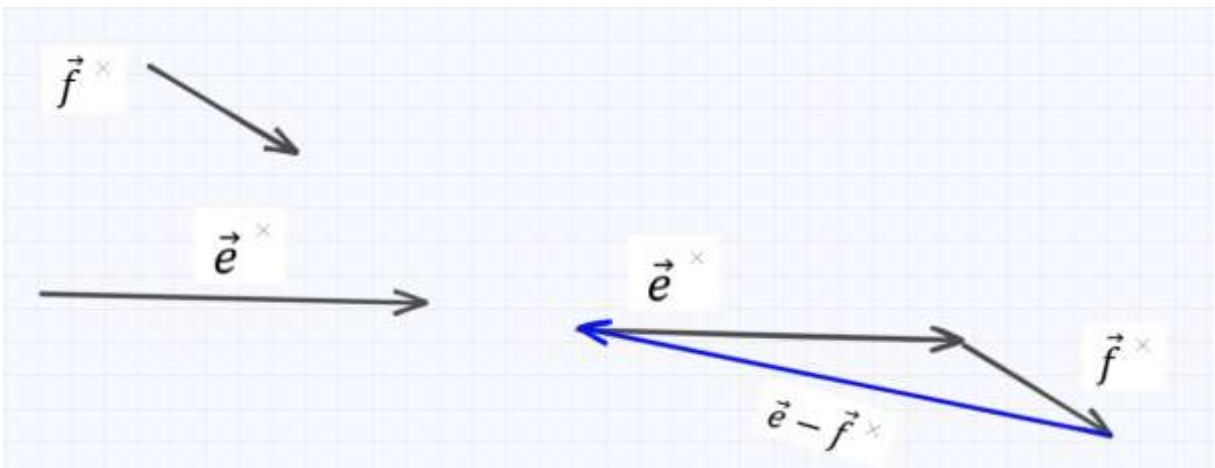


Рисунок Б.9 – Комментарии к решению Задания 5

Задание 6.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$ .

Ответ:  $\vec{0}$ .

Задание 7.  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AB} + (-2\overrightarrow{OB}) = \vec{a} + (-2\vec{b})$ .

Задание 8. 4)  $\vec{e}$ .

Задание 9. Комментарии к решению представлены на рисунке Б.10.

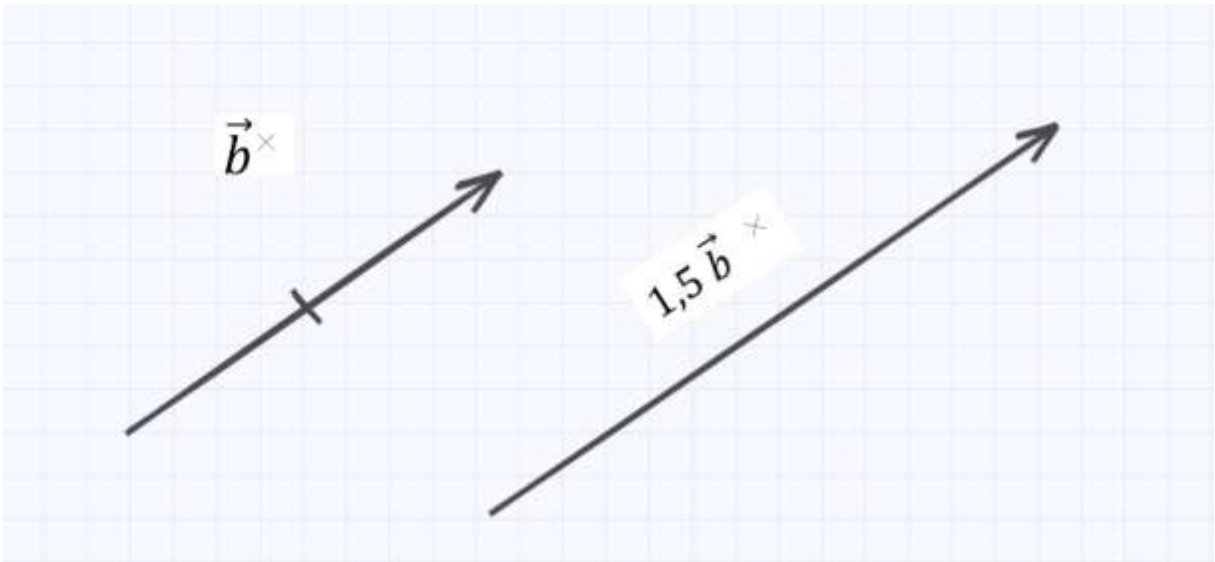


Рисунок Б.10 – Комментарии к решению Задания 9  
Задание 10.3).

## ПРИЛОЖЕНИЕ В.

### Материалы к тесту 3

Ссылка на итоговый тест по теме «Векторы» на цифровом образовательном ресурсе Geogebra

<https://www.geogebra.org/classroom/akczyky8> .

QR-код на итоговый тест по теме «Векторы» на цифровом образовательном ресурсе Geogebra (рисунок В.1)



Рисунок В.1 – QR код итогового теста

Ответы к тестовым заданиям итогового теста по теме «Векторы»

Задание 1.  $\overrightarrow{AB}(6 - 10; 1 - (-2)) = \overrightarrow{AB}(-4; 3)$  – координаты вектора.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$  – длина вектора.

Задание 2.  $x = 14, y = 7$ .

Задание 3. Б) и Г).

Задание 4.  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ .

Задание 5.  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{FK} = \overrightarrow{NK}$ .

Задание 6.  $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ .

Задание 7.  $(\vec{a}, \vec{b}) = 12$ .

Задание 8.  $\frac{21}{29}$ .