



МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГТТУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Задачи повышенной сложности в школьном курсе
математики как средство развития критического мышления


Выпускная квалификационная работа по направлению
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)



Направленность программы бакалавриата
«Математика. Информатика»

Форма обучения: очная

Проверка на объем заимствований:
66,08 % авторского текста

Работа рекомендована к защите
рекомендована / не рекомендована
«17» июня 2024 г.

зав. кафедрой математики и МОМ
 Звягин К.А.

Выполнила:
Студентка группы
ОФ-513/204-5-1
Локтина Мария Сергеевна 
Научный руководитель:
к. ф.-м. н., доцент кафедры
МиМОМ
 Шарафутдинова А.М.

Челябинск
2024

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗВИТИЯ КРИТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ.....	6
1.1 Различные подходы к определению понятий «критичность» и «критическое мышление»	6
1.2 Методы и приемы развития критического мышления.....	11
1.3 Различные приемы и средства формирования критического мышления учащихся общеобразовательной школы при обучении.....	21
ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ КРИТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ	31
2.1 Понятие задачи повышенной трудности по математике	31
2.2 Развитие критического мышления при решении задач с параметрами.....	33
2.3 Разработка заданий, направленных на развитие критического мышления обучающихся при решении задач с параметрами	41
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	58
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	60
ПРИЛОЖЕНИЕ А	63

ВВЕДЕНИЕ

Современное образование за последнее время делает многое для подготовки мыслящих личностей. Сегодня человек должен быть креативным, мобильным, уметь правильно использовать личное время для достижения поставленных целей, обладать самоконтролем и сохранять внутреннюю стабильность при любых обстоятельствах.

Технологии развития критического мышления можно отнести к современным образовательным технологиям в условиях введения ФГОС. Данная образовательная система подразумевает использование различных приемов и методов технологий развития критического мышления для развития личности учащихся. Как и в ФГОС, целью технологии критического мышления является не просто дать знания ребёнку, а научить его учиться и добывать знания самостоятельно. Разрешает достичь таких результатов, как умение работать с информацией, умение выражать свои мысли, быть корректным по отношению к иным суждениям. Развитие критического мышления создаёт умение производить свое собственное мнение, умение решать проблемы, умение работать сообща в группе или коллективе, способность выстраивать взаимоотношения с другими людьми. Целью технологии развития критического мышления является (далее – ТРКМ) становление мыслительных способностей обучающихся, которые важны не только в учёбе, но также необходимы и в жизни.

Использование на уроках математики некоторых приемов данной технологии дает возможность для развития личности ребёнка. Позволяет развить его познавательные способности.

Приемы и методы ТРКМ помогают ученику самому конструировать учебный процесс, самому отслеживать направление своего развития и увидеть конечный результат.

А применение задач повышенной сложности, считается эффективным методом формирования критического мышления.

Это обусловило **актуальность** нашего исследования, посвященного изучению применения технологий развития критического мышления учащихся на уроках математики.

Объект исследования – процесс обучения математике в общеобразовательном учреждении.

Предмет исследования – развитие критического мышления учащихся на уроке математики.

Цель работы – разработать комплект заданий по теме «Задачи с параметрами», направленных на развитие критического мышления у обучающихся.

С учётом цели и предмета исследования определены **задачи исследования:**

1. Проанализировать психолого-педагогическую, методическую литературу и Интернет-ресурсы с целью выделения сущности понятия и структуры критического мышления.
2. Рассмотреть методы и приемы развития критического мышления при обучении математике.
3. Рассмотреть особенности применения методов и приемов развития критического мышления учащихся в процессе обучения математике на примере решения задач с параметрами.
4. В соответствии с выделенными требованиями разработать совокупность заданий, направленных на развитие критического мышления у обучающихся при решении задач с параметрами.

Гипотеза исследования состоит в том, что систематическое применение задач повышенной сложности в процессе обучения математике может способствовать более эффективному формированию навыков критического мышления.

А повышение качества математической подготовки учащихся в целом достигается, если выявить методические особенности формирования критического мышления учащихся при обучении

математике в общеобразовательной школе и с учетом этих особенностей разработать соответствующую методику.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованных источников и приложения.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗВИТИЯ КРИТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ

1.1 Различные подходы к определению понятий «критичность» и «критическое мышление»

Способность критически мыслить была важна во все времена, в XXI веке каждому человеку требуется принимать большое количество важных решений.

О критичности мышления говорит умение дать оценку рациональности способов решения задач, как в целом, так и отдельных операций; осуществить самоконтроль своей деятельности, спрогнозировать результат использования различных способов решения задач.

В психолого-педагогической литературе встречаются различные точки зрения на понятие критичности мышления.

В толковом словаре С. И. Ожегова критичность трактуется как «способность относиться с критикой к чему-либо, видеть недостатки».

В философии критическое мышление связывают с:

- 1) постановкой перед собой вопросов и осуществление планомерного поиска ответов;
- 2) вскрытием причин и последствий определенных фактов;
- 3) проявлением вежливого скептицизма, сомнением в общепринятых истинах, постановкой постоянного вопроса: «а что, если ?..»;
- 4) выработкой собственной точки зрения по определенному вопросу и способность ее отстаивать логическими доводами;
- 5) проявлением повышенного внимания к аргументам оппонента и логического их осмысления [2].

Рассмотрим различные подходы к понятию критического мышления в трудах отечественных и зарубежных психологов. В психологии чаще всего под критическим мышлением понимают использование когнитивных

техник или стратегий, которые увеличивают вероятность грамотного конечного результата.

О. К. Тихомиров в работе «Психология мышления» приводит несколько подходов к понятию критичность в отечественной психологии:

1) критичность – это «умение строго оценивать работу мысли, тщательно взвешивать все доводы за и против намечающихся гипотез и подвергать эти гипотезы всесторонней проверке» (Б. М. Теплов);

2) проверка, критика, контроль характеризуют мышление как сознательный процесс (С. Л. Рубинштейн);

3) взаимосвязь самостоятельности ума с его критичностью, то есть с умением не поддаваться внушающему влиянию чужих мыслей, а строго и правильно оценивать их, видеть их сильные и слабые стороны, вскрывать, то ценное, что в них имеется, и те ошибки, которые допущены в них; критичность является необходимой предпосылкой творческой деятельности (А. А. Смирнов);

4) критичность – это умение обдуманно действовать, сличать, проверять и исправлять свои действия в соответствии с ожидаемыми результатами (Б. В. Зейгарник).

Кроме того, в работах зарубежного психолога Д. Хелпера, критическое мышление – это:

1) «...использование таких когнитивных навыков и стратегий, которые увеличивают вероятность получения желательного результата; отличается взвешенностью, логичностью и целенаправленностью»;

2) направленное мышление, так как оно нацелено на получение желаемого результата [3].

Автор определяет шесть основных признаков критически мыслящего человека:

1. Готовность к планированию.
2. Гибкость.
3. Настойчивость.

4. Готовность исправлять свои ошибки.
5. Осознание.
6. Поиск компромиссных решений.

В педагогике под критическим мышлением понимают:

1) один из способов интеллектуальной деятельности человека, который характеризуется следующими умениями: определять ложные стереотипы, ведущие к неправильным выводам; выявлять предвзятое отношение, мнение и суждение; уметь отличить факт, от предположения и личного мнения; подвергать сомнению логическую непоследовательность устной и письменной речи; определять суть проблемы и альтернативные пути ее творческого решения; избегать категоричности в утверждениях и т. д. (Г. Д. Дмитриев);

2) специфическая форма оценочной деятельности субъекта познания, направленная в самом общем смысле на выявление степени соответствия (или несоответствия) того или иного продукта принятым эталонам и стандартам, включающая определенные процедуры и способствующая смысловому самоопределению субъекта познания по отношению к самым разнообразным проявлениям окружающего мира и его продуктивному преобразованию (В. А. Попков);

3) интеллектуально организованный процесс, направленный на активную деятельность по осмыслению, применению, анализу, обобщению или оценке информации, полученной или создаваемой путем наблюдения, опыта, рефлексии, рассуждений или коммуникации как руководство к действию или формированию убеждения (Д. Дьюи);

4) прижизненно формирующееся мышление, развитие которого можно ускорить с помощью специально организованного обучения, тренируя школьников, прежде всего в нахождении и опровержении ошибок, а также в рецензировании ученических работ (С. И. Векслер, [6]). Отметим, что ещё П.Ф. Каптерев (1849-1922 гг.) доказывал необходимость в школьном процессе обучения «создавать» у ребенка такое мышление,

посредством которого учащийся сам в состоянии вырабатывать субъективно новые знания. Развитие критичности ведёт к формированию у человека критического мышления. Кроме того, Д. Дьюи отмечает, что все подходы к понятию критического мышления в психологии, педагогике и смежных науках довольно близки по смыслу, и предлагает определение данного понятия, передающего суть данных подходов: «критическое мышление – это использование когнитивных техник или стратегий, которые увеличивают вероятность получения желаемого конечного результата»; развитие критичности ведёт к формированию у человека критического мышления [14].

Что же такое критическое мышление? По мнению С. В. Лаптинской, «думать критически» означает:

- проявлять любознательность и использовать исследовательские методы: ставить перед собой вопросы и осуществлять планомерный поиск ответов;
- не довольствоваться фактами, а вскрывать причины и последствия этих фактов;
- проявлять вежливый скептицизм, сомнение в общепринятых истинах, ставить постоянный вопрос: «а что, если ?...»;
- вырабатывать свою точку зрения по определенному вопросу и способность отстоять эту точку зрения логическими доводами; проявлять повышенное внимание к аргументам оппонента и логически их осмысливать.

В теории методики обучения математике Е. Г. Бурмистровой дается такое определение критичности мышления: «Критичность мышления – это очень важное качество, которое учитель может всячески поддерживать и развивать. Автор подчеркивает, что возможности уроков математики в формировании критичности мышления трудно переоценить; в процессе обучения математике значительное место отводится выстраиванию рассуждений и обоснований, поиску решения доказательства, опровержению и проверке найденного решения».

М. И. Зайкин [8] связывает критичность мышления учащихся с их умением дать оценку рациональности способов решения задач, как в целом, так и отдельных операций; осуществить самоконтроль своей деятельности, спрогнозировать результат использования различных способов решения задач.

А. В. Тихоненко, Ю. В. Трофименко под критическим мышлением понимают такую систему критических действий, как:

- проявление детской любознательности;
- выработку собственной точки зрения по определенному вопросу сложившейся ситуации;
- способность наблюдать, сравнивать, определять, отстаивать выработанную точку зрения четко обоснованными логическими выводами;
- способность прогнозировать ситуацию, проблему и умение использовать в практической деятельности исследовательские методы [3].

По мнению авторов, критическое мышление направлено на умение:

- 1) исследовать факты, доказательства, надежность источников информации;
- 2) ставить в конкретных ситуациях рациональные вопросы;
- 3) вырабатывать дополнительные разнообразные подкрепления выдвинутых аргументов, корректно определяя проблему;
- 4) анализировать идеи, предложения и принимать независимые продуманные решения;
- 5) занимать критическую позицию, мыслить нестандартно;
- 6) быть коммуникативным: учитывать другие объяснения, быть терпимым, толерантным, избегать изложения эмоциональных рассуждений, объяснений [5].

Таким образом, критическое мышление подразумевает обязательное присутствие этапа проверки и оценки предположений перед ответом на поставленный вопрос с точки зрения их достоверности и значимости, в противовес оперированию готовыми фразами, подсказанными памятью,

без участия их творческой переработки [6]. Под критичностью мышления мы будем понимать специфическую форму оценочной деятельности субъекта познания, направленную в самом общем смысле на выявление степени соответствия (или несоответствия) того или иного продукта принятым эталонам и стандартам, включающую определенные процедуры и способствующую смысловому самоопределению субъекта познания по отношению к самым разнообразным проявлениям окружающего мира и его продуктивному преобразованию.

1.2 Методы и приемы развития критического мышления

Рассмотрим различные подходы к определению понятия мышления, представленные в различной психолого-педагогической и методической литературе.

В «Педагогическом энциклопедическом словаре» под мышлением понимают опосредованное отражение внешнего мира, которое опирается на впечатления от реальности и даёт возможность человеку в зависимости от усвоенных им знаний, умений и навыков правильно оперировать информацией, успешно строить свои планы и программы поведения.

В педагогике Г. М. Коджаспирова А. Ю. Коджаспиров рассматривают мышление как познавательная деятельность личности, характеризующаяся обобщенным и опосредованным отражением действительности.

Известный психолог А. Н. Леонтьев считает, что «жизненный правдивый подход к обучению – это такой подход к отдельным образовательным задачам, который исходит из требований к человеку: каким человек должен быть в жизни и чем он должен быть для этого вооружён, какими должны быть его знания, его мышление, его чувства и т. д. » [8].

Д. Дьюи подчеркивает, что если с этой точки зрения посмотреть на задачи общего образования и, в частности, на задачи школьного курса

математики, то можно прийти к выводу, что одной из первоначальных является задача развития мышления учащихся.

Формирование критического мышления учащихся требует внедрения таких известных методик и методик формирования процесса, как экспертный анализ и оценка действительных данных, сравнение, соотнесение, обобщение, установление причинно-следственных связей, подтверждение предположения и опровержение.

Психологи и исследователи в области теории и методики обучения математике выделяют различные виды мышления:

- теоретическое и практическое;
- словесно-логическое и наглядно-действенное;
- аналитическое и интуитивное;
- реалистическое и артистическое;
- продуктивное и репродуктивное;
- произвольное и непроизвольное.

Для развития естественно-математического мышления учащихся при обучении решению задач, необходимо целенаправленное постепенное формирование у них таких основных умений и навыков, как:

1. Анализ и синтез.
2. Сравнение.
3. Обобщение.
4. Конкретизация.
5. Абстрагирование.

Анализ – это мысленное разложение целого на части или мысленное выделение из целого его сторон, действий, отношений.

Синтез – это обратный анализу процесс мысли, это объединение частей, свойств, действий, отношений в одно целое. Анализ и синтез – две взаимосвязанные логические операции. Синтез, как и анализ, может быть как практическим, так и умственным. Анализ и синтез сформировались в практической деятельности человека.

Сравнение – это установление сходства и различия предметов и явлений. Сравнение основано на анализе. Прежде чем сравнивать объекты, необходимо выделить один или несколько их признаков, по которым будет осуществлено сравнение [7].

Д. М. Шакирова отмечает, что в процессе критического мышления в первую очередь доминирует такая мыслительная операция как сравнение, то есть сопоставление по типу: правильно – неправильно, больше – меньше, верно – неверно и т. д.»

Сравнение может быть односторонним, или же неполным, и многосторонним, либо наиболее полным. Сравнение, как анализ и синтез, может быть разных уровней – поверхностное и более глубокое. В этом случае мысль человека идёт от внешних признаков сходства и различия к внутренним, от видимого к скрытому, от явления к сущности.

Обобщение – это выделение в предметах и явлениях общего, которое выражается в виде понятия, закона, правила, формулы и тому подобное. Обобщение плотно сплетено с абстракцией. В обучающей тренировочной деятельности обобщение, как правило, проявляется в определениях, выводах, правилах. Учащимся зачастую трудно выполнить обобщение.

Конкретизация – это процесс, обратный абстрагированию и неразрывно связанный с ним; представляет собой возвращение мысли от общего и абстрактного к конкретному с целью раскрытия содержания.

Абстрагирование – это процесс мысленного отвлечения от некоторых признаков, сторон конкретного с целью лучшего познания его.

Один из типов мышления – творческое мышление, «результатом которого является открытие принципиально нового или усовершенствованного решения той или иной задачи»; критическое мышление представляет собой проверку предложенных решений. Творческое мышление направлено на создание новых идей, а критическое – на выявление их недостатков. Для эффективного решения задач необходимы оба вида мышления, хотя используются они раздельно:

«творческое мышление является помехой для критического, и наоборот» [11].

В. Н. Дружинина отмечает, что критическое мышление является левополушарным, сознательным, вербально-логическим, абстрактно-схематическим, дедуктивным, аналитическим, сукцессионным, а творческое мышление – правополушарным, неосознанным, интуитивным, синтетическим.

А. А. Черных подчеркивает, что в настоящее время главной целью обучения учащихся должно быть развитие у них умения учиться, для чего им необходимо совершенствовать качества мышления, в том числе, его критичность. Так, автор составил сводную характеристику компонентов математического мышления (Таблица 1).

Таблица 1 – Характеристика компонентов математического мышления

Содержание (типы мышления)	Деятельность	Формы (стиль мышления)	Субъективные свойства характера
Конкретное абстрактное (аналитическое, логическое, пространственное, математическое). – индуктивное – функциональное – структурное утилитарное творческое	Наблюдение и опыт; индуктивный; дедуктивный; традуктивный (применение аналогии); моделирование (использование абстрактных математических моделей)	Гибкость. Активность. Целенаправленность Широта. Глубина. Критичность, самокритичность, лаконичность, ясность и точность речи и записи. Оригинальность. Доказательность.	Вкус к исследованию. Способность сосредоточиться. Настойчивость. Склонность к творчеству. Любознательность. Интеллектуальная честность. Точность, правильность. Ясность, сжатость речи. Способность к воображению и фантазии. Удовлетворенность процессом работы и её результатом.

Для развития критического мышления учащихся в школе учителя используют различные технологии. Одна из таких технологий — это педагогическая технология развития критического мышления посредством чтения и письма, разработанная американскими педагогами Дж. Стил, К.

Мередитом и Ч. Темплом. Структура данной технологии состоит из трех этапов:

Этап «Вызов», на котором происходит актуализация уже имеющихся знаний учащегося, побуждение интереса учащегося к получению новых знаний, самостоятельное формулирование учащимся цели приобретения новых знаний. Следовательно, деятельность учителя направлена на активизацию раннее изученного материала и стимулирование учебной деятельности. На данном этапе учащийся также выдвигает предположение по теме занятия и формулирует ряд вопросов, на которые хочет получить ответы.

Для реализации этих задач учитель может использовать следующие методические приемы:

- составление блока известной информации в виде ассоциогаммы;
- рассказ-предположение, по ключевым словам;
- графическая систематизация материала в виде таблиц, кластеров, ментальных карт и т. п.;
- восстановление логической цепочки;
- определение верных и неверных утверждений [2].

Для актуализации знаний и составление из них логической цепочки учитель может использовать прием «кластер» [1]. Учителю необходимо на доске начертить заранее продуманный кластер с пропущенными звеньями, потом задать учащимся вопросы, затем, анализируя ответы учащихся, вместе заполнить кластер правильными ответами. Для стимулирования интереса учащихся к изучаемой теме можно воспользоваться приемом «ассоциации» [13], при этом продемонстрировать тот факт, что каждый по-своему воспринимает и анализирует информацию. Так учитель может предложить учащимся назвать ассоциации на те или иные слова или словосочетания, а затем совместно проанализировать полученные ответы учеников.

Н. В. Ляхова на данном этапе предлагает использовать прием «Корзина идей» и «Дерево предсказаний» [12].

«Корзина идей» используется с целью актуализации знаний и представлений по определенной проблеме. Учащимся в течение двух минут нужно выписать в тетрадь всё, что они знают по представленной проблеме. Далее учитель записывает все данные учащихся на доске в форме понятий, имен, фактов, относящихся к теме. Таким образом, формируется корзина тезисов. Важно отметить, что на данном шаге необходимо записывать все предложения учащихся, даже если они ошибочные, при этом не комментируя и не оценивая правильность предложенных утверждений. Корзина остаётся без изменений в течение всего процесса решения проблемы. На этапе рефлексии можно вернуться к «корзине идей» и внести коррективы (что-то убрать, что-то добавить).

«Дерево предсказаний». Учащимся предлагается сформулировать предположения по представленной теме и оформить их в форме дерева, где ствол дерева – представленная проблема или тема; ветви – то, что возможно или вероятно (предположения); листья – аргументы или факты в пользу предположения. Благодаря данному приему можно также систематизировать знания по представленной теме.

Этап «Осмысление», на котором происходит восприятие учащимся новой информации и корректировка поставленных целей.

На данном этапе учащийся активно работает с текстом, используя при том предложенные учителем методы обработки информации:

- маркировка текста с использованием условных символов, обозначающих определённую характеристику, в соответствии с заданием, например, «V», «+», «-», «?» и т. д.;
- ведение различных записей (заполнение таблиц «известная информация / новая информация»);
- поиск ответов на вопросы, поставленные в первой части занятия;
- заполнение кластеров, таблиц, схем и т. д.;

– установление причинно-следственных связей между блоками информации, составление логических цепочек [10].

На данном этапе учитель может использовать прием «ментальная карта», суть которого заключается в структуризации концепций с использованием графической записи в виде диаграммы связей или древовидной схемы, на которой изображены слова, идеи, задачи или другие понятия, связанные ветвями с центральным понятием или идеей. Прием «шесть шляп» применяется в процессе решения практических задач, когда необходимо справиться с эмоциями или растерянностью. Данный прием подразумевает, что учащийся мысленно надевает шляпу определенного цвета (каждый цвет отвечает за определенный тип мышления – оптимистичный, пессимистичный, стратегический, творческий, эмоциональный, объективный), тем самым разносторонне анализирует рассматриваемый вопрос.

Прием «мозговая атака» можно использовать при обсуждении проблемной ситуации (вопроса). Суть заключается в том, что класс делится на две группы: «генераторы идей» и «аналитики». «Генераторы идей» за оговоренное заранее время предлагают различные пути решения проблемы, затем «аналитики» рассматривают предложенные варианты и высказывают свое мнение по каждой идее. При этом учителю стоит объяснить учащимся, что критика должна быть аргументированной и корректной [12].

Этап «Рефлексия», на котором учащийся размышляет и сравнивает имеющуюся информация с полученной на предыдущем этапе; формирует собственное отношение к рассматриваемой проблеме; развивает творческий характер мышления. Деятельность учителя направлена на стимулирование творческой работы учащихся; обращение внимания учащихся к первоначальным записям, предположениям, их анализ и корректировку.

На данном этапе учитель может использовать следующие приемы:

- возврат к ключевым словам, верным и неверным утверждениям;
- организация устных и письменных круглых столов и проведение различных видов дискуссий;
- написание творческих работ;
- исследования по отдельным вопросам темы и т. д.

Еще одна технология развития критического мышления может считаться Кейс-технология. Кейс технология — это метод проблемного обучения на основе реальных ситуаций. Целью учащихся в данной технологии становится анализ информации и способ решения конкретной проблемы. Данный метод впервые был применен в начале XX века представителями Гарвардской школы бизнеса с целью коллективного решения проблем. В России данная технология стала применяться только к концу XX века. Также ее называют методом анализа конкретных ситуаций (АКС), ситуационные задачи. Кейс технология широко используют в школах бизнеса, в медицине, юриспруденции, экономике, политологии и в других сферах образования. Но данная технология нашла применение и в школе, на таких дисциплинах как математика, биология, информатика и других. Использование данной технологии может решить проблему и показать ученикам, как знания, получаемые в школе, могут помочь в реальной жизни. Ведь это вопрос очень актуален для учащихся [9].

По мнению С. В. Лаптинской, технологии развития критического мышления подразумевает привлечение обучаемых к различным способам и приемам оценочной деятельности (самооценка, взаимооценка). Используя технологию критического мышления, педагог создает такие ситуации, проживая которые учащийся осознал бы себя в обществе в большой степени. Ситуация выбора, диалог, работа в группе, дискуссия – учебные ситуации, обычные для формирования критического мышления.

Обучение критическому мышлению нужно воспринимать как одну из базовых форм подготовки к успешной жизнедеятельности в информационном и пост информационном обществе.

К педагогическим средствам формирования критического мышления отнесены:

- включение в образовательные стандарты и программы целей развития мышления и обогащения содержания, которые способствуют условиям становления критичности ума;
- выделение профессиональных компетенций и системы умений и навыков логически и критически мыслить;
- подготовка учителей, направленная на овладение профессиональными компетенциями в области логического и критического мышления и знаниями о методах и способах их формирования;
- координация исследований в области развития мышления и обмен опытом исследователей и учителей об инновациях в технологиях формирования критического мышления путем публикаций, конференций, семинаров, мастер-классов и специальных проектов [6].

Е. А. Ходос и А. В. Бутенко предлагают использовать на уроках «дидактические игры с использованием техник критического мышления». Формирование данного типа мышления более эффективно при одновременном развитии логического мышления.

В. А. Попков и А.В. Коржуев используют классические приемы формирования критического мышления (диспут, рецензирование и оппонирование).

Д. М. Шакирова приводит четыре этапа формирования критического мышления:

- 1) актуализация знаний, пробуждение интереса, любознательного отношения к теме, определение целей изучения материала;
- 2) осмысление новой информации, критическое чтение и письмо;

3) размышление, или рефлексия, формирование личного мнения и отношения к материалу;

4) обобщение и оценка информации, проблемы, способов ее решения и проявление собственных возможностей [11].

Е. П. Мельникова рекомендует применять следующие приемы технологии критического мышления:

1. Написание эссе – еще один современный прием технологии критического мышления, который позволяет раскрыть интересующую тему и подчеркнуть собственное мнение, возникшее после работы с наглядными источниками информации.

2. Технология «Портфолио» помогает обучающимся не только самоопределяться в изучаемом предмете, но и делать практические выводы в любой жизненной ситуации, то есть реализовывать собственную индивидуальность. Портфолио может включать в себя не только материалы школьных работ, но и листы наблюдения, фрагменты эссе, видеозаписи, проекты и планы выступлений, компьютерные презентации [4].

Дидактическая модель формирования критического мышления охватывает характеристику деятельности обучаемого, которая включает методику работы с информацией, формы, методы и приемы учения и самооценки.

В качестве примера Д. М. Шакирова приводит такие возможные методы и приемы формирования критического мышления, как:

1) самоанализ и самооценка уровня собственной готовности к критическому усвоению материала и анализ критического потенциала проблемы;

2) сочетание репродуктивного и частично-поискового методов учения при выполнении учебных заданий и различных видов критики (критика аналогия, критика-похвала, критика-озабоченность и т. п.);

3) поисковые методы учения, которые применяются при выполнении творческих работ;

4) перенос методов и приемов критического анализа в новые ситуации;

5) применение мыслительных компетенций при выполнении самостоятельных работ (рецензирование, разрешение критических ситуаций, анализ данных Интернет-источников, книг, публичных выступлений и т. п.).

В Мозырском государственном областном лицее учителями предлагается использовать в работе различные методы и приемы для развития критичности мышления учащихся: мозговой штурм; инсерт; ролевая игра; свободное письмо; синквейн; кластер; взаимопрос; перекрестная дискуссия [9].

Так, под кластером в методической литературе понимают графический наглядный способ формирования материала (таблица, схема); под инсертом – способ работы с текстом, который подразумевает использование определенных пометок («+» - ранее известное; «Δ» - новое; «?» - вызывает затруднение); синквейном – метод краткого описания урока с помощью ключевых слов.

Однако, наилучшие условия для развития критического мышления наступает к 14-16 годам. К этому возрасту данные навыки у всех развиты по-разному. Отсюда следует, что психологические основы развития критического мышления учащихся формируется в подростковом возрасте.

1.3 Различные приемы и средства формирования критического мышления учащихся общеобразовательной школы при обучении математики

Перед тем как развивать критическое мышление у обучающихся необходимо определить его начальный уровень.

Так С. Н. Мироненко, Л. П. Тихонова и Н. П. Сиротина выделяют три уровня сформированности критического мышления.

Низкий уровень характеризуется низкой степенью самостоятельности в процессе выполнения заданий. Творческие и рефлексивные умения проявляются слабо. Ученик осознано действует лишь на деятельностном этапе, в содержательном аспекте может быть недопонимание структуры и меры проявления критического мышления.

Средний уровень характеризуется достаточно высокой степенью самостоятельности в процессе выполнения заданий. Учащийся в большинстве случаев способен творчески мыслить и рефлексировать. Ученик осознано действует на деятельностном этапе, в содержательном аспекте может быть недопонимание меры проявления критического мышления. Недостающую информацию учащийся может находить, если он в этом заинтересован. Не всегда верно работает с информацией (может не увидеть главное в тексте).

Высокий уровень характеризуется высокой степенью самостоятельности в процессе выполнения заданий; высокой творческой активностью учащегося. Рефлексивные умения развиты на достаточном уровне, чтобы адекватно оценивать себя, полученную информацию и сам процесс решения заданий. Деятельность носит осмысленный характер. В полной мере умеет работать с информацией, оценивать её и проводить рефлексию [11].

Также авторы предоставили список методик оценки сформированности критического мышления школьников.

1. Методика определения уровня критического мышления (Ю. Ф. Гущин, Н. В. Смирнова).
2. Тест Липпмана «Логические закономерности», целью которого является изучение способностей к анализу, обобщению и установлению закономерностей.
3. Тест на оценку самостоятельности мышления из методического

комплекса «Прогноз и профилактика проблем обучения» Л. А. Ясюковой.

4. Методика диагностики рефлексивности (опросник А. В. Карпова, тест на рефлекссию) [2].

Для определения уровня сформированности критического мышления в целом А. А. Михалёв и Э. А. Карпова сначала разделяют критическое мышление на компоненты, затем изучают уровень сформированности каждого компонента отдельно с помощью различных методик. Так, например, уровень сформированности умения строить логические умозаключения, абстрагировать и устанавливать связи между понятиями они определяют с помощью методики «Логически понятийное мышление. Образование сложных аналогий».

Авторы предлагают определять уровень сформированности умения классифицировать с помощью методики «Исключение понятий», адаптированную А. А. Карелиным.

Каждый компонент А. А. Михалёв и Э. А. Карпова предлагают оценивать следующим образом:

- низкий уровень (1б) – мыслительные операции (умение работать с информацией, умение оценивать и рефлексировать и т. д.) отсутствуют или слабо выражены;
- средний уровень (2б) – мыслительные операции выполняются, но с затруднениями; наличие ошибок при выполнении заданий;
- высокий уровень (3б) – мыслительные операции выполняются без затруднений [8].

Рассмотрим на конкретных примерах реализацию технологий на уроках алгебры и геометрии [5].

На уроке геометрии в 7 классе по теме «Треугольники» учитель математики Капустина Ж. В. использует технологию развития критического мышления.

Целью данного урока является предоставление возможности учащимся самостоятельно приобретать знания о треугольниках с помощью направленного чтения и применять данные знания для решения задач.

На стадии вызова учитель задает вопрос классу: «Что вы знаете о треугольниках?». Все ответы учитель разбивает на критерии и записывает их на доске: что называется треугольником; как называются элементы, сколько их; как обозначаются; какие бывают (виды треугольников); периметр, площадь; другие элементы треугольника. После общего обсуждения ученики в парах составляют список по критериям [17]. Как только отведенное время заканчивается все делятся своими списками и правильные ответы фиксируются учителем на доске.

На стадии осмысления учеником предоставляется текст для чтения с помощью условных знаков. «√» – это я знал; «+» – новая информация для меня; «-» – я думал иначе, противоречит моим представлениям; «?» – мало информации по этому поводу. Ученики самостоятельно читают текст и делают пометки.

На стадии рефлексии ученики заполняют таблицу (рисунок 1):

√	+	-	?
1)	1)	1)	1)
2)	2)	2)	2)
3)	3)	3)	3)...

Рисунок 1 – Пример таблицы

Далее записи учащихся обсуждаются классом и проверяются предположения, неверные предположения зачеркиваются и заменяются правильными.

Далее ученики самостоятельно составляют кластер по теме «Треугольники». После выполнения кластера ученики приступают к решению задач практического характера.

Пример задачи по теме:

- Начертите треугольник и обозначьте его вершины буквами M, N, P .
- Запишите все углы и стороны данного треугольника.
- С помощью масштабной линейки измерьте стороны и найдите периметр треугольника.

На стадии рефлексии учитель подводит итоги занятия и в качестве домашней работы задает ответить на вопросы по графе «?».

На уроке по теме «Решение уравнения» можно использовать ТРКМ следующим образом:

На стадии вызова производится решение анаграммы, установление связей между словами. Вызов уже имеющихся знаний с использованием приёмов «Ассоциация» и «Кластер».

На стадии осмысления происходит деление на группы по 4 человека и предоставляется текст на изучение с помощью знаковых символов. После работы с текстом группам раздаются карточки с заданием решить уравнение. Один из учеников с учителем заполняет «маркировочную таблицу», где отмечаются основные моменты в тексте [7].

Учитель и ученики вместе формируют дельнейшие цели и задачи. В конце урока класс возвращается к составленному в начале урока кластеру, и редактируют его. Учителем используется прием «Синквейн».

Для развития критического мышления учителем на уроке могут быть использованы задачи. Ученику чтобы решить задачу необходимо вспомнить и воспользоваться алгоритмами, предписаниями и уже имеющими знаниями, показать уровень развитости мышления. На уроке можно использовать как стандартные, так и нестандартные задачи.

Нестандартные задачи — это задачи, которые не имеют алгоритма решения.

В своей работе Т. И. Лябина предлагает на уроке математики использовать следующие нестандартные задачи, чтобы развить у учащихся критическое мышление:

1) На аэродроме было 57 самолетов и 79 вертолетов, 60 машин поднялось в воздух. Можно ли утверждать, что в воздухе находится: а) хотя бы 1 самолет; б) хотя бы 1 вертолет?

2) В семье четверо детей: Сережа, Ира, Витя и Галя. Им 5, 7, 9 и 11 лет. Сколько лет каждому из них, если один из мальчиков ходит в детский сад, Ира моложе Сережи, а сумма лет девочек делится на 3?

3) Заполни квадрат (4 x 4) числами 1, 2, 3, 6 так, чтобы сумма чисел по всем строкам, столбцами и диагоналям была одинаковой. Числа в строках, столбцах и диагоналях не должны повторяться [19].

4) Марина решила позавтракать в школьном буфете. Изучи меню ответь, сколькими способами она может выбрать напиток и кондитерское изделие?

Рассмотрим пример решения задачи 4) с элементами комбинаторики (Таблица 2):

Таблица 2 – Пример решения задачи № 4

Напитки	Кондитерские изделия
Чай	Ватрушка
Молоко	Печенье
Компот	Булочка

Далее учитель строит диалог с учащимися:

– Давайте предположим, что из напитков Марина выберет чай.

Какое кондитерское изделие она может подобрать к чаю? (*чай – ватрушка, чай – печенье, чай – булка*)

– Сколько способов? (3)

– Как будем рассуждать дальше? (*Если Марина выберет молоко,*

то тоже может выбрать к нему кондитерское изделие тремя способами)

- А если компот? (тоже 3)

- Как же узнать, сколько способов может Марина использовать, чтобы выбрать себе обед? ($3 + 3 + 3 = 9$)

- Да, вы правы. Но чтобы нам было легче решать такую задачу, мы будем использовать графы. Обозначим напитки и кондитерские изделия точками и соединим пары тех блюд, которые выберет Марина. Теперь сосчитаем количество линий, – их 9. Значит, существует 9 способов выбора блюд.

Для развития критического мышления в основном используются задачи типа вопрос-ответ, устные задачи, задачи на развитие мыслительных умений, таких как анализ, синтез, задачи на развитие логического мышления [15].

Задачи на уроке математики должны включать проблемы и ситуации из жизни. Таким образом, на уроке ученик будет считать себя частью общества. Используя диалог, работу в группах, дискуссии для решения задач осуществляется развитие у учащихся критического мышления.

Для развития критического мышления могут быть использованы математические софизмы. Софизмы – ложные результаты, полученные с помощью рассуждений, которые только кажутся правильными, но обязательно содержат ту или иную ошибку.

Разбор софизма разбивают на два этапа:

1 этап – нахождение суждения (математического рассуждения), в котором имеется ошибка;

2 этап – подбор аргументов для обоснования наличия ошибки. Использование математических софизмов помогают ученикам овладеть способами самопроверки, развить внимательность, и лучше понять материал.

На уроке по геометрии по теме «Окружность» Ходзицкая Е. А. использует на своём уроке приемы критического мышления, в том числе и софизмы. В начале урока учитель раздет для каждого ученика оценочный лист, где воссозданы все этапы урока. В данный лист учащиеся будут записывать свои баллы и записывать оценки. В разделе геометрические софизмы учитель дает определение софизму. На доске появляется задача, которую необходимо доказать «в любой окружности хорда, не проходящая через центр, равна ее диаметру».

Учитель пишет доказательство на доске «в произвольной окружности проводим диаметр AB и хорду AC (рисунок 2) . Через середину D этой хорды и точку B проводим хорду BE . Углы BAC и CEB равны, как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Углы ADB и CDE равны как вертикальные. Стороны AD и CD равны по построению.

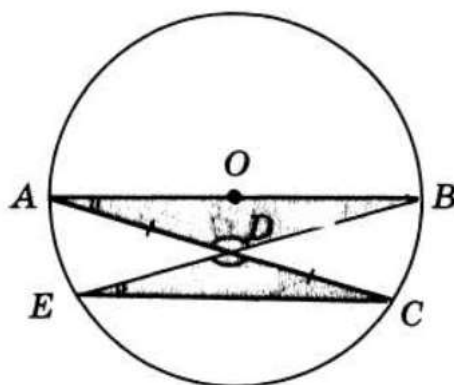


Рисунок 2 – Чертеж к задаче

Отсюда заключаем, что треугольники ABD и CDE равны по стороне и двум углам. В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, поэтому $AB = CE$, т. е. диаметр окружности AB равен хорде AC , не проходящей через центр» и просит учеников найти ошибку, которую она совершила.

Учащиеся ищут ошибку и находят ее «при доказательстве равенства треугольников ABD и CDE использован несуществующий признак равенства треугольников.

Правильно признак звучит так: «Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника соответственно равны стороне и прилежащим к ней углам».

Таким образом, найдены такие приемы и методы, которые широко используются на уроке математики. Данные приемы и методы могут быть адаптированы и для других уроков [11].

Выводы по 1 главе

После рассмотрения теоретических основ развития критического мышления учащихся при обучении математике можно сделать следующие выводы.

Критическое мышление является одним из ключевых видов интеллектуальной деятельности, позволяющим осуществлять оценочно-рефлексивную деятельность и находить оптимальные решения проблемных ситуаций.

Многие авторы указывают на то, что развитие критического мышления проходит в три этапа: "Вызов", "Осмысление" и "Рефлексия". Более того, на основе анализа различных исследований было выявлено множество методов и средств развития критического мышления.

Чтобы помочь учащимся развивать свое критическое мышление на уроках математики, можно использовать следующие приемы:

1. Решение проблемных задач, которые требуют анализа и оценки информации перед принятием решения.
2. Использование многовариантных заданий, где учащиеся должны выбрать правильный ответ из нескольких вариантов.
3. Обсуждение математических задач в группах, что помогает развивать навыки аргументации, критического мышления и принятия решений.

4. Создание ситуаций, которые требуют применения математических знаний для решения практических проблем, что помогает учащимся видеть практическую пользу математики в повседневной жизни.

Успешное обучение требует оптимального использования различных методов и приемов, которые позволят каждому ученику активно участвовать в учебном процессе. Один из таких приемов - «составление кластера» или «корзина идей». Они позволяют актуализировать имеющиеся знания и включить каждого ученика в учебный процесс.

На этапе осмысления, учащиеся должны активно работать с информацией и сопоставлять ее с изученным материалом. Для этого необходимо использовать различные приемы, такие как маркировка текста и заполнение таблиц «известная информация / новая информация». Эти приемы позволяют учащимся более глубоко усвоить материал и лучше понять его смысл.

Существует множество способов структурирования информации и установления причинно-следственных связей между блоками информации. Один из них – это прием «составление ментальной карты». Это позволяет составить логические цепочки и лучше понять информацию.

На этапе рефлексии, когда необходим анализ и творческая интерпретация информации, многие авторы предлагают использовать «синквейн» и проводить различные виды дискуссий. Это помогает лучше понять информацию, увидеть ее из разных точек зрения и сделать более полный вывод.

ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ КРИТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

2.1 Понятие задачи повышенной трудности по математике

Н. В. Кострикина под задачей повышенной трудности понимает:

- задачи, для решения которых не требуются знания программного материала соответствующего класса;
- задачи, тесно связанные с изучаемым на уроках алгебры материалом.

Задачи первого типа могут быть решены учениками в любое время учебного года, а задачи второго типа могут быть использованы по мере изучения соответствующего программного материала.

Имеющиеся задачи повышенной трудности в разделах школьных учебников алгебры разнообразны по своему содержанию, форме, по способам решения и по возлагаемой на них учебно-воспитательной функции.

Многие из задач первого типа нестандартны по содержанию и по способам решения, ибо в школьных учебниках алгебры помещены в разделах «Задачи повышенной трудности». Новизна и необычность математической ситуации являются трудностями таких задач. Вследствие решения таких задач нужно добиваться усвоения учениками способов их решения и умения использовать при решении более трудных задач [3].

Решение задач повышенной трудности (далее – ЗПТ) или нестандартных задач со всеми учащимися способствует к развитию интереса к математике и углублению их знаний по программному материалу, как отдельных учащихся, так и всего класса.

Задачи повышенной трудности являются хорошим материалом для выявления наиболее способных к математике учащихся, они могут быть использованы как дополнительные задания.

Добиться больших успехов в развитии математических способностей отдельных учащихся и всего класса в целом – есть основная цель, отмечает автор [8].

Психологи считают, что задача занимает важную часть не только в любой деятельности, но и в познавательной. В таких науках как психология, педагогика и частная методика не раз различные функции задач становились предметом исследований. Анализ работ о проблемах организации учебно-познавательной деятельности на основе задач и их систем, позволяет прийти к выводу, что результат обучения зависит во многом от того, что станет материалом задачи, применяемой в учебном процессе, как будет организовано ее представление учащимся, каким образом предлагается осуществлять поиск ее решения и анализ полученного результата [5].

Решение многих задач повышенной трудности по математике можно разделить на несколько этапов:

- интуитивное угадывание одного или нескольких решений задачи или ограничений, накладываемых на эти решения;
- творческий поиск метода нахождения всех возможных решений задачи или доказательства того, что других решений, кроме найденных на первом этапе, не существует;
- строгое логическое оформление идей, выработанных на первом и втором этапах.

Так как ЗПТ отличаются друг от друга и нет определенного алгоритма их решений, то «натаскать» ученика практически нереально, в отличие от задач, представленных в базовом уровне. Рассмотрение большого количества примеров, показывающих, различные способы и методы, может способствовать формированию навыка решения ЗПТ. При этом нужно обратить внимание учеников на все этапы решения, то есть научиться угадыванию ответа (первый этап), научиться поиску верного способа решения (второй этап) и правильной записи полученного решения

(третий этап). Большое значение имеет постоянное обращение внимание школьников на то, что на третьем этапе необходимо эти идеи сформулировать более точно [1].

Главная цель задач – это развитие творческого и математического мышления учащихся, а также их интереса к математике. Но для достижения этой цели недостаточно обычных задач, использование нестандартных задач формирует самостоятельное мышление и творческую активность, поэтому их необходимо включать в систему упражнений, решаемых на уроках. Они будут вызывать у учеников наибольшее затруднение.

«Нестандартные задачи – это такие, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу решения» – написал Л. М. Фридман [14].

Кроме того, стоит отметить, что задачи повышенной могут являться эффективным средством для развития критического мышления учащихся. Это связано с тем, что особенности данных задач соответствуют компонентам критического мышления. Например, они требуют анализа, оценки, поиска альтернативных решений и принятия обоснованных решений.

2.2 Развитие критического мышления при решении задач с параметрами

Каждый год, после обработки результатов процедуры ГИА Федеральный институт педагогических измерений публикует результаты решаемости задач на экзаменах. Статистика по номеру 18 (параметры) ЕГЭ профильной математики следующая [13]:

Среднее за 2021-2023:

0 баллов – 88,7 %;

1 балл – 5,6 %;

2 балла – 1,5 %;

3 балла – 0,5 %;

4 балла – 3,2 %.

Именно данные результаты побудили нас рассмотреть задачи повышенной сложности, содержащие параметры.

Сформулируем некоторые рекомендации по использованию приемов развития критического мышления при решении задач повышенной сложности.

Во-первых, не все приемы развития критического мышления подходят для обучения математике. Так, например, составление эссе на этапе рефлексии не будет эффективно, так как эта деятельность больше подходит для гуманитарных предметов. Еще одним примером неэффективности использования приема развития критического мышления при обучении математике является написание творческих работ. Данная деятельность подразумевает выход за временные рамки урока, поэтому использование данного приема будет не эффективно.

Для учащихся средней школы целесообразно использовать следующие приемы развития критического мышления:

1. Графическая систематизация пройденного материала в виде таблицы, кластера, схемы и т. п. на этапе вызова, так как учащиеся данного возраста имеют все необходимые навыки перевода информации из одного вида в другой (умеют интерпретировать информацию).

2. На этапе осмысления старшеклассники уже с легкостью могут самостоятельно работать с информацией, например, промаркировать текст, установить причинно-следственные связи между блоками информации и выстроить логические цепочки.

3. В качестве рефлексии целесообразно проводить различного вида дискуссии (обсуждение), где учащиеся будут аргументированно высказывать свою точку зрения; также можно проводить исследования по отдельным вопросам темы.

Таким образом, при решении задач с параметрами целесообразно при необходимости развития критического мышления учащихся использовать следующие приемы:

1) на этапе «Вызова»:

- графическая систематизация пройденного материала в виде таблицы, кластера, схемы и т. п.;
- прием постановки цели деятельности, составление плана деятельности, прогнозирование результатов деятельности;

2) на этапе «Осмысления»:

- маркировка текста;
- составление краткой записи условия задачи, при необходимости ввод буквенных обозначений;
- установление причинно-следственных связей между блоками информации;
- составление логических цепочек;

3) на этапе «Рефлексии»:

- прием возврата к вопросу задачи, первоначальному плану, гипотезе;
- проведение различных видов дискуссии;
- исследование различных вопросов темы;
- поиск применения полученных знаний и умений в жизни или в профессиональной деятельности.

На этапе анализа условия задачи, содержащей параметр, эффективно будет использовать прием графической систематизации материала в виде таблиц, кластера, схем и т. п., так как перед решением конкретной задачи учащимся необходимо вспомнить, как решается определенный тип уравнения.

Рассмотрим примеры:

Сколько решений имеет уравнение в зависимости от параметра a ?

Задача. Найдите все значения a , при которых имеет решение уравнение $2 \cos^2(2^{2x-x^2}) = a + \sqrt{3} \sin(2^{2x-x^2+1})$.

Учитель формулирует следующее задание: «Определите, с помощью какого способа мы будем решать данную задачу». При необходимости учитель может дать подсказку или предложить несколько способов решения данной задачи (аналитический, геометрический, метод замены переменной, использование свойств функции и т. д.).

Так же учитель может сформулировать задание на составление плана решения данной задачи. При этом уточнив, что после решения задачи, можно будет внести коррективы в изначальный план. На этапе решения задачи (поиск корней уравнения) целесообразно использовать прием составления логической цепочки и установления причинно-следственных связей между блоками информации.

Рассмотрим пошаговое решение задачи:

1. *Идентификация и преобразование аргумента:* пусть $y = 2^{2x-x^2}$.

Тогда уравнение можно выразить через y и получим $2 \cos^2(y) = a + \sqrt{3} \sin(2y)$.

2. *Использование тригонометрических тождеств:* известно, что $\cos^2(y) = \frac{1+\cos(2y)}{2}$. Подставим это в уравнение: $2 \left(\frac{1+\cos(2y)}{2} \right) = a + \sqrt{3} \sin(2y)$, после упрощения получим $1 + \cos(2y) = a + \sqrt{3} \sin(2y)$.

3. *Выражение через одну тригонометрическую функцию:* пусть $z = 2y$, тогда уравнение примет вид $1 + \cos(z) = a + \sqrt{3} \sin(z)$.

4. *Анализ полученного уравнения:* перепишем уравнение в стандартной форме синусоидальной функции $\cos(z) - \sqrt{3} \sin(z) = a - 1$. Заметим, что $\cos(z) - \sqrt{3} \sin(z)$ можно выразить как одну косинусную функцию с фазовым сдвигом:

$$2 \cos\left(z + \frac{\pi}{3}\right) = a - 1.$$

5. *Определение диапазона значений функции косинус:* так как

$\cos\left(z + \frac{\pi}{3}\right)$ принимает значения от -1 до 1 , выражение $2 \cos\left(z + \frac{\pi}{3}\right)$ принимает значения от -2 до 2 . Следовательно, $a - 1$ должно быть в диапазоне $-2 \leq a - 1 \leq 2$.

6. Решение для a : $-1 \leq a \leq 3$

Задача. Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2a + 2$ на множестве $|x| \geq 1$ не менее 6.

Графиком функции $f(x) = (2x + a)^2 - 2a + 2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина имеет координаты $\left(-\frac{a}{2}; -2a + 2\right)$. Значит, минимум функции $f(x)$ на всей числовой оси достигается при $x = -\frac{a}{2}$.

На множестве $|x| \geq 1$ эта функция достигает наименьшего значения либо в точке $x = -\frac{a}{2}$, если эта точка принадлежит множеству, либо в одной из граничных точек $x = \pm 1$.

Если наименьшее значение функции не меньше 6, то и всякое значение функции не меньше 6. В частности,

$$f(1) \geq 6 \Leftrightarrow a^2 + 2a + 6 \geq 6 \Leftrightarrow a(a + 2) \geq 0,$$

$$f(-1) \geq 6 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 6 \geq 6 \Leftrightarrow a(a - 6) \geq 0,$$

откуда получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} a(a + 2) \geq 0, \\ a(a - 6) \geq 0. \end{cases}$$

решение которой $a \in (-\infty; -2) \cup \{0\} \cup (6; +\infty)$.

Далее учитель формулирует задание на исследование полученного выражения: «Как видим из последнего выражения, мы получили три интервала, на которых у нас может быть параметр a . Давайте проведем исследование и выясним, все ли интервалы удовлетворяют условиям задачи». Затем учащиеся самостоятельно или совместно с учителем проводят выборку интервалов, удовлетворяющих условиям задачи.

После решение задачи с параметром необходимо провести с учащимися оценку и рефлексю. На данном этапе целесообразно обсудить с учащимися эффективность выбранного способа решения задачи предложить рассмотреть другой способ решения этой же задачи (либо более эффективный, либо менее эффективный).

Пример: найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 - 4x + a}{5x^2 - 6ax + a^2} = 0$$

имеет ровно два решения.

Решение 1:

Попробуем решить уравнение аналитически:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + a = 0, \\ 5x^2 - 6ax + a^2 \neq 0, \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + a = 0$$

$$D = 16 - 4a.$$

Квадратное уравнение имеет два отличных друг от друга корня, когда $D > 0$.

$$\text{Получим корни: } x_1 = 2 + \sqrt{4 - a}, x_2 = 2 - \sqrt{4 - a}.$$

На этом этапе учащиеся замечают, что данные значения не являются удобными для дальнейшей работы, поэтому графический метод при решении данного уравнения будет более рациональным.

Решение 2:

Заметим, что

$$\begin{cases} x^2 - 4x + a = 0, \\ 5x^2 - 6ax + a^2 \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x^2 + 4x, \\ (x - a)(5x - a) \neq 0 \end{cases}$$

Изобразим решение в системе координат xOa . Графиком системы, а значит и графиком исходного уравнения является парабола с выколотыми точками [17] (рисунок 3).

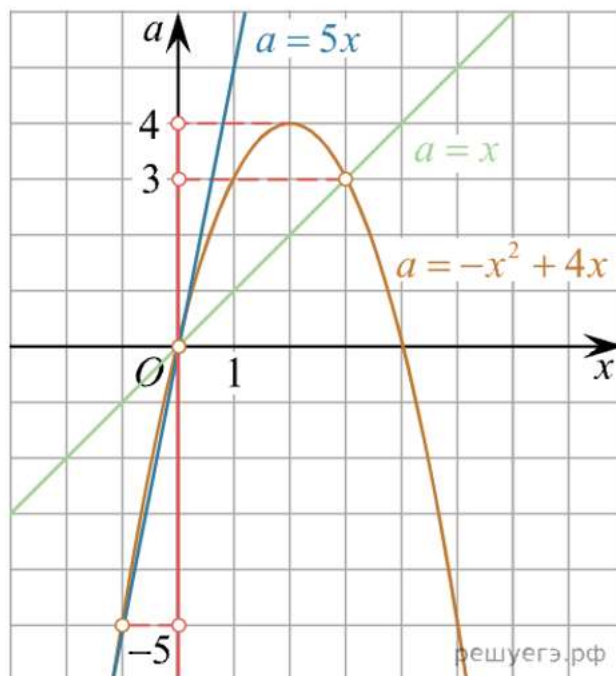


Рисунок 3 – График функции

Далее учащиеся находят ординаты точек пересечения и записывают ответ.

На данном этапе важно донести до учащихся, что они могут использовать тот способ решения задачи, который для них является наиболее эффективным.

Также необходимо сделать вывод, при каких обстоятельствах или для каких типов задач с параметрами целесообразно применять использованный метод решения задачи. То есть учитель может предложить учащимся еще раз обсудить какие-либо особенности представленной задачи или выписать отдельно алгоритм (шаги) решения этой задачи.

Для закрепления не только предметных знаний, но и изученного способа решения задачи с параметром можно использовать прием оценки

правильности решения задачи. В сети Интернет есть много примеров решений задания № 18.

Учитель может организовать деятельность учащихся следующим образом:

- 1) ознакомить учащихся с критериями оценивания данного задания;
- 2) рассмотреть примеры решения задания № 18;
- 3) сформулировать задание на поиск ошибок и оценивание представленного решения;
- 4) сформулировать задание на совместное обсуждение полученных оценок.

Здесь учитель может дополнительно акцентировать внимание учащихся на типичных ошибках, на эффективности выбранного способа решения и еще на каких-либо важных моментах, по собственному усмотрению.

Важной частью развития критического мышления является диагностика уровня сформированности критического мышления. Как уже было отмечено выше, авторы выделяют 3 уровня сформированности критического мышления: низкий, средний и высокий.

Каждый уровень сформированности критического мышления отличается уровнем сложности задач с параметрами, которые можно использовать для развития критического мышления.

Так, например, учащимся с низким уровнем сформированности критического мышления можно предлагать все типы задач с параметрами, однако уровень сложности данных задач должен быть понижен.

Также целесообразно использовать сюжетные задачи, так как учащиеся могут с этими задачами подробно поработать на этапе анализа условия, тем самым развивая в себе умение работать с информацией, что благоприятно сказывается на уровне критического мышления учащихся. Для данного уровня учащихся также можно использовать задачи, при

решении которых можно без затруднений выделить определенную схему решения.

Для учащихся со средним уровнем сформированности критического мышления можно подобрать задачи, которые решаются различными методами, на примере которых можно показать учащимся многообразие, некоторые особенности и важность различных методов решения задач с параметрами. А также акцентировать внимание учащихся на том, что они могут выбирать тот способ решения задачи, которые более понятен им.

Для учащихся с высоким уровнем критического мышления подойдут разные задачи, так как для учащихся этого уровня характерны: высокий уровень умения работы с информацией, умения прогнозировать, умения выделять причинно-следственные связи. Учащиеся, глядя на задачу, могут определить, какие знания необходимы для её решения и каким методом она решается.

Таким образом, в данном пункте рассмотрели некоторые особенности организации работы учителя, направленной на развитие критического мышления учащихся при решении задач повышенной сложности на примерах задач с параметрами. Исходя из чего, можно сделать вывод, что начинать развивать критическое мышление учащихся необходимо с диагностики уровня сформированности критического мышления. Затем, в соответствии с полученными результатами, организовывать деятельность учащихся по решению задач с параметрами как одним из средств развития критического мышления.

2.3 Разработка заданий, направленных на развитие критического мышления обучающихся при решении задач с параметрами

Как уже было отмечено ранее развитие критического мышления учащихся необходимо начинать с определения имеющегося уровня критического мышления. Для этого учителю необходимо в первую очередь провести диагностику уровня сформированности критического мышления.

Так, для диагностики учитель может воспользоваться методиками, рассмотренными в первой главе данной дипломной работы.

Диагностику можно провести несколькими способами:

- можно провести диагностику во время первого занятия по теме «Задачи с параметрами» (для классов с углубленным уровнем изучения математики);
- во внеурочное время, например, во время классного часа (если есть такая возможность);
- на курсах профессионального самоопределения учащихся (если такие есть в данной общеобразовательной организации);
- в качестве домашнего задания учащихся, при этом необходимо объяснить ученикам важность результатов данной работы;
- во время занятий элективного курса по подготовке к ЕГЭ или ОГЭ по математике.

Рассмотрим пример работы, которую учитель может дать учащимся для диагностики сформированности уровня критического мышления по теме «Параметры». Для учащихся 10-11 классов.

Вариант 1

1. Решите уравнение с параметром a :

$$(x - 1)^2 = a.$$

Ответ:

при $a > 0$, два действительных корня,

$$x = 1 \pm \sqrt{a}.$$

при $a = 0$, один действительный корень,

$$x = 1.$$

при $a < 0$, действительных корней нет.

2. При каких значениях параметра b уравнение имеет ровно два различных корня?

$$x^2 + bx + 1 = 0$$

Ответ: $b \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

3. При каких значениях параметра a неравенство $-x^2 + ax - 9 < 0$ выполняется при всех значениях x ?

Ответ: $a \in (-6; 6)$.

4. Решите уравнение с параметром d :

$$\sqrt{x + d} = x - d$$

Ответ: $d \geq -\frac{1}{8}$

5. При каких значениях параметра a система уравнений имеет единственное решение?

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy = a - 2. \end{cases}$$

Ответ: таких значений a – не существует.

Вариант 2

1) Решите уравнение с параметром b :

$$(x + 2)^2 = b$$

Ответ:

при $b > 0$, два действительных корня

$$x = -2 \pm \sqrt{b},$$

при $b = 0$, один действительный корень,

$$x = -2.$$

при $b < 0$, действительных корней нет.

2) При каких значениях параметра c уравнение имеет ровно один корень?

$$x^2 - cx + 4 = 0$$

Ответ: $c = \pm 4$

3) При каких значениях параметра a неравенство $x^2 - 2(a + 1)x + 9a - 5 > 0$ выполняется при всех значениях x :

Ответ: $a \in (1; 6)$

4) Решите уравнение с параметром a :

$$\sqrt{x - a} = x + a$$

Ответ: $a \leq \frac{1}{8}$

5) При каких значениях параметра a система уравнений имеет бесконечно много решений?

$$\begin{cases} x - y = b, \\ xy = b + 3. \end{cases}$$

Ответ: таких значений a – не существует.

Указания к решению:

1. Для квадратных уравнений рассмотрите случаи, когда выражение неотрицательно.

2. В задачах на количество корней квадратного уравнения оцените дискриминант.

3. Для неравенств рассмотрите вершину параболы и анализируйте знаки.

4. В иррациональных уравнениях изолируйте корень и затем возведите обе стороны в квадрат.

5. В системах уравнений рассмотрите совместные решения и условия их существования (определите случаи, когда решения совпадают).

В данной диагностической работе проверяются умение школьников работать с параметрами в различных видах математических задач:

1. Задание с квадратным трехчленом в обоих вариантах требует от учеников понимания зависимости корней квадратного уравнения от параметра и умения интерпретировать полученные результаты.

2. При решении задания № 5. Учащиеся ищут условия для единственного или бесконечного множества решений системы уравнений.

Здесь важна взаимосвязь между коэффициентами уравнений и решениями. Это способствует развитию логического мышления и умения делать обоснованные выводы.

3. Иррациональные уравнения требуют от учеников понимания свойств функций и умения решать уравнения, анализируя условия существования решений и область допустимых значений. Это способствует развитию аналитического мышления у школьников.

Таким образом, выполнение данных заданий стимулирует учеников не только к применению алгоритмов решения, но и к глубокому анализу условий задачи, что способствует формированию критического мышления.

После проведения диагностики учитель организует работу учащихся по решению задач с параметрами не только с целью развития критического мышления, но и с целью подготовки учащихся к успешной сдаче ЕГЭ по математике профильного уровня, а именно к решению задания № 18.

Исходя из этого, разработаны задания для развития критического мышления учащихся при решении задач с параметрами по следующим темам.

1. Уравнения с параметром.
2. Неравенства с параметром.
3. Системы с параметром.
4. Расположение корней квадратного трехчлена.
5. Использование симметрий.
6. Использование монотонности, оценок.
7. Аналитическое решение уравнений, неравенств, систем.
8. Координаты (x, a) .
9. Уравнение окружности.
10. Расстояние между точками.
11. Функции, зависящие от параметра [17].

Рассмотрим на примере темы «Расположение корней квадратного трехчлена» какие задания можно использовать для развития критического мышления учащихся, при этом задания должны соответствовать уровню сформированности критического мышления учащихся (низкий, средний и высокий).

Примеры заданий по теме «Задачи с параметрами» для учащихся с *различными* уровнями сформированности критического мышления.

Рассмотрим задачи на тему «Расположение корней квадратного трехчлена» для учащихся с *низким уровнем* сформированности критического мышления.

Задача. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{1 - 2a\sqrt{1+x^2} + a(1+x^2)}{(1+x^2) - 2\sqrt{1+x^2}} = 3$$

имеет хотя бы одно решение.

Задание № 1. «Составьте схему или кластер, в котором вы отразите: определение квадратного трехчлена; количество корней, которое может иметь квадратное уравнение в зависимости от дискриминанта; что называют корнем уравнения; свойства и график квадратичной функции».

Задание № 2. «Выделите в тексте задачи ручкой то, что нужно найти (вопрос задачи), карандашом – то, что повлияет на ответ (условие)».

Задание № 3. «Существует множество способов решения задач с параметрами. Вот некоторые из них...»

Далее учитель знакомит учащихся с такими способами решения задач с параметрами, как аналитический, графический, метод замены, метод решения задач с параметрами с помощью применения свойств функций.

«...Некоторые задачи с параметрами решаются комбинацией нескольких способов. В нашем случае как раз такая задача. Давайте вместе составим последовательность действий, необходимых для решения данной

задачи и запишем их в тетрадь. С чего начнем решение?» – говорит учитель.

Задание № 4. «Давайте совместно решим данную задачу в соответствии с составленным планом».

Задание № 5. «Подчеркните в тетрадях те моменты в выполненном решении, которые, на ваш взгляд, являются причинно-следственной связью между шагами решения». После самостоятельного выполнения учениками данного задания, необходимо его обсудить и при необходимости внести коррективы.

Задание № 6. «Составьте схему решения данного задания, в которой блоки – это шаги решения (действия), а стрелочки – связи между шагами». Аналогично после выполнения задания нужно проверить правильность выполнения и при необходимости внести коррективы.

Задание № 7. «Обратите внимание на вопрос задачи (то, что нужно найти). Ответили ли вы на него?»

Задание № 8. (если на предыдущем задании ответили «нет»). «Давайте посмотрим, на каких промежутках существует коэффициент a ...». «...Давайте дополним данными условиями наш изначальный план решения задачи и схему решения и, в соответствии с новыми условиями, доведем решение до конца». Учащиеся вносят соответствующие коррективы и заканчивают решение задачи.

Задание № 9. «Сформулируйте вывод об эффективности выбранного способа решения задачи данного типа».

Задание № 10. «Составьте алгоритм решения данной задачи. Будет ли он отличаться от изначального плана?».


Задание № 11. «Можно ли решить данную задачу другим способом? Ответ обоснуйте и если возможно другое решение данной задачи, то приведите его».

Задание № 12. «Сравните оба решения задачи. Выделите карандашом схожие моменты (шаги) в решении».

Такой пошаговый план поможет учащимся с низким уровнем критического мышления следовать за процессом решения и лучше понять материал.

Рассмотрим возможные примеры ответов учащихся с низким уровнем развития критического мышления при работе с параметром (Таблица 3)

Таблица 3 – Ответы учащихся

Вопрос учителя	Возможный ответ ученика
1	2
Задание № 1. «Составьте схему или кластер, в котором вы отразите: определение квадратного трехчлена; количество корней, которое может иметь квадратное уравнение в зависимости от дискриминанта; что называют корнем уравнения; свойства и график квадратичной функции».	<p>Учащиеся делают схему, где отражают основные факты о квадратном трехчлене, примерный вид представлен ниже (рисунок 4).</p>  <p>Рисунок 4 – Блок-схема</p>
Задание № 2. «Выделите в тексте задачи ручкой то, что нужно найти (вопрос задачи), карандашом – то, что повлияет на ответ (условие)»	Вопрос задачи (ручкой): «Найдите все значения параметра «а», при каждом из которых уравнение имеет хотя бы одно решение.»
<p>Задание № 3. «Существует множество способов решения задач с параметрами. Вот некоторые из них...»</p> <p>Учитель знакомит учащихся с методами решения задач с параметрами:</p> <ul style="list-style-type: none"> – аналитический – графический – метод замены – метод применения свойств функций. 	Ученики слушают и записывают за учителем.

Продолжение таблицы 3

1	2
<p>Давайте вместе составим последовательность действий, необходимых для решения данной задачи и запишем их в тетрадь. С чего начнем решение?</p> <p>Начнем решение с анализа уравнения и поиска замены, которая упростит выражение. В данном случае мы введем замену $t = \sqrt{1+x^2}$, что приведет уравнение к более удобной форме для дальнейшего анализа. Затем выразим новую систему условий для переменной t.</p>	<p>Совместно с учителем составляют план решения:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Сделаем замену $t = \sqrt{1+x^2}$, где $t \geq 1$ 2. Перепишем исходное уравнение с использованием t. 3. Преобразуем полученное выражение и решим систему неравенств. 4. Найдем значения параметра a, при которых система имеет хотя бы одно решение.
<p>Задание № 5</p> <p>«Составьте схему решения данного задания, в которой отразиться основные шаги решения»</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Анализ уравнения и замена $t = \sqrt{1+x^2}$ и условие $t \geq 1$, которое позволяет упростить уравнение. 2. Преобразование уравнения $\frac{1-2at+at^2}{t^2-2t} = 3$ 3. Анализ дискриминанта полученного квадратного уравнения относительно параметра a. 4. Решение системы для определения a.
<p>Задание № 9. «Сформулируете вывод об эффективности выбранного способа решения задачи данного типа».</p>	<p>Выбранный способ решения через замену переменных и последующее решение системы уравнений и неравенств эффективен, так как позволяет упростить исходное уравнение до стандартной формы и систематически проанализировать условия для параметра a.</p>
<p>Задание № 11. «Можно ли решить данную задачу другим способом? Ответ обоснуйте и если возможно другое решение данной задачи, то приведите его».</p>	<p>Задачу можно решить также графическим методом, где мы построим графики функций и найдем пересечения, но это будет менее удобным и менее наглядным способом для анализа параметра a. Поэтому аналитический метод через замену переменных и дискриминант является более предпочтительным.</p>

Продолжение таблицы 3

1	2
Задание № 12. Сравните оба решения задачи. Выделите карандашом схожие моменты (шаги) в решении.	Оба решения, аналитическое и графическое, включают: – Анализ исходного уравнения. – Определение области допустимых значений. – Преобразование уравнения. Поиск условий на параметр a для существования решений.

Рассмотрим задачи на тему «Расположение корней квадратного трехчлена» для учащихся со *средним уровнем* сформированности критического мышления.

Задача. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{1 - 2a\sqrt{1 + x^2} + a(1 + x^2)}{(1 + x^2) - 2\sqrt{1 + x^2}} = 3$$

имеет хотя бы одно решение.

Задание № 1. «Составьте схему или кластер, в котором вы отразите: определение квадратного трехчлена; количество корней, которое может иметь квадратное уравнение в зависимости от дискриминанта; что называют корнем уравнения; свойства и график квадратичной функции».

Задание № 2. «Ответьте на вопрос. Какие способы решения задач с параметрами вы знаете?».

Задание № 3. «Некоторые задачи с параметрами решаются комбинацией нескольких способов. Каким способом будем решать представленную задачу? Ответ обоснуйте».

Задание № 4. «Давайте устно составим последовательность действий, необходимых для решения данной задачи. С чего начнем решение?»

Задание № 5. «Решите данную задачу в соответствии с составленным планом». Учащиеся решают задачу письменно в тетрадях, один учащийся работает у доски, учитель помогает ученикам только при необходимости.

Задание № 6. «Устно озвучьте те моменты решения задачи, которые бы вы отнесли к связям между шагами (действиями) решения».

Задание № 7. «Обратите внимание на вопрос задачи (то, что нужно найти). Ответили ли вы на него?»

Задание № 8. (если на предыдущем задании ответили «нет»). «Давайте посмотрим, на каких промежутках существует коэффициент a ...».

«...Давайте дополним данными условиями наш изначальный план решения задачи и схему решения и, в соответствии с новыми условиями, доведем решение до конца». Учащиеся вносят соответствующие коррективы и заканчивают решение задачи.

Задание № 9. «Сформулируйте вывод об эффективности выбранного способа решения задачи данного типа».

Задание № 10. «Составьте алгоритм решения данной задачи».

Задание № 11. «Решите следующую задачу самостоятельно:

Задача. Найдите все значения параметра b , при каждом из которых уравнение

$$\frac{1 - 2b\sqrt{1+x^2} + (1+x^2)}{(1+x^2) + 10\sqrt{1+x^2}} = 3$$

имеет хотя бы одно решение.

Рассмотрим задачи на тему «Расположение корней квадратного трехчлена» для учащихся с *высоким уровнем* сформированности критического мышления.

Задача. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{1 - 2a\sqrt{1+x^2} + a(1+x^2)}{(1+x^2) - 2\sqrt{1+x^2}} = 3$$

имеет хотя бы одно решение.

Задание № 1. «Давайте устно вспомним:

- определение квадратного трехчлена;
- что называют корнем уравнения;

- количество корней, которое может иметь квадратное уравнение в зависимости от дискриминанта;
- свойства и график квадратичной функции».

Задание № 2. «Ответьте на вопрос. Каким способом будем решать представленную задачу? Ответ обоснуйте».

Задание № 3. «Решите данную задачу».

Задание № 4. «Обратите внимание на вопрос задачи (то, что нужно найти). Ответили ли вы на него?»

Задание № 5. (если на предыдущем задании ответили «нет»).

Тогда учитель говорит: «Давайте посмотрим, на каких промежутках существует коэффициент $a...$, в соответствии с новыми условиями закончите решение задачи».

Задание № 6. «Как вы думаете, что из хода решения относится к исследованию решения задачи? Ответ обоснуйте».

Задание № 7. «Сформулируйте вывод об эффективности выбранного способа решения задачи данного типа».

Решение задачи:

Пусть $\sqrt{1+x^2} = t, t \geq 1$, тогда исходное уравнение имеет решение тогда, когда имеет хотя бы одно решение система:

$$\begin{cases} \frac{1-2at+at^2}{t^2-2t} = 3, \\ t \geq 1. \end{cases}$$

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} 1-2at+at^2 = 3(t^2-2t), \\ t \geq 1, \\ t \neq 2. \end{cases}$$

Приведем уравнение $1-2at+at^2 = 3(t^2-2t)$ к общему виду и получим:

$$(a-3)t^2 + (-2a+6)t + 1 = 0.$$

Квадратное уравнение имеет хотя бы один корень, когда $D \geq 0$, поэтому, $D = 48 - 28a + 4a^2$

$$48 - 28a + 4a^2 \geq 0.$$

Получим: $a \in (-\infty; 3] \cup [4; +\infty)$.

Сделаем вывод, что при $a = 3$ система не будет иметь решений и учтем это при записи итогового ответа.

Ответ: $a \in (-\infty; 3) \cup [4; +\infty)$.

Однако, в рамках одного класса, школьники чаще всего обладают различными уровнями сформированности критического мышления. Учителю нужно обдумать как организовывать работу с учащими, чтобы время на уроке было использовано максимально продуктивно. Рассмотрим конспект урока, в котором будет учтена методика работы с учащимися с различным уровнем развития критического мышления.

Рассмотрим основную информацию об уроке № 1 «Решение уравнений с параметром» (Таблица 4).

Таблица 4 – Основная информация о технологической карте урока

Технологическая карта урока	
Автор	Локтина М. С
Учебный предмет	Математика
Класс	10-11
УМК	«Алгебра» 10 класс А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский.
Тема урока	Решение уравнений, содержащие параметр
Тип урока	Урок обобщения и систематизации знаний
Цель урока	Обучить учащихся методам нахождения и анализа корней квадратного трехчлена с учетом параметров, развить умения решать задачи, включающие анализ и интерпретацию зависимости корней от параметров, и применить полученные знания для решения практических задач.

Продолжение таблицы 4

	<p>1. <i>Личностные результаты.</i></p> <p>Л1 – Формирование ответственного отношения к учебной деятельности, стремления к самостоятельному и углубленному изучению предмета.</p> <p>Л2 – Развитие аналитического мышления, способности к критическому анализу и самостоятельному принятию решений.</p> <p>Л3 – Воспитание устойчивого интереса к математике и её практическому применению в жизни и других областях знаний.</p> <p>Л4 – Укрепление уверенности в своих силах и готовности преодолевать трудности в учебной деятельности и в жизни.</p> <p>2. <i>Метапредметные результаты.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – <i>Регулятивные.</i> Развитие навыков самостоятельного планирования и контроля своей деятельности при решении задач с параметрами, а также корректировки своих действий на основе анализа промежуточных и конечных результатов. – <i>Познавательные.</i> Умение извлекать информацию из различных источников (учебники, справочники, интернет-ресурсы), анализировать её, выделять главные и второстепенные аспекты, а также применять логические и математические методы для решения задач. – <i>Коммуникативные.</i> Формирование навыков работы в группе, умение аргументированно выражать свои мысли и слушать других, участвовать в дискуссиях и обсуждениях, сотрудничать с одноклассниками для достижения общих целей. <p>3. <i>Предметные результаты.</i></p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Знание и понимание методов нахождения корней квадратного трехчлена и их зависимость от параметров. 2. Умение применять различные математические методы (дискриминант, теорема Виета и другие) для анализа и нахождения корней квадратного уравнения с параметрами. 3. Навык решения задач, включающих исследование поведения корней в зависимости от изменения параметров. 4. Способность решать задачи повышенной сложности, включающие комплексный анализ уравнений и неравенств с параметрами.
Материалы	Карточки для работы в группах.
Оборудование	Компьютер и проектор, рабочие тетради.
Используемые технологии	ИК – технологии, личностно ориентированное обучение, работа в парах.

Рассмотрим подробное описание хода урока № 1 «Решение уравнений, содержащих параметр» (Таблица 5).

Таблица 5 – Описание хода урока

Ход урока	
Деятельность учителя	Деятельность учащихся
<i>Этап 1. Организационный этап (время – 1 мин.)</i>	
Приветствует учащихся и просит проверить готовность к уроку.	Проверяют наличие всех учебных принадлежностей и садятся.
<i>Этап 2. Актуализация знаний (время – 2 мин.)</i>	
Учитель напоминает учащимся, что на прошлом уроке были пройдены дробно-рациональные уравнения с параметром. Напоминает основные этапы решения и нюансы работы задачами такого рода.	Слушают, записывают важные моменты, задают вопросы при необходимости.
<i>Этап 3. Работа в группах (время – 20 мин.)</i>	
Разделяет класс на три группы по уровню критического мышления. Объясняет задания каждой группе.	Делятся на группы, обсуждают задачи, решают уравнения с параметрами, сотрудничают в группах.
<i>Этап 4. Обсуждение результатов работы (время – 10 мин.)</i>	
Приглашает представителей каждой группы представить результаты. Ведет обсуждение, задает вопросы, поощряет обмен мнениями.	Представляют свои решения, объясняют методики, участвуют в обсуждении, отвечают на вопросы.
<i>Этап 5. Итоги урока (время – 2 мин.)</i>	
Подводит итоги урока, делает выводы по теме, оценивает работу групп, объясняет домашнее задание.	Слушают выводы учителя, получают оценки, записывают домашнее задание.

1. *Задание для учащихся с низким уровнем сформированности критического мышления:* найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\frac{x^2+4x-a}{15x^2-8ax+a^2} = 0$ имеет ровно 2 различных решения.

Ответ: $a \in (-4; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 5) \cup (5; +\infty)$

2. *Задание для учащихся со средним уровнем сформированности критического мышления:* при каких значениях параметра a уравнение $\frac{x^2-2x+a^2-4a}{x^2-a} = 0$ имеет ровно 2 различных решения?

Ответ: $a \in (2 - \sqrt{5}; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 4) \cup (4; 2 + \sqrt{5})$

3. *Задание для учащихся с высоким уровнем сформированности критического мышления:* найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\frac{x^2 - a(a-1)x - a^3}{\sqrt{3+2x-x^2}} = 0$ имеет ровно два различных корня.

Ответ: $(-\sqrt{3}; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1)$.

Также были найдены примеры задач с параметрами для учащихся с *различными* уровнями сформированности критического мышления, с которых лучше начинать работу. *Данные разработки приложены в приложении А.*

Выводы по 2 главе

Важной задачей учителя является развитие критического мышления учащихся. В этом контексте особенно важна диагностика уровня сформированности критического мышления у школьников. И лишь на основе полученных результатов можно организовывать деятельность учащихся по решению задач с параметрами, которые способствуют развитию этого важного навыка.

Педагоги часто отмечают, что задачи с параметрами являются одними из самых сложных для учащихся. Тем не менее, программа не содержит в себе линий «Уравнение с параметрами», «Неравенства с параметрами», «Системы с параметрами» и «Задачи с параметрами» для математики базового уровня. В данном пункте выпускной работы был разработан набор заданий, направленных на развитие критического мышления при решении задач с параметрами, на примере задачи из темы «*Расположение корней квадратного трехчлена*».

Представленные задания могут быть эффективно использованы при обучении математике в рамках элективных курсов по подготовке к ЕГЭ по математике профильного уровня. Более того, выполнение данных заданий

может помочь учащимся справиться с задачами, которые ранее считались для них слишком сложными.

Важно отметить, что при разработке заданий учитывались различные типы задач с параметрами, что позволяет избежать деградации знаний и навыков учащихся при решении задач с использованием этой темы. Кроме того, приведены рекомендации по использованию заданий в образовательном процессе, что позволяет учителям лучше ориентироваться в том, как эффективнее использовать материалы в учебном процессе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сопоставление результатов работы с поставленными задачами позволяет заключить следующее:

1. В первой главе были рассмотрены теоретические основы развития критического мышления, проанализирована психолого-педагогическая и методическая литература с целью выделения сущности понятия критического мышления и его структуры.

2. Рассмотрены методы и приемы развития критического мышления при обучении математике, определены уровни сформированности критического мышления учащихся, в результате чего были определенные приемы, которые целесообразно использовать при обучении математике.

3. Выявлено, что задачи с параметрами являются эффективным средством развития критического мышления учащихся.

4. Во второй главе были выделены особенности организации работы учителя с задачами с параметрами, в результате чего, был сформулирован вывод, что начинать развивать критическое мышление учащихся необходимо с диагностики уровня сформированности критического мышления. Затем, в соответствии с полученными результатами, организовывать деятельность учащихся по решению задач с параметрами.

5. На основании рассмотренных особенностей разработан набор заданий для развития критического мышления учащихся при решении задач с параметрами и представлены рекомендации по использованию данных заданий при обучении математике в общеобразовательной школе.

Подводя итог, можно констатировать следующее: все задачи выполнены и цель достигнута, разработан комплект заданий, направленных на развитие критического мышления обучающихся при решении задач с параметрами.

В перспективах развития темы выпускной работы планируется использовать разработанный набор заданий в учебном процессе

общеобразовательной школы в рамках элективного курса по подготовке учащихся к ЕГЭ по математике профильного уровня с целью развития критического мышления учащихся и непосредственно подготовки к успешной сдаче экзамена.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Арюткина, С. В.** О формировании обобщенных приемов решения уравнений и неравенств с параметром у учащихся основной школы / С. В. Арюткина // Математический вестник педвузов и университетов Волго-вятского региона. – 2007. – № 9. – С. 162–170.
2. **Байханова, Н. А.** Некоторые условия внедрения технологии развития критического мышления в практику изучения иностранных языков / Н. А. Байханова // Наука и образование сегодня. – 2019. – № 3 (38). – С. 52–53.
3. **Ваганова, О. И.** Формирование критического мышления у обучающихся высших учебных заведений / О. И. Ваганова // Азимут научных исследований: педагогика и психология. – 2019. – № 1 (26). – С. 44–46.
4. **Воронина, Л. В.** Модель формирования критического мышления будущих горных инженеров и инженеров-геологов в процессе обучения математике / Л. В. Воронина // Педагогическое образование в России. – 2021. – № 5. – С. 67–78.
5. **Воронина, Л. М.** Кейс-задачи как средство формирования критического мышления у будущих горных инженеров в процессе обучения математике / Л. В. Воронина // Информационно-коммуникационные технологии в педагогическом образовании. – 2021. – № 4 (73). – С. 69–76.
6. **Гребнева, Д. М.** Использование приемов технологии развития критического мышления на уроках математики в школе / Д. М. Гребнева // Информатика в школе. – 2021. – № 9 (172). – С. 16–28.
7. **Дяченко, С. И.** Линия задач с параметрами в школьном курсе математики / С. И. Дяченко // Вестник Таганрогского института имени А. П. Чехова. – 2010. – С. 72–77.

8. **Журавлева, Е. Г.** Задачи как средство формирования умений критически мыслить у студентов математических специальностей педвузов / Е. Г. Журавлева. – Пенза: 2008. – 19 с.

9. **Заир-Бек, С. И.** Развитие критического мышления на уроке : пособие для учителей общеобразовательных учреждений. – 2-е изд. / С. И. Заир-Бек. – Москва : Просвещение, 2011. – 223 с.

10. **Кожухов, С. К.** Уравнения и неравенства с параметром: учебно-методическое пособие для учителей математики, студентов математических специальностей педагогических вузов, абитуриентов / С. К. Кожухов. – Орел: 2013. – 72 с.

11. **Колесникова, Н. В.** Разработка программы чат-бот в Telegram для развития компонентов критического мышления у студентов / Н. В. Колесникова // Всероссийский педагогический форум. – Петрозаводск : Международный центр научного партнерства «Новая Наука», 2021. – С. 54–61.

12. **Менькова, С. В.** Задания на поиск ошибок как средство развития критического мышления студентов при изучении математических дисциплин / С. В. Менькова // Современные проблемы естествознания и естественнонаучного образования. – Арзамас : Арзамасский филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского», 2020. – С. 192–198.

13. Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развёрнутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2023 года. Математика // ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений». – URL: <https://clck.ru/UP5kn> (дата обращения: 05.05.2024).

14. **Мироненко, С. Н.** Оценка сформированности критического мышления у обучающихся в общеобразовательной школе / С. Н.

Мироненко // Вестник череповецкого государственного университета. – 2020. – № 1 (94). – С. 185–196.

15. **Михалёв, А. А.** Организация и опыт изучения критического мышления подростков / А. А. Михалёв // Служение педагогическому делу 2022. – Петрозаводск : МЦНП «Новая наука», 2022. – С. 47–56.

16. **Муштавинская, И. В.** Технология развития критического мышления на уроке и в системе подготовки учителя : учебно-методическое пособие / И. В. Муштавинская. – Санкт-Петербург : КАРО, 2009. – 144 с.

17. СДАМ ГИА: РЕШУ ЕГЭ : [сайт]. – URL: <https://ege.sdamgia.ru/> (дата обращения: 05.05.2024).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Примеры заданий по теме «Задачи с параметрами» для учащихся с низким уровнем сформированности критического мышления.

1. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $(x - 2)(x + a) = 0$ имеет ровно два различных корня.

Постановка вопроса: какие условия должны быть выполнены для того, чтобы уравнение имело два различных корня?

Анализ: уравнение раскладывается на два линейных множителя $x - 2$ и $x + a$. Решение уравнения заключается в нахождении x , при которых хотя бы один из множителей равен нулю.

Выделение ключевых моментов: уравнение имеет корни $x = 2$ и $x = -a$.

Проверка решения: для того, чтобы уравнение имело два различных корня, 2 и $-a$ должны быть различны.

Заключение: a может быть любым, кроме $a = -2$

Ответ: $a \neq -2$.

2. При каких значениях параметра k система уравнений $\begin{cases} y = kx + 1, \\ y = 2x - 3. \end{cases}$

Имеет одно решение?

Постановка вопроса: как определить, при каких значениях k система уравнений имеет одно решение?

Анализ: необходимо приравнять правые части уравнений и решить полученное уравнение относительно x .

Выделение ключевых моментов: система имеет одно решение, если полученное уравнение имеет одно значение x .

Проверка решения: решение уравнение даст нам $kx + 1 = 2x - 3$, даст нам $x = \frac{-4}{k-2}$ для существования решения знаменатель не должен быть равен нулю.

Заключение: $k \neq 2$.

Ответ: $k \neq 2$.

3. Определите, при каких значениях параметра b уравнение $x^2 - (b + 2)x + b = 0$ имеет два различных положительных корня.

Постановка вопроса: какие условия должны быть выполнены для того, чтобы уравнение имело два различных положительных корня?

Анализ: используя теорему Виета для определения суммы и произведения корней уравнения.

Выделение ключевых моментов: $x_1 + x_2 = b + 2$, $x_1 x_2 = b$.

Проверка решения: условия на положительность корней

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 x_2 > 0, \\ D > 0. \end{cases}$$

Заключение: $b > 0$

Ответ: $b > 0$.

4. Найдите все значения параметра c , при которых график функции $y = x^2 - cx + 2$ касается оси x .

Постановка вопроса: какие условия должны быть выполнены для того, чтобы график функции касался оси x ?

Анализ: уравнение должно иметь один корень, что означает, что дискриминант должен быть равен нулю.

Выделение ключевых моментов: $D = c^2 - 8$.

Ответ: $c = \pm\sqrt{8}$

5. При каком значении параметра a уравнение $|x - a| = 3$ имеет два различных решения?

Постановка вопроса: как определить, при каких значениях параметра a уравнение имеет два различных решения?

Анализ: уравнение с модулем раскрывается в два линейных уравнения.

Ответ: $a \in \mathbb{R}$.

6. Определите, при каких значениях параметра d уравнение $\frac{x}{x+d} = 2$ имеет единственное решение.

Ответ: $d \in \mathbb{R}$.

7. Найдите все значения параметра m , при которых неравенство $(x - m)(x - 3) > 0$ выполняется для всех $x \in (2; 4)$.

Ответ: $m > 3$.

8. Определите, при каких значениях параметра p уравнение $x^3 - px + 9 = 0$ имеет хотя бы один корень, равный нулю.

Ответ: $p \in \mathbb{Q}$.

9. При каких значениях параметра q неравенство $x^2 - qx + 1 \leq 0$ не имеет решений?

Ответ: $q \in (-2; 2)$.

10. Найдите все значения параметра r , при которых система

$$\begin{cases} x^2 - rx \leq 0, \\ x \geq 1. \end{cases}$$

неравенств имеет решения.

Ответ: $r \geq 1$.

Эти задачи были выбраны, поскольку они помогают развивать базовые навыки анализа и решения уравнений и неравенств, не требуя глубокого понимания сложных концепций, а также шаг за шагом вводит учащихся в более интересные задачи.

Примеры заданий по теме «Задачи с параметрами» для учащихся со средним уровнем сформированности критического мышления.

1. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $x^2 - (a + 3)x + a = 0$ имеет ровно два различных корня, оба из которых меньше 1.

Постановка вопроса: при каких значениях a оба корня уравнения меньше 1?

Анализ: проанализируй уравнение с точки зрения дискриминанта и корней квадратного уравнения.

Выделение ключевых моментов: найдём корни уравнения и проверим их условия.

Проверка решения: проверим полученные значения a на соответствие условию задачи.

Ответ: $a \in \emptyset$.

2. При каких значениях параметра k система уравнений $\begin{cases} y = kx^2 + 2, \\ y = 4x + k. \end{cases}$ имеет ровно два решения?

Постановка вопроса: как определить, при каких значениях параметра системы имеет ровно два решения?

Анализ: исследуем точки пересечения графиков функций.

Выделение ключевых моментов: найдем условия для равенства количества решений.

Ответ: $k \in R$.

3. Определите, при каких значениях параметра b уравнение $x^3 - bx + b = 0$ имеет хотя бы один корень, лежащий в интервале $(-1; 1)$.

Постановка вопроса: как определить, при каких значениях параметра уравнение имеет корень в данном интервале?

Анализ: исследуем уравнение и его производную.

Выделение ключевых моментов: проверим, лежат ли корни в интервале

Проверка решения: проверим полученные значения b на соответствия условию задачи.

Ответ: $b \in \mathbb{R}$.

4. Найдите все значения параметра c , уравнение $\log_2(x + 3) = cx$ имеет единственный корень.

Постановка вопроса: как определить, при каких значениях параметра уравнение имеет единственный корень?

Анализ: исследуем поведение функций $\log_2(x + 3)$ и cx .

Выделение ключевых моментов: найдем точки пересечения.

Ответ: $c \in (-\infty; 0)$.

5. При каком значении параметра a неравенство $x^2 - (2a - 1)x + a^2 - 4a + 4 \geq 0$ справедливо для всех x ?

Постановка вопроса: как определить, при каких значениях параметра неравенство выполняется для всех x ?

Анализ: исследуем дискриминант квадратного уравнения.

Выделение ключевых моментов: проверим, чтобы дискриминант был неположительным.

Проверка решения: проверим полученные значения a на соответствия условию задачи.

Ответ: $a \in (-\infty; \frac{5}{4}]$.

6. Найдите все значения параметра d , при которых график функции $y = x^3 - 3dx + 2d$ имеет точку экстремума на оси x .

Ответ: $d = 1$.

7. Определите, при каких значениях параметра p неравенство

$$\frac{x^2 - 2px + p^2}{x^2 - p^2} \geq 0$$

справедливо для всех $x \neq \pm p$.

Ответ: таких значений не существует.

8. Найдите все значения параметра m , при которых уравнения

$$x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m = 0$$

отличаются в два раза.

Ответ: $m = 4$.

9. При каких значениях параметра q система неравенств

$$\begin{cases} x^2 - qx + 1 \leq 0, \\ x^2 + qx + 1 \geq 0. \end{cases}$$

имеет решения?

Ответ: система решений не имеет.

10. Найдите все значения параметра r , при которых функция

$y = x^2 + (r - 2)x + r - 3$ имеет хотя бы один общий корень с функцией $y = 2x - r$.

Ответ: $r = \pm 2$.

Эти задачи выбраны для того, чтобы учащиеся с уже средним уровнем критического мышления могли углубить свои знания и навыки в области решения уравнений с параметрами. Они требуют от учащихся не только анализ дискриминанта, но и более сложных операций. Эти задачи помогают учащимся развивать способность анализировать различные математические условия и применять их на практике.

Примеры заданий по теме «Задачи с параметрами» для учащихся с высоким уровнем сформированности критического мышления.

1. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $x^4 - (2a + 3)x^2 + a^2 = 0$ имеет ровно четыре различных вещественных корня.

Постановка вопроса: какие условия должны быть выполнены для того, чтобы уравнение имел четыре различных вещественных корня?

Анализ: преобразуем уравнение.

Выделение ключевых моментов: пусть $y = x^2$, тогда уравнение принимает вид $y^2 - (2a + 3)y + a^2 = 0$

Проверка решения: для наличия четырёх различных корней уравнение должно иметь два положительных различных корня y_1 и y_2 , что даст нам четыре различных корня x .

Ответ: $a > -\frac{3}{4}$.

2. Определите, при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x + y = a, \\ |y| = |x^2 - 2x| \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Постановка вопроса: как определить, при каких значениях параметра система уравнений имеет ровно два решения?

Анализ: выразим y из первого уравнения и раскроем уравнение с модулем.

Выделение ключевых моментов: решаем полученное уравнение относительно x и определяем, сколько корней оно имеет.

Проверка решения: рассматриваем количество пересечений параболы и прямой, задаваемой уравнением.

Ответ: $a \in (-\infty; -\frac{1}{4}) \cup (\frac{9}{4}; +\infty)$.

3. Найдите все значения параметра b , при которых уравнение $e^x + bx = b$ имеет хотя бы два различных корня.

Постановка вопроса: как определить, при каких значениях b уравнение имеет хотя бы два различных корня?

Анализ: рассмотрим производную функции и исследуем её поведение.

Выделение ключевых моментов: найдём критические точки и точки перегиба функции.

Проверка решения: анализируем количество корней уравнения в зависимости от значения параметра b

Ответ: $b < 0$.

4. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $(a^2 + a)x = 2a + 3a^2$ удовлетворяют условию $x > 1$?

Ответ: $a \in (-\infty; 2) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$.

5. При каких значениях параметра a уравнение $x^3 - (a + 2)x^2 - 2ax + 4a^2 = 0$ имеет ровно три различных вещественных корня?

Постановка вопроса: как определить, при каких значениях параметра уравнение имеет ровно три различных действительных корня?

Анализ: рассмотрим производную функции и исследуем её поведение.

Выделение ключевых моментов: найдём производную функции и исследуем её поведение.

Проверка решения: анализируем количество корней уравнения в зависимости от значения параметра a .

Ответ: $(-0,25; 0) \cup (0; 6) \cup (6; +\infty)$.

6. Найдите все значения параметра d , при которых функция $f(x) = x^3 - 3|x - a^2| - 5d$ имеет более двух точек экстремума.

Ответ: $d \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.

7. Найдите все значения параметра t , при которых уравнение $\sin(mx) = x^2 - 1$ имеет ровно четыре различных корня на отрезке $[0; 2\pi]$.

Ответ: $t = \frac{1}{3}, t = \frac{5}{3}$.

8. При каких значениях параметра d уравнение $(d^2 - 2d)x^2 + (d - 1)x + 1 = 0$ имеет хотя бы один корень, лежащий в интервале $(0; 1)$?

Ответ: $d = 0$

9. Найдите все значения параметра r , при которых функция $f(x) = \frac{x^2+r}{x-r}$ имеет ровно два экстремума и оба экстремума являются максимумами.

Ответ: $r = 2$.

Данные задачи требуют осуществления анализа, применения логического мышления и креативности при поиске решений. Разнообразие условий задач позволяет учащимся применять различные методы решения, что способствует развитию математических способностей и формированию критически мыслящих личностей.