МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Задачи на построение сечений многогранников в школьном курсе геометрии как средство формирования пространственного мышления

Выпускная квалификационная работа по направлению

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность программы бакалавриата

«Математика. Информатика»

Форма обучения: очная

Проверка на объем заимствований:
80,64 % авторского текста

Работа рекомендована к защите
рекомендована / не рекомендована
«08» июня 2024 г.
зав.кафедрой математики и МОМ
_______________ Звягин К.А.

Выполнила:
Студентка группы
ОФ-513/204-5-1
Вакилова Алена Аниловна

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент кафедры
МиМОМ
Шарафутдинова А.М.

Челябинск

2024

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире растет востребованность в кадрах, владеющих навыками графического моделирования и умениями создавать и интерпретировать графическую информацию, что связано с математизацией и формализацией научных знаний. Стоит заметить, что многие созданные модели являются отражением реальных предметов и явлений, поэтому верно созданные модели позволяют наглядно представлять информацию, выявлять зависимости между элементами и прогнозировать результаты деятельности. Для перехода от реального объекта к двухмерному или трехмерному образу, необходимо развитое пространственное мышление.

Актуальность данной темы заключается в том, что одной из важнейших задач преподавания стереометрии в школе является формирование и развитие у учащихся пространственного воображения, а также умения работать с пространственными объектами. Знание и понимание стереометрии опирается не столько на теоретические основы, представленные в учебной литературе, сколько на способность учащегося видеть и правильно представлять пространственную фигуру.

Изучение стереометрии в старших классах способствует формированию пространственного мышления обучающихся, развитию логического мышления, развитию практических навыков построения, моделирования и конструирования пространственных фигур.

Старшеклассники знакомятся с пространственными фигурами, законами восприятия и изображения пространственных фигур. При этом идет повторение планиметрического материала, обобщение и систематизация всего курса геометрии средней школы.

Одним из главных средств достижения целей образования средствами геометрии являются задачи на построение сечений многогранников и круглых тел. Решение задач на построение сечений имеет мощный развивающий потенциал. Задания по этой теме представлены в ЕГЭ по математике.

Объектом исследования является процесс развития пространственного мышления при изучении стереометрии в старших классах.

Предметом исследования являются средства, направленные на развитие пространственного мышления.

Цель исследования разработать комплекс заданий по теме «Построение сечений многогранников», направленных на развитие пространственного мышления обучающихся.

Гипотеза исследования заключается в предположении, что применение в процессе обучения разработанного комплекса заданий по теме «Построение сечений многогранников» может значительно способствовать формированию пространственного мышления у учащихся и повышению их успеваемости в данной области знаний.

Для достижения цели были выдвинуты следующие **задачи**:

1. Проанализировать психолого-педагогическую, методическую литературу и Интернет-ресурсы с целью выделения сущности понятия и структуры пространственного мышления;
2. Рассмотреть методы решения задач на построение сечений;
3. Оценить возможности задач на построение сечений многогранников для развития пространственного мышления;
4. Выявить роль наглядных материалов для развития пространственного мышления;
5. Составить комплекс заданий по теме «Построение сечений многогранников», направленных на развитие пространственного мышления обучающихся.

Проблема исследования.

Начиная изучать курс стереометрии, старшеклассники сталкиваются с рядом сложностей:

1. Неумение устанавливать соответствие между геометрическим объектом и его описанием или изображением;
2. Неумение анализировать взаимное расположение фигур;
3. Отсутствие навыка делать чертеж по условию задачи, изображать геометрическую фигуру;
4. Отсутствие навыка разбивать объект на составные части и мысленно изменять их взаимное расположение;
5. Неумение распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры.

Вышеперечисленные проблемы у учащихся старших классов возникают при решении задач по геометрии в основном из-за отсутствия развития пространственного мышления. Все сложности учащихся связаны в некоторой части с традиционной формой обучения, так как учителя математики на традиционных уроках геометрии использовали только геометрические фигуры из бумаги, как следствие при решении геометрических задач появлялось мало возможностей показать, объяснить то или иное действие на бумажной геометрической фигуре. Кроме того, часто учителя математики упускают условие задачи — самостоятельно построить чертеж к задаче, а также значительную роль играет количество уделенного времени на изучение материала, которого недостаточно. В современном же образовании применяются различные методы обучения, которые позволяют развивать у учащихся творческие, умственные индивидуальные способности.

Практическая значимость исследования: разработка практических заданий по теме «Построение сечений многогранников» в среде GeoGebra.

Структура работы: выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, представляющих теоретическую и практическую части, заключения, списка использованных источников и приложения.

ГЛАВА 1. ПСИХОЛОГО–ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗВИТИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЫШЛЕНИЯ У УЧАЩИХСЯ СТРАШИХ КЛАССОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ

1.1 Возрастные особенности формирования пространственного мышления учащихся старших классов

Пространственное мышление – вид умственной деятельности, который обеспечивает создание пространственных образов и оперирование ими в процессе решения практических и теоретических задач. Это сложный процесс, куда включаются не только логические операции, но и множество перспективных действий, без которых мышление протекать не может. Пространственное мышление является разновидностью образного мышления, сохраняя все основные черты образного.

Проблемой формирования пространственного мышления занимались многие ученые психологи: Б. Г. Ананьев, О. С. Гурова, Е. Н. Кабанова-Меллер, И. Л. Каплунович, А. Н. Леонтьев, Д. Д. Мордухай-Болтовской, Ж. Пиаже, С. Л. Рубинштейн, Б. М. Теплов, Ф. Л. Шемякин, И. С. Якиманская и др. В их исследованиях раскрывается возникновение пространственных представлений и природа восприятия пространства, ими доказано, что динамика и особенности формирования пространственного мышления зависят от деятельности, которую выполняет субъект [7].

И. С. Якиманская в своих исследованиях показала, что в содержании пространственного мышления следует различать две стороны: создание образа и оперирование им [20]. Автором выделено три типа оперирования пространственными образами.

Прежде всего, мышление является высшим познавательным процессом. Оно представляет собой порождение нового знания, активную форму творческого отражения и преобразования человеком действительности. Отличие мышления от других психологических процессов состоит также в том, что оно почти всегда связано с наличием проблемной ситуации, задачи, которую нужно решить, и активным изменением условий, в которых эта задача задана. Мышление в отличие от восприятия выходит за пределы чувственно данного, расширяет границы познания. В мышлении на основе сенсорной информации делаются определенные теоретические и практические выводы. Оно отражает реальность не только в виде отдельных вещей, явлений и их свойств, но и определяет связи, существующие между ними, которые чаще всего непосредственно, в самом восприятии человеку не даны. Свойства вещей и явлений, связи между ними отражаются в мышлении в обобщенной форме, в виде законов, сущностей.

Старший школьный возраст характеризуется продолжающимся развитием общих и специальных способностей детей на базе основных ведущих видов деятельности: учения, общения и труда. В учении формируются общие интеллектуальные способности, особенно понятийное теоретическое мышление. Это происходит за счет усвоения понятий, совершенствования умения пользоваться ими, рассуждать логически и абстрактно. Значительный прирост предметных знаний создает хорошую базу для последующего развития умений и навыков в тех видах деятельности, где эти знания практически необходимы.

В подростковом и раннем юношеском возрасте завершается формирование когнитивных процессов, и прежде всего мышления. В эти годы мысль окончательно соединяется со словом, в результате чего образуется внутренняя речь как основное средство организации мышления и регуляции других познавательных процессов.

Рассмотрим структуру пространственного мышления:

1. Восприятие пространства – способность воспринимать информацию о пространственных отношениях и формах объектов.
2. Ориентация в пространстве – умение определять свое положение и положение объектов относительно друг друга.

3. Представление пространства – способность создавать образы объектов и их взаимного расположения в уме.

4. Воображение пространства – умение манипулировать образами объектов в уме, изменять их форму и положение.

5. Анализ пространственных отношений – способность разделять сложные пространственные отношения на более простые элементы и анализировать их.

6. Планирование в пространстве – разработка стратегий и планов действий в пространстве с учётом ограничений и возможных вариантов;

7. Запоминание пространственной информации – способность сохранять и воспроизводить информацию о пространственном расположении объектов.

8. Решение пространственных задач – применение различных аспектов пространственного мышления для решения практических задач.

9. Обучение пространственному мышлению – способность усваивать новые знания и умения в области пространственного восприятия, представления и анализа [8].

Создание пространственных образов и оперирование ими – тесно взаимосвязанные процессы. В основе каждого из них лежит деятельность представления, однако структура этой деятельности, условия ее осуществления в обоих случаях различны. В одном случае эта деятельность направлена на создание пространственного образа. В другом – на его переработку (мысленное видоизменение, преобразование) в соответствии с поставленной задачей. При создании любого образа, в том числе и пространственного, мысленному преобразованию подвергается наглядная основа, на базе которой образ возникает. При оперировании образом мысленно видоизменяется уже созданный на этой основе образ, нередко в условиях полного отвлечения от нее.

Выделяя оперирования образами в особый вид деятельности представления, не совпадающий ни по своему содержанию, ни по результатам с процессом создания образа, мы тем самым получаем возможность определить основную функцию пространственного мышления. Под пространственным мышлением подразумевается свободное оперирование пространственными образами, их преобразование с учетом требований задачи.

Создание образов обеспечивает накопление представлений, которые по отношению к мышлению являются исходной базой, необходимым условием его осуществления. Чем богаче и разнообразнее запас пространственных представлений, чем наиболее совершенны способы их создания, тем легче будет протекать процесс оперирования ими, ибо нельзя, как известно, оперировать тем, чем не овладел, чего не имеешь в наличии. Выделение двух видов деятельности представления, направленной на создание образов и оперирование ими, анализ их психологических механизмов, показывает, что мы имеем здесь дело с различными уровнями развития пространственного мышления.

Для более успешного обучения школьников необходимо при подборе материала уроков учитывать возрастные особенности. При изучении наглядной геометрии мы обращаем большее внимание на развитие пространственного мышления учащихся, значит следует разобраться в том, что же это такое и какие бывают особенности. Психологи же говорят, что в старшем школьном возрасте оно достаточно развито, но практика показывает, что это не так. Для успешного обучения в старших классах, для успешной сдачи единого государственного экзамена, для успешного обучения в высших учебных заведениях пространственное мышление необходимо. Как же его развивать в этом возрасте?

Л. С. Выготский уделял особое внимание развитию мышления в подростковом возрасте. Важным в развитии мышления является владение процессом образования понятий, что ведёт к высшей форме интеллектуальной деятельности. По словам Л. С. Выготского, в основе всех интеллектуальных изменений в этом возрасте лежит функция образования понятий. Организация учебной деятельности должна обеспечить ее направленность на формирование теоретического дискурсивного (рассуждающего) мышления, мышления, основанного на оперировании не конкретными образами и представлениями, а понятиями, на умении сопоставлять эти понятия, переходить в ходе рассуждения от одного суждения к другому. В интеллектуальной деятельности учащихся в период отрочества усиливаются индивидуальные различия, связанные с развитием самостоятельного мышления, интеллектуальной активности, творческого подхода к решению задач, что позволяет рассматривать подростковый возраст как сензитивный период для развития творческого мышления [18].

Различные обучающие воздействия влияют на формирование пространственного мышления на всех этапах онтогенеза, оно имеет ярко выраженную индивидуальную специфику, особенности ее проявления в разнообразных видах деятельности (игровой, учебной, профессиональной). В школьном возрасте отчетливо наблюдается произвольное оперирование образами, когда происходит интенсивное психическое развитие, овладение соответствующими средствами интеллектуальной деятельности, обеспечивающими создание образов, их преобразование, произвольное изменение системы отсчета, использование разнотипной наглядной основы. В этом возрасте развитие пространственного мышления активно развивается благодаря тем школьным предметам (например, геометрии), которые заинтересованы в его развитии, потому что без этого не может быть эффективного усвоения знаний.

Под понятием «пространственное мышление» понимается сложный процесс, включающий в себя и логические операции, и большое разнообразие перцептивных действий, без которых мыслительные процессы в форме образов протекать не могут. Мы можем постоянно наблюдать переход от одних зрительных образов, которые отражают пространственные отношения и свойства, к другим, в решении задач, где возможно использование графических изображений.

Пространственные образы, которыми оперирует мышление должны быть динамичными, оперативными и подвижными. Данные качества вытекают из условия создания их и оперирования ими. Подвижность и динамичность образов обусловлена тем, что, когда решаются задачи, требуется постоянный переход к плоским (двумерным) изображениям от объемных (трехмерных) и обратно, к восприятию графических изображений от реальных объектов. И так, можно сказать, что пространственное мышление – это специфический вид умственной деятельности, имеющий место в решении задач, которые требуют ориентации в теоретическом и в практическом пространстве (как в воображаемом, так и в видимом). Это и есть мышление образами в своих наиболее развитых формах, где пространственные отношения и свойства фиксируются. Мышление обеспечивает создание новых образов, отличных от исходных, их видоизменение и трансформацию, когда мы оперируем исходными образами, которые созданы на различной наглядной основе [10; 21].

Пространственное мышление у каждого человека проходит сложный путь развития. Оно постепенно выделяется как самостоятельный вид мышления, который осуществляется в форме образов, преобразуется в различные и достаточно сложные виды творческой и профессиональной деятельности, но сначала вплетено в «предметно-манипулятивную» деятельность ребенка. В процессе решения графических задач, когда происходит оперирование образами и создание их на основе использования разнообразной наглядной базы, проявляется пространственное мышление в более развитых его формах. Деятельность представления является психологическим механизмом пространственного мышления, она обеспечивает перекодирование образов, использование различных систем отсчета, оперирование в процессе решения задач разнообразными признаками и свойствами: величиной, формой, пространственными отношениями объектов.

В юношеском и подростковом периоде мир образов постепенно уступает место понятиям. Это является еще одним способом познания. Условием для его развития является речь. Каждый из трех способов представления – действенный, образный и символический – отображает события своим особым образом. Все они накладывают свой отпечаток в разных возрастах на психическую жизнь ребенка. В интеллектуальной жизни взрослого человека эти три формы развиваются и сохраняются.

1.2 Теоретические основы темы «сечения многогранников»

Одним из источников информации для учащихся является учебник. Нами были изучены действующие учебники по геометрии 10-11 класса таких авторов, как Л. С. Атанасян, А. В. Погорелов, Е. В. Потоскуев и Л. И. Звавич. К сожалению, в учебной программе за 10-й класс отводится недостаточно времени на изучение задач на построение сечений. В подтверждение к сказанному, в учебнике Л. С. Атанасяна, на тему «Построение сечений многогранников» отводится два часа, рассматривается 3 задачи на построение сечений с пояснениями [5]. В учебнике А. В. Погорелова на построение сечений отведено около трех часов, причем сначала рассматривается построение изображения призмы, а после – построение ее сечений, затем построение изображения пирамиды и ее сечений [12]. Хочется отметить, что у выше представленных авторов нет чёткого алгоритма построения сечений. В учебнике Е. В. Потоскуева и Л. И. Звавича на данную тему отводится 3 часа в учебной программе, здесь преобладает наглядный материал в процессе построения теории, очень хорошо продемонстрирован алгоритм построения сечения пирамиды и параллелепипеда [14].

Одной из наиболее важных и сложных учебных дисциплин в старших классах является курс геометрии. Основная причина, по которой у многих школьников возникают трудности в его освоении в 10-11 классах, связана с резким переходом от работы с плоскостными объектами к работе с пространственными объектами.

Геометрические задачи традиционно делятся на три типа:

– на вычисление;

– на доказательство;

– на построение.

Поскольку построение плоскости сечения зависит от способа задания плоскости, ученик, приступив к изучению темы «Построение сечений многогранников», должен к этому моменту хорошо усвоить для себя, что плоскость определяется:

– тремя точками;

– прямой и точкой;

– двумя параллельными прямыми;

– двумя пересекающимися прямыми.

Это необходимо знать, чтобы понимать, как именно можно построить сечение тела, если даны три точки на поверхности тела, точка и след, прямая на боковой поверхности тела и след.

Решение любых стереометрических задач требует не только вычислительных и логических умений и навыков, но и умений изображать пространственные фигуры на плоскости (например, на листе бумаги, классной доске), что по сути своей тесно связано с темой «Геометрические построения на плоскости». Стереометрические задачи на вычисления и доказательство легко можно решать, используя правильный рисунок пространственной фигуры. При изучении таких тем как «Параллельность прямых и плоскостей в пространстве», «Перпендикулярность прямых и плоскостей», «Углы между прямой и плоскостью, между двумя прямыми, между двумя плоскостями», а также других подобных тем, прекрасным иллюстрационным материалом является решение позиционных и метрических задач на построение пространственных фигур и сечений этих фигур плоскостями [15].

Построение сечений многогранников встречаются в заданиях ЕГЭ. Задачи такого типа встречаются как в задачах базового, так и профильного уровней.

Сечение – это плоская фигура, полученная в результате пересечения тела плоскостью и содержащая точки, принадлежащие как поверхности тела, так и секущей плоскости.

Правила построения сечений:

– соединять можно только две точки, лежащие в плоскости одной грани;

– секущая плоскость может пересекать параллельные грани только по параллельным отрезкам;

– если в плоскости грани отмечена только одна точка, принадлежащая плоскости сечения, то надо построить дополнительную точку. Для этого необходимо найти точки пересечения уже построенных прямых с другими прямыми, лежащими в тех же гранях.

Секущая плоскость пересекает грани многогранника по прямым, а точнее по отрезкам – разрезам. Так как секущая плоскость идет непрерывно, то разрезы образуют замкнутую фигуру – многоугольник. Полученный таким образом многоугольник и будет сечением тела.

Можно выделить простейшие сечения:

– диагональные сечения параллелепипедов;

– сечения плоскостью, параллельной основанию призмы или пирамиды;

– сечение плоскостью параллельной боковой грани призмы или пирамиды.

Также существует большое количество разнообразных задач на построение сечений параллельных или перпендикулярных ребрам, или граням многогранников, проходящих под углом к ребрам или граням, проходящих через конкретные точки.

Удобнее всего задавать плоскость сечения тремя точками, рассмотрим возможные варианты задания точек плоскости сечения:

– точка расположена вне многогранника;

– точка находится внутри многогранника;

– точка расположена в грани многогранника;

– точка принадлежит ребру многогранника;

– точка принадлежит диагонали многогранника;

– точка совпадает с вершиной многогранника.

Рассматривая различные виды задач на сечения многогранников, большой интерес представляют сечения параллелепипеда, начать лучше даже с куба. Параллелепипед имеет 6 граней, поэтому его сечение может иметь следующую форму: треугольника, четырехугольника, пятиугольника и шестиугольника (рисунок 1.1) [17].

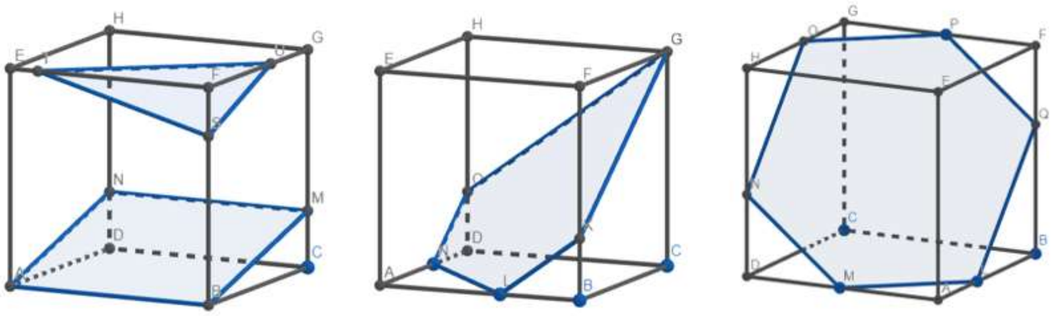

Рисунок 1.1 – Сечения параллелепипеда

Для построения этих и других сечений нужно владеть методами, рассмотрим основные методы построения сечений:

– метод следов;

– метод внутреннего проектирования;

– комбинированный метод построения сечений.

Метод следов заключается в построении следов секущей плоскости н а плоскость каждой грани многогранника. Построение обычно начинают с построения так называемого основного следа секущей плоскости, т.е. следа секущей плоскости на плоскости основания многогранника. Следом называют прямую пересечения плоскостей: плоскости сечения и плоскости какой-либо грани многогранника. Чтобы построить след, достаточно знать две его точки, то есть точки, лежащие одновременно в секущей плоскости и плоскости рассматриваемой грани.

Основные правила построения сечений методом следов:

– если даны (или уже построены) две точки плоскости сечения на одной грани многогранника, то след сечения этой плоскости – прямая, проходящая через эти две точки;

– если дана (или уже построена) прямая пересечения плоскости сечения с основанием многогранника (след на основании), и есть точка, принадлежащая определенной боковой грани, то нужно определить точку пересечения данного следа с этой боковой гранью (точка пересечения данного следа с общей прямой основания и данной боковой грани);

– точку пересечения плоскости сечения с основанием можно определить, как точку пересечения какой-либо прямой в плоскости сечения с ее проекцией на плоскость основания.

То есть, суть метода заключается в построении вспомогательной прямой, являющейся изображением линии пересечения секущей плоскости с плоскостью какой-либо грани фигуры. Удобнее всего строить изображение линии пересечения секущей плоскости с плоскостью нижнего основания для призм и с плоскостью основания для пирамид. Используя след, легко построить изображения точек секущей плоскости, находящихся на боковых ребрах или гранях фигуры.

Рассмотрим пример построения сечения с помощью метода следов.

Дано: Дана четырёхугольная пирамида ABCDE и точки F, G, H, лежащие соответственно на ребрах EA, EB, CD (рисунок 1.2) [13].

Построить сечение, проходящие через точки F, G, H.

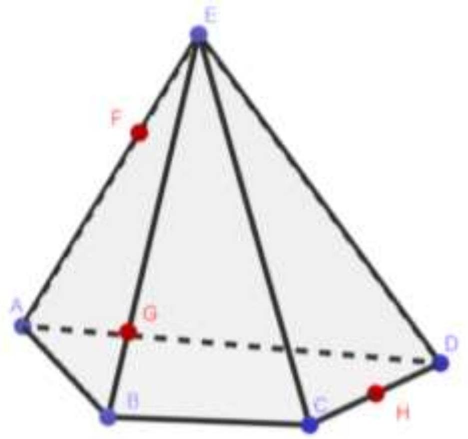

Рисунок 1.2 – Четырёхугольная пирамида

Построение (рисунок 1.3):

1. Соединим точки F и G, так как они лежат в плоскости ABE.

2. Проведём прямы FG и AB, которые пересекутся в точке I в плоскости ABC.

3. Проведём прямую через точки I и H, так как они лежат в плоскости ABC. Прямая IH пересекает ребро BC в точке J. Соединим точки H и J, так как они лежат в плоскости ABC.

4. Соединим точки G и J, так как они лежат в плоскости BCE.

5. Проведём прямую AD, которая пересечёт прямую IH в точке K.

6. Соединим точки F и K, так как они лежат в плоскости ADE. Прямая FK пересекает ребро ED в точке L.

7. Соединим точки F и L, так как они лежат в плоскости ADE.

8. Соединим точки H и L, так как они лежат в плоскости CDE.

9. FGJHL – искомое сечение.

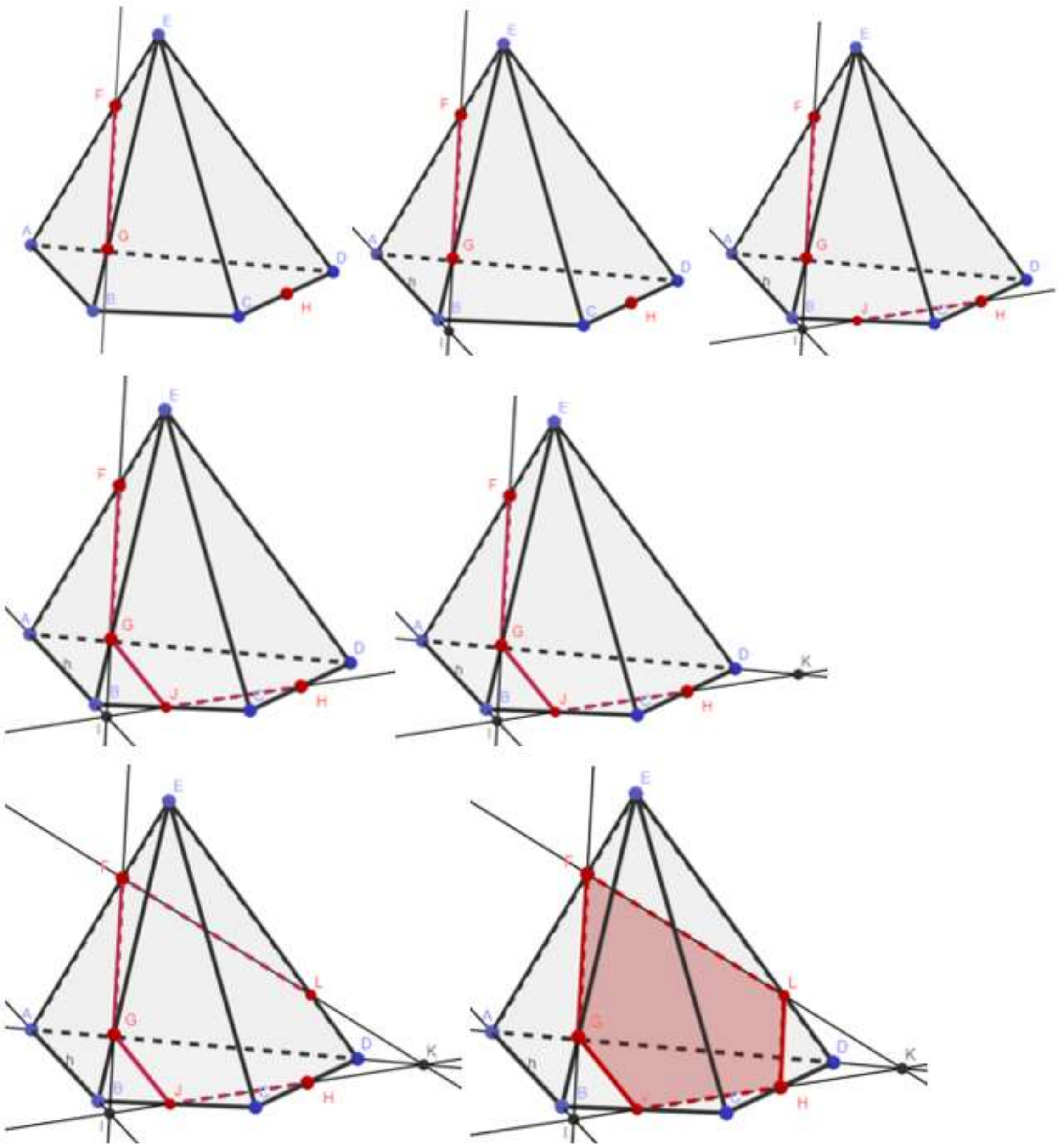

Рисунок 1.3 – Этапы построения сечения пирамиды

Далее рассмотрим метод внутреннего проектирования. Суть данного метода заключается в том, чтобы спроектировать точки на нижнее основание фигуры. После этого соединяем две спроектированные точки друг с другом и пресекаем их прямой, которая образуется в результате соединения спроектированной точки и точки ребра, лежащей в нижнем основании фигуры. После чего, точку пересечения проектируем на прямую, которая образуется после соединения двух точек проекции. Затем третью точку и ранее спроектированную точку соединяем и прямой пересекаем то ребро, точку которого брали для получения пересечения. И так, поступаем до тех пор, пока не построим все точки, через которые проходит данное сечение.

Рассмотрим пример построения сечения с помощью метода внутреннего проектирования.

Дано: $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ – прямая призма. Точки F, G, H, лежат на рёбрах AA_1, BB_1, DD_1 (рисунок 1.4).

Построить сечение, проходящее через точки F, G, H.

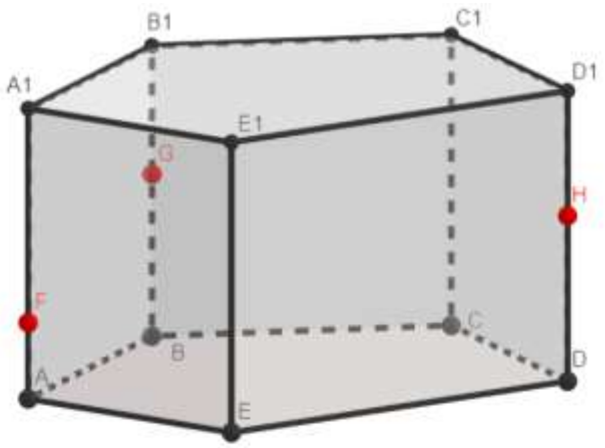

Рисунок 1.4 – Пятиугольная призма

Построение (рисунки 1.5, 1.6):

1. В плоскости основания выберем точки A, B, D, которые являются проекциями данных точек сечения, и точку E, которая будет являться проекцией точки, находящейся на ребре EE1.

2. Построим диагонали выбранного четырехугольника и найдём их точку пересечение (AD∩BE=I).

3. Находим прообраз точки I. Проведём прямую, проходящую через точку I, параллельно боковому ребру призмы, которая пересекает отрезок FH в точке J (точка сечения).

4. Через найденный прообраз точки пересечения диагоналей и одну из трёх данных точек сечения проводим прямую JG до пересечения с ребром EE1, содержащим искомую точку K (точка сечения).

5. Аналогично построим точку пересечения секущей плоскости с ребром CC1. Рассмотрим четырёхугольник ABCD: точки A, B, D являются

проекциями точек F, G, H на плоскость основания. Точка C является проекцией точки, которую нам необходимо найти. Найдём точку пересечения диагоналей AC и BD данного четырёхугольника – точка L.

6. Находим прообраз точки L. Проведём прямую, проходящую через точку L, параллельно боковому ребру призмы, которая пересекает отрезок GH в точке M (точка сечения).

7. Через найденный прообраз точки пересечения диагоналей и одну из трёх данных точек сечения проводим прямую FM до пересечения с ребром CC1, содержащим искомую точку N (точка сечения).

8. Соединим данные и найденные точки сечения, получим пятиугольник GNHKF, который является искомым сечением.

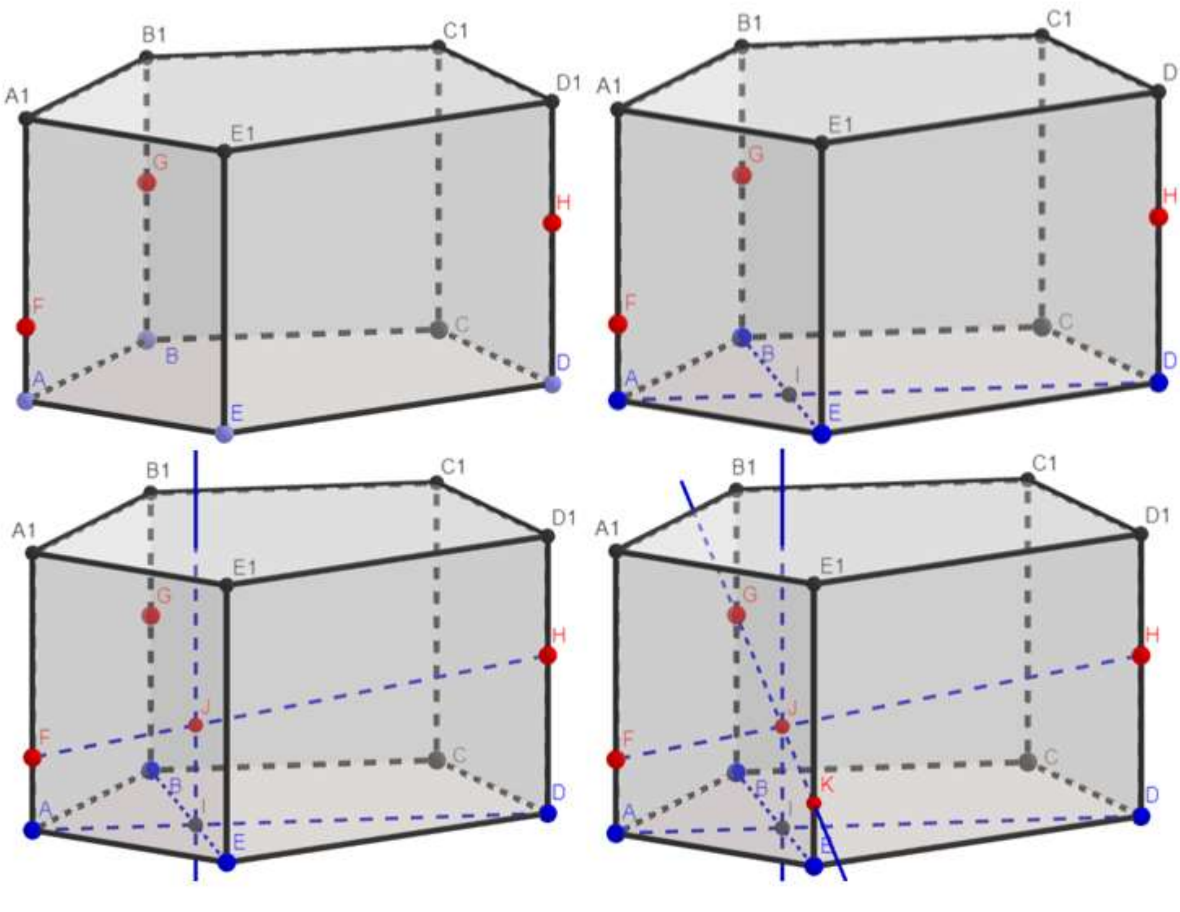

Рисунок 1.5 – Этапы построения сечения призмы

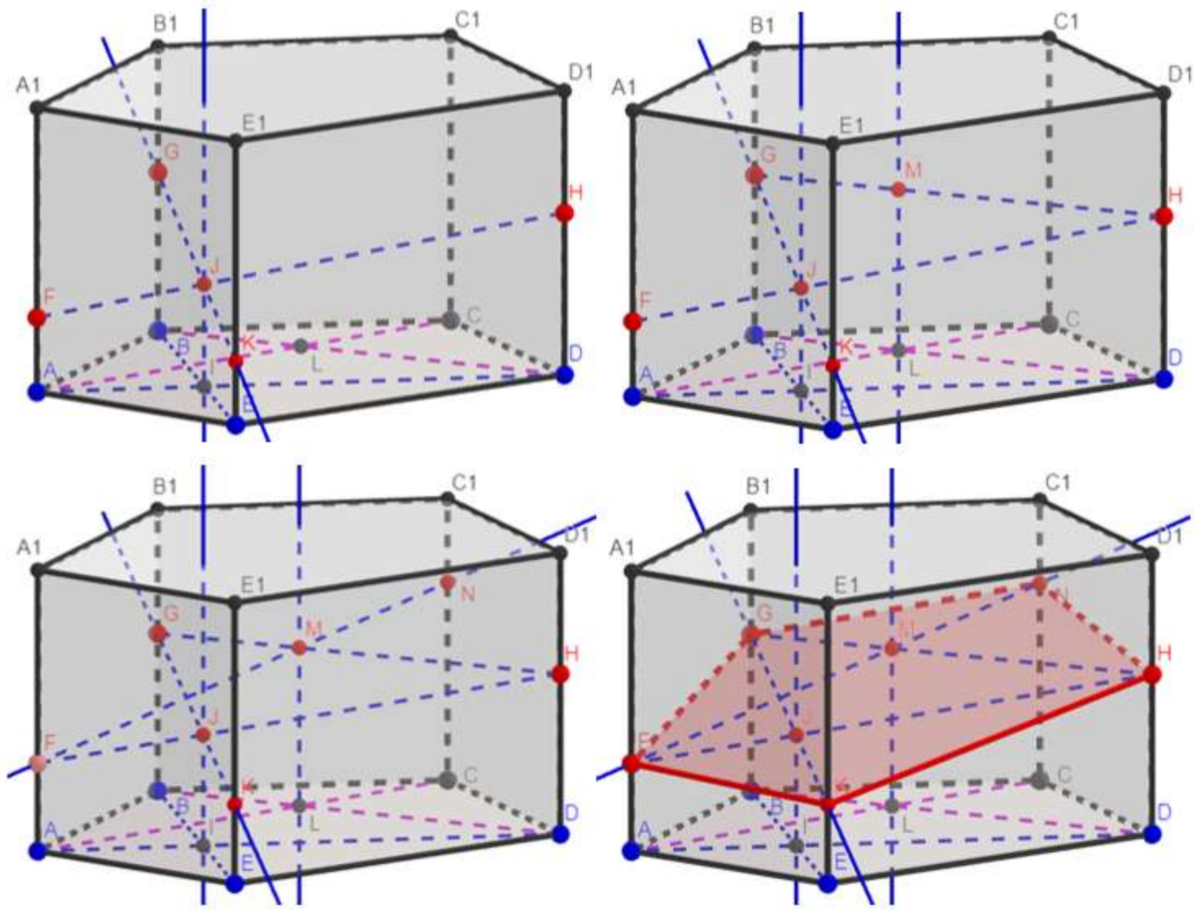

Рисунок 1.6 – Этапы построения сечения призмы

Комбинированный метод построения сечений

Суть комбинированного метода построения сечений многогранников состоит в применении теорем о параллельности прямых и плоскостей в пространстве в сочетании с методом следов и методом внутреннего проектирования.

Теоремы, связанные с параллельными прямыми:

Теорема 1. Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна (рисунок 1.7).

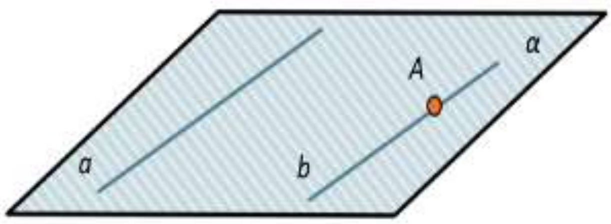

Рисунок 1.7 –Теорема 1

Теорема 2. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой (рисунок 1.8).

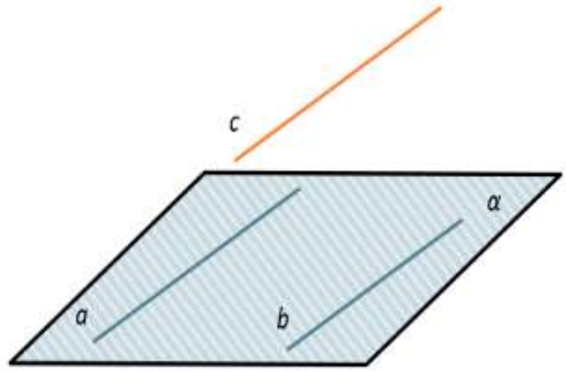

Рисунок 1.8 – Теорема 2

Лемма о пересечении плоскости параллельными прямыми: если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость (рисунок 1.9).

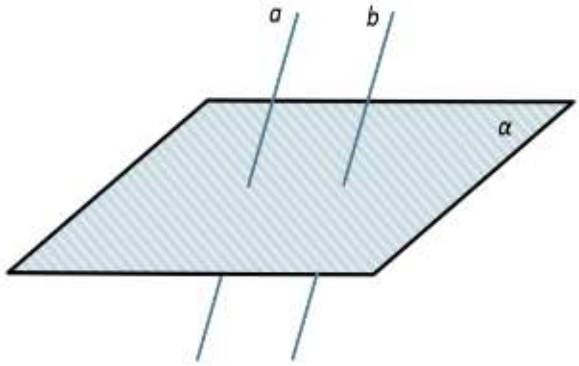

Рисунок 1.9 – Лемма о пересечении плоскости параллельными прямыми

Параллельность прямой и плоскости:

Признак параллельности прямой и плоскости: если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости (рисунок 1.10).

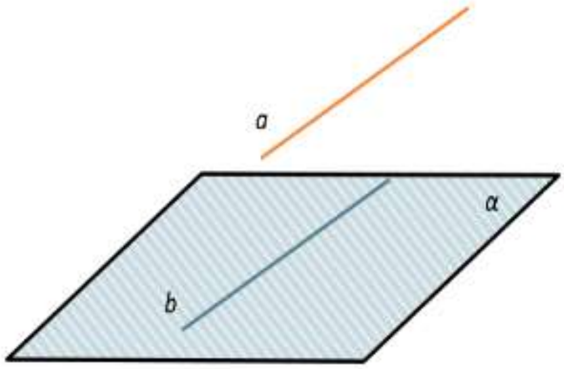

Рисунок 1.10 – Признак параллельности прямой и плоскости

Теоремы, связанные с прямой, параллельной плоскости:

Теорема 3. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой (рисунок 1.11).

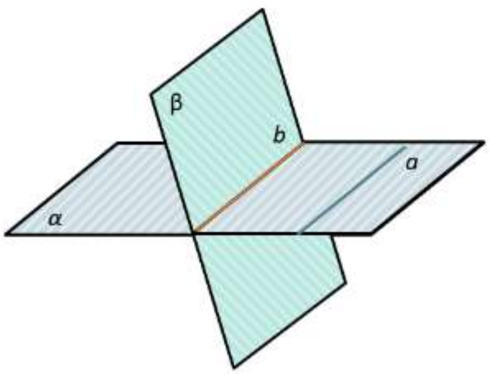

Рисунок 1.11 – Теорема 3

Теорема 4. Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости (рисунок 1.12).

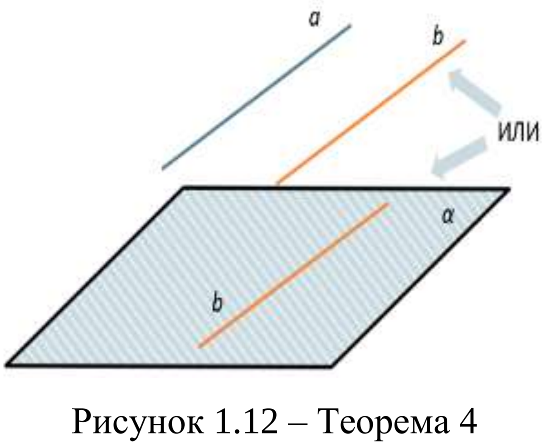

Рисунок 1.12 – Теорема 4

Параллельные плоскости

Признак параллельности плоскостей: если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то плоскости параллельны (рисунок 1.13).

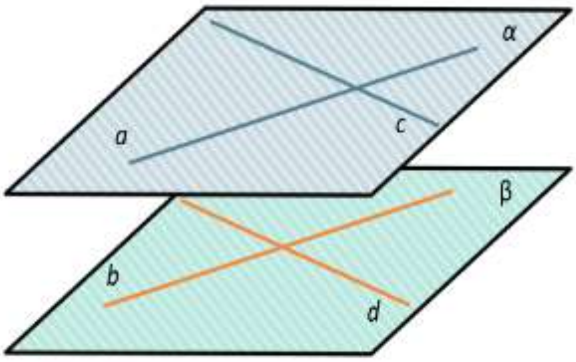

Рисунок 1.13 – Признак параллельности плоскостей

Теорема 5. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии пересечения плоскостей параллельны (рисунок 1.14).

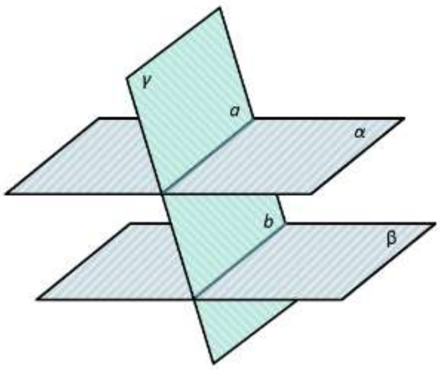

Рисунок 1.14 – Теорема 5

Рассмотрим пример построения сечения с помощью комбинированного метода.

Дано: SABC – треугольная пирамида точки M, N, P – середины рёбер SA, AB, BC соответственно (рисунок 1.15) [1].

Построить сечение, проходящее через точки M, N, P.

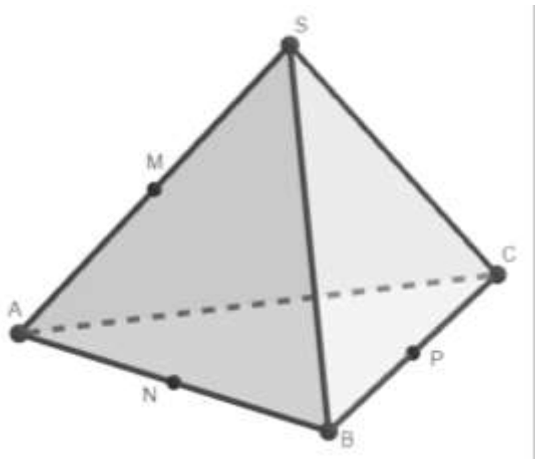

Рисунок 1.15 – Треугольная пирамида

Построение (рисунок 1.16):

1. Соединим точки M и N, так как они принадлежат плоскости SAB. Соединим точки N и P, так как они принадлежат плоскости ABC. Так как точки M, N, P – середины рёбер SA, AB, BC, то MN и NP – средние линии треугольников SAB и ABC соответственно. Значит MN||SB, NP||AC.

2. Тогда плоскость сечения MNP параллельная прямым SB и AC (по признаку параллельности прямой и плоскости).

3. Следовательно, по теореме 3, плоскость MNP должна пересекать плоскости граней SBC и SAC по прямым, соответственно параллельным прямым SB и AC, то есть содержащим средние линии треугольников SBC и SAC.

4. Отметим точку K – середина ребра SC. Соединим точки P и K, так как они лежат в плоскости SBC. Соединим точки M и K, так как они лежат в плоскости основания SAC. PK и MK – средние линии треугольников SBC и SAC соответственно.

5. MNPK – искомое сечение.

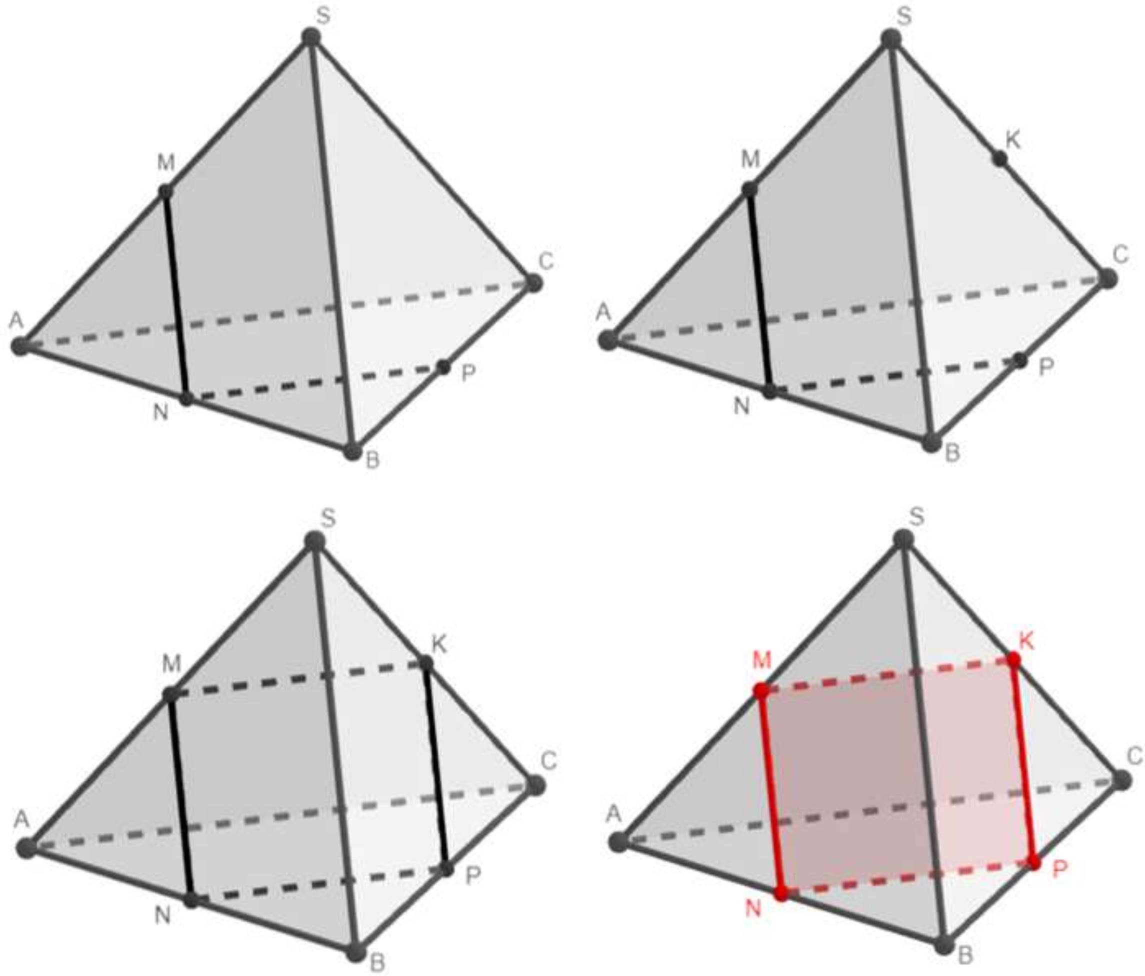

Рисунок 1.16 – Построение сечения пирамиды

1.3 Роль наглядных материалов при формировании пространственного мышления на уроках геометрии

Результаты исследований отечественных педагогов В. А. Гусева, В. А. Панчищиной, В. И. Далингера, В. В. Орлова, и др. показывают, что среди школьных предметов математического цикла, предмет геометрия имеет наибольший потенциал для формирования и развития пространственного мышления, особенно его раздел «Стереометрия», который изучает свойства и отношения геометрических фигур в пространстве. Важнейшей задачей стереометрии является развитие интеллектуальной составляющей школьников, посредством знакомства учащихся с пространством, его особенностями, понятиями и представлениями. Основной целью изучения стереометрии является развитие у учащихся пространственного мышления.

Деятельность пространственного мышления по преимуществу направлена на оперирование пространственными отношениями путем выделения их из реального объекта или его изображения. Но, как правило, определение этих отношений не может быть достигнуто простым созерцанием наглядного материала. Оно требует активной мыслительной деятельности, направленной на преобразование данного материала, своеобразной его интеллектуализации.

Наглядный материал, в котором выражаются пространственные свойства и отношения предмета, в развитии пространственного мышления школьников играет важную роль и является первичной основой создания образа. В процессе решения задачи над образом проводится неоднократное преобразование, видоизменение и трансформация. В результате, создание образов обеспечивает накопление представлений, которые по отношению к мышлению являются исходной базой, необходимым условием его осуществления [19]

В свою очередь наглядные материалы существенно различаются между собой.

Якиманская И. С. и другие педагоги и психологи условно подразделяет их на три основные группы:

– натуральные (вещественные) модели (реальные предметы, макеты различных объектов, геометрические тела и т. п.), сюда также можно отнести перспективные изображения (фотографии, рисунок, иллюстрации, художественные репродукции);

– условно-графические изображения (чертежи, эскизы, различные технические схемы и т. п.);

– знаковые модели (графики, диаграммы, географические карты, химические формулы и уравнения, математические символы, топографические планы и другие интерпретированные знаковые системы) [6].

Все эти наглядности по-разному выражают пространственные свойства и отношения объектов, характеризуются различным соотношением в них наглядных и понятийных элементов, постепенным усилением одних и ослаблением других.

По мнению С. Л. Рубинштейна, применение разнотипных средств наглядности в процессе обучения стереометрии способствует накоплению богатого запаса зрительных пространственных образов, а также формированию их динамичности, и является необходимым условием высокого уровня развития пространственного мышления.

В традиционной системе обучения на уроках геометрии принцип наглядности достигается с использованием двумерных чертежей на плоскости тетради или школьной доски, или же с помощью вещественных моделей, таких как макеты геометрических фигур. Однако чертежи могут давать лишь представление проекции трехмерной фигуры на плоскость, что в большинстве случаев не способствует восприятию школьниками логики решения задачи в полной мере. В свою очередь, макеты геометрических фигур позволяют рассмотреть их со всех сторон и продемонстрировать на них некоторые свойства. Однако, при решении стереометрических задач они не всегда эффективны: на моделях нельзя ставить точки, проводить прямые, плоскости и т. д., к тому же в школах их представлено крайне ограниченное количество, что не позволяет разобрать все задачи на данных образцах. Поэтому одним из путей решения указанной проблемы мы предлагаем применение средств информационно-коммуникационных технологий (далее – ИКТ) для создания наглядного материала [9].

В рамках школьного курса математики преимущественно используются мультимедийные презентации, офисные и математические пакеты, образовательные ресурсы для интерактивных досок, обучающие среды, видео- и аудиоматериалы, а также специальные обучающие программы. Для геометрии характерны программы для моделирования фигур и построений. Именно такие программы способствуют развитию пространственного и аналитического мышления школьников. Но, как правило, математические пакеты общего назначения не включают в себя построение моделей объёмных фигур, что необходимо в курсе стереометрии. Специальные программы по моделированию в школьной геометрии носят преимущественно учебный характер и не всегда предоставляют возможность учителю подготовить полноценный дидактический материал, который ему может понадобиться на уроке. Поэтому мы считаем целесообразным использование электронных сред 3D-редакторов, потому что они предоставляют более широкие функциональные возможности для отображения взаимного расположения стереометрических фигур, сечений плоскостью, а также быстрого изменения и редактирования изображений. Можно предположить, что применение подобных средств ИКТ позволит учителю подготовить учебно-методические материалы для более эффективного обучения школьников решению стереометрических задач.

Применение трехмерной графики при решении задач на построение намного упростит этапы решения и приведет к формированию пространственного мышления путём работы с фигурой, помещённой в трехмерную систему координат. Так как декартова система координат — это трёхмерное пространство, то школьники без труда смогут определять расположение искомого тела в пространстве и с немедленно приступить к решению поставленной задачи.

Конечно, существует достаточно много 3D-редакторов, позволяющих учителю демонстрировать геометрические объекты в виде 3D-моделей, однако среди них можно выделить программы, которые, в некотором роде, помогают решать задачи. Одним из таких помощников является динамическая среда GeoGebra, которая обладает широким функционалом для работы со многими разделами математики. Данная программа особенно полезна при изучении стереометрического материала, в котором особое место уделяется умению строить геометрические фигуры в пространстве.

GeoGebra позволит учителям моделировать и решать различные задачи с алгебраическим и геометрическим содержанием, строить графики функций, создавать конструкции с точками, векторами, линиями, коническими сечениями, находить пределы, наибольшие и наименьшие значения функций, интегралы, производные, строить плоские и пространственные изображения геометрических фигур, дополнять построения, а затем динамически изменять их. Кроме того, эта программа позволит учителю проводить геометрические опыты, эксперименты, иллюстрировать формулы и теоремы, устанавливать зависимости между геометрическими величинами и многое другое. Например, для решения задач по стереометрии, GeoGebra обладает предлагает инструменты, позволяющим не только строить пространственные тела, производить с ними различные манипуляции (изменять точки привязки фигуры, наблюдая изменение формы тела, вращать и анимировать), но и находить расстояние между точками, точкой и прямой, рассчитывать величины углов. В результате компьютерного моделирования геометрические понятия и построения становятся «видимыми» и «осязаемыми».

Выводы по 1 главе

1. Анализ литературных источников по теме исследования позволил уточнить понятие «пространственного мышления». Методом обобщения составлено следующее определение пространственного мышления: «специфический вид умственной деятельности, обеспечивающий создание пространственных образов и оперирование ими в процессе учебной деятельности: определение понятий, введение теорем, решение различных практических и теоретических задач и др.»

2. Рассмотрена структура пространственного мышления следующих авторов: Ананьев Б. Г., Василенко А. В., Зепнова Н. Н., Каплунович И. Я., Коногорская С. А., Якиманская И. С. Данные исследователи выделяют уровни развития пространственного мышления в соответствии с заданиями, которые обучающиеся могут успешно выполнять.

3. Применение на уроках стереометрии динамической среды GeoGebra способствует активному развитию пространственного мышления учащихся, повышению их мотивации к познавательной деятельности. Созданные в данной программе 3D-модели учитель может использовать в качестве наглядного пособия, который поможет правильно истолковать условия задачи учениками, увеличит их арсенал пространственных представлений, а также может служить в качестве одного из эффективных способов решения или же проверки правильности решения задачи.

ГЛАВА 2. ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РАЗВИТИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЫШЛЕНИЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ РАБОТЕ С ЗАДАЧАМИ НА ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ

2.1 Возможности задач на построение сечений многогранников для развития пространственного мышления

Рассмотрим методику работы с геометрическими образами, направленную на формирование пространственного мышления обучаемых в процессе решения задачи, представленную Якиманской И. С. [21]. Представим соотнесение выделенных умений обучаемых, необходимых для создания геометрических образов и оперирования ими при решении стереометрической задачи с характеристикой заданий, направленных на формирование данных умений (Таблица 1, Таблица 2).

Таблица 1 – Характеристики заданий, направленных на формирование необходимых умений для создания геометрических образов

Умения необходимые для создания геометрических образов	*Характеристика заданий, направленных на формирование умений*
Перевод словесных данных задачи в графический образ.	Выполнение чертежа, соответствующего условию задачи.
Выделение существенных признаков геометрических понятий и их актуализация.	Выделение в условии существенных признаков необходимых для решения задачи; выявление связей между элементами.
Вычленение фигуры из состава других фигур чертежа.	Представление чертежа, как совокупности фигур. Выделение элемента чертежа для дальнейшей работы с ним и удержание внимания на фигуре.
Сравнение фигур чертежа.	Фиксация внимания на двух или более фигурах; сопоставление их элементов; установление в образах логических связей.
Построение недостающих фигур чертежа в ходе решение задачи.	Выполнение дополнительных построений новых элементов, или мысленное «включение» элемента в другую фигуру.
Рассмотрение фигур чертежа с разных точек зрения.	Включение одной и той же фигуры в состав различных элементов чертежа.

Таблица 2 – Характеристики заданий, направленных на формирование необходимых умений для оперирования геометрическими образами

Умения необходимые для оперирования геометрическими образами	*Характеристика заданий, направленных на оперирование геометрическими образами*
Мысленное видоизменение пространственного положения образа.	Изменение положения созданного ранее образа с помощью пространственных перемещений.
Мысленное видоизменение структуры геометрического образа.	Изменение структуры созданного ранее образа с помощью пространственных преобразований.
Мысленное изменение пространственного положения и структуры геометрического образа.	Многократные преобразования образа фигуры по положению и структуре одновременно.

На основе приведенного сопоставления рассмотрим пример работы с задачей на построение сечения многогранника с точки зрения процесса создания геометрического образа и оперирования им.

Решение задачи на построение сечений состоит из этапов: построение, доказательство и исследование. Представим практическую иллюстрацию каждого этапа с использованием возможных заданий, направленных на развитие пространственного мышления у учащихся.

*Задача***.** Постройте сечение пирамиды SABCD плоскостью, проходящей через точки E, F, G, взятые на ребрах SA, SB, SC.

Этап 1. Построение:

1. *Перевод словесных данных задачи в графический образ*.

Задание 1. Постройте пирамиду и отметьте точки в соответствии с условием задачи.

Анализ условия: SABCD – пирамида, где S – вершина, ABCD – основание, произвольный четырехугольник. SA, SB, SC, SD – боковые ребра. E, F, G, принадлежат соответственно SA, SB, SC. Построим соответствующий чертеж (рисунок 2.1).

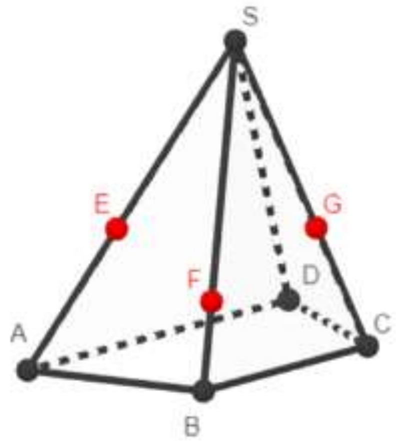

Рисунок 2.1 – Перевод словесных данных в графический образ

2. *Выделение существенных признаков геометрических понятий и их актуализация.*

Задание 2. Выделите в условии задачи элементы и их существенные признаки необходимые для решения задачи. Сформулируйте свойства и теоремы, связывающие элементы на чертеже.

Через точки E, F, G, необходимо построить сечение пирамиды. Сечением пирамиды является плоскость, проходящая через заданные точки. Так как точка F находится значительно ближе к основанию пирамиды, чем точки E и G, то плоскость сечения пересечет плоскость основания. Значит, при построении можно воспользоваться методом следов.

3. *Выделение фигуры из состава других фигур чертежа.*

Задание 3. Представьте чертеж, как совокупность фигур. Выделите элемент чертежа необходимые для построения сечения.

Выделим отрезок EF, лежащий на грани ABS.

4. *Сравнение фигур чертежа.*

Задание 4. Зафиксируйте внимание на фигуре из задания 3 и связанных с ней фигурах. Сопоставьте их и установите логические связи между этими объектами.

Так как отрезок EF лежит в той же плоскости SAB, что и отрезок AB, а также AB лежит в плоскости основания ABCD, то существует точка пересечения прямых AB и EF, обозначим ее буквой H. Также эта точка будет принадлежать сечению, так как она лежит на прямой EF, принадлежащей сечению.

5. *Построение недостающих фигур чертежа в ходе решение задачи.*

Задание 5. Выполните построение элементов, связывающих фигуры из задания 4.

Построим точку H – точка пересечения прямых AB и EF (рисунок 2.2).

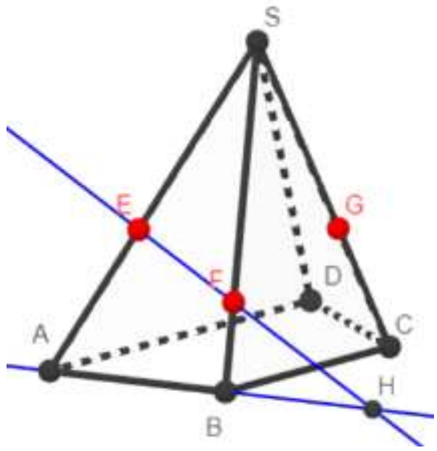

Рисунок 2.2 – Построение недостающих фигур чертежа

6. *Задание на рассмотрение фигур чертежа с разных точек зрения на этапе построения.*

Задание 6. Выполните анализ чертежа: выделите в какие еще фигуры можно включить точку F.

Точки F и G по условию принадлежат плоскости сечения и грани SBC. Можно заметить аналогичную ситуацию, как для отрезка EF. Достраиваем недостающие элементы: точку I – точка пересечения прямых BC и FG. После этого через точки I и H можно явно представить расположение прямой принадлежащей плоскости основания и плоскости сечения. Построив прямую IH, образ созданный в самом начале решения задачи изменился, поэтому и изменился набор элементов и их связи.

Таким образом учащийся снова должен вернуться к заданию 1, и проанализировав связи элементов построить новый образ. Так отрезок KG – часть прямой принадлежащей пересечению секущей плоскости и боковой грани SCD (рисунок 2.3).

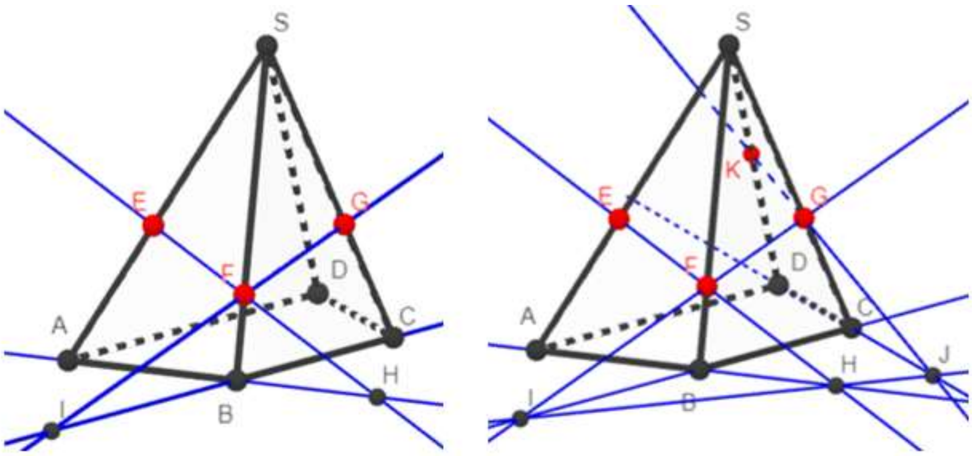

Рисунок 2.3 – Построение недостающих точек

По мере построения новых элементов происходит создание нового образа, отличающегося от ранее созданного, следовательно, образ из статического переходит в динамический.

Этап 2. Доказательство:

7. *Задание на рассмотрение фигур чертежа с разных точек зрения на этапе доказательства.*

Задание 7. Выполните анализ чертежа с целью доказательства соответствия полученных элементов и требований задачи.

На этапе доказательства необходимо обосновать правильность построений, используя определения, свойства и признаки изученные в курсе геометрии. Таким образом необходимо доказать, что все построенные точки принадлежат одновременно плоскости сечения и ребрам/граням многогранника, а также исходя из метода построения, пересечению плоскости сечения и плоскости основания.

Доказать, что точки E, F, G, K∈α (плоскость сечения) и лежат в гранях пирамиды SABCD (рисунок 2.4).

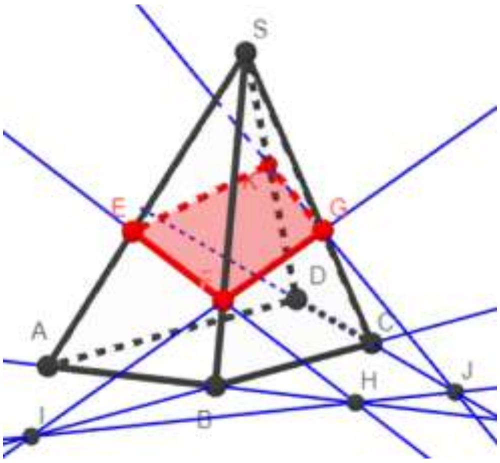

Рисунок 2.4 – Искомое сечение пирамиды

Доказательство:

1. $H \in AB \Rightarrow H \in ABCD$;

   $H \in EF \Rightarrow H \in \alpha$;

2. $I \in BC \Rightarrow I \in ABCD$;

   $I \in FG \Rightarrow I \in \alpha$;

3. $IH = ABCD \cap \alpha$ (изображение следа);

4. $J \in$ следу $IH \Rightarrow J \in \alpha$;

5. $G \in \alpha \wedge J \in \alpha \Rightarrow GJ \in \alpha$;

6. $K \in GJ \Rightarrow K \in \alpha$;

7. E, F, G принадлежат граням по условию задачи;

   $K \in GJ \Rightarrow K \in SDC$.

Этап 3. Исследование:

8. *Задание на рассмотрение фигур чертежа с разных точек зрения на этапе исследования.*

Задание 8. Выполните анализ чертежа с целью выделения другой цепочки построений.

На этапе исследования учащимся необходимо на чертеже с построенным сечением выделить такие элементы и их связи с другими фигурами, которые приведут к цепочке построений отличной от выполненной, либо доказать, что других таких нет. Например, данную задачу можно было решить не методом «следов», когда необходимо представить, как плоскость сечения пересекает плоскость основания; а методом, использующим построение проекций. То есть построение пересечения плоскостей (ACS) и (BDS) (предполагаемая точка L лежит на отрезке DS) по прямой (OS) (рисунок 2.5).

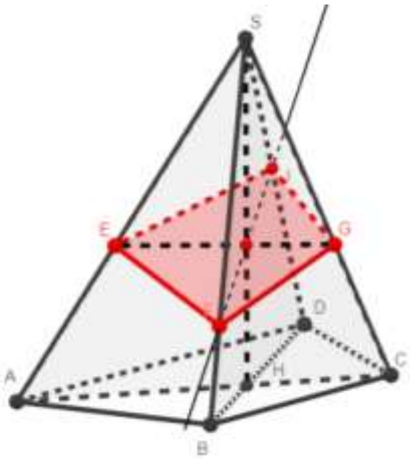

Рисунок 2.5 – Построение сечения методом внутреннего проектирования

В процессе решения геометрических задач на построение сечений, учащиеся создают несколько образов и изменяют их (создание вторичных образов и последующих), используя знания о свойствах и признаках геометрических фигур. То есть оперируют абстрактными образами, отражая на чертеже выполняемые мысленно действия [3].

При решении задачи на построение сечений многогранников обучаемые выполняют такие действия, которые направлены на создание геометрического образа. Однако, когда учащиеся строят новый элемент, может возникнуть ситуация, когда отображение мысленного образа на чертеже не является наглядным, тогда учащимся необходимо изменять положение объекта или его структуру в процессе создания образа. Это может говорить о том, что обучающийся не достиг того уровня развития пространственного мышления, когда может без опоры на чертеж создавать вторичные образы.

2.2 Разработка комплекса заданий, направленного на развитие пространственного мышления обучаемых при построении сечений многогранников

Приведенный ниже комплекс задач разработан с учетом выявленных особенностей пространственного мышления, в основе которого лежит деятельность представления, протекающая в разнообразных формах, на разных уровнях.

Принято выделять два основных уровня:

1. *Создание геометрического образа.*
   1.1. Перевод словесных данных задачи в графический образ, когда заданы все точки секущей плоскости;
   1.2. Построение заданного сечения многогранника, чтобы в плоскости сечения получилась заданная фигура (треугольник, квадрат, прямоугольник, ромб);
   1.3. Построение сечения многогранника методом следов;
      1.3.1. Секущая плоскость задана тремя точками;
      1.3.2. Секущая плоскость задана следом в плоскости основания и точкой, принадлежащей многограннику;
   1.4. Построение сечения методом внутреннего проектирования;
   1.5. Построение сечения многогранника комбинированным методом;
   1.6. Построение сечений фигуры методами следов и внутреннего проектирования на готовом изображении;
   1.7. Задачи на отыскание следа секущей плоскости;
2. *Оперирование геометрическим образом.*
   2.1. Определение секущей плоскости на примере одного и того же многогранника, изменяя его положение в пространстве;
   2.2. Определение вида фигуры, после мысленного отсечения её частей;

2.3. Определение периметра и площади секущей поверхности.

1. *Задачи на создание геометрического образа*. Задания, предложенные в первых двух пунктах первой части комплекса можно использовать на уроках стереометрии в 10 классе. Эти задания носят подготовительный характер. Основная цель этих заданий проверить понятийный аппарат учеников, выявить уровень сформированности пространственного мышления и подготовить их к созданию более сложных образов.

Задания, предложенные в пунктах 3-7 относятся к первому уровню сложности и изучаются в 11 классе. Пункты 3-5 носят обучающий характер, а пункты 6-7 служат для закрепления полученных навыков.

1.1. Задачи на перевод словесных данных задачи в графический образ, когда заданы все точки секущей плоскости.

Задача № 1. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью KMNL, если точка K принадлежит ребру AA_1, точка N ребру CC_1, точки M и L соответственно переходят в точки B_1 и D [13].

Задача № 2. Построить сечение тетраэдра ABCD, проходящее через ребро BS и точку K, принадлежащую ребру AC.

Задача № 3. Построить секущую плоскость параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящую через ребро C_1D_1 и прямую KL, которая проведена параллельно основанию и принадлежит грани AA_1B_1B [4].

Построение (рисунок 2.6):

1. Построим параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
2. Построим прямую KL, которая проведена параллельно основанию и принадлежит грани AA_1B_1B.
3. Точки C1 и K, лежат в плоскости BCC1, следовательно, их можно соединить.
4. Аналогично соединяем точки D1 и L.
5. Четырёхугольник KLD_1C_1 является искомым сечением параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

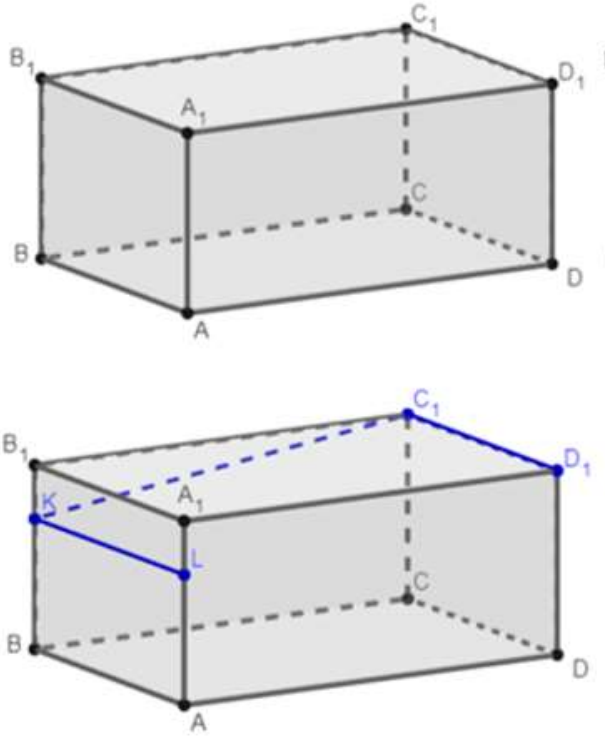

Рисунок 2.6 – Этапы построение сечения

Задача № 4. Построить сечение пирамиды SABCD, проходящее через прямую QR, где точка Q лежит на ребре SB, а точка R – на ребре AD, и точку P, лежащую на грани SCD.

1.2. Задачи на построение заданного сечения многогранника, чтобы в плоскости сечения получилась заданная фигура.

Задача № 1. На фигурах, представленных на рисунке 2.7, построить сечения, чтобы секущая плоскость определялась как треугольник.

Задача № 2. На фигурах, представленных на рисунке 2.7, построить сечения, чтобы секущая плоскость определялась как четырёхугольник [17].

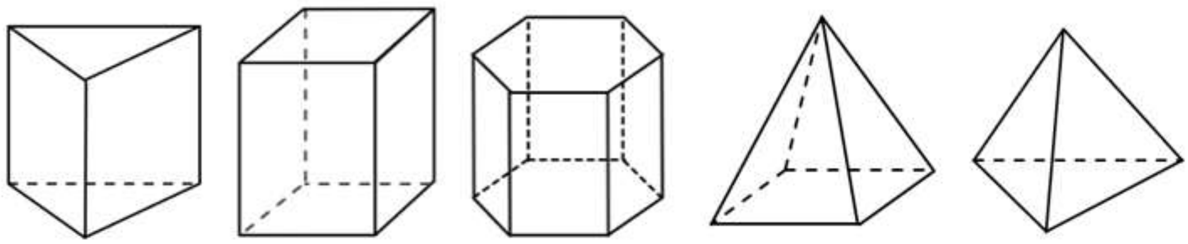

Рисунок 2.7 – Многогранники

1.3. Задачи на построение сечений многогранников методом следов.

1.3.1. Секущая плоскость задана тремя точками.

Задача № 1. Точки P, Q и R взятых на ребрах параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, следующим образом: точка P лежит на ребре CC_1, точка Q на ребре D_1D, точка R – на ребре A_1B_1.

Задача № 2. На ребрах AB, BS и CS тетраэдра SABC отмечены точки M, N и P. Построить сечение тетраэдра плоскостью MNP.

Задача № 3. Точки P,Q и R взяты на поверхности параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ следующим образом: точка P лежит на диагонали B_1D_1, точка Q – на ребре AB, а точка R – на ребре CC_1. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью PQR, если отношения $B_1P : B_1D_1$, $AQ : AA_1$, $CR : CC_1$ имеют соответственно следующие значения:

1) 1 : 3, 1 : 3 и 2 : 3;
2) 1 : 4, 1 : 2 и 3 : 4;
3) 1 : 2, 1 : 2 и 1 : 2 [4].

Задача № 4. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через точки B_1, D_1 и середину ребра CD.

Задача № 5. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью MNK, где точки M, N и K лежат соответственно на ребрах:

1) BB_1, AA_1, AD;
2) CC_1, BB_1, AD.

Задача № 6. Постройте сечение призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ плоскостью α=(MPR), где M, P и R являются внутренними точками соответственно ребер AA_1, CC_1 и EE_1 [13].

Построение (рисунки 2.8, 2.9):

1. Построим пятиугольную призму $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$.
2. Отметим на рёбрах AA_1, CC_1 и EE_1 точки M, P и R соответственно.

3. Проведём отрезок MR, так как точки M и R лежат в плоскости AA_1E_1.

4. Прямые MR и AE пересекаются в точке F.

5. Проведём прямые PR и CE, которые пересекаются в точке G.

6. Прямая FG – след секущей плоскости.

7. Прямые BA и FG пересекаются в точке H. Точки H и M лежат в плоскости ABB_1. Проведем прямую HM, которая пересекает ребро BB_1 в точке I.

8. Соединим точки M и I, так как они лежат в плоскости ABB_1. Аналогично соединяем точки I и P.

9. Прямые DE и FG пересекаются в точке J. Точки J и R лежат в плоскости DEE_1. Проведем прямую JR, которая пересекает ребро DD_1 в точке K.

10. Соединим точки P и K, так как они лежат в плоскости CDD_1. Аналогично соединяем точки K и R. MJPKR – искомое сечение призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$.

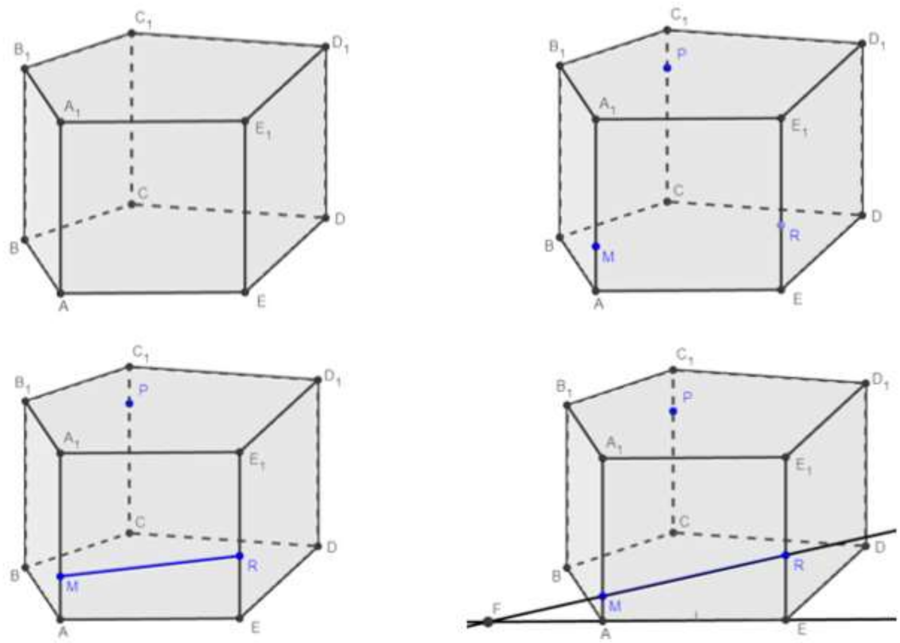

Рисунок 2.8 – Этапы построения сечения

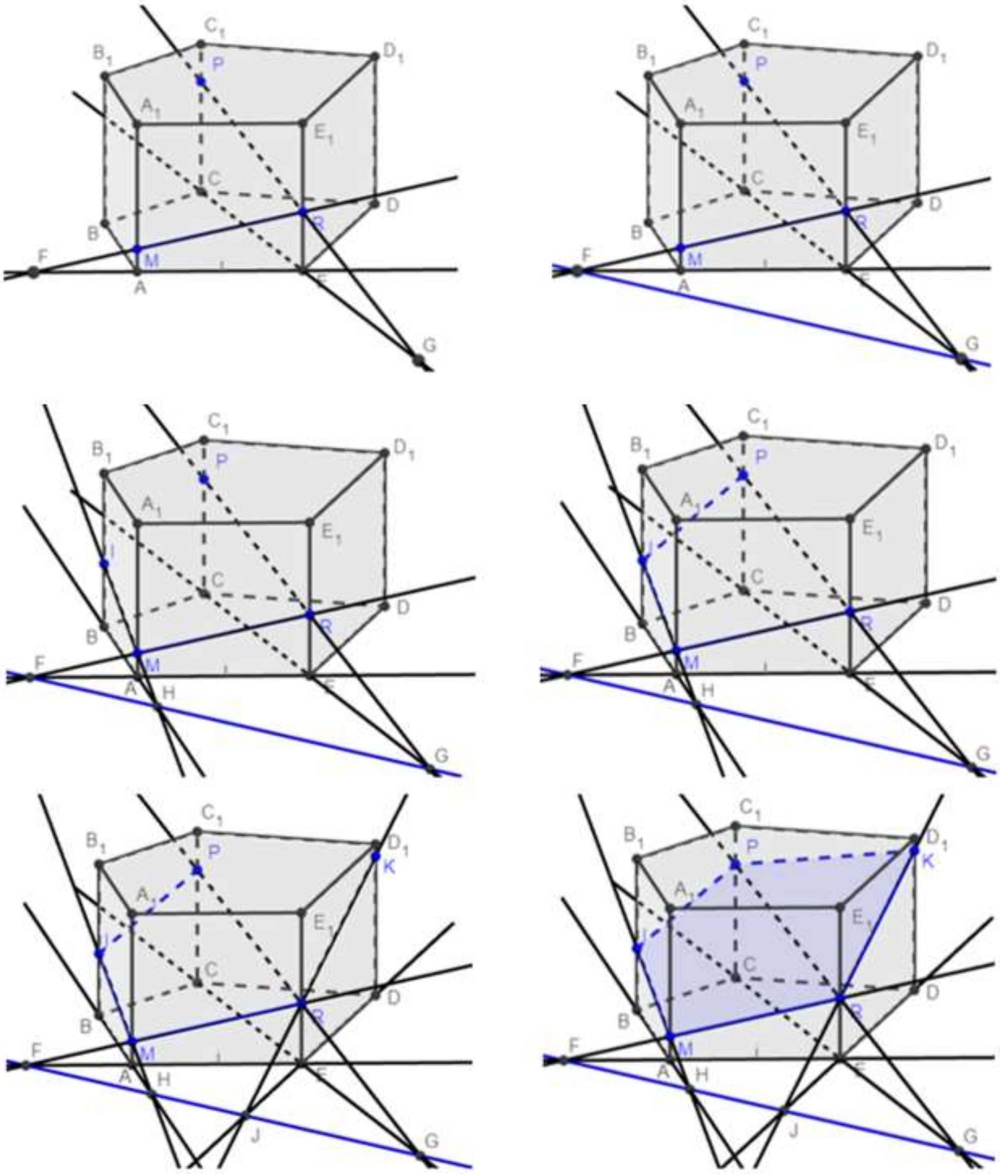

Рисунок 2.9 – Этапы построения сечения

Постройте сечение пирамиды SABCDE плоскостью, заданной точками M, N, Q рёбер SC, SE, SA соответственно.

Задача № 7. Постройте сечение пирамиды PABCDE плоскостью, заданной тремя точками, две из которых принадлежат боковым рёбрам, а третья – стороне основания.

1.3.2. Секущая плоскость задана следом в плоскости основания и точкой, принадлежащей многограннику.

Задача № 1. Построить сечение призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ плоскостью β, которая задана следом l в плоскости ABC основания призмы и точкой M, принадлежащей ребру DD_1 [13].

Задача № 2. На ребре SA тетраэдра SABC лежит точка N.Построить сечение тетраэдра, проходящее через данную точку и прямую BC.

Задача № 3. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение:

1) проходящее через прямую AB и точку N на ребре CC_1;
2) проходящее через прямую AB и точку N на ребре B_1C_1;
3) проходящее через прямую BC и точку N на ребре A_1D_1;
4) проходящее через прямую BC и точку N в плоскости $A_1B_1C_1D_1$.

Задача № 4. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение:

1) проходящее через точку C_1 и прямую AB;
2) проходящее через точку A и прямую CC_1.

Задача № 5. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение, проходящее через:

1) прямую CC_1 и точку N на ребре A_1B;
2) прямую BB_1 и точку N на ребре DD_1;
3) прямую B_1D_1 и точку N на ребре BC.

Задача № 6. Постройте сечение пирамиды ABCDS проходящее через:

1) точку N на ребре SD и прямую AB;
2) точку N на ребре AS и прямую BC;
3) точку N на ребре BS и прямую AD;
4) точку N на ребре SC и прямую AB.

Задача № 7. Постройте сечение пятиугольной пирамиды SABCDE плоскостью, которая задана следом l и внутренней точкой K ребра SE.

Задача № 8. Постройте сечение пятиугольной пирамиды SABCDE плоскостью α, заданной следом l и точкой R, которая принадлежит ребру SE, если след l:

1) не имеет общих точек с основанием пирамиды;
2) проходит через сторону BC основания;

3) пересекает стороны BA и BC основания.

Построение (а) (рисунок 2.10):

1. Построим пятиугольную пирамиду SABCDE. Отметим на ребре SE точку R и проведём след секущей плоскости l.

2. Прямая DE пересекает след в точке H. Точки H и R лежат в плоскости SED, проведём прямую HR, которая пересекает ребро SD в точке K.

3. Прямая AE пересекает след в точке L. Точки L и R лежат в плоскости SAE, проведём прямую LR, которая пересекает ребро SA в точке M.

4. Прямая AB пересекает след в точке N. Точки N и M лежат в плоскости SAB, проведём прямую NM, которая пересекает ребро SB в точке P.

5. Прямая CD пересекает след в точке Q. Точки Q и K лежат в плоскости SCD, проведём прямую QK, которая пересекает ребро SC в точке T.

6. Соединим точки P и T, так как они лежат в плоскости SBC. Пятиугольник RMPTK – искомое сечение пирамиды SABCDE.

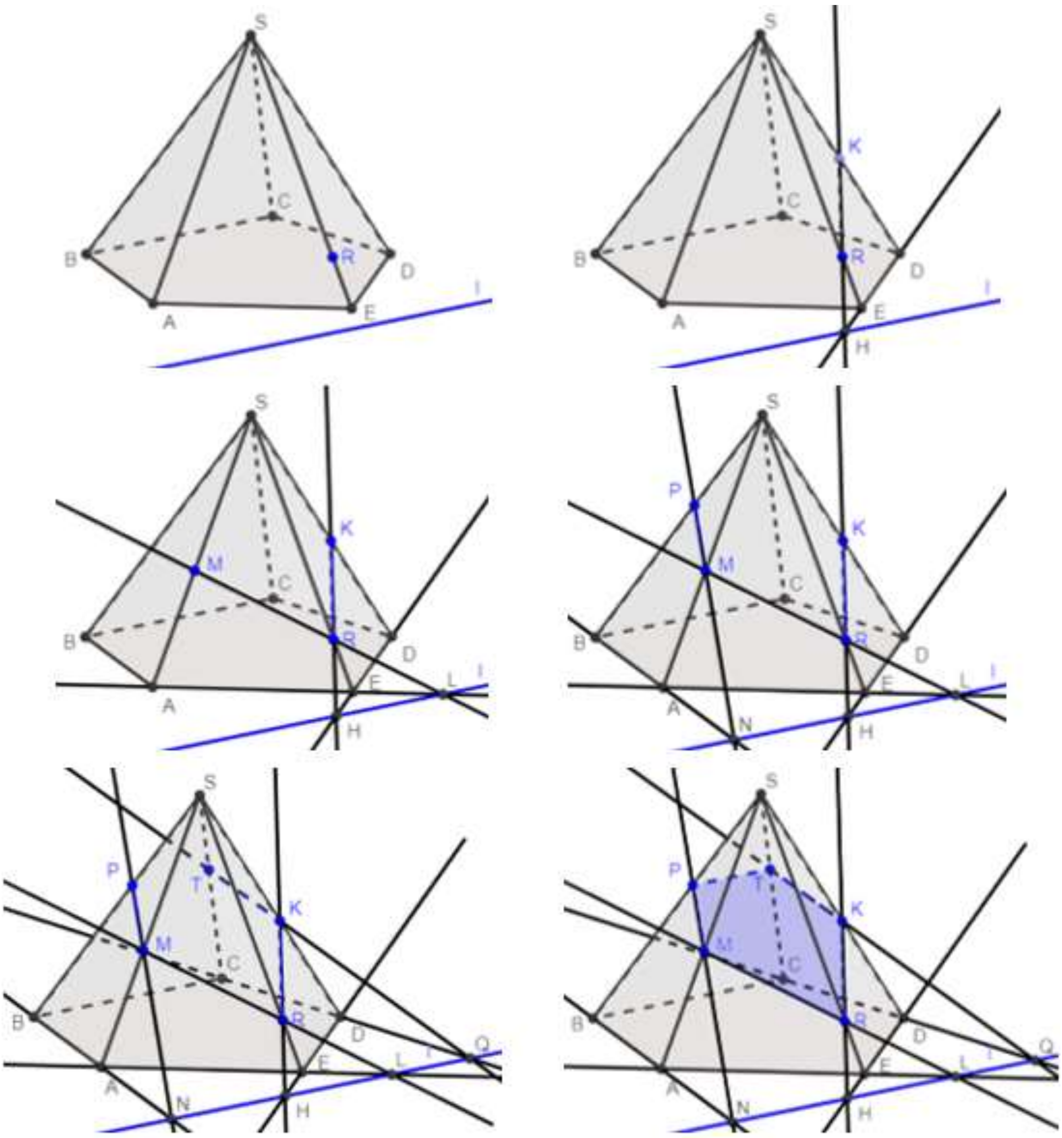

Рисунок 2.10 – Этапы построения сечения

Задача № 9. Построить сечение призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ плоскостью α, заданной следом l в плоскости основания и точкой R, которая принадлежит ребру DD_1, если след:

1) не имеет общих точек с основанием призмы;
2) проходит через сторону AB основания призмы;
3) пересекает стороны AE и BC.

Задача № 10. Построить сечение призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ плоскостью α, заданной следом l, проходящим через сторону AB основания, и точкой P, принадлежащей ребру CC_1.

Точку P, выберите так, чтобы в сечении получился:

1) четырёхугольник;

2) пятиугольник;

3) шестиугольник.

1.4. Задачи на построение сечений многогранников методом внутреннего проектирования.

Задача № 1. Точки P, Q и R взяты на поверхности параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ следующим образом: точка P лежит на грани CC_1D_1D, точка Q на ребре B_1C_1, точка R – на ребре A A_1. Построить сечение, проходящее через точки P, Q, R.

Задача № 2. Построить сечение четырёхугольной призмы плоскостью, заданной тремя точками на её боковых рёбрах.

Задача № 3. Постройте сечение четырёхугольной пирамиды плоскостью, заданной тремя точками на её боковых рёбрах.

Построение (рисунок 2.11):

1. Построим пирамиду SABCD. Отметим на рёбрах SA, SB, SD точки F, G, E соответственно.

2. В плоскости основания выберем точки A, B, D, которые являются проекциями данных точек сечения, и точку C, которая будет являться проекцией точки, находящейся на ребре SC. Проведем диагонали четырёхугольника ABCD, которые пересекаются в точке H.

3. Построим отрезки HS и EG, которые пересекаются в точке M (прообраз точки H).

4. Через найденный прообраз точки пересечения диагоналей и точку F построим прямую FM, которая пересекает ребро SC в точке K (точка сечения).

5. Соединим данные и найденную точку сечения, получим четырёхугольник FEKG, который является искомым сечением.

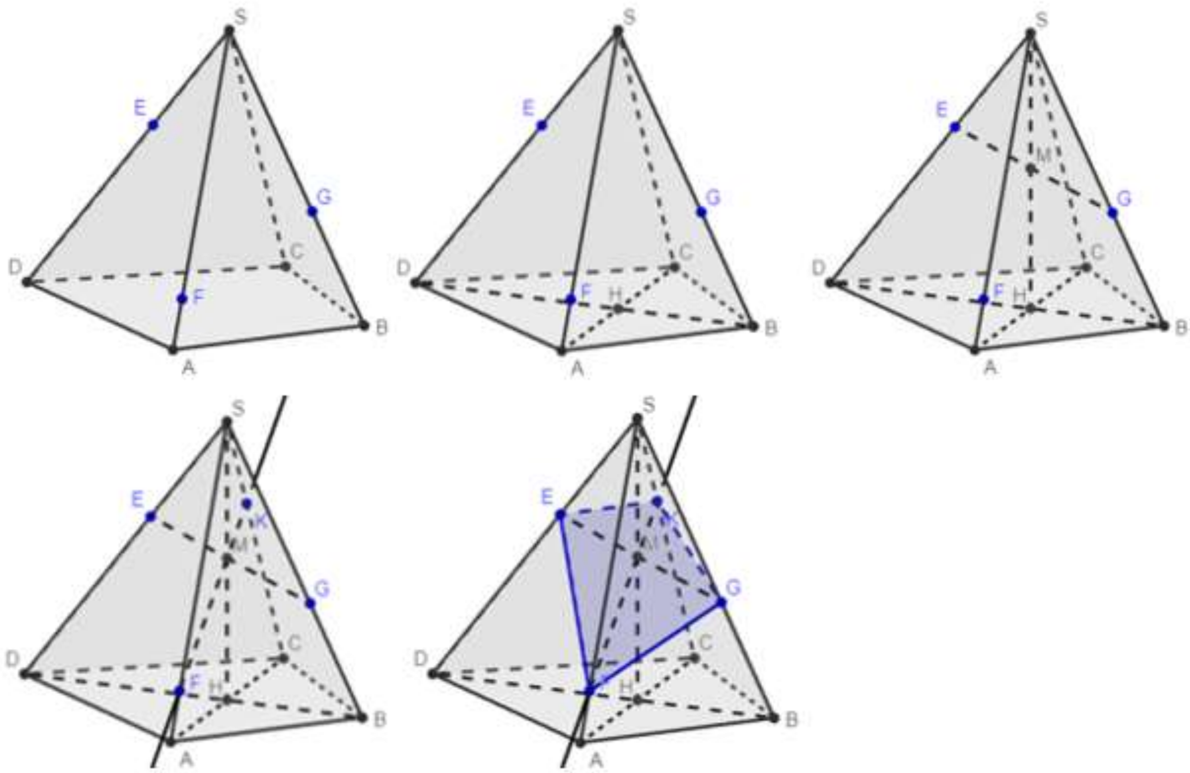

Рисунок 2.11 – Этапы построения сечения

Задача № 4. Постройте сечение пирамиды SABCDE плоскостью α=(MFR), если точки M, F и R являются внутренними точками рёбер соответственно SA, SC, SE.

Задача № 5. Постройте сечение призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$, плоскостью α, заданной точками M BB_1, P DD_1, Q EE_1.

Задача № 6. Постройте сечение пирамиды SABCDE плоскостью, проходящей через точки M и K, принадлежащие граням соответственно ABS и ABC, и внутреннюю точку бокового ребра SE.

Задача № 7. Постройте сечение пятиугольной призмы плоскостью, заданной тремя точками, две из которых принадлежат боковым несмежным граням, а третья точка совпадает с вершиной нижнего основания, не принадлежащей этим граням.

Задача № 8. Постройте сечение пятиугольной призмы плоскостью, заданной тремя точками, если:

1) две из них принадлежат боковым граням призмы, а третья – её боковому ребру, не принадлежащему этим граням;

2) две из них принадлежат боковым ребрам призмы, а третья – боковой грани, не содержащей эти рёбра.

Задача № 9. Точки P, Q, R взяты на поверхности параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ следующим образом: точка P лежит на грани CC_1D_1D, точка Q – в грани AA_1B_1B, а точка R – на ребре B_1C_1. Построить сечение параллелепипеда плоскостью PQR.

Задача № 10. Точки P, Q, R взяты на поверхности параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ следующим образом: точка P лежит на грани CC_1D_1D, точка Q – в грани AA_1D_1D, а точка R – в плоскости грани AA_1B_1B. Построить сечение параллелепипеда плоскостью PQR.

1.5. Задачи на построение сечений многогранников комбинированным методом.

Задача № 1. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отметьте внутреннюю точку M на грани AA_1B_1B.

Постройте сечение параллелепипеда, проходящее через точку M параллельно:

1) плоскости основания ABCD;
2) грани BB_1C_1C;
3) плоскости BDD_1 [4].

Задача № 2. Изобразите тетраэдр ABCD и отметьте точку M на ребре AB. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M параллельно прямым AC и BD.

Задача № 3. Изобразите тетраэдр ABCD и отметьте точку M на ребре AB. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M параллельно грани BCD.

Задача № 4. SABCD – четырёхугольная пирамида, в основании которой лежит квадрат ABCD, а две боковые грани SAB и SAD представляют собой прямоугольные треугольники с прямым углом ∠A. Постройте сечение, проходящее через точку пересечения диагоналей основания параллельно грани SBC.

Задача № 5. Построить сечение четырёхугольной пирамиды SABCD плоскостью, проходящей через точки M и N и параллельной ребру SC, если точка M принадлежит ребру AS, точка N – продолжению ребра SD.

Задача № 6. Дана правильная треугольная пирамида SABC с вершиной S. Постройте сечение через середину ребра AC и точки пересечения медиан граней ASB и CSB.

Задача № 7. Точки P, Q и R взяты на поверхности параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ следующим образом: точка P лежит на диагонали A_1C_1, точка Q – на ребре DD_1, точка R – на ребре BB_1. Постройте сечение параллелепипеда, проходящее через точки P, Q и R [2].

Построение (рисунок 2.12):

1. Построим параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Проведём диагональ A_1C_1, отметим на ней точку P. Отметим точку R на ребре BB_1.

2. Найдём проекцию точки P. Для этого в нижнем основании ABCD проведём диагональ AC. Проведём прямую через точку P, параллельно боковому ребру. Эта прямая пересекает отрезок AC в точке P_1 – проекция точки P.

3. Проведём прямые PR и BP_1. Эти прямые пересекаются в точке E.

4. Проведём прямые BD и QR. Эти прямые пересекаются в точке F.

5. Прямая EF – след секущей плоскости.

6. След секущей плоскости пересекает ребра AB и AD в точках K и J соответственно. Так как плоскости (ABC) и $(A_1B_1C_1)$ параллельны, то секущая плоскость пересекает плоскость верхнего основания по прямой, параллельной KJ (по теореме 1). Проведём прямую GH через точку P, параллельной прямой KJ ($G \in B_1C_1, H \in C_1D_1$).

7. Соединим данные и найденные точку сечения, получим шестиугольник KRGHQJ, который является искомым сечением.

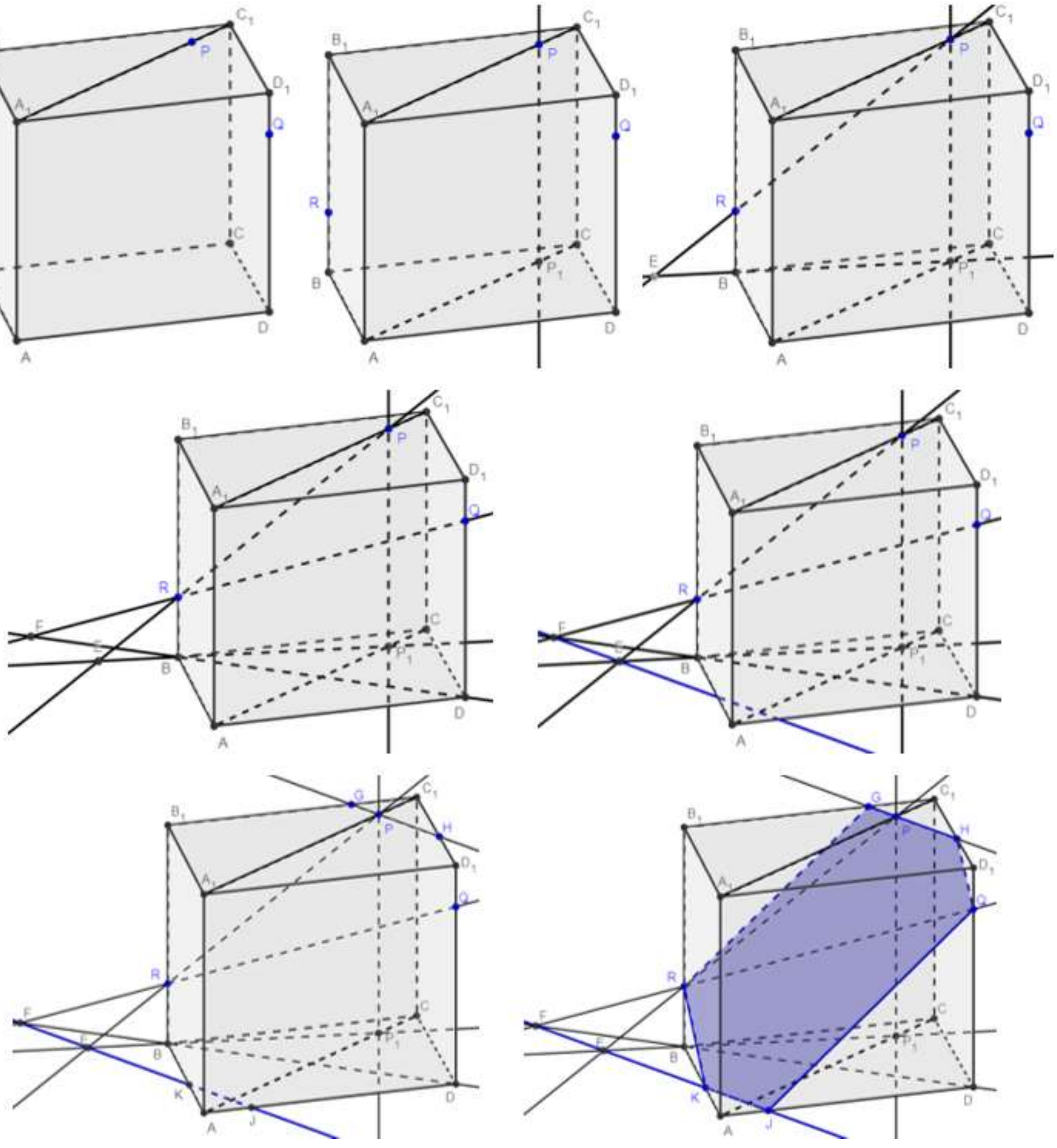

Рисунок 2.12 – Этапы построения сечения

Задача № 8. На ребрах A_1B_1 и DD_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки P и S, а в гранях DD_1C_1C и AA_1D_1D точки Q и R. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку S параллельно плоскости PQR.

1.6. Задачи на построение сечений фигуры методами следов и внутреннего проектирования на готовом изображении.

Задача № 1. На рисунке 2.13 представлены кубы, постройте сечения по заданным точкам.

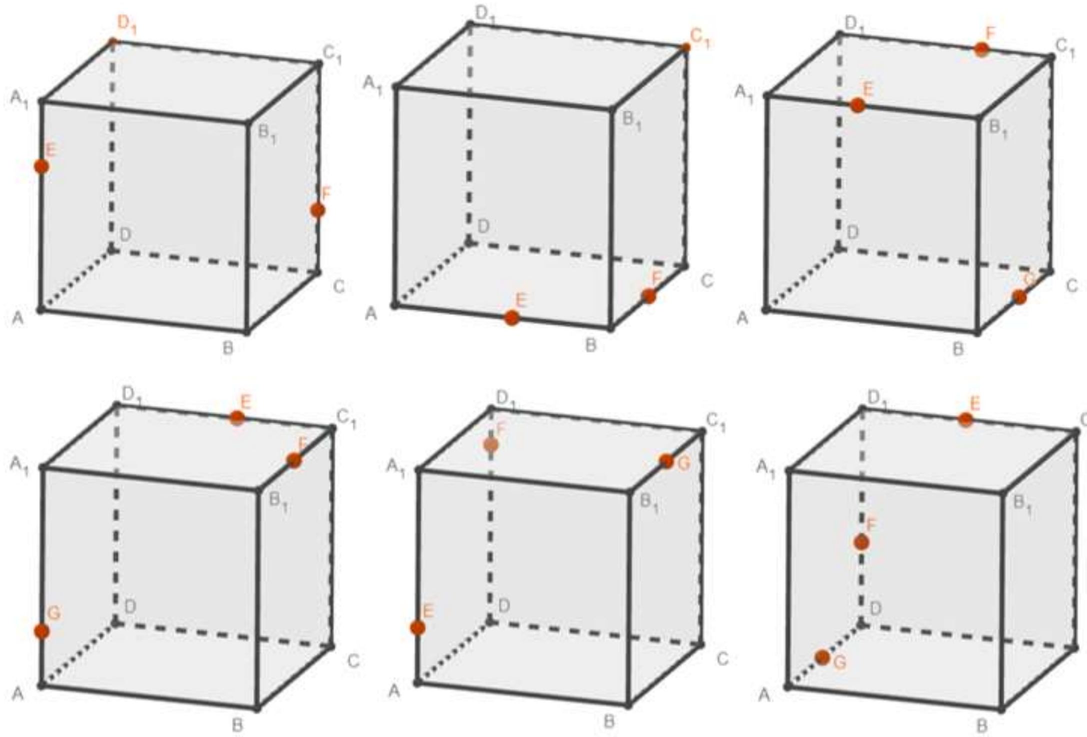

Рисунок 2.13 – Кубы

Задача № 2. На рисунке 2.14 представлены тетраэдры, постройте сечения по заданным точкам.

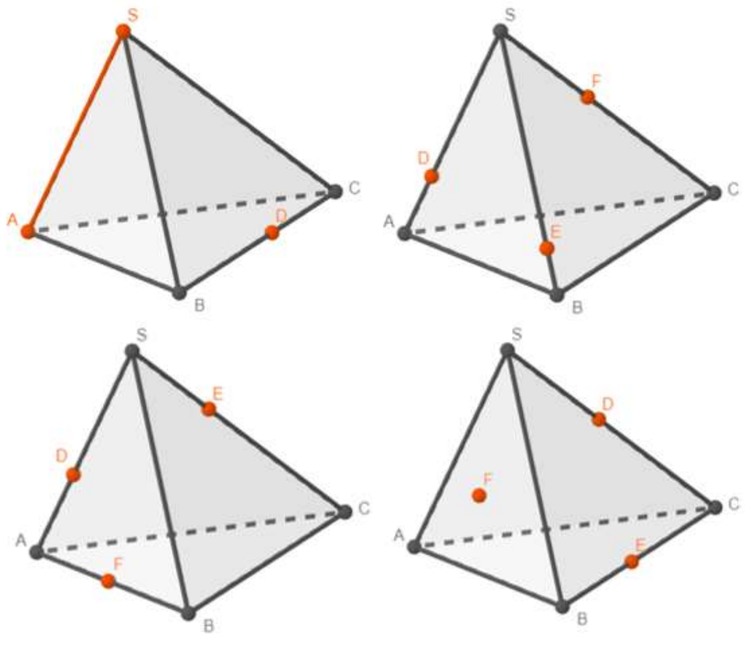

Рисунок 2.14 – Тетраэдры

Задача № 3. На рисунке 2.15 представлены треугольные призмы, постройте сечения по заданным точкам.

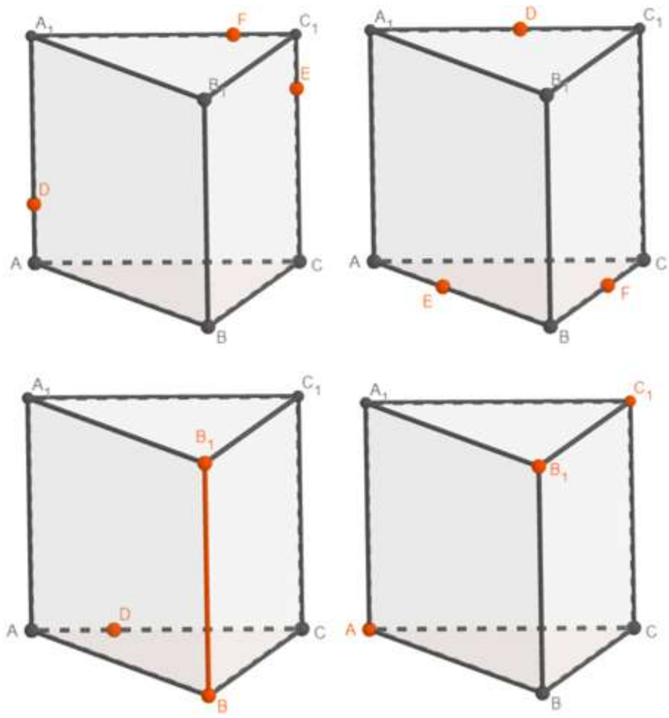

Рисунок 2.15 – Треугольные призмы

1.7. Задачи на отыскание следа секущей плоскости.

Задача № 1. Секущая плоскость задана тремя точками E, F, G. Постройте след секущей плоскости (рисунок 2.16)

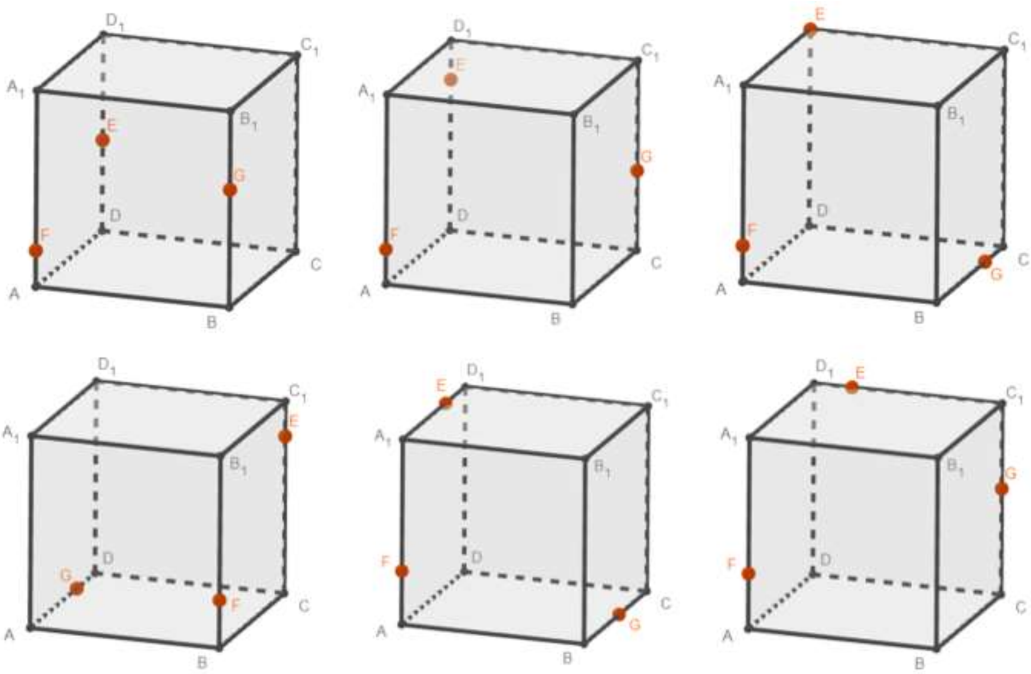

Рисунок 2.16 – Параллелепипеды

Задача № 2. На ребрах B_1C_1, AA_1 и AD параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки P, Q и R соответственно. Постройте следы секущей плоскости PQR на следующих плоскостях: AA_1D; AA_1B; $A_1B_1C_1$; BB_1C; ABC; CC_1D.

2. *Задачи на оперирование геометрическим образом*

Задания второй части имеют повышенный уровень сложности и служат для подготовки учащихся к государственной итоговой аттестации.

2.1. Задачи на определение секущей плоскости на примере одного и того же многогранника, изменяя его положение в пространстве.

Задача № 1. Постройте сечение параллелепипеда через точки M, N, K (рисунок 2.17) [13]. Выполните поворот параллелепипеда на 90˚ вокруг ребра AB. Как изменится построенное сечение?

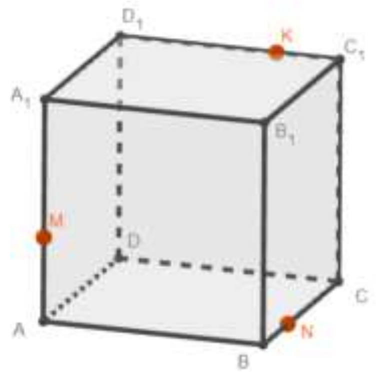

Рисунок 2.17 – Параллелепипед

Задача № 2. Постройте сечение куба через точку, принадлежащую стороне A_1B_1 и прямую лежащую в плоскости ABCD и делящую ребра AB и CD в отношении 1 : 1. (нижняя грань ABCD). Мысленно переверните куб так, чтобы он «лежал» на грани AA_1B_1B. Как изменится построенное сечение?

Построение (рисунок 2.18):

1. Построим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, на ребре A_1B_1 отметим точку E, в основании ABCD проведём прямую FG так, что точки F и G являются серединами сторон AB и CD соответственно.

2. Точки E и F лежат в плоскости AA_1B_1, проведём отрезок EF.

3. Через точку E проведём прямую EH параллельно прямой FG.

4. Точки H и G лежат в плоскости CC_1D_1, проведём отрезок HG.

5. Четырёхугольник EHGF является искомым сечением.

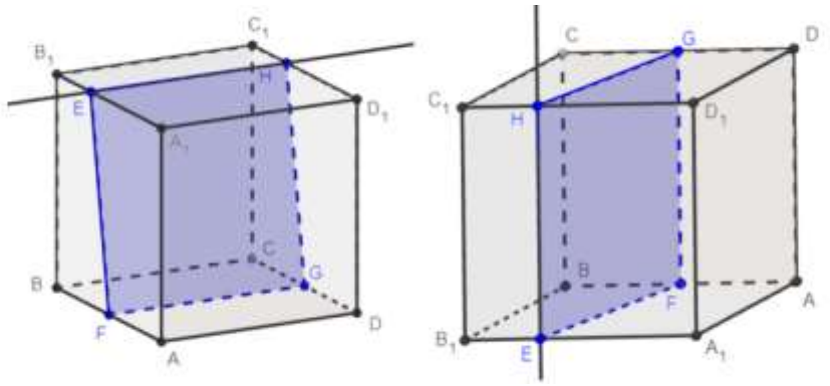

Рисунок 2.18 – Построенное сечение с разных ракурсов

2.2. Задачи на определение вида фигуры, после мысленного отсечения её частей.

Задача № 1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B1C_1$ боковое ребро равно $8\sqrt{3}$, а ребро основания равно 1. Точка D — середина ребра BB_1 [16].

1. Докажите, что расстояние между прямыми A_1D и CC_1 равно расстоянию между точкой A и плоскостью BCC_1.

2. Найдите объём пятигранника $ABCA_1D$.

Задача № 2. В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды [2].

1. Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C.

2. Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием – сечение пирамиды SABC плоскостью α.

Задача № 3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы длины ребер $AD = 12$, $AB = 5$, $AA_1 = 8$ [11].

1. Докажите, что плоскость BDA_1 делит объем параллелепипеда в отношении 1 : 5.

2. Найдите объем пирамиды MB_1C_1D, если M – точка на ребре AA_1, причем $AM = 5$.

Решение:

1. Построим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рисунок 2.19). Найдём объём этого параллелепипеда: $V_{ABCDA1B1C1D1} =$
$= AD \cdot AB \cdot AA_1 = 12 \cdot 5 \cdot 8 = 480.$

Через точки B, D, A_1 построим сечение (рисунок). $ABDA_1$ – треугольная пирамида с основанием ABD и вершиной A_1. Ребро AA_1 перпендикулярно основанию пирамиды, следовательно, оно является высотой. Треугольник ABD является прямоугольным ($AB \perp AD$), найдём его площадь: $S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$. Найдём объем пирамиды $ABDA_1$: $V_{ABDA1} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABD} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot 8 = 80.$

$V_{BDCC1B1A1D1} = V_{ABCDA1B1C1D1} - V_{ABDA1} = 480 - 80 = 400.$

$\frac{V_{ABDA1}}{V_{BDCC1B1A1D1}} = \frac{80}{400} = \frac{1}{5}$. Что и требовалось доказать.

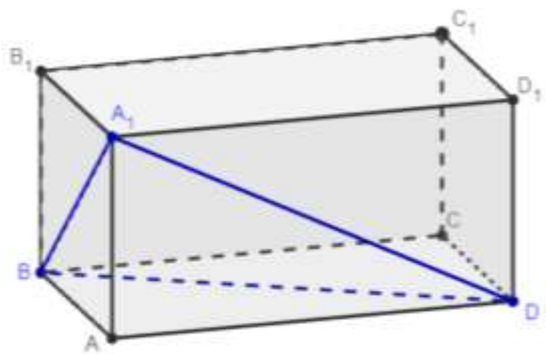

Рисунок 2.19 – Сечение параллелепипеда

2. Построим пирамиду MB_1C_1D (B_1C_1D – основание, M – вершина) (рисунок 2.20). Найдём объём пирамиды MAB_1C_1D. Её объём будет в два раза больше объёма пирамиды MB1C1D, так как основание AB_1C_1D в два раза больше чем B_1C_1D. В основании пирамиды MAB_1C_1D лежит прямоугольник AB_1C_1D.

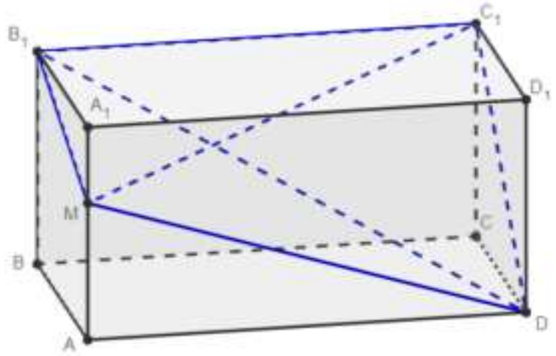

Рисунок 2.20 – Выделение пирамиды в параллелепипеде

$AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{25 + 64} = \sqrt{89}.$

$S_{AB1C1D} = AD \cdot AB_1 = 12\sqrt{89}.$

Высотой пирамиды MAB_1C_1D является перпендикуляр, опущенный из точки M к AB_1 (рисунок 2.21).

Треугольники AMH и B_1AB подобны ($\angle AHM = \angle B_1BA = 90°$, $\angle MAH = \angle AB_1B$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB, A_1B_1 и секущей AB_1). Следовательно, $\frac{MH}{AB} = \frac{AM}{AB_1} => MH = \frac{AB \cdot AM}{AB_1} = \frac{5 \cdot 5}{\sqrt{89}} = \frac{25}{\sqrt{89}}$.

Найдём объём пирамиды MAB_1C_1D:

$$V_{MAB1C1D} = \frac{1}{3} \cdot S_{AB1C1D} \cdot MH = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{89} \cdot \frac{25}{\sqrt{89}} = 100.$$

$V_{MB1C1D} = \frac{1}{2} \cdot V_{MAB1C1D} = 50.$

Ответ: 50.

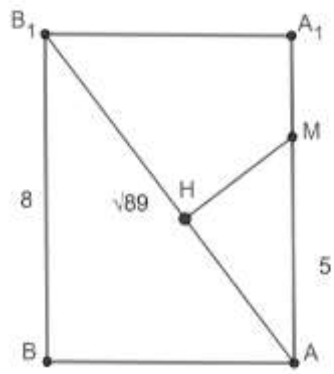

Рисунок 2.21 – Грань AA_1BB_1

Задача № 4. В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD сторона основания AB = 4, а боковое ребро SA = 7. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём AM = SK = 1 [16].

1. Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC.
2. Найдите объём пирамиды BCKM.

Задача № 5. В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF сторона основания AB = 4, а боковое ребро SA = 7. Точка M лежит на ребре BC, причем BM = 1, точка K лежит на ребре SC, причем SK = 4.

1. Докажите, что плоскость MKD перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
2. Найдите объем пирамиды CDKM.

2.3. Задачи на определение периметра и площади секущей поверхности.

Задача № 1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка P лежит на ребре AA_1, причём $A_1P : PA = 3 : 4$, $BB_1 = 14$, $AD = 6$. Плоскость DPB_1 пересекает ребро CC_1 в точке N, тангенс угла между прямой NP и плоскостью основания ABCD равен $\frac{1}{5}$ [11].

1. Докажите, что четырехугольник DPB_1N – ромб.
2. Найдите площадь сечения DPB_1N.

Задача № 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: AB = 4, BC = 3, $AA_1 = 2$. Точки P и Q – середины рёбер A_1B_1 и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро B_1C_1 в точке U.

1. Докажите, что $B_1U : UC_1 = 2 : 1$.
2. Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью APQ.

Задача № 3. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник со стороной 6. Высота призмы равна 4. Точка N – середина ребра A_1C_1 [16].

1. Постройте сечение призмы плоскостью BAN.
2. Найдите периметр этого сечения.

Задача № 4. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ стороны основания равны 5, а боковые рёбра равны 11 [16].

1. Докажите, что прямые CA_1 и C_1D_1 перпендикулярны.

2. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины C, A_1 и F_1.

Решение:

1. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильная шестиугольная призма, следовательно, ABCDEF – правильный шестиугольник (рисунок 2.22). Тогда $\angle CBA = 120°$. По теореме косинусов имеем $CA^2 = CB^2 + AB^2 - 2 \cdot$

$\cdot CB \cdot AB \cdot COS\angle CBA = 2 \cdot 25 + 2 \cdot 25 \cdot \frac{1}{2} = 75 => CA = 5\sqrt{3}$.

$A_1A \perp (ABC)$, следовательно, $AA_1 \perp CA$. По теореме Пифагора $CA_1 =$

$= \sqrt{CA^2 + AA_1^2} = \sqrt{75 + 121} = \sqrt{196} = 14$.

Поскольку ABCDEF – правильный шестиугольник, $DA = 2AB = 10$. Тогда $DA_1 = \sqrt{DA^2 + AA_1^2} = \sqrt{100 + 121} = \sqrt{221}$. По теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник CA_1D – прямоугольный. Тогда $CD \perp CA_1$. Поскольку $C_1D_1 \parallel CD$, имеем $C_1D_1 \perp CA_1$. Что и требовалось доказать.

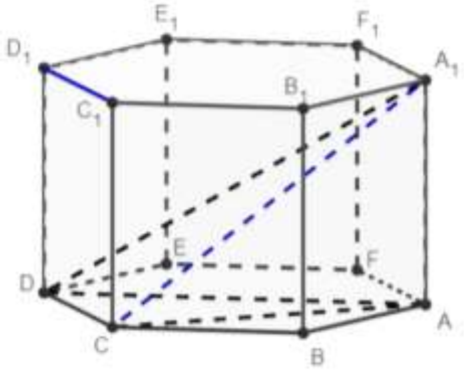

Рисунок 2.22 – Шестиугольная призма

2. Построим плоскость сечения призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. $CDHF_1A_1G$ – искомое сечение (рисунок 2.23).

Поскольку ABCDEF – правильный шестиугольник, $AC \perp CD$, поэтому угол A_1CA равен углу между искомым сечением и плоскостью ABCDEF. Так как $A_1A \perp CA$, $\cos\angle A_1CA = \frac{5\sqrt{3}}{14}$.

Площадь шестиугольника равна $S_{ABCDEF} = \frac{3\sqrt{3}\cdot AB^2}{2} = \frac{3\sqrt{3}\cdot 25}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{2}$. Тогда, по теореме о площади проекции, площадь искомого сечения $S =$
$= \frac{S_{ABCDEF}}{\cos\angle A_1CA} = \frac{75\sqrt{3}\cdot 14}{5\sqrt{3}\cdot 2} = 105.$

Ответ: 105.

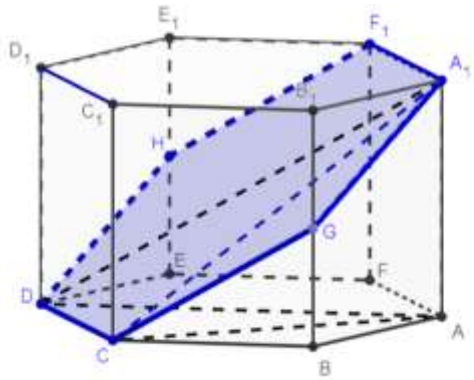

Рисунок 2.23 – Сечение призмы

Задача № 5. В правильной треугольной пирамиде MABC с основанием ABC стороны основания равны 6, а боковые рёбра 10. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, а на ребре AM – точка L. Известно, что AD = AE = LM = 4 [11].

1. Докажите, что объем пирамиды LADE составляет $\frac{4}{15}$ от объема пирамиды MABC.

2. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

Задача № 6. Все рёбра правильной треугольной пирамиды SBCD с вершиной S равны 9. Основание O высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1, M – середина ребра SB, точка L лежит на ребре CD так, что CL : LD = 7 : 2 [11].

1. Докажите, что сечение пирамиды SBCD плоскостью S_1LM – равнобедренная трапеция.

2. Вычислите длину средней линии этой трапеции.

Задача № 7. Дана правильная четырёхугольная пирамида MABCD, все рёбра которой равны 12. Точка N – середина бокового ребра MA, точка K делит боковое ребро MB в отношении 2 : 1, считая от вершины M [16].

1. Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки N и K параллельно прямой AD, является равнобедренной трапецией.
2. Найдите площадь этого сечения.

Выводы по 2 главе

1. На примере решения задачи на построение сечений многогранников показана необходимость дополнения задач заданиями, которые предполагают мысленное оперирование геометрическими образами.
2. Также нами был разработан комплекс заданий, направленный на развитие пространственного мышления обучаемых при построении сечений многогранников. В данный комплекс включены задачи на перевод словесных данных в графический образ, построение заданного сечения многогранника, чтобы в плоскости сечения получилась заданная фигура, задачи на построение сечения многогранника методом следов, методом внутреннего проектирования и комбинированным методом, задачи на отыскивание следа секущей плоскости, задания на определение верного сечения, задачи на определение секущей плоскости на примере одного и того же многогранника, изменяя его положение в пространстве, задачи на определение вида фигуры, после мысленного отсечения её частей, задачи на определение площади секущей поверхности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе написания выпускной квалификационной работы была достигнута цель исследования и были решены поставленные задачи:

1. Рассмотрена сущность пространственного мышления: развитие пространственного мышления осуществляется в процессе создания образа и оперирования им. Методом обобщения понятий следующих авторов: Коногорская С. А., Василенко А. В., Каплунович И. Я., Якиманская И. С. составлено следующее понятие – пространственным мышлением будем понимать специфический вид умственной деятельности, обеспечивающий создание пространственных образов и оперирование ими в процессе учебной деятельности: определение понятий, введение теорем, решение различных практических и теоретических задач и др.

2. Рассмотрены основные методы решения задач на построение сечений и приведены примеры задач, решённые этими методами;

3. Обоснована роль наглядных материалов для развития пространственного мышления, при изучения данной темы;

4. При анализе решений задач на построение сечений был сделан вывод: при решении задачи на построение сечений формируются умения на создание образа, при этом обучающиеся не выполняют действия, направленные на формирование умений по оперированию геометрическими образами, поэтому возникает необходимость дополнения их заданиями на изменение положения и структуры геометрического образа.

5. Разработан комплекс заданий по теме «Построение сечений многогранников», направленных на развитие пространственного мышления, который можно использовать на уроках математики в старшей школе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Блинова, Т. Л.** Формирование пространственного мышления обучающихся при решении геометрических задач / Т. Л. Блинова, Я. В. Илькив // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий. – 2020. – № 5. – С. 182–186.

2. **Бондарь, А. А.** Формирование пространственного мышления обучающихся 10-11 классов в процессе решения стереометрических задач ЕГЭ / А. А. Бондарь, Р. Ф. Мамалыга // Педагогическое образование в России. – 2019.

3. **Ботвинников, А. Д.** Особенности оперирования учащихся разными видами графических изображений / А. Д. Ботвинников, И. С. Якиманская // Известия АПН СССР. – 1968. – Выпуск 143. – С. 195–231.

4. **Василевский, А. Б**. Параллельные проекции и решение задач по стереометрии. – Минск : 1978. – 104 с.

5. Геометрия. 10-11 классы : учебник для общеобразовательных учреждений : базовый и профильный уровни / Л. С. Атанасян. В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев [и др.]. – 22-е издание – Москва : Просвещение, 2013. – 255 с.: ил. – (МГУ – школе). – ISBN 978-5-09-030854-0.

6. **Глейзер, Г. Д.** Развития пространственных представлений школьников при обучении геометрии / Г. Д. Глейзер. – Москва : Просвещение, 1985. – 356 с. – Текст: непосредственный.

7. **Каплунович, И. Я.** Развитие структуры пространственного мышления / И. Я. Каплунович // Вопросы психологии, 1986. – № 2. – С. 56–66.

8. **Коногорская, С. А.** Особенности развития компонентов пространственного мышления школьников на разных ступенях общего образования / С. А. Конгорская // Ученые записки Российского государственного социального университета. – Москва : Российский

государственный социальный университет, 2019. – Том 18. – № 4. – С. 91–99.

9. **Манзарова, А. М.** Развитие пространственного мышления школьников на уроках стереометрии средствами ИКТ / А. М. Манзарова // Молодой ученый. — 2021. — № 13 (355). — С. 271–273. — URL: https://moluch.ru/archive/355/79556/ (дата обращения: 24.02.2024). – Текст : непосредственный.

10. **Мозговая, М. А.** Формирование графических образов геометрических понятий как основа развития пространственного мышления при изучении геометрии в средней школе / М. А. Мозговая // Проблемы современного педагогического образования, 2018. – № 60–1. – С. 190–193.

11. **Открытый банк заданий ЕГЭ** // ФИПИ URL: https://fipi.ru/ege/otkrytyy-bank-zadaniy-ege (дата обращения: 2.04.2024).

12. **Погорелов, А. В.** Геометрия. 10-11 классы : учебник для общеобразовательных учреждений : базовый и профильный уровни / А. В. Погорелов. – 9-е издание – Москва: Просвещение, 2009. – 175 с.: ил. – ISBN 978-5-09-021850-4.

13. **Потускаев, Е. В.** Геометрия. 10 класс : Методическое пособие к учебнику Е. В. Потускаева, Л. И. Звавича «Геометрия. 10 класс» / Е. В. Потускаев, Л. И. Звавич, Л. Я. Шляпочник. – Москва : Дрофа, 2004. – 224 с.

14. **Потускаев, Е. В.** Геометрия. 10 класс: учебник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики / Е. В. Потускаев, Л. И. Звавич. – 6-е издание, стереотипное – Москва : Дрофа, 2008. – 224 с.

15. **Приказ Министерства просвещения РФ** от 31 мая 2021 г. № 287 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования». – URL: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/401333920/

16. Сдам ГИА // Решу ЕГЭ. – URL: https://ege.sdamgia.ru/ (дата обращения: 20.03.2024).

17. **Смирнов, В. А.** Задачи на распознавание сечений многогранников / В. А. Смирнов, И. М. Смирнова // Математика в школе. 2019. – № 2. – С. 11–17.

18. **Смирнова, К. В.** О развитии пространственных представлений при изучении геометрического материала / К. В. Смирнова, Г. Х. Воистинова // Modern Science. – 2022. – № 1–2. – С. 278–282.

19. **Усольцев, А. П.** Наглядность и ее функции в обучении / А. П. Усольцев, Т. Н. Шамало // Педагогическое образование в России, 2016. – № 6. – С. 102–109.

20. **Якиманская, И. С.** Психологические основы математического образования: учебное пособие для студентов педагогических вузов / И. С. Якиманская // Москва: Издательский центр «Академия», 2004. – 320 с.

21. **Якиманская, И. С.** Развитие пространственного мышления школьников / И. С. Якиманская // НИИ общая и педагогическая психологии. АПНСССР. – Москва : Педагогика, 1980. – 240 с.