МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ПРОГРЕССИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05 Педагогическое образование
Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»

Выполнил (а):
Студент (ка) группы ОФ-513/086-5-1
Кузнецова Евгения Сергеевна

Проверка на объем заимствований:
70,94 % авторского текста

Работа рекомендована к защите
рекомендована/не рекомендована
« 4 » 04 2017 г.
зав. кафедрой математики и МОМ
Сухова

Научный руководитель:
канд. пед. наук, доцент кафедры ММОМ
Коржакова Светлана Васильевна

Челябинск
2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Термин «прогрессия» имеет латинское происхождение (progression, что означает «движение вперед») и был введен римским автором Боэцием (VI в.). Этим термином в математике прежде именовали всякую последовательность чисел, построенную по такому закону, который позволяет неограниченно продолжать эту последовательность в одном направлении. В настоящее время термин «прогрессия» в первоначально широком смысле не употребляется. Два важных частных вида прогрессий – арифметическая и геометрическая – сохранили свои названия. Сами названия «арифметическая» и «геометрическая» были перенесены на прогрессии из теории непрерывных пропорций, изучением которых занимались древние греки. Задачи на прогрессии, дошедшие до нас из древности, были связаны с запросами хозяйственной жизни: распределение продуктов, деление наследства и д.р.. Некоторые формулы, относящиеся к прогрессиям, были известны китайским и индийским ученым.

В настоящее время актуальным вопросом становится проблема соотношения, изучаемого в школьном курсе математики, материла с жизнью. В 9 классе мы изучаем прогрессии: даем определение, учимся находить по формулам любой член прогрессии, сумму первых членов прогрессии. В заданиях ОГЭ используются задачи на применение основных формул прогрессий, но как эти понятия связаны с жизнью?

Геометрическая и арифметическая прогрессии играют большую и важную роль не только в школьном курсе алгебры. Важность этого на первый взгляд небольшого раздела школьного курса заключается в его чрезвычайно широких областях применения в жизни. Например, в химии, при повышении температуры по арифметической прогрессии скорость химических реакций растет по геометрической прогрессии. В литературе: «…Не мог он ямба от хорея, как мы не бились отличить…». Отличие ямба от хорея состоит в различных расположениях ударных слогов стиха. Ямб – это стихотворный размер с ударением на четных слогах 2, 4, 6, 8,… Номера ударных слогов образуют арифметическую прогрессию с первым членом 2 и разностью прогрессии 2. Хорей – это стихотворный размер с ударением на нечетных слогах стиха. Номера ударных слогов образуют арифметическую прогрессию 1, 3, 5, 7, ... и т.д. В заданиях ЕГЭ по математике также есть задачи на применение арифметической и геометрической прогрессий, но уже с практическим содержанием. Поэтому крайне важно дать полное описание этого курса, чтобы учащийся мог повторить уже известный ему из школьного курса материал, и даже почерпнуть много нового и интересного. В этом состоит актуальность темы выпускной квалификационной работы.

Цель работы: изучить особенности изложения темы «Прогрессии» в школьном курсе математики и разработать для учащихся тест по типу ЕГЭ и факультативный курс по данной теме.

Для достижения поставленной цели требуется выполнение следующих задач:

1. Рассмотреть теоретические основы темы исследования;
2. Проанализировать школьные учебники по теме «Прогрессии» с целью изучения данного вопроса;
3. Формировать навыки решения заданий по данной теме разного уровня сложности;
4. Предоставить учащимся различные задания по уровню сложности для обобщения. Закрепления и углубления знаний по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии» и подготовки к ЕГЭ.

Объектом исследования является процесс изложения темы «Прогрессии» в школьном курсе математики.

Предмет исследования: особенности изучения арифметической и геометрической прогрессий.

Гипотеза: процесс изучения темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии» будет более успешным, если уделить особое внимание изучению этой темы на факультативных занятиях по математике.

При выполнении работы были использованы следующие методы исследования:

1. Изучение теоретических основ выбранной темы;
2. Анализ школьных учебников и материалов ЕГЭ по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии»;
3. Самостоятельный отбор тестовых заданий по теме исследования;
4. Разработка факультатива по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии».

В процессе выполнения выпускной квалификационной работы была определена её структура: ведение, теоретическая и практическая часть, заключение, список литературы и приложение.

Во введении обоснована актуальность, поставлены цели и задачи выпускной работы, перечислены методы для их решения.

В первой главе изложен весь теоретический материал по теме « Арифметическая и геометрическая прогрессии». Даются определения основных понятий, рассматриваются свойства членов прогрессий, сумма первых n-членов арифметической и геометрической прогрессий. Представлен анализ школьных учебников по изложению темы исследования.

Во второй главе представлена практическая область исследования по теме. А именно, проведен анализ контрольно измерительных материалов ЕГЭ за последние 5 лет по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии», разработан тест по типу ЕГЭ с его полным решение и представлен факультативный курс для подготовки к ЕГЭ по данной теме.

В заключении приводятся итоги проделанной работы.

Апробация факультативных занятий проводилась в период педагогической практики в МОУ «Лицей № 35 г. Челябинска» в 9 классе.

ГЛАВА 1. ТЕОРИТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОГРЕССИЙ

§1. Числовые последовательности и их свойства

Числовая последовательность – это функция вида $y = f(x),\ x \epsilon N,$ где N – множество натуральных чисел (или функция натурального аргумента), обозначается $y = f(n)$ или $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$. Значения $y_1, y_2, y_3, \ldots$ называют соответственно первым, вторым, третьим, … членами последовательности.

Например, для функции $y = n^2$можно записать:

$$y_1 = 1^2 = 1$$
$$y_2 = 2^2 = 4$$
$$y_3 = 3^2 = 9$$
$$\ldots$$
$$y_n = n^2 \quad \text{и т. д.}$$

Способы задания последовательностей. Последовательности можно задавать различными способами, среди которых особенно важны три: аналитический, описательный и рекуррентный.

1. Последовательность задана аналитически, если задана формула ее n $-$го члена: $y = f(n)$

Пример. $y_n = 2n - 1$ – последовательность нечетных чисел: 1, 3, 5, 7, 9, …

2. Описательный способ задания числовой последовательности состоит в том, что объясняется, из каких элементов строится последовательность.

Пример 1. «Все члены последовательности равны 1». Это значит, речь идет о стационарной последовательности 1, 1, 1, …, 1, ….

<u>Пример 2</u>. «Последовательность состоит из всех простых чисел в порядке возрастания». Таким образом, задана последовательность 2, 3, 5, 7, 11, ….

При таком способе задания последовательности в данном примере трудно ответить, чему равен, скажем, 1000-й элемент последовательности.

3. Рекуррентный способ задания последовательности состоит в том, что указывается правило, позволяющее вычислить n-й член последовательности, если известны ее предыдущие члены. Название рекуррентный способ происходит от латинского слова *recurrere* – возвращаться. Чаще всего, в таких случаях, указывают формулу, позволяющую выразить $n-$й член последовательности через предыдущие, и задают 1–2 начальных члена последовательности.

<u>Пример 1</u>. $y_1 = 4, y_n = y_{n-1} + 4$, если $n = 2, 3, 4, \dots$.

Здесь $y_1 = 3;\ y_2 = 3 + 4 = 7;\ y_3 = 7 + 4 = 11; \dots$.

Можно видеть, что полученную в этом примере последовательность может быть задана и аналитически: $y_n = 4n - 1$.

<u>Пример 2</u>. $y_1 = 1;\ y_2 = 1;\ y_n = y_{n-2} + y_{n-1}$, если $n = 3, 4, \dots$.

Здесь: $y_1 = 1;\ y_2 = 1;\ y_3 = 1 + 1 = 2;\ y_4 = 1 + 2 = 3;\ y_5 = 2 + 3 = 5;$ $y_6 = 3 + 5 = 8$.

Последовательность, составленную в этом примере, специально изучают в математике, поскольку она обладает рядом интересных свойств и приложений. Ее называют последовательностью Фибоначчи – по имени итальянского математика XIII века. Задать последовательность Фибоначчи рекуррентно очень легко, а аналитически – очень трудно. $n-$е число Фибоначчи выражается через его порядковый номер следующей формулой:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

На первый взгляд, формула для n –го числа Фибоначчи кажется неправдоподобной, так как в формуле, задающей последовательность одних только натуральных чисел, содержатся квадратные корни, но можно проверить «вручную» справедливость этой формулы для нескольких первых n.

Свойства числовых последовательностей

Числовая последовательность – частный случай числовой функции, поэтому ряд свойств функций рассматриваются и для последовательностей.

Последовательность $\{y_n\}$ называют возрастающей, если каждый ее член (кроме первого) больше предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < \cdots < y_n < y_{n+1} < \cdots.$$

Последовательность $\{y_n\}$ называют убывающей, если каждый ее член (кроме первого) меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > \cdots > y_n > y_{n+1} > \cdots.$$

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином – монотонные последовательности.

Пример 1. $y_1 = 1;\ y_n = n^2$ – возрастающая последовательность.

Пример 2. $y_1 = 1;\ y_n = \frac{1}{n}$ – убывающая последовательность.

Пример 3. $y_1 = 1;\ y_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ – эта последовательность не является ни возрастающей, ни убывающей.

Последовательность называется периодической, если существует такое натуральное число T, что начиная с некоторого n, выполняется равенство $y_n = y_{n+T}$. Число T называется длиной периода.

Пример. Последовательность $y_n = (-1)^n$ периодична с длиной периода $T = 2$.

§2. Арифметическая прогрессия

Будем выписывать в порядке возрастания положительные четные числа. Первое такое число равно 2, второе 4, третье 6 и т.д. Получим последовательность 2, 4, 6, … .

Очевидно, что на четвертом месте этой последовательности будет число 8, на десятом – число 20 и т.д. Вообще для любого номера n можно указать соответствующее ему положительное четное число, оно равно $2n$.

Рассмотрим еще одну последовательность. Будем выписывать в порядке убывания правильные дроби с числителем, равным 1:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots .$$

Для любого номера n мы можем узнать соответствующую ему дробь, она равна $\frac{1}{n+1}$.

Числа, образующие последовательность, называют соответственно первым, вторым и т.д. ***членами последовательности***. Члены последовательности обычно обозначают буквами с индексами, указывающими порядковый номер члена. Например, a_1, a_2, a_3 и т.д. (читают: “a первое, a второе, a третье ” и т.д.). Вообще член последовательности с номером n, или, как говорят, n-й член последовательности, обозначают a_n. Саму последовательность будем обозначать так: (a_n).

Заметим, что последовательность может содержать конечное число членов. В таком случае её называют ***конечной***. Примером конечной последовательности служит последовательность двухзначных чисел: 10; 11; 12; 13; ...; 98; 99.

Чтобы задать последовательность, нужно указать способ, позволяющий найти член последовательности с любым номером.

Часто последовательность задают с помощью формулы, выражающей её n-й член как функцию номера n. Такую формулу называют формулой n-го члена последовательности. Например, последовательность положительных четных чисел можно задать формулой $a_n = 2n$, а последовательность правильных дробей с числителем, равным 1, – формулой $b_n = \frac{1}{n+1}$.

Пример 1. Пусть последовательность задана формулой $y_n = n^2 - 3n$. Вычислим первые пять её членов.

Подставляя вместо n натуральные числа $1, 2, 3, 4, 5$, получаем:
$y_1 = -2, y_2 = -2, y_3 = 0, y_4 = 4, y_5 = 10$.

Пример 2. Пусть первый член последовательности (a_n) равен 3, а каждый следующий член равен квадрату предыдущего, т.е. $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n^2$

С помощью формулы $a_{n+1} = a_n^2$ можно по известному первому члену последовательности вычислить второй, затем по известному второму найти третий и т.д. Получим последовательность $3, 9, 81, 6561, \ldots$.

Формулу, выражающую любой член последовательности, начиная с некоторого, через предыдущие (один или несколько), называют ***рекуррентной*** (от латинского слова recurro – возвращаться).

Рассмотрим последовательность натуральных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1: $1, 5, 9, 13, 17, 21, \ldots$. Каждый её член, начиная со второго, получается прибавлением к предыдущему члену числа 4. Эта последовательность является примером арифметической прогрессии.

Определение. ***Арифметической прогрессией*** называется последовательность, в которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.

Иначе говоря, последовательность (a_n) – арифметическая прогрессия, если для любого натурального n выполняется условие:

$$a_{n+1} = a_n + d, \tag{1}$$

где d – некоторое число.

Из определения арифметической прогрессии следует, что разность между любым её членом, начиная со второго, и предыдущим членом равна d, т.е. при любом натуральном n верно равенство: $a_{n+1} - a_n = d$.

Число d называют ***разностью арифметической прогрессии.***

Чтобы задать арифметическую прогрессию, достаточно указать первый её член и разность.

Приведем примеры:

Пример 1. Если $a_1 = 1$ и $d = 1$, то получим арифметическую прогрессию: $1, 2, 3, 4, 5, \dots$, члены которой – последовательные натуральные числа.

Пример 2. Если $a_1 = 1$ и $d = 2$, то получим арифметическую прогрессию: $1, 3, 5, 7, 9, \dots$, которая является последовательностью положительных нечетных чисел.

Пример 3. Если $a_1 = -2$ и $d = -2$, то заданная арифметическая прогрессия: $-2, -4, 0, 8, 10, \dots$ является последовательностью отрицательных четных чисел.

Пример 4. Если $a_1 = 7$ и $d = 0$, то имеем арифметическую прогрессию: $7, 7, 7, \dots$, все члены которой равны между собой.

Зная первый член и разность арифметической прогрессии, можно найти любой ее член, вычисляя последовательно второй, третий, четвертый и т. д. члены. Но для нахождения члена прогрессии с больший номером такой способ неудобен. Постараемся отыскать способ, требующий меньшей вычислительной работы.

По определению арифметической прогрессии

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$
$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d.$$

Точно так же находим, что $a_6 = a_1 + 5d,\ a_7 = a_1 + 6d$, и вообще, чтобы найти a_n нужно к a_1 прибавить $(n - 1)d$, т. е.

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1) \qquad (2)$$

Мы получили формулу ***n-го члена арифметической прогрессии***. Докажем ее методом математической индукции.

1. При $n = 1$ эта формула верна: $a_1 = a$.
2. Предположим, что формула (2) верна при$n = k,\ k \geq 1$, т.е. $a_k = a_1 + d(k - 1)$.
3. По определению арифметической прогрессии $a_{k+1} = a_k + d$. Подставляя сюда выражение для $k -$ го члена, получим $a_{k+1} = a_1 + d(k - 1) + d = a + dk$, а это есть формула (2) при $n = k + 1$.

Из принципа математической индукции следует, что формула (2) верна для любого натурального n.

Что и требовалось доказать.

Приведем примеры решения задач с использованием этой формулы.

Пример 1. Последовательность (c_n) – арифметическая прогрессия, в которой $c_1 = 2{,}3$ и $d = 0{,}45$. Найдем десятый и сотый член этой прогрессии.

Имеем: $c_{10} = 2{,}3 + 0{,}45 \cdot 9 = 2{,}3 + 4{,}05 = 6{,}35$

$$c_{100} = 2{,}3 + 0{,}45 \cdot 99 = 2{,}3 + 44{,}55 = 46{,}85.$$

Пример 2. Выясним, является ли число 71 членом арифметической прогрессии (x_n): $-10,\ -5{,}5\ ,\ -1,\ 3{,}5, \ldots$.

В данной арифметической прогрессии $x_n = -10$ и $d = x_2 - x_1$, $d = -5{,}5 - (-10) = 4{,}5$. Запишем формулу n –го члена прогрессии:

$$x_n = -10 + 4{,}5(n-1), \text{ т.е. } x_n = 4{,}5n - 14{,}5.$$

Число 71 является членом арифметической прогрессии (x_n), если существует такое натуральное числи n, при котором значение выражения $(4{,}5n - 14{,}5)$ равно 71. Решим уравнение $4{,}5n - 14{,}5 = 71$.

Получим: $4{,}5n = 85{,}5$, $n = 19$.

Значит, число 71 является членом данной арифметической прогрессии.

Формулу n – го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$ можно записать иначе: $a_n = dn + (a_1 - d)$.

Отсюда ясно, что любая арифметическая прогрессия может быть задана формулой вида $a_n = kn + b$, где k и b – некоторые числа.

Верно и обратное: последовательность (a_n), заданная формулой вида

$a_n = kn + b$, где k и b – некоторые числа, является арифметической прогрессией.

Действительно, найдем разность $(n+1)$ - го и -го членов последовательности (a_n):

$$a_{n+1} - a_n = k(n+1) + b - (kn + b) = kn + k + b - kn - b = k$$

Значит, при любом n справедливо равенство $a_{n+1} = a_n + k$, и по определению последовательность (a_n) является арифметической прогрессией. Заметим, что разность этой прогрессии равна k.

Свойства арифметической прогрессии.

1. *Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому его соседних членов, т.е. при* $k \geq 2$ *верной является формула*

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}. \quad (3)$$

Действительно, при $k \geq 2$ имеем $a_k = a_{k-1} + d$ и $a_k = a_{k+1} - d$. Складывая почленно эти равенства, получим $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$, откуда следует (3).

2. *У конечной арифметической прогрессии* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *сумма членов, равноотстоящих от ее концов, равна сумме крайних членов, т.е. для* $k = 1,2, \dots, n$ *верной является формула* $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$. (4)

Действительно, в конечной арифметической прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n$ члены a_k и a_{n-k+1} равноотстоят от концов. По формуле (2) $a_k = a_1 + d(k - 1)$ и $a_{n-k+1} = a_1 + d(n - k)$. Сумма этих членов равна $a_k + a_{n-k+1} = 2a_1 + d(n - 1)$ и равна сумме крайних членов $a_1 + a_n = 2a + d(n - 1)$.

Пусть требуется найти сумму первых ста натуральных чисел. Покажем, как можно решить, эту задачу, не выполняя непосредственного сложения чисел.

Обозначим искомую сумму через S и запишем ее дважды, расположив в первом случае слагаемые в порядке возрастания, а во втором – в порядке убывания: $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$,

$$S = 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1.$$

Каждая пара чисел, расположенных друг под другом, в сумме дает 101. Число таких пар равно 100. Поэтому, сложив равенства почленно, получим:

$$2S = 101 \cdot 100, \qquad S = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050.$$

Итак, 1+ 2 + 3 + …+ 99 + 100 = 5050.

С помощью аналогичных рассуждений можно найти сумму первых членов любой арифметической прогрессии.

Сумма членов конечной арифметической прогрессии равна произведению полусуммы крайних членов на число членов, т.е. если

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n, \text{ то } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n. \quad (5)$$

Действительно, если $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$, то

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1.$$

Складывая почленно эти равенства и используя свойство 2, получаем $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_1 + a_n) = n(a_1 + a_n)$, откуда следует формула (5).

Приведем примеры:

<u>Пример 1</u>. Найдем сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии $1, 3, 5, \dots$.

В данной арифметической прогрессии $a_1 = 1, d = 3{,}5 - 1 = 2{,}5$. По формуле n $-$ го члена найдем двадцатый член прогрессии:

$$a_{20} = 1 + 2{,}5 \cdot 19 = 48{,}5$$

Теперь вычислим сумму первых двадцати членов:

$$S_{20} = \frac{(1 + 48{,}5) \cdot 20}{2} = 49{,}5 \cdot 10 = 495.$$

Заметим, что если заданы первый член и разность арифметической прогрессии, то удобно пользоваться формулой суммы, представленной в другом виде. Подставим в формулу (5) вместо (a_n) выражение $a_1 + d(n-1)$ получим: $S_n = \frac{(a_1 + a_1 + d(n-1))n}{2}$ т.е. $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$. (6)

Если для решения рассмотренной задачи воспользоваться формулой (6), то вычисления будут выглядеть так:

$$S_{20} = \frac{2 \cdot 1 + 2{,}5 \cdot 19}{2} \cdot 20 = (2 + 47{,}5) \cdot 10 = 495.$$

<u>Пример 2</u>. Найдем сумму первых тридцати членов последовательности (a_n), заданной формулой $a_n = 5n - 4$.

Последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, так как она задана формулой вида $a_n = kn + b$, где $k = 5$ и $b = -4$.

Найдем первый и тридцатый члены этой арифметической прогрессии:

$$a_1 = 5 \cdot 1 - 4 = 1, a_2 = 5 \cdot 30 - 4 = 146.$$

Теперь по формуле (5) вычислим S_{30}:

$$S_{30} = \frac{(1 + 146) \cdot 30}{2} = 147 \cdot 15 = 2205.$$

<u>Пример 3</u>. Найдем сумму $1 + 2 + 3 + \cdots + n$, слагаемыми в которой являются все натуральные числа от 1 до n.

Применив формулу (5) к арифметической прогрессии $1; 2; 3; \ldots$, получим, что $1 + 2 + \cdots + n = \frac{(1+n)n}{2}$.

<u>Пример 4</u>. Найдем сумму всех натуральных чисел, кратных шести и не превосходящих 250.

Натуральные числа, кратные шести, образуют арифметическую прогрессию, которую можно задать формулой $a_n = 6n$. Чтобы выяснить, сколько членов этой прогрессии не превосходит 250, решим неравенство $6n \leq 250$. Получим $n \leq 41\frac{2}{3}$.

Значит, число членов прогрессии, сумму которых надо найти, равно 41.

Имеем: $a_1 = 6$, $a_{41} = 6 \cdot 41 = 246$, $S_{41} = \frac{(6+246)\cdot 41}{2} = 5166$.

§3. Геометрическая прогрессия

Рассмотрим последовательность, членами которой являются степени числа 2 с натуральными показателями: 2; 2^2; 2^3; 2^4; … .

Каждый член этой последовательности, начиная со второго, получается умножением предыдущего члена на 2. Эта последовательность является примером геометрической прогрессии.

Определение. ***Геометрической прогрессией*** называется последовательность отличных от нуля чисел, в которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число.

Иначе говоря, последовательность (b_n) – геометрическая прогрессия, если для любого натурального *n* выполняются условия:

$$b_n \neq 0 \text{ и } b_{n+1} = b_n \cdot q \qquad (1)$$

где q – некоторое число. Обозначим, например, через (b_n)последовательность натуральных степеней числа 2. В этом случае для любого натурального *n* верно равенство $b_{n+1} = b_n \cdot 2$; здесь $q = 2$.

Из определения геометрической прогрессии следует, что отношение любого ее члена, начиная со второго, к предыдущему члену равно q, т.е. при любой натуральном *n* верно равенство: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$.

Число q называют ***знаменателем геометрической прогрессии.*** Очевидно, что знаменатель геометрической прогрессии отличен от нуля.

Чтобы задать геометрическую прогрессию, достаточно указать ее первый член и знаменатель.

Приведем примеры:

Пример 1. Если $b_1 = 1$ и $q = 0{,}1$, то получим геометрическую прогрессию: $1,\ 0{,}1,\ 0{,}01,\ 0{,}001,\ 0{,}0001,\ \ldots$.

Пример 2. Условиями $b_1 = -2$ и $q = 3$ задается геометрическая прогрессия $-2, -6, -13, -54, -162,\ \ldots$.

Пример 3. Если $b_1 = 4$ и $q = -3$, то имеем прогрессию: $4, -12, 36, -103,\ 324, \ldots$.

Пример 4. Если $b_1 = 8$ и $q = 1$, то получим геометрическую прогрессию $8, 8, 8, \ldots$.

Зная первый член и знаменатель геометрической прогрессии, можно найти последовательно второй, третий, а также любой её член:

$$
\begin{aligned}
&b_2 = b_1 \cdot q,\\
&b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q)q = b_1 \cdot q^2,\\
&b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 \cdot q^2)q = b_1 \cdot q^3,\\
&b_5 = b_4 \cdot q = (b_1 \cdot q^3)q = b_1 \cdot q^4.
\end{aligned}
$$

Точно так же находим, что $b_6 = b_1 \cdot q^5$ и т. д. Вообще, чтобы найти (b_n), мы должны b_1 умножить на q^{n-1}, т. е. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$. (2)

Мы получили формулу n-го члена геометрической прогрессии. Докажем ее методом математической индукции.

1. Формула (2), очевидно, верна при $n = 1$.

2. Предположим, что она верна и при $n = k, k \geq 1$, т.е. $b_k = b_n \cdot q^{k-1}$.

3. Из (1) следует $b_{k+1} = b_1 q^k$, то есть формула (2) верна и при

$n = k + 1$.

Из принципа математической индукции следует, что формула (2) справедлива для любого натурального n.

Что и требовалось доказать.

Приведем примеры решения задач с использованием этой формулы.

Пример 1. В геометрической прогрессии $b_1 = 0{,}8$ и $q = \frac{1}{2}$. Найдем b_{10}.

По формуле n -го члена геометрической прогрессии

$$b_{10} = 0{,}8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1} = \frac{2^3}{10} \cdot \frac{1}{2^9} = \frac{1}{2^6 \cdot 10} = \frac{1}{640}.$$

Пример 2. Найдем восьмой член геометрической прогрессии $(\boldsymbol{b_n})$, если $b_1 = 162$ и $b_3 = 18$.

Зная первый и третий члены геометрической прогрессии, можно найти ее знаменатель. Так как $b_3 = b_1 \cdot q^2$,то $q^2 = \frac{b_3}{b_1} = \frac{18}{162} = \frac{1}{9}$.

Решив уравнение, $q^2 = \frac{1}{9}$, найдем, что $q = \frac{1}{3}$ или $q = -\frac{1}{3}$.

Таким образом, существуют две прогрессии, удовлетворяющие условию задачи.

Если $q = \frac{1}{3}$, то $b_8 = b_1 \cdot q^7 = 162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{2 \cdot 3^4}{3^7} = \frac{2}{27}$.

Если $q = -\frac{1}{3}$, то $b_8 = b_1 \cdot q^7 = 162 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^7 = -\frac{2 \cdot 3^4}{3^7} = -\frac{2}{27}$.

Задача имеет два решения: $b_8 = \frac{2}{27}$ или $b_8 = -\frac{2}{27}$.

Пример 3. После каждого, движения поршня разрежающего насоса из сосуда удаляется 20% находящегося в нем воздуха. Определим давление воздуха внутри сосуда после шести движений поршня, если первоначальное давление было 750 мм рт. ст.

Так как после каждого движения поршня из сосуда удаляется 20% имевшегося воздуха, то остается 80% воздуха. Чтобы узнать давление воздуха в сосуде после очередного движения поршня, нужно давление после предыдущего движения поршня умножить на 0,8.

Мы имеем геометрическую прогрессию, первый член которой равен 760, а знаменатель равен 0,8. Число, выражающее давление воздуха в сосуде (в мм рт. ст.) после шести движений поршня, является седьмым членом этой прогрессии. Оно равно $750 \cdot (0{,}8)^6$.

Произведя вычисления, получим:

$$750 \cdot (0{,}8)^6 \approx 750 \cdot 0{,}26 \approx 200 \text{ (мм. рт. ст.)}$$

Свойства геометрической прогрессии.

1. *Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению соседних членов, то есть при* $k \geq 2$ *верной является формула*

$$b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1} \qquad (3)$$

Если все члены геометрической прогрессии положительны, то это свойство формулируется так: *каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен среднему геометрическому его соседних членов, т.е.* $b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}}$.

Действительно, при $k \geq 2$ имеем $b_k = b_{k-1} \cdot q$ и $b_k = b_{k+1} \cdot q^{-1}$. Перемножая почленно эти равенства, получим $b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}$. А это и есть равенство (3).

2. *У конечной геометрической прогрессии* $b_1, b_2, \dots, b_n$ *произведение членов, равноотстоящих от ее концов, равно произведению крайних членов, т.е.*

$$b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n \qquad (4)$$

Действительно, в конечной геометрической прогрессии $b_1, b_2, ..., b_n$ члены b_k и b_{n-k+1} равноотстоят от концов. По формуле (2) $b_k = b_1 \cdot q^{k-1}$ и $b_{n-k+1} = b_1 \cdot q^{n-k}$. Произведение этих членов $b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1^2 \cdot q^{k-1+n-k}$ и равно произведению крайних членов $b_1 \cdot b_n = b_1^2 \cdot q^{n-1}$.

Значит, $b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n$. А это и есть равенство (4).

Древняя индийская легенда рассказывает, что изобретатель шахмат попросил в награду за свое изобретение столько пшеничных зерен, сколько их получится, если на первую клетку шахматной доски положить одно зерно, на вторую – в два раза больше, т. е. 2 зерна, на третью – еще в два раза больше, т. е. 4 зерна, и т. д. до 64-й клетки. Сколько зерен должен был получить изобретатель шахмат?

Число зерен, о которых идет речь, является суммой шестидесяти четырех членов геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а знаменатель равен 2. Обозначим эту сумму через S:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{62} + 2^{63}.$$

Умножим обе части записанного равенства на знаменатель прогрессии, получим: $2S = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63} + 2^{64}$.

Вычтем из второго равенства первое и проведем упрощения:

$$2S - S = (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63} + 2^{64}) - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{62} + 2^{63})$$

$$S = 2^{64} - 1.$$

Масса такого числа пшеничных зерен больше триллиона тонн. Это заведомо превосходит количество пшеницы, собранной человечеством до настоящего времени.

Выведем теперь формулу суммы n первых членов произвольной геометрической прогрессии. Воспользуемся тем же приемом, с помощью которого была вычислена сумма S.

Пусть дана геометрическая прогрессия (b_n). Обозначим сумму n первых ее членов через S_n :

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n. \qquad (5)$$

Умножим обе части этого равенства на q: $S_n q = b_1 q + b_2 q + \ldots + b_{n-1} q + b_n q.$

Учитывая, что $b_1 q = b_2,\ b_2 q = b_3,\ \ldots,\ b_{n-1} q = b_n,$ получим:

$$S_n q = b_2 + b_3 + \ldots + b_n + b_n q \qquad (6)$$

Вычтем почленно из равенства (6) равенство (5) и приведем подобные члены: $S_n q - S_n = (b_1 q + b_2 q + \ldots + b_{n-1} q + b_n q) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + b_n),$

$$S_n q - S_n = b_n q - b_1,\ S_n (q-1) = b_n q - b_1.$$

Пусть $q \neq 1$, тогда $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1}.$ (7)

Мы получили формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии, в которой $q \neq 1$. Если $q = 1$, то все члены прогрессии равны первому члену и $S_n = nb_1$.

Заметим, что при решении многих задач удобно пользоваться формулой суммы n первых членов геометрической прогрессии, записанной в другом виде. Подставим в формулу (7) вместо bn выражение $b_1 q^{n-1}$. Получим: $S_n = \dfrac{b_1 (q^n - 1)}{q-1},$ если $q \neq 1$. (8)

Пример 1. Найдем сумму первых десяти членов геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = 3$ и $q = \frac{1}{2}$.

Так как известны первый член и знаменатель прогрессии, то для решения задачи удобно воспользоваться формулой (8). Получим:

$$S_{10} = \frac{b_1(q^{10}-1)}{q-1} = \frac{3\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{10}-1\right)}{\frac{1}{2}-1} = \frac{3\left(\frac{1}{1024}-1\right)}{-\frac{1}{2}} = -6\left(\frac{1}{1024}-1\right) = 6-\frac{3}{512} = 5\frac{509}{512}.$$

Пример 2. Найдем сумму $1+x+...+x^{n-1}$ $(x \neq 1)$, слагаемые которой являются последовательными членами геометрической прогрессии 1; x; x^2;…

Первый член прогрессии равен 1, а знаменатель ранен x. Так как x^{n-1} является членом этой прогрессии с номером n, то задача состоит в нахождении суммы n первых её членов. Воспользуемся формулой (7):

$$S_n = \frac{x^{n-1} \cdot x - 1}{x-1} = \frac{x^n - 1}{x-1}.$$

Таким образом, $1+x+...+x^{n-1} = \frac{x^n-1}{x-1}$.

Умножим левую и правую части последнего равенства на $x-1$. Получим тождество $x^n - 1 = (x-1)(1+x+...+x^{n-1})$.

В частности, при $n=2$ и $n=3$ приходим к известным формулам: $x^2-1=(x-1)(x+1)$, $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$.

Пример 3. Найдем сумму шести первым членов геометрической прогрессии (b_n), если известно, что $b_3 = 12$ и $b_5 = 48$.

Зная b_3 и b_5, можно найти знаменатель прогрессии q.

Так как $b_5 = b_4q = (b_3q)q = b_3q^2$, то $q^2 = \frac{b_5}{b_3} = \frac{48}{12} = 4.$

Значит, $q = 2$ или $q = -2.$

Таким образом, существуют две прогрессии, удовлетворяющие условию задачи.

Если $q = -2$, то $b_1 = \frac{b_3}{q^2} = 3$ и $S_6 = \frac{b_1\left(q^6 - 1\right)}{q - 1} = \frac{3\left((-2)^6 - 1\right)}{-2 - 1} = -63.$

Если $q = 2$, то $b_1 = 3$ и $S_6 = \frac{b_1\left(q^6 - 1\right)}{q - 1} = \frac{3\left(2^6 - 1\right)}{2 - 1} = 189.$

Мы знаем, что число $\frac{1}{3}$ обращается в бесконечную десятичную периодическую дробь 0,3333... .

Если по аналогии с конечной десятичной дробью разложить бесконечную десятичную дробь 0,3333… по разрядам, то получим сумму с бесконечным числом слагаемых: 0,03 + 0,003 + 0,0003 + ...

Слагаемые в этой сумме являются членами геометрической прогрессии 0,3; 0,03; 0,003; 0,0003; ..., у которой $q = 0{,}1$.

По формуле суммы *n* первых членов геометрической прогрессии имеем:

$$S_n = \frac{0{,}3\left((0{,}1)^n - 1\right)}{0{,}1 - 1} = \frac{(0{,}1)^n - 1}{-3} = \frac{1}{3} - \frac{(0{,}1)^n}{3}.$$

При неограниченном увеличении числа слагаемых *n* выражение $(0{,}1)^n$ становится сколь угодно близким к нулю, а значит, и вся дробь $\frac{(0{,}1)^n}{3}$ неограниченно приближается к нулю.

Действительно, если $n = 2$, то $\frac{(0,1)^n}{3} = \frac{0,01}{3} = \frac{1}{300}$; если $n = 3$, то $\frac{(0,1)^n}{3} = \frac{0,001}{3} = \frac{1}{3000}$; если $n = 4$, то $\frac{(0,1)^n}{3} = \frac{0,0001}{3} = \frac{1}{30000}$; если $n = 5$, то $\frac{(0,1)^n}{3} = \frac{0,00001}{3} = \frac{1}{300000}$ и т.д.

Поэтому при неограниченном увеличении n разность $\frac{1}{3} - \frac{(0,1)^n}{3}$ становится сколь угодно близкой к числу $\frac{1}{3}$ или, как говорят, стремится к числу $\frac{1}{3}$.

Таким образом, сумма n первых членов геометрической прогрессии 0,3; 0,03; 0,003; 0,0003; ... при неограниченном увеличении n стремится к числу $\frac{1}{3}$ Это утверждение записывают в виде равенства $0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \ldots = \frac{1}{3}$.

Число $\frac{1}{3}$ называют суммой бесконечной геометрической прогрессии 0,3; 0,03; 0,003; 0,0003; ... .

Рассмотрим теперь произвольную геометрическую прогрессию $b_1;\ b_1q;\ b_1q^2;\ \ldots,$ у которой $|q| < 1$.

Запишем формулу суммы n первых членов прогрессии: $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Преобразуем выражение в правой части равенства:

$$\frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1 - b_1q^n}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1}{1 - q}q^n.$$

Значит, $S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q} q^n$.

Можно доказать, что если $|q|<1$, то при неограниченном увеличении *n* множитель q^n стремится к нулю, а значит, стремится к нулю и произведение $\frac{b_1}{1-q} q^n$. Поэтому при неограниченном увеличении *n* сумма *S*, стремится к числу $\frac{b_1}{1-q}$.

Число $\frac{b_1}{1-q}$ называют ***суммой бесконечной геометрической прогрессии*** (b_n), у которой $|q|<1$.

Это записывают так: $b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + ... = \frac{b_1}{1-q}$.

Обозначив сумму прогрессии (b_n) буквой *S*, получим формулу

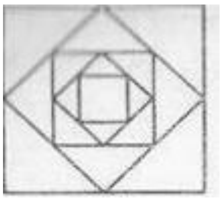
$$S = \frac{b_1}{1-q}. \qquad (9)$$

Заметим, что если $|q| \geq 1$, то сумма *n* первых членов геометрической прогрессии *Sn* при неограниченной увеличении *n* не стремится ни к какому числу. Бесконечная геометрическая прогрессия имеет сумму только при $|q|<1$.

Пример 1. Найдем сумму бесконечной геометрической прогрессии 12; – 4; $\frac{4}{3}$; ….

У этой прогрессии $q=-\frac{1}{3}$. Значит, условие $|q|<1$ выполняется. По формуле (9) получим: $S=\frac{12}{1+\frac{1}{3}}=\frac{12}{\frac{4}{3}}=9.$

Пример 2. Дан квадрат, сторона которого равна 4 см. Середины его сторон являются вершинами второго квадрата, середины сторон второго квадрата являются вершинами третьего квадрата и т. д. Найдем сумму площадей всех квадратов.



Из геометрических соображений ясно, что площадь каждого следующего квадрата равна половине площади предыдущего. Таким образом, последовательность площадей квадратов является геометрической прогрессией, первый член которой равен 16, а знаменатель равен $\frac{1}{2}$. Найдем сумму этой геометрической прогрессии: $S=\frac{16}{1-\frac{1}{2}}=32.$

Значит, сумма площадей всех квадратов равна 32 см2.

Пример 3. Представим бесконечную десятичную периодическую дробь 0,(18) в виде обыкновенной дроби.

Запишем число 0,(18) в виде суммы: $0,(18)=0,18+0,0018+0,000018+\ldots$

Слагаемые в правой части равенства – члены геометрической прогрессии, у которой первый член равен 0,18, а знаменатель равен 0,01, т.е. $|q|<1$. Найдем сумму этой прогрессии: $S=\frac{0,18}{1-0,01}=\frac{0,18}{0,99}=\frac{2}{11}.$

Значит, $0,(18)=\frac{2}{11}$.

Заметим, что аналогичным образом можно представить в виде обыкновенной дроби любую бесконечную десятичную периодическую дробь.

§4. Анализ школьных учебников по изложению темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии»

Для более полного изучения теоритических основ темы «Прогрессии» необходим анализ учебно-методической литературы.

Нами была рассмотрена следующая школьная литература: учебник по алгебре для 9 класса Ш.А. Алимова, учебник по алгебре для 9 класса Г.В. Дорофеева и учебник профильного уровня по алгебре для 9 класса (часть 1) А.Г. Мордковича. В рассмотренных учебниках исследуемая тема представлена примерно одинаково. Изучение темы, например, начинается везде с четвёртой главы. Различия лишь в полноте изложения материала по тебе «Прогрессии».

Таблица 1.

Сравнительный анализ темы «Прогрессии» в школьном курсе математики.

	Ш.А. Алимов «Алгебра 9 класс»	**Г.В. Дорофеев «Алгебра 9 класс»**	**А.Г. Мордкович «Алгебра 9 класс. Часть 1» (проф. уровень)**
1.Понятие числовой послеовательности.	Определение даётся на основе примера о лицевом счете в сберегательном банке. «Пусть на счете №1 лежит вклад рублей, на счете №2 лежит вклад рублей и т.д. Получается $a_1 a_2$ *числовая*	Понятие числовой последовательности рассматривается на примере чисел Фибоначчи. Определение однозначно не дается.	Функцию называют $y=f(x), x\in N$*функцией натурального аргумента* или *числовой последовательностью* и обозначают или (присутствует объяснение

	последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots, a_N$, где число всех счетов. Здесь каждому натуральному числу от 1 до поставлено в соответствие число » $N - nNa_n$.		различных способов задания числовой последовательности: аналитическое, словесное, рекуррентное, монотонная последовательность) $y = F(n)y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$
2.Определение арифметической прогрессии.	Числовая последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ называется *арифметической прогрессией,* если для всех натуральных выполняется равенство: где - некоторое число. $na_{n+1} = a_n + d,\ d$	Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная с второго, получается прибавлением к предыдущему одного и тоже числа.	Числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго равен сумме предыдущего члена и одного и тогоже числа называют d,*арифметической прогрессией. Арифметическая прогрессия* – это числовая последовательность заданная рекуррентно соотношениями: , , (и – заданные числа) $(a_n)a_1 = aa_n = a_{n+1} + dn = 2,3,4 \dots ad$
3.Свойства арифметической прогрессии.	Свойства арифметической прогрессии не выделены.	1.В последовательности каждый член больше предыдущего, следовательно, она возрастающая. 2.Каждый член последовательности меньше предыдущего, следовательно, она убывающая. (Свойства сформулированы неявно.)	1.Арифметическая прогрессия является *возрастающей последовательность ю,* если .$d > 0$ 2.Арифметическая прогрессия является *убывающей последовательность ю,* если $d < 0$.

4.Сумма первых членов арифметической прогрессии. n	Сумма первых членов арифметической прогрессии представлена в виде теоремы. Доказательство проводится на основе определения арифметической прогрессии. n	Сумма первых n членов арифметической прогрессии представлена в виде формулы. Вывод формулы предоставляется на примете метода Гаусса.	Сумма первых n членов арифметической прогрессии представлена в виде формулы. Вывод формулы предоставляется на основе определения арифметической прогрессии.
5.Характеристическое свойство арифметической прогрессии.	Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому соседних с ним членов.	Характеристическое свойство арифметической прогрессии не выделено.	Теорема. *Числовая последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый её член, кроме первого (и последнего - в случае конечной последовательности) равен среднему арифметическому предшествующего и последующего членов.*
6.Определение геометрической прогрессии.	Числовая последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N$, называется *геометрической прогрессией*, если для всех натуральных выполняется равенство: , где - некоторое число, не равное нулю. $nb_{n+1} = b_n q b_n \neq 0q$	Геометрической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная с второго, равен предыдущему члену, умноженному на одного и тоже не равное нулю число.	Числовую последовательность, все члены которой отличны от нуля и каждый член которой, начиная со второго, получается из предыдущего члена умножением его на одно и тоже число , называют q*геометрической прогрессией. Геометрическая прогрессия* – это числовая последовательность , заданная рекуррентно соотношениями: (и – заданные числа,) $(b_n) b_1 = b, b_n = b_{n-1} \cdot q, n =$

			2,3,4, ... $bqb \neq 0, q \neq 0$
7.Свойства геометрической прогрессии.	Свойства геометрической прогрессии не выделены.	1.Если , то такая прогрессия является возрастающей. $q > 1$ 2.Если , то такая прогрессия является убывающей. (Свойства сформулированы неявно.) $0 < q < 1$	1.Геометрическая прогрессия является *возрастающей последовательностью*, если . $b_1 > 0, q > 1$ 2.Геометрическая прогрессия является убывающей последовательностью, если $b_1 > 0$, $0 < q < 1$
8.Сумма первых членов геометрической прогрессии n	Сумма первых членов арифметической прогрессии представлена в виде теоремы. Доказательство проводится на основе определения геометрической прогрессии. n	Сумма первых членов геометрической прогрессии представлена в виде формулы. n	Сумма первых членов геометрической прогрессии представлена в виде формулы. n
9.Характеристическое свойство геометрической прогрессии	Если все члены геометрической прогрессии положительны, то , т.е. каждый член прогрессии, начиная со второго, равен среднему геометрическому двух соседних с ним членов. $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$	Характеристическое свойство геометрической прогрессии не выделено.	Теорема. Числовая последовательность является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда квадрат каждого её члена, кроме первого (и последнего – в случае конечной последовательности), равен произведению Предшествующего и последующего членов.

Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений.

Изучение арифметической и геометрической прогрессий в данном учебнике начинается с главы IV «Прогрессии».

В §17 «Числовая последовательность» вводится определение числовой последовательности, а так же бесконечной последовательности и -го члена последовательности, рассматриваются примеры.

В §18 «Арифметическая прогрессия» дается определение арифметической прогрессии, формулировка характеристического свойства арифметической прогрессии. Далее вводится формула -го члена арифметической прогрессии, рассматриваются примеры.

В §19 «Сумма первых n членов арифметической прогрессии» теорема о сумме первых n членов арифметической прогрессии. Приводится её доказательство. Рассматриваются примеры.

§20 «Геометрическая прогрессия». В этом параграфе рассказывается определение геометрической прогрессии, характеристическое свойство геометрической прогрессии. Далее вводится формула -го члена геометрической прогрессии, рассматриваются примеры.

В §21 «Сумма первых членов геометрической прогрессии» приводится теорема о сумме первых членов геометрической прогрессии, и её доказательство. nn

В конце главы выделены отдельным пунктом «Упражнения к главе IV».

Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др. Алгебра. 9 класс.

В данном учебнике изучение прогрессий начинается с 4 главы «Арифметическая и геометрическая прогрессии».

В пункте 4.1. «Числовые последовательности», понятие числовой последовательности рассматривается на примере чисел Фибоначчи. Определение однозначно не дается. Далее приводятся примеры.

В пункте 4.2. «Арифметическая прогрессия» приводятся определение арифметической прогрессии, и объясняется что такое разность арифметической прогрессии. Приводятся примеры.

В пункте 4.3. «Сумма первых членов арифметической прогрессии» водятся формула суммы первых nn членов арифметической прогрессии. Вывод формулы предоставляется на примете метода Гаусса. Рассматриваются примеры.

В пункте 4.4. «Геометрическая прогрессия» на примера графика функции даётся определение геометрической прогрессии, объясняется что такое знаменатель геометрической прогрессии. Затем выводится формула n-го члена геометрической прогрессии, которая используется при решении заданий приведённых ниже.

Пункт 4.5. «Сумма первых членов геометрической прогрессии» содержит формулу суммы первых членов арифметической прогрессии и её вывод. Также в пункте рассматриваются примеры решений различных заданий. nn

Также в главе содержатся пункты 4.6. «Простые и сложные проценты», 4.7 «Сумма квадратов первых n натуральных чисел» и пункт 4.8 «Треугольник Паскаля» с пометкой «для тех кому интересно».

После каждого пункта приведен ряд упражнения, которые имеют разный уровень сложности: часть А и часть В.

Также в конце главы выделены отдельным подпунктом «Дополнительные задания к главе».

А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. Алгебра. 9 класс.

Арифметическая и геометрическая прогрессии начинают изучаться с 4 главы «Прогрессии».

Параграф 15 «Числовые последовательности» делится на 5 пунктов: 1 - Определение числовой последовательности; 2 - Аналитическое задание последовательности; 3 – Словесное задание последовательности; 4 – Рекуррентное задание последовательности; 5 – Монотонные последовательности. В 1 пункте дается определение последовательности и говорится о существующих способах её задания. Во 2-4 пунктах подробно объясняются способы задания последовательностей, а в 5 пункте приводятся свойства последовательности. Также в пунктах рассматриваются различные примеры.

Параграф 16 «Арифметическая прогрессия» состоит из 4х пунктов: 1 – Основные понятия; 2 – Формула n-го члена арифметической прогрессии; 3 – Формула суммы членов конечной арифметической прогрессии; 4 – Характеристическое свойство арифметической прогрессии. В первом пункте говорится о том, что такое арифметическая прогрессия, что называют разностью прогрессий, приводятся примеры. Во 2 пункте выводится формула n-го члена арифметической прогрессии, арифметическая прогрессия рассматривается как линейная функция. В 3 пункте приводится вывод формулы «сумма членов конечной арифметической прогрессии» и различные примеры для усвоения этой формулы. В 4 пункте представлено характеристическое свойство арифметической прогрессии в виде теоремы с доказательством. Далее рассматривается примеры.

В 17 параграфе «Геометрическая прогрессия» представлено 5 пунктов. В 1 пункте «Основные понятия» говорится, что такое геометрическая прогрессия, что называется конечной геометрической прогрессией. В пункте 2 «Формула n-го члена геометрической прогрессии» представлен вывод формулы. В пункте 3 «Формула суммы членов конечной геометрической прогрессии» выводится формула суммы членов конечной геометрической прогрессии, и приводятся различные примеры для её усвоения. 4 пункт – «Характеристической свойство геометрической прогрессии» содержит непосредственно само характеристическое свойство с доказательством и различные примеры для понимания. 5 пункт – «Прогрессии и банковские расчеты» содержит пример практического характера. В нём описывается использование геометрической прогрессии в повседневной жизни, в данном случае, в банковской сфере.

Также в конце главы выделен отдельный подпункт «Основные результаты», в котором кратко написано всё, что должны были усвоить учащиеся при изучении данной темы.

В задачнике «Алгебра 9 класс» к данному учебнику к каждому параграфу приведены задания трех уровней: обязательные задачи, более сложные задачи и трудные задачи. Большое количество и разнообразие упражнений дает возможность закрепить изученный материал.

Таблица 2.

Сводный анализ школьной литературы.

	Ш.А. Алимов «Алгебра 9 класс»	**Г.В. Дорофеев «Алгебра 9 класс»**	**А.Г. Мордкович «Алгебра 9 класс. Часть 1» (проф. уровень)**
1.Понятие числовой последовательности	+	-	+
2.Определение арифметической прогрессии.	+	+	+
3.Свойства арифметической прогрессии.	-	$\pm$	+
4.Сумма n первых членов арифметической прогрессии.	+	+	+

5.Характеристическое свойство арифметической прогрессии.	+	-	+
6.Определение геометрической прогрессии.	+	+	+
7.Свойства геометрической прогрессии.	-	±	+
8.Сумма n первых членов геометрической прогрессии.	+	+	+
9.Характеристическое свойство геометрической прогрессии	+	-	+

Анализ учебников показал, что в школьном курсе математики тема «Арифметическая и геометрическая прогрессии» имеет достаточно большое значение. Стоит обратить особое внимание на то, что тема изучается только в девятом классе. А это значит, что для подготовки и успешного написания ЕГЭ учащимся необходим дополнительный факультативный курс по теме «Прогрессии».

Выводы по главе 1.

На основании рассмотренного теоретического материала по изучения прогрессий было установлено следующее:

- В теоритические основы темы «Прогрессии» входит множество понятий, свойств и формул;
- Тема «Арифметическая и геометрическая прогрессия» имеет достаточно большое значение в школьном курсе математики;
- Школьной программой предусмотренно изучение данной темы только в девятом классе.

На основе этого можно сделать вывод, что тема «Арифметическая и геометрическая прогрессии» достаточна объёмна и на её изучение нужно отводить большое количество времени, которого учителя не могут себе позволить в связи с учебным планом. Поэтому, для успешного освоения и углубления знаний учащимся необходим дополнительный курс по теме «Прогрессии».

ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА ЗАДАНИЙ ПО ТЕМЕ «АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ» ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ

§1. Анализ материалов ЕГЭ по теме «Прогрессии».

«Оценка», как правило, понимается как результат проверки. «Контроль» означает выявление, измерение и оценивание знаний, умений обучаемых. Контроль содержит в себе оценивание (как процесс) и оценку (как результат) проверки.

По мнению И.Ф. Харламова, осуществление контроля играет большую регулятивную и стимулирующую роль в обучении за качеством овладения изучаемым материалом и побуждение учащихся к самоконтролю. Необходимо добиваться, отмечает автор, чтобы этот контроль был регулярным и осуществлялся по каждой изучаемой теме. Что же касается учащихся, то их не только нужно побуждать к осуществлению самоконтроля, но и помогать им овладевать его приемами.

В методической литературе принято считать, что контроль является так называемой «обратной связью» между учеником и учителем, тем этапом учебного процесса, когда учитель получает информацию об эффективности обучения предмету.

В условиях реализвции образовательных стандартов нового поколения качество образовательной подготовки выпускников российских школ стало контралироваться в формате ЕГЭ. Он предполагает проверку знаний, умений, ценностных отношений и накопленного опыта творческой деятельности учащихся на уровне высокой степени обобщения. Такой экзамен более обоснованно позволяет судить о глубине усвоения материала за период обучения в основной и старших классах. По результатам ЕГЭ вохникает возможность анализировать недостатки и достоинства обучения учащихся в школе.

С 2015 года ЕГЭ по математике был видоизменён. Экзамен разделили на две части: базову и профильную. Базовая часть сдаётся абсолютно всеми учащимися, профильная часть – предназначена только для тех, кто планирует поступать в ВУЗ.

Экзамен базового уровня состоит из одной части, включающий 20 заданий с кратким числовым ответом, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Экзаменационная работа профильного уровня состоит из двух частей:

- Часть первая включает 9 заданий с кратким ответом;
- Часть вторая – 5 заданий с кратким ответом и 7 заданий с развёрнутым ответом.

В профильном экзамене, так же присутствуют простые задания но в отличие от базы их количество сокращено до двух, а сами формулировки немного усложнены. Довольно большой блок задач отведен программе 7–9 классов - 8 заданий, 7 из которых достаточно легкие и одна сложная задача по геометрии. Остальные задания поделены на материал, который должен быть усвоен в 10–11 классах и 2 задания олимпиадного уровня. Олимпиадные задания не входят в школьную программу и должны быть освоены самостоятельно либо на занятиях у репетитора.

Анализ материалов ЕГЭ за период с 2012 по 2017 показал, задачи на тему «Прогрессии» встречаются среди заданий повышенной сложности. Как правило, это последняя задача теста. Стоит отметить, что среди заданий базового уровня таких задач не всетречается.

- В 2012 году - задание С6;
- В 2013 году - задание С6;

- В 2014 году - задание С6;
- В 2016 году - задание №19, профильный уровень.

Рассмотри подробнее задания представленные в материалах ЕГЭ за 2012 – 2017 гг.

- 2012 год.

Основная волна, дополнительный вариант.

С6. Рассматриваются конечные непостоянные арифметические прогрессии, состоящие из натуральных чисел, которые не имеют простых делителей, отличных от 2 и 3.

а) Может ли в этой прогрессии быть три числа?

б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

Отлвет: а) Да; б) Нет.

- 2013 год.

Досрочный экзамен:

С6. Даны $\boldsymbol{n}$ различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(\boldsymbol{n \geq 3})$.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равна 18?

б) Каково наибольшее значение $\boldsymbol{n}$, если сумма всех данных чисел меньше 800?

в) Найдите все возможные значения $\boldsymbol{n}$, если сумма всех данных чисел равна 111.

Ответ: а) Да; б) 39; в) 3; 6.

Основная волна (резервный день):

С6. Каждое из чисел $a_1, a_2, \dots, a_{350}$ равно $1, 2, 3$ или 4.

Обозначим $S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{350}$, $S_{12} = a_{12} + a_{22} + \dots + a_{3502}$, $S_{13} = a_{13} + a_{23} + \dots + a_{3503}$, $S_{14} = a_{14} + a_{24} + \dots + a_{3504}$. Известно, что $S_1 = 569$.

а) Найдите S_4, если еще известно, что $S_2 = 1307$, $S_3 = 3953$.

б) Может ли $S_4 = 4857$?

в) Пусть $S_4 = 4785$. Найдите все значения, которые может принимать S_2.

Ответ: а) 13835; б) Нет; в) 1041 и 1053.

- 2014 год.

С6. Целое число S ясвляется суммой не менее трёх последовательных членов непостоянной арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел.

а) Может ли S равняться 8?

б) Может ли S равняться 1?

в) Найдите все значения, которые может принимать S.

Ответ: а) Да; б) Нет; в) Любые целые значения, кроче -1 и 1.

Вторая волна. Резерв:

С6. Из первых 22 натуральных чисел $1, 2, \dots, 22$ выбрали $2k$ различных чисел. Выбранные числа разбили на пары и посчитали суммы чисел в каждой паре. Оказалось, что все полученные суммы различны и не превосходят 27.

а) Может ли получиться так, что сумма всех $\boldsymbol{2k}$ выбранных чисел равна 170 и в каждой паре одно из чисел рано в три раза больше другого?

б) Может ли $\boldsymbol{k}$ быть равным 11?

в) Найдите наибольшее возможное значение числа $\boldsymbol{k}$.

Ответ: а) Нет; б) Нет; в) 10.

- 2016 год.

№19. Последовательность $\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_n} \quad (\boldsymbol{n \geq 3})$ состоит из натуральных чисел, причём каждый член последовательности (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического слседних (стоящих рядом с ним) членов.

а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из четырёх членов, сумма короых равна 50.

б) Может ли такая последовательность состоять из шести членов и содержать два одинаковых числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при $\boldsymbol{n = 10}$?

Ответ: а) Например, 1, 12, 17, 20; б) Да; в) 70.

№19. Последовательность $\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_6}$ состоит из неотрицательных однозначных чисел. Пусть $\boldsymbol{M_k}$ – среднее арифметическое всех членов этой последовательности, кроме n-го. Известно, что $\boldsymbol{M_1 = 1, M_2 = 2}$.

а) Приведитеипримеры такой последовательности, для которой $\boldsymbol{M_3 = 1{,}6}$.

б) Существует ли такая последовательность, для которой $\boldsymbol{M_3 = 3}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение $\boldsymbol{M_3}$.

Ответ: а) Например, 5, 0, 2, 1, 1, 1; б) Нет; в) 2,8.

Анализ материалов ЕГЭ за период с 2012 по 2017 года показал, что заданий по теме «Прогрессии» очень мало, но они повышеноого уровня сложности. Что свидетельствует о необходимости в старшей сколе дополнительного курса для подготовки к ЕГЭ по данной теме.

§2. Тестовые задания по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии».

В связи с введением ОГЭ и ЕГЭ все большее значение приобретает такая форма контроля и учета знаний учащихся, как тестирование. Систематический тестовый контроль формирует у учащихся мотивацию постоянно готовиться к урокам, не запускать пройденный материал, дисциплинирует их. В процессе тематической и итоговой проверки тесты дают возможность за сравнительно небольшой отрезок времени проверить усвоение большого объема учебного материала у всех учащихся группы, получить объективные данные для сравнения результатов учебной подготовки учащихся одной или нескольких групп.

На основе анализа школьных учебников и материалов ЕГЭ нами был разработан тест.

В данном тесте задания разбиты на секции по уровню сложности. Это позволяет использовать один и тот же тест для учащихся с разным уровнем подготовки. Данный тест можно использовать на уроках или факультативах, как в обычных классах, таки в классах с углублённым изучением математики.

Первая часть (часть А) состоит из двенадцати заданий базового уровня сложности по теме «Прогрессии». Содержатся задания, как с выбором ответа, так с открытой формы ответа.

Вторая часть (часть В) содержит пять более сложных заданий по данной теме. Задания исключительно открытой формы, где учащимся необходимо записать краткий ответ.

Третья часть (часть С) включает два задания повышенной сложности. Ответ подразумевает запись полного решения.

Тест по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии».

Часть А.

А1. Какое из нижеперечисленных всегда является членом арифметической прогрессии?

1) n^2+2 2) $5n+1$ 3)$\frac{n+2}{n+1}$ 4)$(n+1)^2$ 5) $\frac{1}{n}-n$

А2. В арифметической прогрессии $a_2=-1, a_5=8$. Найти a_{10}.

А3. Четвертый и седьмой члены арифметической прогрессии равны 3/2 и 3/16, соответственно. Чему равная сумма первых трёх членов этой прогрессии?

А4. В арифметической прогрессии $a_4+a_5+a_6=12$. Найти a_5.

А5. (b_n) – геометрическая прогрессия, в которой $\frac{b_7}{b_4}=8$ и $S_{10}=\frac{8}{41}$. Найти S_{20}?

А6. Вычислите 3-6+12-24+48-…+3072.

А7. Сумма первого 21 члена арифметической прогрессии равна 252. Чему равен 11й член прогрессии?

А8. (b_n) – геометрическая прогрессия. Если $\frac{b_3}{b_5}=2\frac{b_{10}}{b_{13}}$, то чему равен знаменатель этой прогрессии?

А9. В арифметической прогрессии (a_n) известно, что $\frac{S_{25}}{S_{17}}=\frac{125}{17}$.

Найти a_8.

A10. (b_n)- геометрическая прогрессия. Если $\frac{b_1+b_2+b_3}{b_1+b_2} = \frac{7}{6}$, то чему равен знаменатель этой прогрессии?

A11. В арифметической прогрессии известно, что $a_{21} - a_{12} = 18$ и $S_{11} = 11$. Чему равен седьмой член этой прогрессии?

A12. Шесть чисел образуют арифметическую прогрессию. Произведение наименьшего и наибольшего чисел равно 3. Чему равно произведение всех членов?

Часть В.

B1. При каких x числа $\frac{1-x}{2}$, $\frac{3x-1}{2}$, $3x$ образуют арифметическую прогрессию?

B2. Углы треугольника образуют арифметическую прогрессию. Если один из углов равен 75°, то чему равен наименьший из углов?

B3. В геометрической прогрессии (b_n) известно, что $\frac{S_{12}}{S_6} = \frac{65}{64}$. Чему равен третий член этой прогрессии, если первый член равен 20?

B4. В арифметической прогрессии (a_n) известно: $S_{11} = 77$, а $a_7 = 10$. Найти разность прогрессии.

B5. Сумма первых 25 членов арифметической прогрессии равна 350, а сумма первых 17 членов этой же прогрессии равна 204. Чему равен одиннадцатый член этой прогрессии?

Часть С.

C1. Сумма первых 10 членов арифметической прогрессии равна 23, а сумма следующих 10 членов 63. Чему равна сумма с 5 по 14 член этой прогрессии?

C2. (a_n) – арифметическая прогрессия. Если $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{23} = 96$ и $a_{14} = 10$, то чему равно $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{36}$?

Решение тестовых заданий.

При решении данного теста использовались следующие свойства и формулы:

	Арифметическая прогрессия	*Геометрическая прогрессия*
Определение	$\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + d}$	$\boldsymbol{b_{n+1} = b_n \cdot q, (q \neq 0)}$
Формула n-го члена	$\boldsymbol{a_n = a_1 + d(n-1)}$	$\boldsymbol{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$
Формула суммы n первых членов	$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n}$ $\boldsymbol{S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n}$	$\boldsymbol{S_n = \frac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}, (q \neq 1)}$ $\boldsymbol{S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{1 - q}, (q \neq 1)}$
Свойства	$\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}}$	$\boldsymbol{b_n = \sqrt{b_{n-k} \cdot b_{n+k}}}$

Часть А.

А1. Какое из нижеперечисленных всегда является членом арифметической прогрессии?

2) $n^2 + 2$ 2) $5n + 1$ 3) $\frac{n+2}{n+1}$ 4) $(n+1)^2$ 5) $\frac{1}{n} - n$

Решение:

$$a_{n+1} = a_n + d$$

$$5n + 1$$

$$n = 1, \quad a_2 = 5 + 1 = 6$$

$$n = 2, \quad a_3 = 10 + 1 = 11$$

$$n = 3, \quad a_4 = 15 + 1 = 16$$

$$d = a_{n+1} - a_n$$

$$d = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = 5$$

Ответ: 2

A2. В арифметической прогрессии $a_2 = -1$, $a_5 = 8$. Найти a_{10}.

Решение:

$$\boldsymbol{a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} a_4 \xrightarrow{+d} a_5}$$

$$\boldsymbol{a_5 \xrightarrow{+d} a_6 \xrightarrow{+d} a_7 \xrightarrow{+d} a_8 \xrightarrow{+d} a_9 \xrightarrow{+d} a_{10}}$$

$$a_5 = a_2 + 3d$$

$$8 = -1 + 3d$$

$$8 - (-1) = 3d$$

$$9 = 3d$$

$$d = \frac{9}{3}$$

$$d = 3$$

$$a_{10} = a_5 + 5d$$

$$a_{10} = 8 + 15$$

$$a_{10} = 23$$

Ответ: $a_{10} = 23$

А3. Четвертый и седьмой члены арифметической прогрессии равны 3/2 и 3/16, соответственно. Чему равная сумма первых трёх членов этой прогрессии?

Решение:

$$b_n = b_1 * q^{n-1}$$

$$\frac{3}{2} = b_1 * q^3, \qquad \frac{3}{16} = b_1 * q^6$$

$$b_1 = \frac{3}{2q^3}, \qquad b_1 = \frac{3}{16q^6}$$

$$\frac{3}{2q^3} = \frac{3}{16q^6}, \qquad q^3 = \frac{1}{8}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$b_1 = \frac{3*8}{2} = 12$$

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}, \qquad S_3 = \frac{12*(1-\frac{1}{8})}{1-\frac{1}{2}} = \frac{12*7*2}{8} = 21$$

*Ответ:*21

А4. В арифметической прогрессии $a_4 + a_5 + a_6 = 12$. Найти a_5.

Решение:

$$a_4 + a_5 + a_6 = 12$$

$$a_1 + 3d + a_1 + 4d + a_1 + 5d = 12$$

$$3a_1 + 12d = 12 \ \ |:3$$

$$a_1 = 4 - 4d$$

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$$a_5 = 4 - \cancel{4d} + \cancel{4d}$$

$$a_5 = 4$$

Ответ: $a_5 = 4$

А5. (b_n) – геометрическая прогрессия, в которой $\frac{b_7}{b_4} = 8$ и $S_{10} = \frac{8}{41}$. Найти S_{20}?

Решение:

$$S_{10} = \frac{b_1(1-q^{10})}{1-q}, \qquad S_{20} = \frac{b_1(1-q^{20})}{1-q}$$

$$b_7 = b_1 q^6, \qquad b_4 = b_1 q^3$$

$$\frac{b_1 q^6}{b_1 q^3} = 8, \qquad q^3 = 8, \qquad q = 2$$

$$\frac{8}{41} = \frac{b_1(1-q^{10})}{1-q}, -\frac{8}{41} = b_1(1-q^{10})$$

$$b_1 = -\frac{8}{41(1-q^{10})}$$

$$S_{20} = \frac{8 \cdot (-2) \cdot (1-q^{20})}{41 \cdot (1-q^{10}) \cdot (-2)} = \frac{8 \cdot (1-q^{20}) \cdot (1+q^{10})}{41 \cdot (1-q^{10}) \cdot (1+q^{10})} = \frac{8 \cdot (1+q^{10})}{41}$$
$$= 8 \cdot \frac{1-2^{10}}{41} = 200$$

Ответ: $S_{20} = 200$

А6. Вычислите 3-6+12-24+48-…+3072.

Решение:

$$(b_n) - ?$$

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-6}{2} = -2$$

$$q = \frac{b_3}{b_2} = \frac{12}{-6} = -2$$

$$q = \frac{b_4}{b_3} = \frac{-24}{12} = -2$$

-2 = -2 = -2, ч.т.д.

$$b_1 = 3, \quad b_2 = -6, \quad b_3 = 12, \quad b_4 = -24, \quad b_5 = 48$$

$$b \quad = \frac{3072}{-2} = -1536 = b_{10}$$

$$b^{``} = \frac{-1536}{-2} = 768 = b_9$$

$$b^{```} = \frac{768}{-2} = -384 = b_8$$

$$b^{````} = \frac{-384}{-2} = 192 = b_7$$

$$b_{11} = 3072, \qquad n = 11$$

$$S_{11} = \frac{b_1(1-q^{11})}{1-q} = \frac{3(1-(-2)^{11})}{1-(-2)} = 1 + 2^{11}$$

Ответ: $(1 + 2^{11})$

А7. Сумма первого 21 члена арифметической прогрессии равна 252. Чему равен 11й член прогрессии?

Решение:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \qquad a_{11} = a_1 + 10d$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

$$S_{21} = \frac{a_1 + a_{21}}{2} * 21, \qquad 252 = \frac{a_1 + a_1 + 20d}{2} * 21$$

$$\frac{252}{21} = a_1 + 10d$$

$$a_{11} = \frac{252}{2} = 12$$

Ответ:12

A8. (b_n) – геометрическая прогрессия. Если $\frac{b_3}{b_5} = 2\frac{b_{10}}{b_{13}}$, то чему равен знаменатель этой прогрессии?

Решение:

$$b_n = b_1 * q^{n-1}$$

$$b_3 = b_1 * q^2$$

$$b_5 = b_1 * q^4$$

$$b_{10} = b_1 * q^9$$

$$b_{13} = b_1 * q^{12}$$

$$b_5 = b_3 * q^2, \qquad b_{13} = b_{10} * q^3$$

$$\frac{b_3}{b_3 * q^2} = 2\frac{b_{10}}{b_{10} * q^3}$$

$$1 = 2\frac{1}{q}, \qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{q}$$

$$q = 2$$

Ответ:2

А9. В арифметической прогрессии (a_n) известно, что $\frac{S_{25}}{S_{17}} = \frac{125}{17}$.

Найти a_8.

Решение:

$$S_{25} = \frac{a_1 + a_{25}}{2} 25 = 125, \qquad S_{17} = \frac{a_1 + a_{17}}{2} 17 = 17$$

$$a_1 + a_{25} = \frac{125 \cdot 2}{25} = 10, \qquad a_1 + a_{17} = \frac{17 \cdot 2}{17} = 2$$

$$a_{25} = a_{17} + 8d$$

$$a_1 + a_{17} + 8d = 10, \qquad 2 + 8d = 10, \qquad d = 1$$

$$a_1 + a_{17} = 2a_1 + 16d = 2, \qquad a_1 = -7$$

$$a_8 = a_1 + 7d = -7 + 7 = 0$$

Ответ: $a_8 = 0$

А10. (b_n)- геометрическая прогрессия. Если $\frac{b_1+b_2+b_3}{b_1+b_2} = \frac{7}{6}$, то чему равен знаменатель этой прогрессии?

Решение:

$$\boldsymbol{q = \frac{b_{n+1}}{b_n}}$$

$$\boldsymbol{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$$

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 7, \\ b_1 + b_2 = 6. \end{cases}$$

$$6 + b_3 = 7, b_3 = 1$$

$$b_3 = b_1 \cdot q^2, 1 = b_1 \cdot \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2, 1 = \frac{b_2^2}{b_1}, \; b_1 = b_2^2$$

$$b_3 = b_2^2 \cdot q^2$$

$$q^2 = \frac{b_3}{b_2^2} = \frac{1}{b_2^2}$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{b_2^2}} = \frac{1}{b_2}$$

$$b_3 = b_1 \cdot \frac{1}{b_2}, 1 = \frac{b_1}{b_2}, b_2 = b_1$$

$$b_1 + b_1 + b_3 = 7$$

$$2b_1 + 1 = 7$$

$$2b_1 = 6$$

$$b_1 = 3 = b_2$$

$$q = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$

А11. В арифметической прогрессии известно, что $a_{21} - a_{12} = 18$ и $S_{11} = 11$. Чему равен седьмой член этой прогрессии?

Решение:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n}$$

$$S_{11} = \frac{\cancel{2}a_1 + \cancel{10}d}{\cancel{2}} \cdot 11$$

$$a_1 + 5d = 1$$

$$a_1 = 1 - 5d$$

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

$$a_7 = a_1 + 6d$$

$$a_7 = 1 - 5d + 6d$$

$$a_7 = 1 + d$$

$$a_{21} - a_{12} = 18$$

$$\cancel{a_{12}} + 9d - \cancel{a_{12}} = 18$$

$$9d = 18$$

$$d = 2$$

$$a_7 = 3$$

Ответ: $a_7 = 3$

А12. Шесть чисел образуют арифметическую прогрессию. Произведение наименьшего и наибольшего чисел равно 3. Чему равно произведение всех членов?

Решение:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$$

$$a_1 * a_6 = 3$$

$$a_1 * a_6 = a_2 * a_5 = a_3 * a_4$$

$$3*3*3 = 27$$

Ответ:27

Часть B.

B1. При каких x числа $\frac{1-x}{2}$, $\frac{3x-1}{2}$, $3x$ образуют арифметическую прогрессию?

Решение:

$$\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}}$$

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$$

$$a_1 = \frac{1-x}{2}$$

$$a_2 = \frac{3x-1}{2}$$

$$a_3 = 3x$$

$$a_2 = \frac{a_3 + a_1}{2}$$

$$\frac{6x-1-x}{4} = \frac{1+5x}{4}$$

$$\frac{1+5x}{4} = \frac{3x-1}{2}$$

$$1 + 5x = 6x - 2$$

$$x = 3$$

Ответ: 3

B2. Углы треугольника образуют арифметическую прогрессию. Если один из углов равен 75°, то чему равен наименьший из углов?

Решение:

$$S_3 = \frac{a_1 + a_3}{2} \cdot 3$$

$$\frac{180}{3} = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

$$60 \cdot 2 = a_1 + a_3$$

$$120 = 75 - a_3$$

$$a_3 = 120 - 75$$

$$a_3 = 45$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 180^\circ$$

$$75^\circ + a_2 + 45^\circ = 180^\circ$$

$$a_2 = 60^\circ$$

Ответ: 45°

B3. В геометрической прогрессии (b_n) известно, что $\frac{S_{12}}{S_6} = \frac{65}{64}$. Чему равен третий член этой прогрессии, если первый член равен 20?

Решение:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{b_n \cdot (1-q^n)}{1-q}},\ S_{12} = \frac{b_1 \cdot (1-q^{12})}{1-q},\ S_6 = \frac{b_1 \cdot (1-q^6)}{1-q}$$

$$\frac{S_{12}}{S_6} = \frac{65}{64},\ S_{12} = 65,\ S_6 = 64$$

$$S_6 = S_{12} - 1,\ S_{12} - S_6 = 1$$

$$\frac{b_1 \cdot (1-q^{12})}{1-q} - \frac{b_1 \cdot (1-q^{6})}{1-q} = 1$$

$$1 - q^{12} - 1 + q^6 = 1 - q$$

$$-q^6 + q = 1,\ q^5 = -1,\ q = -1$$

$$\boldsymbol{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}},\ b_3 = b_1 \cdot q^2$$

$$b_3 = 20 \cdot (-1)^2 = 20$$

Ответ: 20

В4. В арифметической прогрессии (a_n) известно: $S_{11} = 77,$ а $a_7 = 10$. Найти разность прогрессии.

Решение:

$$\boldsymbol{d = \frac{a_n - a_k}{n - k}}$$

$$\boldsymbol{S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}}$$

$$S_{11} = (a_1 + a_{11}) \cdot \frac{11}{2} = 77$$

$$a_1 + a_{11} = \frac{2 \cdot 77}{11} = 14$$

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (k - 1)d}$$

$$a_{11} = a_1 + 10d$$

$$a_1 + a_1 + 10d = 14$$

$$2a_1 + 10d = 14$$

$$a_1 + 5d = 7 = a_6$$

$$d = \frac{a_7 - a_6}{7 - 6} = \frac{10 - 6}{1} = 4$$

Ответ: d=4

В5. Сумма первых 25 членов арифметической прогрессии равна 350, а сумма первых 17 членов этой же прогрессии равна 204. Чему равен одиннадцатый член этой прогрессии?

Решение:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n}, \ S_{25} = \frac{a_1+a_{25}}{2} \cdot 25, \ S_{17} = \frac{a_1+a_{17}}{2} \cdot 17$$

$$\frac{350}{25} = \frac{a_1 + a_{17} + 8d}{2}, 28 = a_1 + a_{17} + 8d,$$

$$a_1 + a_{17} = 28 - 8d$$

$$\frac{204}{17} = \frac{a_1 + a_{17}}{2}$$

$$24 = 28 - 8d, 12 = 14 - 4d, -2 = -4d$$

$$d = \frac{1}{2}$$

$$350 = \frac{a_1 + a_1 + 24d}{2} \cdot 25, 28 = 2a_1 + 24d, 14 = a_1 + 12d$$

$$a_1 = 8$$

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}, a_{11} = a_1 + 10d$$

$$a_{11} = 8 + 10 \cdot \frac{1}{2} = 13$$

Ответ: 13

Часть С.

С1. Сумма первых 10 членов арифметической прогрессии равна 23, а сумма следующих 10 членов 63. Чему равна сумма с 5 по 14 член этой прогрессии?

Решение:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n}, \quad \boldsymbol{a_n = a_1 + d(n-1)},$$

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10, \quad a_{10} = a_1 + 9d$$

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 5(a_1 + a_{10}) = 5(2a_1 + 9d) = 10a_1 + 45d$$

$$23 = 10a_1 + 45d$$

$$=> \boldsymbol{a_1} = \frac{\mathbf{23 - 45}\boldsymbol{d}}{\mathbf{10}}$$

$$S_{20} - S_{10} = 63$$

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = 10(a_1 + a_{20}) = 10(2a_1 + 19d) = 20a_1 + 190d$$

$$(20a_1 + 190d) - (10a_1 + 45d) = 63$$

$$10a_1 + 145d = 63$$

$$=> \boldsymbol{a_1} = \frac{\mathbf{63 - 145}\boldsymbol{d}}{\mathbf{10}}$$

$$\frac{23 - 45d}{10} = \frac{63 - 145d}{10}, \qquad 40 = 100d$$

$$=> \boldsymbol{d} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}}, \qquad \boldsymbol{a_1} = \frac{23 - 45d}{10} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}}$$

$$S_{14} - S_5 = ?$$

$$S_{14} = \frac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14 = 7(2a_1 + 13d)$$

$$S_4 = \frac{a_1 + a_4}{2} \cdot 4 = 2(2a_1 + 3d)$$

$$S_{14} - S_5 = 14a_1 + 91d - 4a_1 - 6d = 10a_1 + 85d$$

$$S_{14} - S_5 = 10 \cdot \frac{5}{10} + 85 \cdot \frac{4}{10} = 5 + 34 = 39$$

Ответ: 39

C2. (a_n) – арифметическая прогрессия. Если $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{23} = 96$ и $a_{14} = 10$, то чему равно $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{36}$?

Решение:

$$a_{14} = a_1 + 13d$$

$$10 = a_1 + 13d \quad => \quad a_1 = 10 - 13d$$

$$\frac{96}{6} = 16 \ => \ a_1 + a_{23} = 16, a_3 + a_{21} = 16 \text{ и т. д.}$$

$$a_1 + a_{23} = 16$$

$$a_1 + (a_1 + 22d) = 16$$

$$2a_1 + 22d = 16$$

$$a_1 + 11d = 8 \ => \ a_{12} = 8$$

$$\begin{cases} 10 - a_{13} = d, \\ a_{13} - 8 = d. \end{cases}$$

$$10 - a_{13} = a_{13} - 8$$

$$2a_{13} = 18 \quad => \quad a_{13} = 9$$

$$9 - 1 = 1 \quad => \quad d = 1$$

$$a_1 = 10 - 13d = -3$$

$$(a_2 + a_{36}) \cdot 9 = a_2 + \cdots + a_{36}$$

$$a_2 + a_{36} = a_1 + d + a_1 + 35d = -3 + 1 - 3 + 35 = 30$$

$$a_2 + a_4 + \cdots + a_{36} = 30 \cdot 9 = 270$$

Ответ: 270

§3. Факультативный курс по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии»

Требования, которые предъявляются школьной программой по математике расчитаны на так называемого «среднего» ученика. Однако уже с начальных классов происходит расслоение ученического коллектива: на тех, кто легко и с интересом усваивает программный материал по математике, на тех, кто добивается лишь удовлетроворительных результатов при изучении, и тех, кому с легкость даётся успешное изучение математики.

Всё это приводит к необходимости индивидуального обучения математике, одной из форм которой является внеклассная работа.

Внеклассная работа – это необязатеньные систематические занятия учащихся с учителем во внеурочное время.

Факультативные занятия являются один из видов внеклассной работы по математике. Главной ***целью*** которых является углубление и расширение знаний, в частности, по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии».

Какими бы медомами и в какой бы форме не проводились факультативные занятия по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии», они должны строиться так, чтобы быть интересными и занимательными. Необходимо использовать естественну любознательность школьника для формирования устойчивого интереса к предмету. Известный французкий физик Луи де Броль писал, что современная наука – «дочь удивления и любопытства, которые всегда являются её скрытыми движущими силами, обеспечивающими её непрерывное развитие».

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Предлагаемый факультатив предназначен для тех, кто готовит учащихся к школьным выпускным экзаменам и к конкурсным экзаменам по математике при поступлении в высшие учебные заведения. Вопросы данной темы вызывают затруднения на вступительных экзаменах. Как показал анализ школьной литературы и материалов ЕГЭ - теме «Прогрессии» не достаточно уделять внимание только в 9 классе. Поэтому, стоит обратить дополнительное внимание на представленную тему.

Данный факультатив направлен на повторение и расширение математических знаний ученика, учитывая уровень его подготовки. Программа факультативного занятия по математике составлена так, что прогрессии изучаются синхронно с основным курсом алгебны в средней общеобразовательной школе.

Курс по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия» рассчитан на 9 часов для учеников 10-11 классов, однако, его программа может корректироваться. Учитывая особенности школы, класса, уровня подготовки учащихся. Учитель может изменять последовательность изучения материала, уровень его сложности, самостоятельно распределять часы и выбирать конкретные формы знаний.

Цель курса: расширение и углубление знаний учащихся по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии», подготовка к ЕГЭ по данной теме.

Задачи:

1. Рассмотреть и обобщить теоретический материал по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии»;

2. Сформировать представления о методах и способах решения заданий, содержащих арифметические и геометрические прогрессии.

3. Сформировать навыки решения практических задач по теме «Прогрессии».

В ходе обучения отводится значительное место практическим и самостоятельным работам учащихся.

Текущий контроль осуществляется в разных формах: устная, письменная, фронтальная.

Итоговый контроль – контрольная работа.

В результате изучения факультативного курса учащийся должен:

Знать:

- Основные свойства, формулы и понятия арифметической и геометрической прогрессий;
- Методы и способы решения заданий, содержащих прогрессии.

Уметь:

- Применять определения и свойства прогрессий;
- Применять методы и способы решения заданий, содержащих арифметические и геометрические прогрессии на практике.

Владеть:

- Основной теорией по теме «Прогрессии»;
- Методикой и способами решения заданий, содержащих арифметические и геометрические прогрессии на практике.

Таблица 3.

Тематическое планирование занятий.

П/п	Тема занятия	Количество часов
1	Сравнение арифметической и геометрической прогрессий.	1

2	Формула суммы n-первых членов арифметической прогрессии. Вычисление конечных сумм. Решение задач с использованием формул алгебраической прогрессии.	2
3	Формула суммы n-первых членов геометрической прогрессии. Вычисление конечных сумм. Решение задач с использованием формул геометрической прогрессии.	2
4	Решение задач с практическим содержанием на прогрессии. Решение нестандартных задач на прогрессии.	2
5	Контрольная работа.	2

Содержание программы факультативного курса

1. Сравнение арифметической и геометрической прогрессий (1 час).

Определения арифметической и геометрической прогрессий, основные свойства и формулы с выводом.

Практическая работа.

2. Формула суммы n-первых членов арифметической прогрессии.

Два варианта формулы. Вычисление конечных сумм. Решение задач с использованием формул алгебраической прогрессии.

Практическая работа.

3. Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии.

Вычисление конечных сумм. Решение задач с использованием формул геометрической прогрессии.

Практическая работа.

4. Решение задач с практическим содержанием на прогрессии. Решение нестандартных задач на прогрессии.
5. Контрольная работа (2 часа).

План – конспект первого занятия по теме «Сравнение арифметической и геометрической прогрессий» представлен в приложении.

§4. Апробация факультативных занятий

Апробация факультативных занятий проводилась в период педагогической практики в МОУ «Лицей № 35 г. Челябинска» в 9 классе. Было разработано и проведено одно занятие (1 час) на тему: «Сравнение арифметической и геометрической прогрессий».

Анализ результатов

Количество учащихся в классе: 20.

Количество присутствующих на занятии: 20.

Самостоятельную работу написали на:

- «отлично» - 5 человек.
- «хорошо» - 8 человек.
- «удовлетворительно» - 7 человек.
- «неудовлетворительно» - 0 человек.

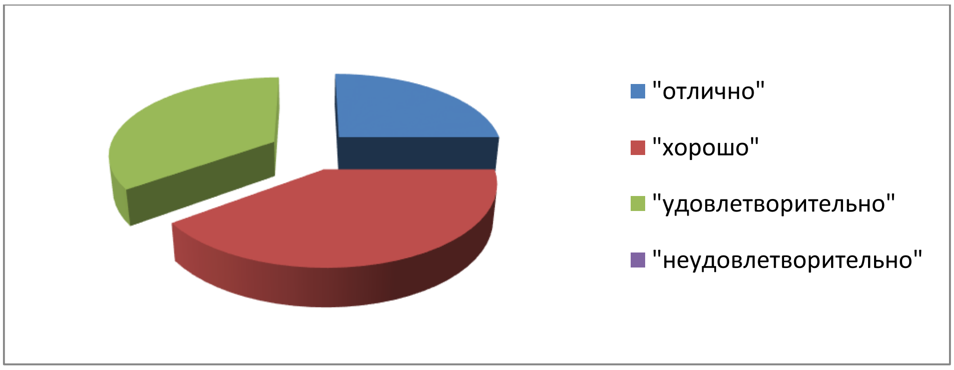


Рис.1 Результат выполнения самостоятельной работы.

Результат работы учащихся определяется не тем, что мы пытались им дать, а тем, что они сами взяли в процессе обучения. Об этом свидетельствуют высокий уровень самостоятельности, самодеятельности учащихся на занятии; наблюдались навыки выполнения работы через организацию коллективной деятельности, отмечалось дружелюбие в отношении друг к другу, взаимопомощь, поддержка; учащиеся продемонстрировали умение применять полученные теоретические знания на практике.

Занятие показало, что учащиеся работали осмысленно, не просто зазубрив, выучив материал, что, конечно же, не позволило бы достичь поставленных целей. Это доказывается результатами самостоятельной работы – большая часть класса написала на 4 и 5, неудовлетворительных оценок небыло.

Выводы по главе 2.

Проводя анализ контрольно - измерительных материалов ЕГЭ за последние пять лет, мы выяснили, что заданий по теме «Прогрессии» в ЕГЭ встречается очень мало, но они повышенного уровня сложности. Что свидетельствует о необходимости в старшей школе дополнительного курса для подготовки к ЕГЭ по данной теме.

Поэтому, для качественной подготовки учащихся нами самостоятельно был разработан тест по типу ЕГЭ. В тесте мы разбили задания по уровню сложности. Что позволяет использовать один и тот же тест для учащихся с разным уровнем подготовки, т.е. делает его эффективнее.

Также нами был разработан факультативный курс по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии» для подготовки к ЕГЭ, который направлен на расширение и углубление знаний учащихся по теме. Одно занятие из этого курса была опробовано во время педагогической практики в МОУ «Лицей № 35 г. Челябинска» в 9 классе

Заключение

«Арифметическая и геометрическая прогрессии» - одна из тем школьного курса математики. Учащиеся испытывают сложности при изучении материала, содержащего прогрессии. Связанно это, прежде всего, с тем, что в школьной программе недостаточно времени уделяется изучению темы. Данная выпускная квалификациооная работа направлена на повтороение, обобщение, углубление и закрепление изученного материала по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии».

В данной работе рассмотрены основные теоретические основы прогрессий: даны определения основных понятий, рассмотрены свойства прогрессий, суммы первых n −членов арифметической и геометрической прогрессий.

Проведённый нами анализ материалов ЕГЭ по метематике за период с 2012 по 2017 года, показал, что заданий по теме «Прогрессии» в ЕГЭ встречается очень мало, но они повышенного уровня сложности. Что свидетельствует о необходимости в старшей школе дополнительного курса по данной теме.

Поэтому, для качественной подготовки учащихся нами самостоятельно был разработан тест по типу ЕГЭ. В тесте мы разбили задания по уровню сложности. Что позволяет использовать один и тот же тест для учащихся с разным уровнем подготовки, т.е. делает его эффективнее.

Также нами был разработан факультативный курс по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии» для подготовки к ЕГЭ, который направлен на расширение и углубление знаний учащихся по теме. Одно занятие из этого курса было опробовано во время педагогической практики в МОУ «Лицей № 35 г. Челябинска» в 9 классе.

Практическая значимость данной работы определяется тем, что в ней разработаны и проверены учебные материалы для преподавания темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии». Подобрана система задач для указанной темы с полным решением.

Таким образом, задачи выпускной квалификационной работы выполнены. Цель – изучить особенности изложения темы «Прогрессии» в школьном курсе математики и разработать для учащихся тест по типу ЕГЭ по данной теме достигнута.

Данная работа может быть использована как педагогами, так и учащимися при подготовке к написанию ЕГЭ по математике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бохан К.А., Егорова И.А., Лащенов К.В. – курс математического анализа. Том 1. – М: «Просвещение», 1965.
2. Энциклопедический словарь юного математика /Сост. А.П.Савин.- М:

Педагогика, 1989.

3. Пичурин Л.Ф. За страницами учебника алгебры. Книга для учащихся 7-9

классов средней школы - М: Просвещение, 1990.

4. Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений. Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – 17-е изд., доп. – М: Просвещение, 2012.
5. Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений. Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др.; под ред. Г.В. Дорофеева; Рос. акад. наук., Рос. акад. образования, из-во «Просвещение». – 5-е изд. – М: Просвещение, 2010.
6. Мордкович, А. Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – М. : Мнемозина, 2013.
7. Педагогика: Учебное пособие для студентов педагогических вузов и педагогических колледжей / Под ред. П.И. Пидкасистого. - М: Педагогическое общество России, 1998. - 640 с.
8. Харламов И. Ф. Педагогика: Учебник/ И. Ф. Харламов. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Гардарики, 1999. – 520 с.
9. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Суворова С.Б. Алгебра - 9. Учебник для 9 кл. сред. шк. - М.: Просвещение, 2002. - 347 с.
10. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Короткова Л.М. Дидактические материалы по алгебре для 9 кл. - 7-е изд. - М.: Просвещение, 2002. - 160 с.

11. Рекомендуемое тематическое планирование // Математика. Еженедельное учебно-методическое приложение к газете Первое сентября. 2007. № 4. - 30, 31 с.
12. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач. Учебное пособие для 10 кл. сред. шк. - М.: Просвещение, 1989. - 352 с.

Интернет – источники:

1. Энциклопедия Кругосвет – универсальная научно-популярная онлайн-энциклопедия.
   [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.krugosvet.ru/enc/nauka_i_tehnika/matematika/CHISLOVAYA_POSLEDOVATELNOST.html
2. Bitclass - курс подготовки к ЕГЭ, 2014 год
   [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://bitclass.ru/math/theory.html
3. Досрочный ЕГЭ по математике 2016 (профильный уровень)
   [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.ctege.info/ege-po-matematike/dosrochnyiy-ege-po-matematike-2016-profilnyiy-uroven.html
4. Решение задач типа С6 (19) ЕГЭ, Белогрудов А. Н.
   [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.ugatu.ac.ru/assets/files/documents/admission/training/lections/zad_8_11_2015.pdf
5. Активизация познавательной деятельности учащихся при изучении прогрессий в средней общеобразовательной школе. Глава 2.
   [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.studmed.ru/docs/document24587?view=19

ПРИЛОЖЕНИЕ

Урок-лекция **"Сравнение арифметической и геометрической прогрессий"**

Цели урока:

1. Образовательные – ввести определения арифметической, геометрической прогрессий; вывести формулы *n*-го члена, суммы *n* первых членов, суммы бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$; познакомить учащихся с характеристическим свойством, которым обладают члены прогрессий; выработать общие рекомендации по выполнению заданий, содержащих данные прогрессии.

2. Развивающие – продолжить дальнейшую работу по выработке умения сравнивать математические понятия, находить сходства и различия, умения наблюдать, подмечать закономерности, проводить рассуждения по аналогии; сформировать умение строить и интерпретировать математическую модель некоторой реальной ситуации.

3. Воспитательные – содействовать воспитанию интереса к математике и ее приложениям, активности, умению общаться, аргументировано отстаивать свои взгляды.

Оборудование: рисунки к задачам, сравнительная таблица "Виды последовательности", портреты Гаусса, Л.Н. Толстого.

Тип урока: лекция по введению и самостоятельному приобретению новых знаний.

Метод обучения: учебно-познавательная работа учащихся по самостоятельному приобретению новых знаний; работа по обобщающей схеме, самопроверка, взаимопроверка.

Эпиграф к уроку: "*Сравнение есть основа всякого понимания и всякого мышления, чтобы какой-нибудь предмет был понят ясно, отличайте его от самых сходных с ним предметов и находите сходство с самыми отдельными* *от него предметами, тогда только вы выясните себе все существенные признаки, а это значит – понять предмет*". (К.Д. Ушинский)

Ход урока:

1. Подготовительная работа.

Формулирование определения умения сравнивать: "Сравнение – сопоставление объектов с целью выявления черт сходства и черт различия между ними. Суждения, выражающие результат сравнения, служат цели раскрытия содержания понятий сравниваемых объектов". (Философский словарь)

1. Выделение объектов исследования.

Сравнить между собой последовательности:

1) 2, 7, 9, 12, …;

2) 3, 5, 7, 9, 11, …;

3) 4, 8, 16, 32, …;

4) –17, 25, 36, 2, 18, …;

5) –1, 2, –4, 8, –16, …;

6) 10, 9, 8, 7, 6, …;

7) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots;$

8) $6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots;$

9) 3, 3, 3, …;

10) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots;$

11) 1, –3, 9, –27, 81, …;

12) –1, –1, –1, … .

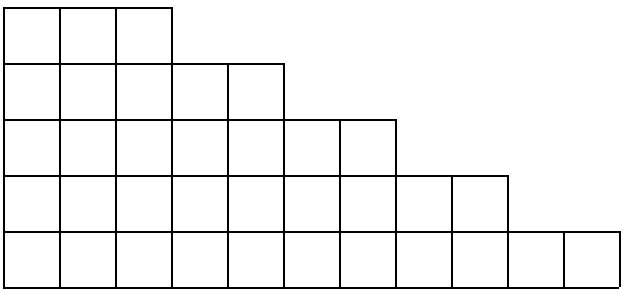
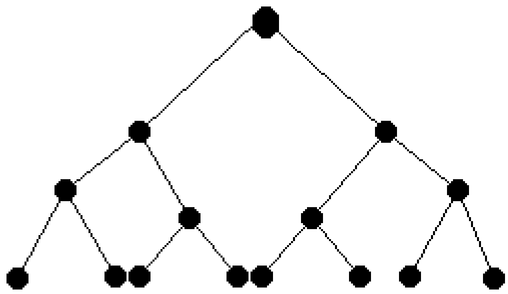
а) Опишите закономерность, с помощью которой вы это сделали?

б) Объедините последовательности в группы.

Вывод: Сравнивая между собой эти последовательности, учащиеся обнаружат среди них такие, которые образованы при помощи одного и того же общего для всех свойства, а затем установят способ их конструирования.

<u>2. Обнаружение свойств изучаемых объектов, которые являются основанием для определения.</u>

На доску слева проецируется задача, приводящая к арифметической, а справа – к геометрической прогрессии.

Задача Рабочий выложил плитку следующим образом: в первом ряду - 3 плитки, во втором - 5 плиток и т.д., увеличивая каждый ряд на 2 плитки. Сколько плиток понадобиться для седьмого ряда?  *Рис. 1*	**Задача** В благоприятных условиях бактерии размножаются так, что на протяжении одной минуты одна из них делится на две. Указать количество бактерий, рожденных одной бактерией за 7 минут.  *Рис. 2*

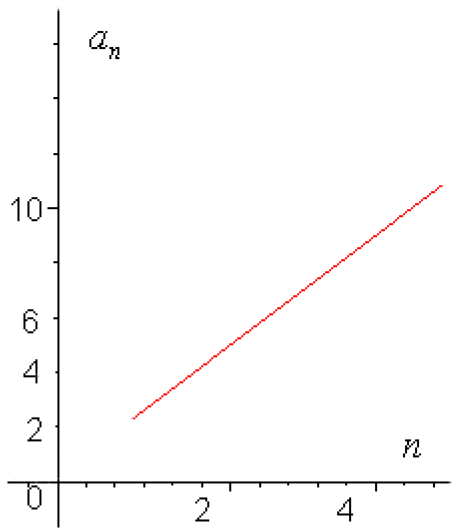
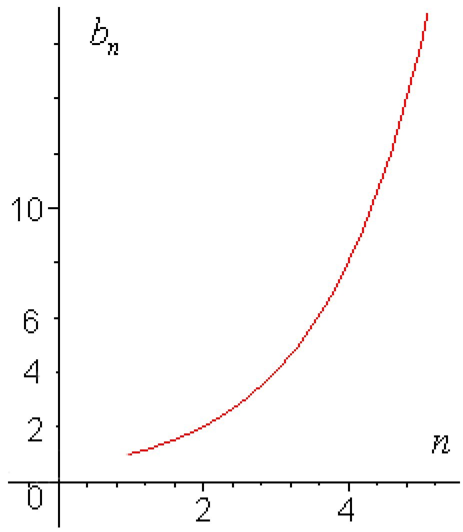
Вопросы к задачам:

1. Записать последовательность в соответствии с условием задачи.
2. Указать последующий, предыдущий члены. Чем они отличаются?
3. Найти разность между предыдущим и последующими членами в первой задаче и частное от деления последующего члена на предыдущий во второй задаче.
4. Дать определение арифметической (геометрической) прогрессии.

2. Учебно-познавательная работа учащихся по самостоятельному приобретению новых знаний.

"Прогрессия" – латинское слово, означающее "движение вперед", было введено римским автором Боэцием (VI век) и понималось в более широком смысле, как бесконечная числовая последовательность. Предлагается разделить страницу тетради на две части и слева написать "Арифметическая прогрессия", а справа "Геометрическая прогрессия". Всю работу школьники проделывают на доске и в тетрадях одновременно для обеих прогрессий.

Арифметическая прогрессия	**Геометрическая прогрессия**
Определение	
3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, … 5 = 3 + 2; 7 = 5 + 2; … Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом (a_n). $\div a_1; a_2; a_3; \ldots$ $a_{n+1} = a_n + d$ d – разность прогрессии, где $d = a_{n+1} - a_n$	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, … 2 = 1·2; 4 = 2 · 2; 8 = 4 · 2; ... Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число (b_n). $\div\div\ b_1; b_2; b_3; \ldots$ $b_{n+1} = b_n \cdot q$ q – знаменатель прогрессии, где $q = \frac{b_{n+1}}{b_n},\ q \neq 0$
(В задании № 1 указать разность (знаменатель) прогрессии, дать понятие возрастающей или убывающей прогрессии)	
Задание прогрессии	

a_1 и d а) $a_1 = 3;\ d=2$ $3;\ 5;\ 7;\ 9;\ \ldots$ б) a_{20} - ? $(a_{20}=41)$	b_1 и q а) $b_1 = 1;\ q = 2$ $1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16;\ \ldots$ б) b_{10} - ? $(b_{10} = 512)$
Формула *n*-ого члена	
a_1 $a_2 = a_1 + d$ $a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$ $a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$ … $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d}$ Задача: $a_{18} = 3 + 17 \cdot 2 = 37$ $a_{100} = 3 + 99 \cdot 2 = 201$	b_1 $b_2 = b_1 \cdot q$ $b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q^2$ $b_4 = b_1 \cdot q^3$ … $\boldsymbol{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$ Задача: $b_{15} = 1 \cdot 2^{14} = 16384$ $b_{21} = 1 \cdot 2^{20} = 1048576$
Работа по выводу формулы *n* – ого члена проводится самостоятельно по вариантам, затем делаем вывод и записываем формулы $a_n(b_n)$. Далее предложить учащимся сравнить прогрессии, изобразив графически, зависимость *n* – ого члена от порядкового номера, используя данные приведенных выше задач.	
 *Рис. 3* Разность двух рядом стоящих членов остается одно и та же, вследствие чего члены прогрессии возрастают (убывают) равномерно. Отсюда ясно, что любая арифметическая прогрессия может быть задана формулой вида	 *Рис.4* Разность двух соседних членов увеличивается по мере удаления их от начала ряда; вследствие этого, члены такой прогрессии, по мере их удаления от начала ряда, возрастают все быстрее и быстрее, что наглядно изображено на *рис. 4*. Данная зависимость представляет

<table>
<tr><td>$a_n = kn + b$, где k, b – некоторые числа (т.е. $a_n = a_1 + dn - d;\ \ a_n = dn + (a_1 - d)$).

Верно и обратное: учебник стр. 85.</td><td>собой показательную функцию, с которой учащиеся познакомятся в старших классах.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Характеристическое свойство

Вопросы и задания к учащимся:

1) Найти среднее арифметическое (геометрическое) чисел 2 и 8. Записать найденное число с данными в порядке возрастания. Образуют ли эти числа арифметическую (геометрическую) прогрессию?</td></tr>
<tr><td>$\frac{2+8}{2} = 5;\ 2;\ 5;\ 8\ ;$</td><td>$\sqrt{2 \cdot 8} = 4;\ 2;\ 4;\ 8\ ;$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2) Справедлива ли эта зависимость для трех последовательных членов рассматриваемых последовательностей?</td></tr>
<tr><td>$3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11;\ldots;$
$\frac{3+7}{2} = 5; \frac{5+9}{2} = 7;\ldots;$</td><td>$1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16;\ldots;$
$\sqrt{1 \cdot 4} = 2; \sqrt{2 \cdot 8} = 4;\ldots;$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3) Доказать, что для членов прогрессий справедлива закономерность:</td></tr>
<tr><td>$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2};$</td><td>$b^2_{n+1} = b_n \cdot b_{n+2};$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Доказательство провести по вариантам и обменяться мнениями:</td></tr>
<tr><td>$a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1};$
$2a_{n+1} = a_{n+2} + a_n;$
$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}.$</td><td>$b_{n+1} \div b_n = b_{n+2} \div b_{n+1};$
$b^2_{n+1} = b_n \cdot b_{n+2}.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Следствие</td></tr>
<tr><td>Из определения разности следует, что
$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots,$
т.е. сумма членов, равноудаленных от концов прогрессии, есть величина постоянная.</td><td>Из определения знаменателя следует, что
$в_1 \cdot в_n = в_2 \cdot в_{n-1} = \ldots,$
т.е. произведение членов, равноотстоящих от концов прогрессии, есть величина</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>постоянная.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Формула суммы п первых членов
$S_n - сумма$</td></tr>
<tr><td>Вернемся задаче: Сколько потребуется рабочему плиток, чтобы выложить 5 рядов? Рассуждение поясним на рис. 5.

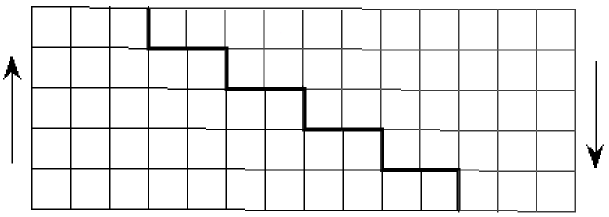



Рис. 5
Сумму 3+5+7+9+11 можно изобразить так, как показано на рис. 5 и из двух таких фигурок составить прямоугольник , тогда рабочему потребуется (5 ·14) ÷ 2 плиток.
Продолжим рассуждения:
S = 3 + 5 + 7 + 9 + 11.
Напишем в обратном порядке:
S = 11 + 9 + 7 + 5 + 3.
И сложим эти равенства:
S = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + + 11 + 9 + 7 + 5 + 3.
В каждом столбце стоят 2 числа, дающие в сумме 14. Поэтому:
$2S = 5 \cdot 14,\ S = \frac{5 \cdot 14}{2} = 35.$
Вывод: в общем случае будет n столбцов с одинаковой суммой, равной сумме первого и последнего членов.
Поэтому
$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$

Задача: найти сумму первых ста натуральных чисел 1 + 2 + 3 + … + 98 + 99 + 100? Используя исторический материал, рассказать ребятам историю о знаменитом немецком математике К. Гауссе (1777-1855 г.г.), который</td><td>Учащимся предлагается задача, при решении которой возникает необходимость в выводе новой формулы. "Индийский царь Шерам призвал к себе изобретателя шахмат, ученого Сету, и предложил, чтобы он сам выбрал себе награду за создание интересной и мудрой игры. Царя изумила скромность просьбы, услышанной им от изобретателя: тот попросил выдать ему за первую клетку шахматной доски одно пшеничное зерно, за вторую - два, за третью - еще в два раза больше и т.д. Сколько зерен должен получить изобретатель шахмат?"
Возникает необходимость найти S_{64}, где
$a_1=1,\ q=2,\ n=64.$
Имеем:
$S_{64}=1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{62}+2^{63}.$
Умножим обе части равенства на знаменатель $q = 2$; получим
$2S=2+2^2+2^3+2^4\ldots+2^{63}+2^{64}.$
Вычтем почленно из второго равенства первое и проведем упрощения:
$2S-S=(2+2^2+2^3+2^4\ldots+2^{63}+2^{64})-$
$-(1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{62}+2^{63}),\ S_{64}=2^{64}-1$

Эта задача привлекла внимание Л.Н. Толстого. Приведем часть его расчета (кодоскоп):
1 кл. - 1
2 кл. - 2
3 кл. - 4
…
35 кл. - 17 179 869 184</td></tr>
</table>

обнаружил выдающиеся способности к математике. Учитель предложил сложить все натуральные числа от 1 до 100. Маленький Гаусс решил эту задачу за минуту. Сообразив, что 1 + 100, 2 + 99 и т.д. равны, он умножил 101 · 50 = 5050. Иначе говоря, он заметил закономерность, которая присуща арифметической прогрессии. Заметим, что если заданы первый член и разность, то удобно пользоваться формулой суммы, представленной в другом виде. Так как $a_n = a_1 + (n-1)d$, **то** $S_n = \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, **т.е.** $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.	… 64 кл. - 9 223 372 036 854 775 808 Общее число зерен: 18 446 744 073 709 551 615. Масса такого числа зерен больше триллиона тонн. Это заведомо превосходит количество пшеницы, собранной человечеством до настоящего времени. Воспользуемся тем же приемом, с помощью которого была вычислена сумма S_{64} (Предложить учащимся самостоятельно получить формулу суммы *n* первых членов). $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$, **если** $q \neq 1$, $S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}$, **если** $q \neq 1$. **Если** $q=1$, **то** $b_1=b_2=b_3=\ldots$, **то** $S_n = n \cdot b_1$.

Сумма бесконечной геометрической прогрессии при |q| < 1

Особого внимания заслуживает бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, где |q| < 1, и формула суммы членов такой последовательности. При сознательном и глубоком изучении математики у учащихся может возникнуть вопрос: каким образом сумма бесконечного числа слагаемых может быть конечным, вполне определенным числом?
Это лучше всего объяснить на примерах. Один из "парадоксов Зенона" (древнегреческого философа) состоит в следующем (в изложении Льва Толстого в "Войне и мире", т. 3, ч. 3).
… Ахиллес никогда не догонит впереди идущую черепаху, несмотря на то, что Ахиллес идет в десять раз скорее черепахи: как только Ахиллес пройдет пространство, отделяющее его от черепахи, черепаха пройдет впереди его одну десятую этого пространства; Ахиллес пройдет эту десятую, черепаха пройдет одну сотую и т.д. до бесконечности. Задача представлялась древним

неразрешимой.

Отрезки, последовательно пробегаемые Ахиллесом, составляют геометрическую прогрессию

$$1,\frac{1}{10},\frac{1}{100},\frac{1}{1000},\ldots$$

со знаменателем 0,1. (за единицу принимаем начальное расстояние между Ахиллесом и черепахой). Общее расстояние, пройденное Ахиллесом до встречи с черепахой, есть "сумма бесконечного числа членов":

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+...$$

Способ 1: Обозначим сумму через S: $S=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+...$

Тогда $10S=10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+...=10+S$, тогда $S=\frac{10}{9}=1\frac{1}{9}$.

Способ 2: Будем добавлять слагаемые по одному:

$$1+\frac{1}{10}=1{,}1$$

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}=1{,}11$$

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}=1{,}111$$

В итоге получится 1,1111…, что равно $1\frac{1}{9}$ (так как $\frac{1}{9}=1{,}111...$).

Способ 3: По формуле суммы геометрической прогрессии: $1+q+q^2+q^3+...+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}$.

В нашем случае $q = \frac{1}{10}$, а n бесконечно. Тогда q^n бесконечно мало

(ведь с ростом n число $\left(\frac{1}{10}\right)^n$ быстро убывает) и им можно пренебречь.

Получаем формулу: $1 + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{q-1}$.

(изменили знаки в числителе и знаменателе).

Вспомнив, что $q = \frac{1}{10}$, получим ответ $\frac{1}{1{,}9} = \frac{10}{9}$.

Способ 4: Здравый смысл подсказывает, что Ахиллес догонит черепаху, пробежав некоторое расстояние S. За это время черепаха, скорость которой в 10 раз меньше, проползает расстояние S/10 и расстояние между ними уменьшится на

$S - \frac{S}{10} = \frac{9}{10}S$.

В начале оно равнялось 1, а в момент встречи стало нулевым, так что $\frac{9}{10}S = 1$ и $S = \frac{10}{9}$.

Затем предложить учащимся ознакомиться с выводом формулы суммы бесконечной геометрической прогрессии при |q| < 1.

$S = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots = \frac{b_1}{1-q}$

и рассмотреть в учебнике задания на применение данной формулы.

3. Подведение итогов урока

Предложить учащимся ответить на вопросы:

1) по какому плану сравнивали изучаемые понятия "Арифметическая и геометрическая прогрессии";

2) укажите их общие существенные признаки;
3) определите существенные различия между ними;
4) сделайте вывод, вытекающий из сравнения.

Результаты можно оформить в виде таблицы "Вид последовательности".

Арифметическая прогрессия	**Геометрическая прогрессия**
Определение	
$\div (a_n);\qquad a_{n+1}=a_n+d$ d – разность.	∺ $(b_n);\qquad b_{n+1}=b_n\cdot q$ q – знаменатель.
Формула *n*-ого члена	
$a_n=a_1+(n-1)\cdot d$	$b_n=b_1\cdot q^{n-1}$
Характеристическое свойство	
$a_{n+1}=\dfrac{a_{n-1}+a_{n+2}}{2},\ n>1$	$b_{n+1}^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1},\ n>1$
Формула суммы n первых членов	
$S_n=\dfrac{(a_1+a_n)}{2}\cdot n$ $S_n=\dfrac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$	$S_n=\dfrac{b_n\cdot q-b_1}{q-1}$, **если** $q\neq 1$. $S_n=\dfrac{b_1(q^n-1)}{q-1}$, **если** $q\neq 1$ $S_n=n\cdot b_1$, **если** $q=1$. Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $\lvert q\rvert < 1$ $S=\dfrac{b_1}{1-q}$