МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика обучения тождественным преобразованиям в теме «Степени и корни»

Выпускная квалификационная работа

по направлению 44.03.05 Педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата

«Математика.Экономика»

Выполнил (а):
Студент (ка) группы 511
Овчинникова Алёна Сергеевна

Проверка на объем заимствований:
74 % авторского текста

Работа рекомендована к защите
рекомендована/не рекомендована

« 6 » апреля 20 17г.
зав. кафедрой МиМОМ
(название кафедры)
_________ ФИО

Научный руководитель:
старший преподаватель кафедры математики и МОМ,
Мартынова Елена Владимировна

Челябинск

2017 год

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика обучения тождественным преобразованиям в теме «Степени и корни»

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05 Педагогическое образование
Направленность программы бакалавриата

«Математика.Экономика»

Выполнил (а):
Студент (ка) группы 511
Овчинникова Алёна Сергеевна

Научный руководитель:
старший преподаватель кафедры математики и МОМ,
Мартынова Елена Владимировна

Проверка на объем заимствований:
___________% авторского текста

Работа _______________ к защите
рекомендована/не рекомендована

« ___ » ___________ 20__ г.
зав. кафедрой _______________
(название кафедры)
_____________ ФИО

Челябинск
2017 год

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Изучение различных преобразований выражений и формул занимает значительную часть учебного времени в курсе школьной математики. Простейшие преобразования, опирающиеся на свойства арифметических операций, производятся уже в начальной школе и в IV–V классах. Но основную нагрузку по формированию умений и навыков выполнения преобразований несет на себе курс школьной алгебры. Это связано как с резким увеличением числа и разнообразия совершаемых преобразований, так и с усложнением деятельности по их обоснованию и выяснению условий применимости.

Обеспечение высокой культуры вычислений и тождественных преобразований представляет важную проблему обучения математике. Однако эта проблема решается еще далеко не удовлетворительно. Доказательство этому – статистические данные органов народного образования, в которых ежегодно констатируются ошибки и нерациональные приемы вычислений и преобразований, допускаемые учащимися различных классов при выполнении контрольных работ. Это подтверждается и отзывами высших учебных заведений о качестве математических знаний и навыков абитуриентов. Нельзя не согласиться с выводами органов народного образования и вузов о том, что недостаточно высокий уровень культуры вычислений и тождественных преобразований в средней школе является следствием формализма в знаниях учащихся, отрыва теории от практики.

Объект: процесс обучения математике в школе.

Предмет: тождественные преобразования в теме «Степени и корни».

Цель данного исследования: изучить особенности изложения темы «Степени и корни» в школьном курсе математики, выделить основные ошибки при рассмотрении данной темы, рекомендации по их устранению и разработать факультативные курсы по данной теме.

Гипотеза: изучение темы «Степени и корни» будет более эффективным, если:

1) При формировании понятий степень и корень не допускать их формального усвоения;
2) Добиваться понимания и знания основных свойств;
3) Обращать внимание учащихся на частые ошибки;
4) Рассматривать различные типы заданий по данной теме.

Исходя из цели и гипотезы исследования, можно выделить следующие задачи:

1) Проанализировать современные учебники школьного курса математики и материалы ОГЭ и ЕГЭ с целью изучения данного вопроса;
2) Изучить методическую литературу по математике для выделения основных принципов и приемов подачи материала, для улучшения усвоения учащимися;
3) Выделить типичные ошибки учащихся и дать рекомендации по их устранению;
4) Разработать два факультативных курса по теме «Степени и корни» для 8-9, 10-11 классов.

В квалификационной работе рассмотрена методика обучения тождественным преобразованиям в теме «Степени и корни».

Первая глава описывает тождественные преобразования в школьном курсе математики, а именно основы построения теории степеней и корней.

Вторая глава рассматривает непосредственно ошибки учащихся при изучении темы «Степени и корни» и методические рекомендации по их устранению.

Третья глава включает анализ школьных учебников по изложению темы «Степени и корни» и материалов ОГЭ и ЕГЭ. Также приведены два факультативных курса «Степени и корни» в 8-9 классах и в 10-11 классах.

ГЛАВА I. ТОЖДЕСВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ТЕМЕ «СТЕПЕНИ И КОРНИ»

§ 1. Основы построения теории степеней и корней

1.1. Различные трактовки понятия тождества

В любой области знаний, использующей математику, появляется необходимость заменять одно выражение другим, более простым или удобным, для решения рассматриваемой задачи. Иначе говоря, приходится совершать тождественные преобразования выражений.

Важное место занимают тождественные преобразования выражений и в школьном курсе математики. При решении уравнений и неравенств, при исследовании функции (как элементарными средствами, так и с помощью производной), при выводе ряда формул алгебры и геометрии и многих других вопросов постоянно приходится выполнять те или иные тождественные преобразования. Можно сказать, что тождественные преобразования составляют одну из основных линий, которая пронизывает весь школьный курс математики, начиная с младших классов.

Существуют различные подходы к понятию тождества. При всем разнообразии словесных формулировок понятий тождества, тождественного равенства двух выражений, тождественного преобразования выражений, выделяют лишь три подхода, которые характеризуются следующими определениями:

Определение 1. Равенство, верное при любых значениях переменных, называется тождеством.

Выражения, связанные знаком тождественного равенства, называются тождественно равными.

Замену одного выражения другим, ему тождественно равным, называют тождественным преобразованием этого выражения.

*Определение 2***.** Равенство, верное при всех допустимых значениях переменных, называется тождеством.

Под допустимыми значениями переменных здесь подразумеваются все значения переменных, при которых имеет смысл левая и правая части рассматриваемого равенства.

Тождественное равенство двух выражений, тождественное преобразование одного выражения в другое определяется аналогично тому, как и в первом случае.

Определение 3. Равенство, верное при любых значениях переменной (пар значений переменных, троек значений переменных и т.д.), принадлежащих данному множеству, называется тождеством на этом множестве.

Замену одного выражения другим, тождественно равным ему на данном множестве, называют тождественным преобразованием этого выражения в указанном множестве.

Выделяют следующие достоинства и недостатки каждого из этих подходов.

Определение 1 имеет краткую формулировку. Оно удобно, если ограничиться рассмотрением целых рациональных выражений. Однако, придерживаясь определения 1 ,нельзя считать тождественными даже такие равенства, как $\frac{a^2}{a} = a$ и $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

(первое из них не верно при a=0 , второе, например, при a= -1 и b= -4).

Отмеченных недостатков лишено определение 2 .

Все равенства, которые являются тождественными по определению 1,будут также тождествами и по определению 2. Кроме того, определению 2 удовлетворяет и ряд равенств, которые по определению 1 не являются тождествами.

Примеры таких равенств:

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c}$, $(a^{-2})^{-3} = a^{-6}$, $(\sqrt{a})^2 = a$,

$\lg a + \lg b = \lg(ab)$, $\sqrt{x} - \sqrt{x} = 0$.

К сожалению, определению 2 удовлетворяет не только приведенные выше равенства, но и такие равенства, как $\sqrt{-x} = \sqrt{x}$, $\sqrt{1-x^4} = \sqrt{x-1}$.

Очевидно, что такие «тождества» с практической точки зрения не представляют интереса.

Кроме того, определение 2 имеет ряд и других дефектов.

Как известно, ценность тождеств состоит в том, что одно выражение заменяют другим, тождественно равным первому, второе - третьим и т.д. Иначе говоря, представляют интерес такие тождества, которые обладают свойством: из того, что A тождественно B и B тождественно C, следует, что A тождественно равно C.

Указанным свойством не обладает ряд равенств, которые являются тождественными по определению 2 . Действительно, равенства $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$ и $(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x^2}$ –тождества, а равенство $\sqrt{x^2} = x$ не является тождеством. Таких примеров можно привести сколько угодно, например:

1) $\sqrt{1-x^8} = \sqrt{x-1}$ и $\sqrt{x-1} = \sqrt{1-x^2}$ –тождества , $\sqrt{1-x^8} = \sqrt{1-x^2}$- не тождества (например, при x=$\frac{1}{2}$ это равенство ложно, хотя при этом значении x обе части равенства имеют смысл);

2) $10^{\frac{1}{2}\lg a^2} = 10^{\lg a}$ и $10^{\lg a} = a$ – тождества , однако равенство $10^{\frac{1}{2}\lg a^2} = a$ не является тождеством (при любом отрицательном а левая и правая части равенства $10^{\frac{1}{2}\lg a^2} = a$ имеют смысл , но принимают противоположные значения).

Использование многих равенств, являющихся тождествами согласно второму определению тождества, при решении уравнений может привести к уравнению, неравносильному данному. Например, замена выражения $\sqrt{x} * \sqrt{x+3}$ тождественно равным ему выражением $\sqrt{x*(x+3)}$ при решении уравнения $\sqrt{x} * \sqrt{x+3} = 2$ приводит к уравнению $\sqrt{x*(x+3)} = 2$, неравносильному данному.

Уравнению $\sqrt{x*(x+3)} = 2$ удовлетворяет корень -4 , который, однако, является «посторонним» корнем для исходного уравнения.

Замена выражения $\sqrt[3]{x^2}$ тождественно равным ему выражением $x^{\frac{2}{3}}$ при решении уравнения $\sqrt[3]{x^2}$ =1 приводит к уравнению $x^{\frac{2}{3}} = 1$, неравносильному данному. В этом случае происходит «потеря» корня. Корень данного уравнения – число -1-не является корнем второго уравнения.

Ещё более парадоксальные вещи могут произойти, если, например, при решении уравнения $\sqrt{-x}$ =1 воспользоваться равенством $\sqrt{-x}$ =$\sqrt{x}$, которое является тождеством по определению 2 . Тогда получится уравнение $\sqrt{x}$ =1, которое имеет единственный корень 1. Этот корень является «посторонним» для исходного уравнения и в то же время «потерян» корень -1 данного уравнения.

В результате произошла и «потеря» корня, и приобретение «постороннего» корня.

Указанных недостатков не имеет определение 3 .

Из определения тождества на множестве непосредственно следует, что отношение тождественного равенства на данном множестве между выражениями рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Таким образом, отношение тождественного равенства на данном множестве между выражениями является отношением эквивалентности. Это означает, что оно определяет разбиение всех выражений, определенных на данном множестве М, на классы эквивалентности, т.е. на классы выражений, тождественно равных друг другу на данном множестве М.

Тождественное преобразование выражения на данном множестве с этой точки зрения состоит в замене одного выражения другим из того же класса, второго - третьим и т.д.

Тождественные преобразования выражений, вообще говоря, и производятся с этой целью, чтобы данное выражение заменить другим, ему тождественно равным (т.е. из того же класса эквивалентности), но более удобным для решения рассматриваемой задачи. Например, чтобы построить график функции $f(x)=\frac{3x-1}{x-1}$, выражение $\frac{3x-1}{x-1}$ целесообразно представить в виде $3+\frac{2}{x-1}$. Этот вид сразу показывает, что график функции f есть образ графика функции $y=\frac{2}{x}$ при параллельном переносе, который начало координат отображает на точку О (1;3). [17, с.83]

1.2. Расширение понятия степени

В курсе математики 4-5 классов начинается изучение тождественных преобразований выражений (без введения терминов «тождество», «тождественное преобразование»). Основное внимание здесь уделяется тождественным преобразованиям выражений, в которые переменные входят, главным образом, в первой степени. Некоторые методисты считают, что понятие степени целесообразно ввести раньше. Ученики встречаются с этим понятием ещё в 5 классе при изучении в курсе арифметики геометрических фигур: приходится находить периметр (4a) и площадь (a^2) квадрата, объем куба (a^3), площадь поверхности куба ($6a^2$) и другие величины. Многие учителя знакомят пятиклассников с более удобной записью произведения одинаковых множителей в виде степени и не дают определения. В курсе алгебры 7 класса вводится понятие степени с натуральным показателем, изучаются свойства степеней и соответствующие тождественные преобразования со степенями.

Определение: Степенью числа a с натуральным показателем n ,большим 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a:

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$, n >1.

Степенью числа a с показателем, равным 1 , называется само число a:

$$a^1 = a$$

Пример: $2^7 = (2 * 2) * (2 * 2) * (2 * 2 * 2) = 4 * 4 * 8 = 16 * 8 = 128.$

Замечание: при возведении отрицательного числа в степень с четным показателем получается положительное число, а при возведении отрицательного числа в степень с нечетным показателем получается отрицательное число.

Пример:$(-\,2)^4 = (-2) * (-2) * (-2) * (-2) = 4 * 4 = 16.$

Свойства степени с натуральным показателем:

Если a - любое число и m и n – любые натуральные числа, то

$$a^m * a^n = a^{m+n}$$

Таким образом, при умножении степеней с одинаковым основанием их показатели складываются

Пример 1: Упростить выражение y^5y^4y:

$$y^5y^4y = y^{5+4+1} = y^{10}.$$

Если a – любое число, не равное 0, и m и n – любые натуральные числа, причем m > n , то

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Таким образом, при делении степеней с одинаковым основанием их показатели вычитаются

Пример 2: Упростить выражение $\frac{x^{25}}{x^{20}}$:

$$\frac{x^{25}}{x^{20}} = x^{25-20} = x^5.$$

Пример 3: Сократить дробь $\frac{2a^{12}}{a^8c}$:

Числитель и знаменатель дроби можно разделить на общий множитель a^8

$$\frac{2a^{12}}{a^8c} = \frac{2a^{12-8}}{c} = \frac{2a^4}{c}.$$

Если a – любое число m и n – любые натуральные числа ,то

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Итак, при возведении степени в степень их показатели перемножаются

Пример 4: Упростить выражение $(a^5)^2 = a^{5*2} = a^{10}$.

Если a и b – любые числа и n – любое натуральное число, то

$(abc\ldots)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \ldots$

Итак, при возведении в степень произведения возводят в эту степень каждый множитель и результаты перемножают

Пример 5: Преобразуйте выражение $(-2xy^2)^3$:

$$(-2xy^2)^3 = (-2)^3x^3(y^2)^3 = -8x^3y^6.$$

Если a и b – любые числа, причем b≠0 , и n- любое натуральное число, то $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

Итак, при возведении дроби в степень возводят в эту степень отдельно её числитель и знаменатель,

Пример 6: Преобразуем выражение $(-\frac{2}{x})^3$:

$$(-\frac{2}{x})^3 = -\left(\frac{2}{x}\right)^3 = -\frac{2^3}{x^3} = -\frac{8}{x^3}.$$

В 8 классе основное внимание уделено преобразованиям рациональных дробей и степеней с целыми показателями. Положено начало изучению тождественных преобразований иррациональных выражений (квадратные корни).

В общем случае принимаются следующие определения:

1)Для любого числа a, не равного нулю, и целого отрицательного числа -n

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Например, по определению:

$$(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16} \quad , \quad (\frac{1}{5})^{-3} = \frac{1}{(\frac{1}{5})^3} = \frac{1}{\frac{1}{125}} = 125.$$

2)Для любого числа a, не равного нулю, $a^0 = 1$.

В соответствии с этим определением

$7^0 = 1$, $(-12)^0 = 1$, $(\frac{2}{3})^0 = 1$.

3)Стандартным видом числа называется его запись в виде произведения $a * 10^n$, где $1 \leq a \leq 10$ и n-целое число.

Пример: Узнаем, во сколько раз масса Земли больше массы луны, если масса Земли равна $5{,}98 * 10^{27}$г , а масса Луны - $7{,}35 * 10^{25}$г.

Отношение массы Земли к массе Луны равно

$$\frac{5{,}98 * 10^{27}}{7{,}35 * 10^{25}} = \frac{5{,}98}{7{,}35} * \frac{10^{27}}{10^{25}} \approx 0{,}8 * 10^2 = 80.$$

Известные свойства степени с натуральным показателем распространяются и на степень с любым целым показателем.

А именно:

1. При умножении степеней с одинаковым основанием их показатели складываются: $a^m * a^n = a^{m+n}$

2. При делении степеней с одинаковым основанием их показатели вычитаются: $a^m : a^n = a^{m-n}$

3. При возведении степени в степень их показатели перемножаются: $(a^m)^n = a^{mn}$

Для любых a≠0 и b≠0 и любого целого n:

1.Степень произведения двух или нескольких сомножителей равна произведению степеней этих сомножителей:

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

2. Степень отношения (дроби) равна отношению степеней делимого (числителя) и делителя (знаменателя): $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$, (b≠0)

Все вышеприведенные формулы читаются и выполняются в обоих направлениях слева направо и наоборот.

Пример: $(2 \cdot 3 \cdot 5 / 15)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 / 15^2 = 900 / 225 = 4$.

В 9 классе вводится понятие степени с рациональным показателем, рассматриваются тождественные преобразования соответствующих выражений.

Определение: Если a - положительное число, $\frac{m}{n}$ – дробное число (m-целое , n- натуральное), то $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$,

По определению имеем: $0,7^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{0,7^3}$, $(\frac{1}{3})^{1,3} = (\frac{1}{3})^{\frac{13}{10}} = \sqrt[10]{\left(\frac{1}{3}\right)^{13}}$,

$5^{-\frac{1}{6}} = 5^{\frac{-1}{6}} = \sqrt[6]{5^{-1}}$

если $\frac{m}{n}$ – дробное положительное число (m и n-натуральные), то $0^{\frac{m}{n}} = 0$

Для отрицательных оснований степень с дробным показателем не рассматривается. Такие выражения, как$(-2)^{\frac{3}{4}}$, $(-8)^{-\frac{1}{3}}$, $0^{-\frac{1}{2}}$,не имеют смысла.

Известные свойства степени с целым показателем справедливы и для степени с любым рациональным показателем. [7, с.329]

1.3. Разные подходы к введению понятия корня. Доказательства свойств корня n-ой степени

Базовым, опорным понятием в 8 классе является арифметический квадратный корень, которое можно ввести на примере решения задачи о нахождении стороны квадрата по его площади (алгебраический подход).

Математической моделью такой задачи является уравнение вида $x^2 = 25; x^2 = 64; x^2 = a$ - полный квадрат.

При решении такого уравнения мы получаем два корня: x_1 и x_2 - квадратные корни 5 и –5; неотрицательному значению квадратного корня даем имя арифметический и присваиваем значок $\sqrt{\ }$.

Индуктивным путем выясняем, что $\sqrt{a}$ имеет смысл только при $a \geq 0$. На последующих уроках с помощью графического решения уравнения $x^2 = a$ выясняется, что a необязательно может быть полным квадратом. Это происходит, когда мы вводим числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}\ldots$ Хотя само понятие иррационального числа детям уже знакомо (объяснено).

Таким образом, формулируется строгое определение арифметического квадратного корня из числа a.

Определение: Число b называется квадратным корнем из числа a , если

$$b^2 = a .$$

Из определения вытекает два следствия-свойства:

1) $\sqrt{a} \geq 0$;

2) $(\sqrt{a})^2 = a$.

Выполнение тождественных преобразований основано на четырех тождествах:

$$(\sqrt{x})^2 = x, \text{ при } x \geq 0$$
$$\sqrt{x^2} = |x|$$
$$\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y},\ x \geq 0,\ y \geq 0$$
$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}},\ x \geq 0,\ y > 0$$

Свойства квадратных корней.

1. Корень из произведения неотрицательных чисел равен произведению корней из этих чисел:

для любых a≥0 и b≥0 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} * \sqrt{b}$

2. Корень из частного от деления неотрицательного числа на положительное равен частному корней из этих чисел :

для любых a ≥ 0 и b > 0 $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

В 9 классе происходит расширение и углубление знаний, связанных с тождественными преобразованиями, при изучении темы корень n-й степени. Употребляется значок $\sqrt[n]{a}$ для записи корня n-ой степени из числа a. Возможны два случая: n – четное , n – нечетное.

Определяется арифметический корень $\sqrt[n]{\ }$ из неотрицательного числа: $\sqrt[4]{16}, \sqrt[3]{27}$.

Через арифметический корень можно выразить корень нечетной степени из отрицательного числа $\sqrt[3]{-8}$ - имеет смысл. Это число можно выразить через арифметический корень третьей степени $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$.

Рассматривается следующее тождество $\sqrt{x^2} = |x|$.

Для доказательства этого тождества пользуемся определением арифметического квадратного корня, то есть, проверяем, имеют ли место два условия:

1) $|x| \geq 0$ 2) $|x|^2 = x^2$

Проверим первое условие. По определению модуля $|x| \geq 0$. Второе условие:

А) $x \geq 0 \quad |x| = x \quad \Rightarrow x^2 = x^2$

Б) $x < 0 \quad |x| = -x \quad (-x)^2 = x^2 \quad x^2 = x^2$

Вывод: так как выполнены оба условия из определения арифметического корня, то $\sqrt{x^2} = |x|$ является тождеством.

Определение: Корнем n-ой степени из чиста а называется такое число , n-я степень которого равна а.

Согласно данному определению корень n-ой степени из числа а – это решение уравнения $x^n = a$. Число корней этого уравнения зависит от n и а. Рассмотрим функцию $f(x) = x^n$. Как известно, на промежутке $[0; \infty)$ эта функция при любом n возрастает и принимает все значения из промежутка $[0; \infty)$. По теореме о корне уравнение $x^n = a$ для любого $a \epsilon [0; \infty)$ имеет неотрицательный корень и при том только один. Его называют арифметическим корнем n-ой степени из числа а и обозначают $\sqrt[n]{a}$; число n называют показателем корня, а само число а – подкоренным выражением. В учебнике Дорофеева 8кл. описано происхождение слова радикал (корень): нельзя не обратить внимания и на совпадение в терминах – квадратный корень и корень уравнения. Это совпадение не случайно. Уравнения вида $x^2 = a$ исторически были первыми «сложными» уравнениями , и их решения были названы корнями – возможно, по метафоре, что из стороны квадрата, как из корня, вырастает сам квадрат. Этот термин стал употребляться в дальнейшем и для произвольных уравнений. Название « радикал » тоже связано с термином «корень» : по-латыни корень – radix (он же «редис» - корнеплод). Заметьте также, что слово « радикальный » в русском языке является синонимом слова «коренной». Происхождение же символа $\sqrt{}$ связывают с рукописным написанием латинской буквы r.[2, с.48]

Определение: Арифметическим корнем n-ой степени из числа a называют неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

При четных n функция $f(x) = x^n$. четна. Отсюда следует, что если a >0, то уравнение $x^n = a$, кроме корня $x_1 = \sqrt[n]{a}$, имеет также корень $x_2 = -\sqrt[n]{a}$. Если a=0, то корень один: x=0; если a$<$ 0, то это уравнение корней не имеет, поскольку четная степень любого числа неотрицательна.

При нечетных значениях n функция $f(x) = x^n$. возрастает на всей числовой прямой; её область значений – множество всех действительных чисел. Применяя теорему о корне, находим, что уравнение $x^n = a$ имеет один корень при любом a и, в частности, при a < 0. Этот корень для любого значения a обозначают $\sqrt[n]{a}$.

Для корней нечетной степени справедливо равенство $\sqrt[n]{-a}$= - $\sqrt[n]{a}$. В самом деле,$(-\sqrt[n]{a})^n = (-1)^n * \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = -1 * a = -a$, т.е. число $-\sqrt[n]{a}$ есть корень n-й степени из -a. Но такой корень при нечетном n единственный. Следовательно, $\sqrt[n]{-a}$= - $\sqrt[n]{a}$.

Замечание 1: Для любого действительного x

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x|, \text{если } n \text{ четно}, \\ x, \text{если } n \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Замечание 2: Удобно считать, что корень первой степени из числа a равен a. Корень второй степени из числа a называют квадратным корнем, а корень третьей степени называют кубическим корнем. [7, с.424]

Напомним известные свойства арифметических корней n-ой степени.

Для любого натурального n, целого k и любых неотрицательных целых чисел a и b справедливы равенства:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$

2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, (b≠0)

3. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, (k > 0)

4. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$, (k > 0)

5. $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$ (если k ≤ 0 , то a≠0) .

ГЛАВА II. ВЫДЕЛЕНИЕ ОШИБОК УЧАЩИХСЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «СТЕПЕНИ И КОРНИ»

§ 1. Типичные ошибки учащихся при изучении данной темы

Вспоминается рассхожая истина – умные люди учатся на чужих ошибках. В математике приходится учиться, в основном, на собственных ошибках. Если ученик не ошибается, то он не учится. Ошибка – вещь необходимая и полезная. Нужно лишь правильно относиться к ошибке, правильно ее использовать.

Обидно получать плохие оценки из-за ошибок «на ровном месте». Глупые ошибки – проблема многих учеников: случайная потеря знака, скобки, необоснованное изменение чисел, пропуски переменных и всевозможные ляпы. Сами ученики не могут объяснить, чем вызваны эти ошибки.

Большинство ошибок напрямую не связаны с наличием или отсутствием знаний, хотя доведение некоторых вычислительных операций до автоматизма несколько снижает вероятность их появления. Снижает, но не исключает. Можно ли избавиться от таких ошибок? Ученик знает, что нужно решать внимательно, но ничего не может с собой поделать.

Известно, что осознание правила или определяет действия, или, по крайней мере, их контролирует. Знание правила необходимо и для того, чтобы осуществить проверку решения и дать его обоснование. Но большинство учащихся воспринимают курс алгебры как набор несвязанных между собой правил, которые заучиваются (иногда формально) для применения их к решению задач. Поэтому необходимо осуществлять процесс обучения правилам с помощью специальной модели с использованием приема, активизирующего рефлексивную деятельность учащихся по предупреждению и исправлению ошибок, которые возникают в результате формального усвоения правил.

Процесс отыскания и исправления ошибок самими учащимися под руководством учителя можно сделать поучительным для учащихся, в результате чего изучение и анализ ошибок становится эффективным средством в развитии познавательного интереса к изучению математики.

Выполняя математические задания, учащиеся допускают типичные ошибки:

- Незнание правил, определений, формул.
- Непонимание правил, определений, формул.
- Неумение применять правила, определения, формулы.
- Неверное применение формул.
- Невнимательное чтение условия и вопроса задания.
- Вычислительные ошибки.
- Логические ошибки.
- Раскрытие скобок и применение формул сокращенного умножения.

Причины ошибок по математике:

- Пропуски занятий приводят к незнанию материала, пробелам в знаниях.
- Поверхностное, невдумчивое восприятие нового материала приводят к непониманию его.
- Недостаточная мозговая деятельность приводит к неумению применять правила, определения и формулы.
- Неряшливый, неаккуратный почерк ученика приводит к досадным ошибкам. Учащиеся не всегда сами понимают, что именно они написали.
- Усталость. Чрезмерная нагрузка и недостаточный сон приводит к снижению внимания, скорости мышления и, как следствие, к многочисленным ошибкам.
- Кратковременное или полное переключение внимания с одной деятельности на другую (учебную или внеучебную) приводит к утрате только что воспринятого материала, приходится все начинать сначала.
- Скорость работы. Низкая скорость выполнения мыслительных операций часто мешает ученику контролировать себя и это может стать еще

одной причиной ошибки. «Зависание» с какой-нибудь одной частью задания удаляет из «оперативной памяти» информацию о другой, в которой допускается не вынужденная ошибка. Скорость работы определяется физиологией конкретного школьника и навыками выполнения тех или иных операций.

- Мотивация. Следствие низкой мотивации – потеря внимания и ошибка. [8, с.39]

§ 2. Методические рекомендации по устранению ошибок

В приемах работы над ошибками отсутствует диагностика причин ошибок. Не уделяется должного внимания работе по формированию рефлексивной деятельности учащихся и ее использованию в работе по предупреждению и исправлению математических ошибок. При отсутствии должной доли самостоятельности при работе над ошибками, совершаемые учеником действия никак не контролируются, допущенные ошибки не замечаются, причины их появления остаются невыясненными, что приводит к их повторению. Напротив, самостоятельная работа учащихся над ошибками обеспечивает более осознанный их анализ и анализ собственных действий по решению конкретной задачи, что оказывает благоприятное влияние на качество получаемых знаний и стимулирует развитие логического мышления.

<u>Самоконтроль.</u> Для исправления и предупреждения многих ошибок важно сформировать у школьников навыки самоконтроля:

а) умения обнаружить ошибку;

б) умения её объяснить и исправить.

В процессе обучения применяются несколько приёмов самоконтроля, которые помогают обнаружить допущенные ошибки и своевременно их исправить. К ним относятся:

1. проверка вычисления и тождественного преобразования путём выполнения обратного действия или преобразования;
2. проверка правильности решения задач путём составления и решения задач, обратных к данной;
3. оценка результата решения задачи с точки зрения здравого смысла;
4. проверка аналитического решения графическим способом.

<u>Объяснение и предупреждение ошибок.</u> Этому способствуют следующие профилактические меры:

1. Тексты письменных заданий должны быть удобными для восприятия: грамотно сформулированными, хорошо читаемыми.

2. Активная устная отработка основных УУД, регулярный разбор типичных ошибок.
3. При объяснении нового материала предугадать ошибку и подобрать систему заданий на отработку правильного усвоения понятия.
4. Акцентировать внимание на каждом элементе формулы, выполнение разнотипных заданий позволит свести ошибочность к минимуму.
5. Подбирать задания, вызывающие интерес, формирующие устойчивое внимание.
6. Прочному усвоению (а значит, отсутствию ошибок) способствуют правила, удобные для запоминания, четкие алгоритмы, следуя которым заведомо придешь к намеченной цели.

Каждый учитель знает, что планомерное и систематическое повторение и есть основной помощник в ликвидации пробелов, а, следовательно, и ошибок. При объяснении нового материала следует использовать ряд определений и теорем, которые были изучены ранее.

Ученики используют неверную формулу, не задумываясь над ней. Например, определяя, является ли число $(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2$ рациональным, ученик пишет: $(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{7-3})^2 = (\sqrt{4})^2 = 4$ и получает неверный ответ.

При работе с «многоэтажными дробями» ученики делают много ошибок. Например: $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{\frac{a}{b}}{c}$. Нужно посоветовать ученику проверить написанное при конкретных значениях переменных. Так, при a = b = 1, c = 2, получим

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{1}}{2} = \frac{1}{2}, \text{ с другой стороны } \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1:\frac{1}{2} = 1 * 2 = 2, \text{ тогда } 2 = \frac{1}{2}\,.$$

В результате ученик должен сделать вывод, что при работе с «трехэтажными дробями» лучше ставить скобки, чем сравнивать длины дробных «черточек»:

$$\frac{a}{(\frac{b}{c})} = \frac{(\frac{a}{b})}{c}. \text{ И, разумеется, должна появиться верная запись } \frac{a}{(\frac{b}{c})} = \frac{ac}{b}.$$

При выполнении преобразований со степенями учащиеся не только допускают ошибки, но просто забывают формулы, например формулу

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

Полезно учащимся показать, как они могут вспомнить формулу, пользуясь определением степени, например

$$a^3*a^4=aaa*aaaa=a^7=a^{3+4}$$

Применяя определение степени в подобных ситуациях, учащиеся могут вывести любую формулу действий со степенями. Аналогично можно показать ошибки в действиях со степенями.

Ещё пример ошибки: $a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^2}$. Если при этом объяснить ученику, что дробь только в показателе степени, он это объяснение забудет и следующий раз опять ошибется. Следует привести конкретный пример с удобным вычислением $2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 2^{-2}$. Здесь же можно предложить другой способ.

Необходимо в результате записать формулу $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Встречаются ошибки от непонимания. Большинство учащихся, решая впервые неравенство $x^2>4$, приводят неверное решение $x>2$. Полезно в этом случае предложить учащимся проверить число, например. -3, при этом учащиеся убеждаются в неверности ответа.

Не нужно специально исправлять каждое ошибочное утверждение ученика и предупреждать его об ошибках. Лучше поставить это утверждение на обсуждение всего класса и добиться осознанного исправления ошибки. Практика показывает, что систематические проверки чужих записей формируют у ученика привычку критически относиться к своему решению. Для этого подходят задания типа «найди ошибку в решении».

Процесс отыскания и исправления ошибок самими учащимися под руководством учителя можно сделать поучительным для учащихся, в результате чего изучение и анализ ошибок становится эффективным средством в развитии познавательного интереса к изучению математики.

Рассмотрим некоторые рекомендации по выполнению тождественных преобразований алгебраических выражений.

Задания на тождественные преобразования алгебраических выражений часто встречаются в вариантах экзаменов, проводимых в форме ОГЭ и ЕГЭ как в качестве отдельных заданий, так и в качестве компонентов заданий.

Алгебраическим выражением называется выражение, в котором числа и буквы соединены действиями сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень или извлечения арифметического корня.

Равенство, обе части которого принимают одинаковые числовые значения при любых допустимых значениях входящих в него букв, называется тождеством.

Например, каждая из формул сокращенного умножения представляет собой тождество, ибо левая и правая части каждого из равенств:

1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
2) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 - b^2$
3) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
4) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2\ )$

равны друг другу при любых значениях a и b. При этом одно выражение преобразуется в другое, ему тождественно равное.

При выполнении тождественных преобразований алгебраических выражений необходимо знать порядок выполнения действий, действия с дробями и степенными выражениями, формулы сокращенного умножения и др.

Следует иметь в виду, что при тождественных преобразованиях остаются неизменными:

1) величина допустимых изменений буквенных величин;

2) область допустимых значений каждой из буквенных величин.

Первое из этих требований является обязательным при всех преобразованиях, имеющих целью упрощение выражения или приведение его к нужному виду. Если надо, например, дополнить квадратный трехчлен

x^2+6x-7 до полного квадрата, то, прибавив к нему число 9, необходимо такое же число и вычесть, т.е.:

$$x^2+6x-7 = x^2+6x+9-9-7=(x+3)^2-16$$

Тождественные преобразования последнего выражения можно продолжить и привести исходное выражение к произведению двучленов:

$$(x+3)^2-16=(x+3+4)(x+3-4)=(x+7)(x-1)$$

Второе требование — неизменность областей допустимых значений — не всегда выполняется при обычно применяемых нами преобразованиях. Сократив, например, дробь $\frac{a^2-1}{a-1}$ на разность a - 1 и написав равенство $\frac{a^2-1}{a-1}=a+1$, мы замечаем, что нарушено второе требование, которому должно удовлетворять тождественное преобразование: правая часть равенства имеет смысл при любых значениях, а левая только при условии, что $a\neq 1$, т.е. произошло изменение области допустимых значений величины a. Следовательно, преобразование в данном случае не является тождественным.

Однако это не значит, что мы должны отказываться от таких преобразований, которые изменяют области допустимых значений величин. Напротив, мы ими часто пользуемся и при упрощении выражений и при решении уравнений. Нужно только при каждом таком преобразовании указать, как изменились области допустимых значений буквенных величин.

При действиях с радикалами следует иметь в виду, что правила, по которым они выполняются, безоговорочно верны лишь для арифметических корней. По определению корень $\sqrt[n]{a}$ называется арифметическим лишь в том случае, если число a положительно или равно нулю, а также положительна или равна нулю и величина самого корня. Если этого не учитывать, то можно допустить ошибку.

Например, равенство $\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{x}$ верно лишь при условии, что $x \geq 0$.

При $x < 0$ нужно писать так: $\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{-x}$

Аналогично равенство $\sqrt[6]{(a-b)^2} = \sqrt[3]{(a-b)}$ верно лишь в случае, если $a \geq b$. При $a < b$ оно неверно и нужно писать $\sqrt[6]{(a-b)^2} = \sqrt[3]{(b-a)}$. Оба случая можно охватить такой записью: $\sqrt[6]{(a-b)^2} = \sqrt[3]{|a-b|}$.

Замечание. В общем случае допустимыми значениями для

1. целых алгебраических выражений являются любые числа;
2. дробно-рациональных алгебраических выражений все числа, которые не обращают в нуль знаменатель дробей, входящих в это выражение;
3. иррациональных выражений только те значения букв, при которых выражения, стоящие под знаком корня четной степени принимают неотрицательные значения. [6, с.399]

Пример 1. Упростите выражение: $\frac{9m^{\frac{1}{2}} \times m^{3\frac{1}{2}}}{m^{-3}}$

Решение: Применим свойства степеней (умножение степеней с одинаковым основанием и деление степеней с одинаковым основанием):

$$\frac{9m^{\frac{1}{2}} \times m^{3\frac{1}{2}}}{m^{-3}} = 9m^{\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}-(-3)} = 9m^7$$

Ответ: $9m^7$.

При тождественных преобразованиях иррациональных выражений в ряде случаев удобно выполнить замену переменных таким образом, чтобы для новых переменных получить рациональное выражение (другими словами, исключить иррациональность). При этом лучше просматриваются возможности для применения формул сокращенного умножения и другие способы упрощения рассматриваемого выражения.

*Пример 2.*Сократите дробь: $\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}}$

Решение: Так как дробь содержит выражения $\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y}$, целесообразно выполнить замену переменных следующим образом:

$$a = \sqrt[3]{x}, \qquad b = \sqrt[3]{y}$$

Тогда, воспользовавшись формулой «разность квадратов» и сократив дробь, получаем:

$$\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}} = \frac{a+b}{a^2-b^2} = \frac{a+b}{(a-b)(a+b)} = \frac{1}{a-b} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$$

Следует отметить, что другие варианты замены переменных, например,

$a = \sqrt[3]{x^2},\ b = \sqrt[3]{y^2}$ или $a = \sqrt[3]{x^2},\ b = \sqrt[3]{y}$ не приводят к получение рационального выражения.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$.

В выражениях, содержащих двойную иррациональность (корень из иррационального выражения) бывает полезным представление подкоренного выражения в виде полного квадрата (выделение полного квадрата). При этом используется формулы «квадрат суммы» или «квадрат разности». Подбор первого и второго слагаемого следует выполнять, ориентируясь на предполагаемое удвоенное произведение первого слагаемого на второе.

Пример 3. Найдите значение выражения: $\frac{(\sqrt{10}+\sqrt{6})(\sqrt{15}-4)}{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}$

Решение: Этап 1. Преобразуем знаменатель:

$8 = 5 + 3$, $15 = 5 \cdot 3$, поэтому $8 - 2\sqrt{15} = 5 - 2\sqrt{5}\sqrt{3} + 3 = (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$, то есть $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$

Следуя несколько иной логике, можно рассмотреть число $2\sqrt{15}$ в качестве возможного удвоенного произведения первого слагаемого на второе. Далее, используя свойство квадратного арифметического корня, представим его в виде произведения $2\sqrt{15} = 2\sqrt{5}\sqrt{3}$.

Таким образом, получаем, что: $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2} = |\sqrt{5} - \sqrt{3}| = \sqrt{5} - \sqrt{3}$, т.к. $\sqrt{5} - \sqrt{3} > 0$.

Этап 2. Раскроем скобки в числителе дроби:

$$(\sqrt{10} + \sqrt{6})(\sqrt{15} - 4) = \sqrt{150} + \sqrt{90} - 4\sqrt{40} - 4\sqrt{6}.$$

Учитывая, что $150 = 25 \cdot 6$, $90 = 9 \cdot 10$, получаем следующее:

$\sqrt{25 \times 6} + \sqrt{9 \times 10} - 4\sqrt{10} - 4\sqrt{6} = 5\sqrt{6} + 3\sqrt{10} - 4\sqrt{10} - 4\sqrt{6}$.

Далее приведем подобные слагаемые (первое и последнее, второе и третье), и, помня, что наша цель — разложить знаменатель дроби на множители для ее сокращения, вынесем за скобку множитель $\sqrt{2}$:

$\sqrt{6} - \sqrt{10} = \sqrt{2 \times 3} - \sqrt{2 \times 5} = \sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{5})$

Тогда: $\frac{(\sqrt{10}+\sqrt{6})(\sqrt{15}-4)}{\sqrt{8-2\sqrt{15}}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = -\sqrt{2}$

Заметим, что подкоренное выражение в знаменателе можно было записать и как $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$, но $\sqrt{3} - \sqrt{5} < 0$, а $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}} > 0$, поэтому

$\sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = |\sqrt{3} - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - \sqrt{3}$.

Ответ: $-\sqrt{2}$.

Пример 4. Укажите все номера целых чисел данного множества:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$;

2) $\sqrt{11+6\sqrt{2}} \times (3-\sqrt{2})$;

3) $\frac{1}{\sqrt{5}-2} + \sqrt{5}$;

4) $\sqrt[3]{4} \div 2^{-\frac{2}{3}}$.

Решение: Упростим запись каждого из данных чисел.

Воспользуемся свойством степени с отрицательным показателем, получаем $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = (3^{-1})^{-3}$. Далее, выполним умножение показателей степеней для возведения степени в степень, $(3^{-1})^{-3} = 3^{-1(-3)} = 3^3 = 27$. Так как целыми числами называются натуральные числа, им противоположенные и ноль, получаем, что число под номером 1 — целое.

Преобразуем выражение $\sqrt{11+6\sqrt{2}} \times (3-\sqrt{2})$, используя выделение полного квадрата из выражения под знаком корня.

Видно, что число $6\sqrt{2}$ следует представить в виде произведения множителей *2, 3* и $\sqrt{2}$. Можно проверить, что другие способы разложения числа $6\sqrt{2}$ на множители не приводят к выделению полного квадрата (например, 2, $3\sqrt{2}$, 1).

Таким образом, получаем, что $11+6\sqrt{2} = 3^2 + 2 \times 3\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = (3+\sqrt{2})^2$.

Следовательно:

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}} \times \left(3-\sqrt{2}\right) = \sqrt{9+2\times 3\sqrt{2}+2} \times \left(3-\sqrt{2}\right) = \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} \times \left(3-\sqrt{2}\right) = \left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right),$$

Для дальнейшего упрощения воспользуемся формулой «разность квадратов»: $(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) = 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 9-4=5$ — целое число.Для преобразования выражения $\frac{1}{\sqrt{5}-2}+\sqrt{5}$ сначала исключим иррациональность из знаменателя первого слагаемого, умножив числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное к знаменателю:

$$\frac{1}{\sqrt{5}-2}+\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}+\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4}+\sqrt{5} = \sqrt{5}+2+\sqrt{5}$$
$$= 2\sqrt{5}+2$$

Следовательно, $\frac{1}{\sqrt{5}-2}+\sqrt{5}$ — не является целым числом.

Выполним переход к одинаковому основанию 2 и запишем кубический корень в виде степени: $\sqrt[3]{4} \div 2^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \div 2^{-\frac{2}{3}}$

Далее для деления степеней с одинаковым основанием, вычислим разность показателей: $2^{\frac{2}{3}} \div 2^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}-(-\frac{2}{3})} = 2^{\frac{4}{3}}$

Выделим целую часть дроби, полученной в показателе $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} = 1+\frac{1}{3}$, и запишем результат тождественных преобразований в виде произведения: $2^{\frac{4}{3}} = 2\sqrt[3]{2}$

Таким образом, выражение под номером четыре — не целое число.

Ответ: 1, 2.

В экзаменах традиционной формы задачи на упрощение встречаются редко, но подобные навыки могут пригодиться и при решении заданий, сформулированных иначе.

Пример 5 Упростите выражение: $S = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$,

при $x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$, $a \neq b$ и $ab > 0$.

Решение: Покажем прежде, что при заданном условии все подкоренные выражения положительны:

$$,x - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 1 = \frac{a^2+b^2-2ab}{2ab} = \frac{(a-b)^2}{2ab}$$

Поскольку $a - b \neq 0$, то $(a - b)^2 > 0$; $ab > 0$ по условию.

Следовательно, дробь $\frac{(a-b)^2}{2ab}$ положительна, т.е. $x - 1 > 0$, а, значит, и $x + 1 > 0$.

Теперь перейдем к упрощению заданного выражения. Освободимся от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \times (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{x + 1 + 2\sqrt{x^2-1} + x - 1}{x + 1 - x + 1}$$

Подставляя значение $x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = \frac{a^2+b^2}{2ab}$, получим:

$$S = \frac{a^2+b^2}{2ab} + \sqrt{\frac{(a^2+b^2)^2}{4a^2b^2} - 1} = \frac{a^2+b^2}{2ab} + \sqrt{\frac{(a^2-b^2)^2}{4a^2b^2}} = \frac{a^2+b^2}{2ab} + \frac{|a^2-b^2|}{2|ab|}$$

По условию $ab > 0$, значит, $|ab| = ab$, поэтому $S = \frac{a^2+b^2+|a^2-b^2|}{2ab}$

Рассмотрим оба возможных случая:

1) если $a^2 > b^2$, другими словами, $|a| > |b|$, то $|a^2 - b^2| = a^2 - b^2$и $S = \frac{a}{b}$;

2) если $a^2 < b^2$,другими словами $|a| < |b|$,то $|a^2 - b^2| = -a^2 + b^2$ и $S = \frac{b}{a}$.

Ответ: Если $a^2 > b^2$, т.е. если $|a| > |b|$, то $|a^2 - b^2| = a^2 - b^2$и $S = \frac{a}{b}$,

Если $a^2 < b^2$, т.е. если $|a| < |b|$,, то $|a^2 - b^2| = -a^2 + b^2$ и $S = \frac{b}{a}$.

*Пример 6***.** Найти значение выражения, при $b = \sqrt{2}$.

$$\sqrt{(b-4)^2} - \left(\sqrt{3-b}\right)^2 + 2$$

Решение: Прежде чем подставлять значение параметра b, упростим выражение.

1. Так как выражение иррациональное, найдем множество допустимых значений для параметра b: $3 - b \geq 0 \Rightarrow b \leq 3$.

2. По свойству 7 арифметического корня имеем: $\sqrt{(b-4)^2} = |b-4|$, учитывая это, получим:.$\sqrt{(b-4)^2} - \left(\sqrt{3-b}\right)^2 + 2 = |b-4| - 3 + b + 2 = |b-4| + b - 1$

3. По определению модуля при $b = \sqrt{2}$, $|b-4| = 4 - b$, следовательно, подставляя в полученное выражение значение для b, получим: $|b-4| + b - 1 = 4 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 = 3$.

Ответ:значение выражения $\sqrt{(b-4)^2} - \left(\sqrt{3-b}\right)^2 + 2$ при $b = \sqrt{2}$ равно 3.

Пример 7. Доказать тождество:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{a^3} - 1}{\sqrt[4]{a} - 1} + \sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{\sqrt[4]{a^3} + 1}{\sqrt[4]{a} + 1} - \sqrt{a}\right) \times \left(a - \sqrt{a^3}\right)^{-1} = \frac{1}{a}$$

Решение:

Найдем множество допустимых значений для параметра a . Потребуем, чтобы все выражения, стоящие в знаменателях дробей были отличны от нуля, а все выражения стоящие под знаками арифметических корней четной степени были неотрицательными: $a>0$, $\sqrt[4]{a} - 1 \neq 0 \Rightarrow \sqrt[4]{a} \neq 1 \Rightarrow a \neq 1$, $\sqrt[4]{a} + 1 \neq 0$, при любом значении $a>0$, $\left(a - \sqrt{a^3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1, a \neq 0$.

Таким образом, окончательно получаем, что множество допустимых значений для параметра a: $a > 0$ и $a \neq 1$.

Обозначим левую часть тождества через A, и приведем её к правой, для чего сначала числители дробей, стоящих в первой и второй скобках разложим на множители, используя формулы разности и суммы кубов и проведем сокращение полученных дробей. Для преобразования выражения, стоящего в третьей скобке воспользуемся свойствами степени: $A = \left(\frac{(\sqrt[4]{a}-1)(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}+1)}{\sqrt[4]{a}-1} + \sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{(\sqrt[4]{a}+1)(\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}+1)}{\sqrt[4]{a}+1} - \sqrt{a}\right) \times \frac{1}{a(1-\sqrt{a})} = (\sqrt{a} + 2\sqrt[4]{a} + 1)^{\frac{1}{2}} \times (1 - \sqrt[4]{a}) \times \frac{1}{a(1-\sqrt{a})}$

Выражение, стоящее в первых скобках есть полный квадрат $\sqrt[4]{a} + 1$,а т.к. $a>0$, то и $\sqrt[4]{a} + 1>0$, поэтому по свойствам арифметического квадратного корня четной степени $\sqrt{(\sqrt[4]{a} + 1)^2} = \left|\sqrt[4]{a} + 1\right| = \sqrt[4]{a} + 1$, учитывая это получим:

$$A = \left(\sqrt[4]{a} + 1\right) \times \left(1 - \sqrt[4]{a}\right) \times \frac{1}{a\left(1-\sqrt{a}\right)} = \left(1 - \sqrt{a}\right) \times \frac{1}{a\left(1-\sqrt{a}\right)} = \frac{1}{a}$$

что и требовалось доказать.

ГЛАВА Ⅲ СТЕПЕНИ И КОРНИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

§ 1. Анализ школьных учебников по изложению темы «Степени и корни» и материалов ОГЭ и ЕГЭ по математике

Проведём логико-математический анализ темы «Степени и корни» в различных школьных учебниках.

Таблица 1- Анализ школьных учебников с 7-11 класс.

Сравнение учебников 7 класса			
<u>Критерий</u>	*Г. В. Дорофеев «МАТЕМАТИКА. Арифметика. Алгебра. Анализ данных»,7 класс*	*С. А. Теляковский «Алгебра» , 7 класс.*	*А. Г. Мордкович «Алгебра» , 7 класс*
Степень с натуральным показателем	Степенью числа a с натуральным показателем n ,большим 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$, n >1. Степенью числа a с показателем, равным 1 , называется само число a: $\mathrm{a}^1 = \mathrm{a}$	Степенью числа a с натуральным показателем n ,называется произведение n множителей, каждый из которых равен a: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$, n >1. Степенью числа a с показателем 1 называется само число a: $\mathrm{a}^1 = \mathrm{a}$	Определение 1. Под a^n, где n=2,3,4,5,…, понимают произведение n одинаковых множителей, каждый из которым является число a. Выражение a^nназывают степенью, число a – основанием степени, число n – показателем степени. $a^n, = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$, a^n-степень с натуральным показателем; a-основание степени; n-показатель степени.

			Определение 2. Степенью числа a с показателем 1 называется само это число: $a^1 = a$
Свойства степени с натуральным показателем	1.Если a - любое число и m и n – любые натуральные числа, то $a^m * a^n = a^{m+n}$ 2.Если a – любое число, не равное 0, и m и n – любые натуральные числа, причем m > n , то $a^m : a^n = a^{m-n}$ 3.Если a – любое число m и n – любые натуральные числа, то $(a^m)^n = a^{mn}$ 4.Если a и b – любые числа и n – любое натуральное число, то $a^n * b^n = (ab)^n$ 5.Если a и b – любые числа , причем b≠0 , и n- любое натуральное число , то $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$	1.Для любого числа a и произвольных натуральных чисел m и n $a^m * a^n = a^{m+n}$ 2.Для любого числа a≠0 и произвольных натуральных чисел m и n,таких ,что m>n $a^m : a^n = a^{m-n}$ <u>Определение:</u> Степенью числа a , не равного нулю, с нулевым показателем равна единице. 3.Для любых a и b и произвольного натурального числа n $a^n * b^n = (ab)^n$ 4.Для любого числа a и произвольных натуральных чисел m и n $(a^m)^n = a^{mn}$	Теорема 1.Для любого числа a и любых натуральных чисел n и k справедливо равенство: $a^n * a^k = a^{n+k}$ Теорема 2.Для любого числа a≠0 и любых натуральных чисел n и k,таких , что n>k, справедливо равенство: $a^n : a^k = a^{n-k}$ Теорема 3. Для любого числа a и любых натуральных чисел n и k справедливо равенство: $(a^n)^k = a^{nk}$ Формулирует эти три теоремы в виде правил 1-2-3. После на основе примеров выводит следующие формулы: $a^n * b^n = (ab)^n$ $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n ;\ b \neq 0$ Формулирует их в виде правил 4-5. Определение : Если a≠0, то $a^0 = 1$.

Сравнение учебников 8 класса

<u>Критерий</u>	*Г. В. Дорофеев «МАТЕМАТИКА. Алгебра. Функции. Анализ данных», 8 класс*	*С. А. Теляковский «Алгебра» , 8 класс.*	*А. Г. Мордкович «Алгебра» , 8 класс*
Степень с целым показателем	1)Для любого числа a, не равного нулю , и целого отрицательного числа -n $$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$ 2)Для любого числа a, не равного нулю, $\mathrm{a}^0=1.$ 3)Стандартным видом числа называется его запись в виде произведения $\mathrm{a}*10^n$, где $1\leq \mathrm{a}\leq 10$ и n-целое число.	Если a≠0 и n – целое отрицательное число, то $$a^n=\frac{1}{a^{-n}}$$ Замечание: Выражение 0^n при целом n (так же как и при n=o) не имеет смысла. Замечание: Стандартным видом числа a называется его запись в виде произведения $\mathrm{a}*10^n$, где $1\leq \mathrm{a}\leq 10$ и n-целое число. Число n называется порядком числа a.	Если n – натуральное число и a≠0, то под a^{-n}понимают $\frac{1}{a^{-n}}$: $$a^n=\frac{1}{a^{-n}}$$
Свойства степени с целым показателем	1. $a^m*a^n=a^{m+n}$ 2. $a^m:a^n=a^{m-n}$ 3. $(a^m)^n=a^{mn}$	Для любого a≠0 и любых целых m и n $a^m*a^n=a^{m+n}$ (1)	Считаем, что a≠0,b≠0,s и t – произвольные целые числа: 1. $a^s*a^t=a^{s+t}$

	a≠0 и b≠0 и любого целого n: 4. $a^n * b^n = (ab)^n$ 5. $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$, (b≠0)	$a^m : a^n = a^{m-n}$ (2) $(a^m)^n = a^{mn}$ (3) для любых a≠0,b≠0 и любого целого n $a^n * b^n = (ab)^n$(4) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ (5)	2. $a^s : a^t = a^{s-t}$ 3. $(a^s)^t = a^{st}$ 4. $a^s * b^s = (ab)^s$ 5. $(\frac{a}{b})^s = \frac{a^s}{b^s}$
Квадратный корень	Число b называется квадратным корнем из числа a , если $b^2 = a$.	1.Квадратным корнем из числа a называют число, квадрат которого равен a. 2.Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a. Замечание: Равенство $\sqrt{b} = a$ является верным, если выполняются два условия: 1)b≥0; 2)$b^2 = a$ -при a<0 выражение $\sqrt{a}$ не имеет смысла. -при любом a, при котором выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл, верно равенство $(\sqrt{a})^2 = a$	Квадратным корнем из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число, квадрат которого равен a. Это число обозначают $\sqrt{a}$, число a при этом называют подкоренным числом. -если a – неотрицательное число, то: 1)$\sqrt{a} \geq 0$; 2)$(\sqrt{a})^2 = a$
Свойства квадратных корней	1.Для любых a≥0 и b≥0 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} * \sqrt{b}$ 2.Для любых a ≥0 и b>0	Теорема 1. Если a≥0 и b≥0, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} * \sqrt{b}$ Теорема 2. Если a ≥0 и	Теорема 1.Квадатный корень из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению

	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.	b>0, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Теорема: При любых значениях x верно равенство $\sqrt{x^2}$ =|x|	квадратных корней из этих чисел: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} * \sqrt{b}$ Теорема 2. Если a ≥0 и b>0, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Замечание: если a ≥0 и n - -натуральное число, то $\sqrt{a^{2n}} = a^2$
Преобразование выражений содержащих квадратные корни	+	+	+
Сравнение учебников 9 класса			
<u>Критерий</u>	*Г. В. Дорофеев «МАТЕМАТИКА. Алгебра. Функции. Анализ данных», 9 класс*	*С. А. Теляковский «Алгебра» , 9 класс.*	*А. Г. Мордкович «Алгебра» , 9 класс*
Степень с рациональным показателем	-	Если a - положительное число, $\frac{m}{n}$ – дробное число (m-целое , n-натуральное) , то $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, Если $\frac{m}{n}$ – дробное положительное число (m и n-натуральные), то	10класс

		$0^{\frac{m}{n}} = 0$	
Свойства степени с рациональным показателем	-	1. $a^p * a^g = a^{p+g}$ 2. $a^p : a^g = a^{p-g}$ 3. $(a^p)^g = a^{pg}$ a>0 и b>0 и любого рационального p: 4.$(abc\ldots)^p = a^p \cdot b^p \cdot c^p$ 5.$(\frac{a}{b})^p = \frac{a^p}{b^p}$, (b≠0)	10класс
Преобразование выражений, содержащих степени с дробными показателями	-	+	+
Корень n-ой степени	-	Корнем n-ой степени из чиста a называется такое число, n-я степень которого равна a.	10 класс
Свойства арифметического корня n-степени	-	Теорема 1: Если a≥0 и b≥0, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$ Теорема 2: Если a ≥0 и b>0 , то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.	10 класс

Сравнение учебников 10 класса			
<u>*Критерий*</u>	*Г. В. Дорофеев «Алгебра и начала анализа» 10 класс*	*С. А. Теляковский «Алгебра» , 10 класс.*	*А. Г. Мордкович «Алгебра» , 10 класс*
Степень с рациональным показателем	-	*9 класс*	*Определение 1*: Если $\frac{p}{g}$ – обыкновенная дробь (g≠1) и a≥0, то под $a^{\frac{p}{g}}$ понимают $\sqrt[g]{a^p}$, т.е. $$a^{\frac{p}{g}} = \sqrt[g]{a^p}$$ *Определение 2*: Если $\frac{p}{g}$ – обыкновенная дробь (g≠1) и a>0, то под $a^{\frac{-p}{g}}$ понимают $\frac{1}{a^{\frac{p}{g}}}$, т.е. $$a^{\frac{-p}{g}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{g}}}$$
Свойства степени с рациональным показателем	-	*9 класс*	1. $a^s * a^t = a^{s+t}$ 2. $a^s : a^t = a^{s-t}$ 3. $(a^s)^t = a^{st}$ 4.$(ab)^s = a^s \cdot b^s$ 5.$(\frac{a}{b})^s = \frac{a^s}{b^s}$
Корень n-ой степени	b есть корень степени n из a ⇔ $b^n = a$.	*9 класс*	<u>Определение 1</u>:Корнем n-ой степени из неотрицательно числа a (n=2, 3, 4, 5,…) называют

			такое неотрицательное число, которое при возведении в степени n дает в результате число а. Определение 2: Корнем нечетной степени n из отрицательного числа а (n=3, 5,…) называют такое отрицательное число, которое, будучи возведено в степень n, дает в результате число а.
Свойства арифметического корня n-степени	При четном n: 1.При а<0 корня степени n не существует. 2.Существует единственный корень степени n из 0 – число 0. 3.При а>0 существует два взаимно противоположных корня степени n из а. При нечетном n: При любом а существует единственный корень степени n из а.	*9 класс*	Теорема 1: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ Теорема 2: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ Теорема 3:$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$ Теорема 4:$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ Теорема 5: $\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}$

Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова

«Алгебра» 7 класс.

Изучение степеней в данном учебнике начинается в главе №3 «Степень с натуральным показателем», параграф 6 «Степень и её свойства».

В пункте 16. «Определение степени с натуральным показателем» вводится определение степени числа с натуральным показателем, так же даются некоторые замечания про возведение в степень положительного и отрицательного числа(с четным и нечетным показателем), рассматриваются примеры.

В пункте 17. «Умножение и деление степеней» рассматриваются два свойства степеней с одинаковыми показателями и даются соответствующие правила, рассматриваются примеры. Заканчивается пункт определением: Степень числа а, не равного нулю, с нулевым показателем равна единице.

Изучение данной темы останавливается на пункте 18. «Возведение в степень произведения и степени» в нем вводятся два свойства, даются соответствующие правила, рассматриваются примеры.

Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова

«Алгебра» 8 класс.

В данном учебники вводится сначала понятие квадратного корня, а затем степени.

Изучение корней начинается в главе №2 «Квадратные корни», параграф 5 «Арифметический квадратный корень».

В пункте 11. «Квадратные корни. Арифметический квадратный корень» понятие квадратного корня вводится после рассмотрения задачи про площадь квадрата, после поясняется, что такое арифметический квадратный корень, даются некоторые замечания ,рассматриваются примеры.

В пункте 12. «Уравнение $x^2 = а$» рассматривается решение уравнения $x^2 = а$, выделяются три возможных случая и рассматриваются примеры.

В пункте 13. «Нахождение приближенных значений квадратного корня» отмечаются приемы для нахождения приближенных значений квадратного корня, рассматриваются примеры.

В пункте 14. «Функция $y = \sqrt{x}$ и её график» решается задача о зависимости площади квадрата от его стороны и наоборот, записываются соответствующие формулы, строятся графики и формулируются некоторые свойства функции $y = \sqrt{x}$.

В параграфе 6. «Свойства арифметического квадратного корня» , пункт 15. «Квадратный корень из произведения и дроби» вводятся свойства квадратного корня в виде теорем (1), (2), рассматриваются примеры.

В пункте 16. «Квадратный корень из степени» также дается теорем и рассматриваются примеры.

В параграфе 7. «Применение свойств арифметического квадратного корня» данной теме выделяется два пункта, в которых доступно рассказывается о способах применения свойств корня.

Изучение степеней в данном учебнике начинается в главе №5 «Степень с целым показателем», параграф 13 «Степень с целым показателем и её свойства».

В пункте 33. «Определение степени с целым отрицательным показателем» дается определение, замечание о выражение не имеющем смысла и рассматриваются примеры.

В пункте 34. «Свойства степени с целым показателем» рассматриваются свойства (1), (2), (3), (4), (5) и закрепляются на конкретных примерах.

Заканчивается изучение данной темы в пункте 35. «Стандартный вид числа» дается определение, рассматриваются некоторые примеры.

Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова «Алгебра» 9 класс.

В данном учебнике понятия степени и корня рассматриваются в одной главе №4. В параграфе 10. «Корень n-ой степени», пункт 23. «Определение корня n-ой степени» дается определение корня n-ой степени, на основе степенной функции (с четным и нечетным показателем) выводится следствие, после чего дается определение арифметического корня n-ой степени, рассматриваются 4 примера.

В пункте 24. «Свойства арифметического квадратного корня n – ой степени» отмечается, что все известные свойства арифметического квадратного корня справедливы и для корня n-ой степени и при n>2, формулируются теоремы (1), (2) некоторые следствия и рассматриваются 4 примера .

В параграфе 11. «Степень с рациональным показателем и её свойства», пункт 25. «Определение степени с дробным показателем» дается определение степени для дробного показателя с положительным основание, а также с основанием равным нулю.

В пункте 26. «Свойства степени с рациональным показателем» сначала говорится, что известные свойства степени с целым показателем справедливы и для степени с любым рациональным показателем, все пять свойства записаны, после примеров выводятся некоторые замечания. Заканчивается рассмотрение данной темы пунктом 27. «Преобразование выражений, содержащих степени с дробными показателями»

В конце каждого пункта имеются упражнения, которые разделены на задания для устной работы, задания обязательные (не обязательные) для общеобразовательных классов, задания повышенной трудности и упражнения для повторения.

Г.В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева «МАТЕМАТИКА. Арифметика. Алгебра. Анализ данных» 7 класс.

Изучение степеней в данном учебнике начинается в главе №1 «Степень с натуральным показателем».

В пункте 1.2. «Степень с натуральным показателем» вводится определение степени числа с натуральным показателем, так же даются некоторые замечания про возведение в степень положительного и отрицательного числа(с четным и нечетным показателем), рассматриваются примеры.

Возвращается автор к данной теме в главе №6 «Свойства степени с натуральным показателем».

В пункте 6.1. «Произведение и частное степеней» рассматриваются два свойства степеней с одинаковыми показателями и даются соответствующие правила, рассматриваются примеры.

Заканчивается изучение данной темы в пункте 6.2. «Степень степени, произведения и дроби» в нем вводятся три свойства, даются соответствующие правила, рассматриваются примеры.

Г.В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева «МАТЕМАТИКА. Алгебра. Функции. Анализ данных» 8 класс.

В данном учебнике сначала вводится понятие степени с целым показателем глава №1 «Алгебраические дроби», а затем понятие квадратного корня глава №2 «Квадратные корни».

Изучение степеней в данном учебнике начинается с пункта 1.5. «Степень с целым показателем» в нем дается определение, замечание о степени с нулевым показателем, также вводится определение о стандартном виде числа и рассматриваются примеры.

В пункте 1.6. «Свойства степени с целым показателем» говорится, что известные свойства степени с натуральным показателем распространяются и на степень с любым целым показателем, рассматриваются эти свойства и закрепляются на конкретных примерах.

Изучение корней начинается с пункта 2.1. «Задача о нахождении стороны квадрата» в нем рассматривается задача, выделяется способ для выражения стороны квадрата через его площадь, после чего вводится новый символ (знак корня). После этого пункта рассматриваются иррациональные числа и теорема Пифагора, пункты 2.2-2.3.

В пункте 2.4. «Квадратный корень – алгебраический подход» решается задача про площадь квадрата, вводится определение квадратного корня, после чего рассматривается общий случай существования квадратных корней из произвольного числа с построением графика, результаты записываются в виде следствий.

В пункте 2.5. «Свойства квадратных корней» вводятся свойства квадратного корня, рассматриваются примеры. В пункте 2.6. рассматривается применение квадратного корня.

Отдельно выделен пункт 2.7. «Кубический корень» в нем доступно объясняется, что такое кубический корень, строится график и выделяются некоторые свойства. Заканчивается изучение данной темы памяткой о двойных радикалах: «Для тех, кому интересно».

Г.В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева «МАТЕМАТИКА. Алгебра. Функции. Анализ данных» 9 класс.

Если сравнить данный учебник с учебником Ю. Н. Макарычева, то можно заметить, что в 9 классе не рассматривается понятие степени с рациональным показателем (в пункте 1.1. дается определение рационального числа), а также и нет упоминаний о корне n-ой степени.

<u>Г.В. Дорофеев, Л. В. Кузнецова, Е. А. Седова «Алгебра и начала анализа» 10 класс.</u>

В данном учебнике не рассматривается тема степени с рациональным показателем. Понятие же корня n-ой степени дается в главе №4 «Действительные числа» параграф 4.3. «Рациональные и иррациональные числа» пункт 4.3.1. «Корни степени n» начинается изучение данного вопроса с определения квадратного корня, арифметического квадратного корня, затем кубического корня. После всех рассуждений делается обобщение определения кубического и квадратного корня. Проводится исследование на существование и единственность этого корня с помощью графика, выводятся некоторые следствия и закрепляется все 6 примерами.

В конце каждой главы имеются упражнения разной сложности, а также пометки: 1) Вопросы для повторения к главам; 2) Задания для самопроверки к главам; 3) Для тех, кому интересно!

<u>А. Г. Мордкович, Л. А. Александрова, Т. Н. Мишустина, Е. Е. Тульчинская «Алгебра» 7 класс.</u>

Изучение степеней в данном учебнике начинается в главе №2 «Степень с натуральным показателем и её свойства».

В параграфе 4. «Что такое степень с натуральным показателем» весьма подробно разбирается понятие степени с натуральным показателем, закрепляется оно тремя примерами, после дается определение степени с показателем равным 1 и разбирается пример (4), на основе которого выводятся свойства возведения отрицательного числа в степень (четную, нечетную).

В параграфе 5. «Таблица основных степеней» представлена таблица степеней с основанием 1, 0, -1 и рассматриваются соответсвующие примеры.

В параграфе 6. «Свойства степеней с натуральным показателем» открываются, формулируются и доказываются свойства степеней. Сначала свойства записываются в качестве теорем 1-2-3,в конце параграфа даются правила, замечание и закрепляется все примерами.

В отдельном параграфе 7. «Умножение и деление степеней с одинаковым показателем» выделены ещё два свойства 4-5, закрепленные примерами.

Заканчивается изучение данной темы в параграфе 8. «Степень с нулевым показателем» введением понятия степени с нулевым показателем, после чего подведены основные результаты.

А. Г. Мордкович, Л. А. Александрова, Т. Н. Мишустина, Е. Е. Тульчинская «Алгебра» 8 класс.

В данном учебники введение понятия степени начинается в главе №1 «Алгебраические дроби», понятия квадратного корня в главе №2 «Функция $y = \sqrt{x}$. Свойства квадратного корня.»

Тема степени изучается в параграфе 8. «Степень с отрицательным целым показателем » в котором, на основе примеров, формулируются определение степени с отрицательным целым показателем и свойства 1-2-3-4-5, с пояснением, что свойства степеней с натуральным показателем справедливы и для отрицательных целых показателей.

Изучение корня начинается в параграфе 10. «Понятие квадратного корня из неотрицательного числа» с решения графически сначала уравнения $x^2 = 4$, затем уравнения $x^2 = 5$, рассматривается метод от противного, вводится определение квадратного корня из неотрицательного числа, записываются два свойства, также приводится сравнительная таблица(возведения в квадрат и извлечение квадратного корня), приведены примеры.

В следующих параграфах рассматриваются иррациональные числа, множество действительных чисел и функция $y = \sqrt{x}$.

В параграфе 14. «Свойства квадратного корня» в качестве теорем вводятся свойства квадратного корня (из произведения и дроби), формулируются замечания к каждой теореме, рассматриваются примеры.

Заканчивается изучение данной темы параграфом 15. «Преобразование выражений, содержащих операцию извлечения квадратного корня».

А. Г. Мордкович, Л. А. Александрова, Т. Н. Мишустина, Е. Е. Тульчинская «Алгебра» 9 класс.

В данном учебнике для 9 класса в сравнении с рассмотренными ранее не вводится ни понятие степени с рациональным показателем, ни понятие корня n-ой степени.

А. Г. Мордкович, Л. А. Александрова, Т. Н. Мишустина, Е. Е. Тульчинская «Алгебра и начала анализа» 10-11 класс.

В данном учебнике понятия степени с рациональным показателем и понятие корня n-ой степени изучается в одной главе №6. «Степени и корни. Степенные функции».

В параграфе 39. «Понятие корня n-ой степени из действительного числа» сначала рассматривается решение графически уравнения $x^4 = 1$, затем уравнения $x^4 = 5$, на основе решения данных уравнений вводятся понятия корня четвертой степени и корня n-ой степени, формулируются замечания, также вводится понятие корня нечетной степени n из отрицательного числа, рассматриваются примеры.

Далее в параграфе 40 изучаются функции $y = \sqrt[n]{x}$, их свойства и графики.

В параграфе 41. «Свойства корня n-ой степени» формулируются свойства корня n-ой степени в виде теорем, приводится краткая запись доказательства каждой теоремы (таблица), рассматриваются примеры.

В параграфе 42 рассматривается преобразование выражений, содержащих радикалы.

В параграфе 43. «Обобщение понятия о показателе степени» сначала вводится определение (1): $a^{\frac{p}{g}} = \sqrt[g]{a^p}$, после оно закрепляется на примерах и формулируется определение (2): $a^{\frac{-p}{g}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{g}}}$, которое также закрепляется на конкретных примерах.

Хочется отметить, что учебники А. Г. Дорофеева удобны тем, что после каждой главы, помимо номеров разной сложности, есть небольшой пункт «Основные результаты», в котором кратко и ясно изложена основная информация изученной темы.

Проведём логико-математический анализ ОГЭ и ЕГЭ по математике за последние года.

Анализ ОГЭ показал, что количество заданий с корнями и степенями только увеличивается, при этом в чистом виде они встречаются редко, в основном при решении уравнений, неравенств или же систем уравнений и неравенств. Такая тенденция говорит о значимости выбранной темы.

Таблица 2- Анализ ОГЭ по математике 2012-2017 года.

Год	Задания	Примеры заданий
2012	10.Упростите выражение 12.Найдите корень уравнения 18.Решите неравенство 19.Сократите	$\frac{a^2-b^2}{ab} \div \left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$ $4x^2+7x+3=0$ $x^2-5x+6 \geq 0$ $\frac{a^8-a^4}{a^4+a^2}$
2013	3.Найдите значение выражения, где с $=\frac{16}{25}$, у$=\frac{121}{25}$ 4. Решить уравнение 8.Решите систему неравенств 21.Сократите дробь	$\frac{\sqrt{c}-\sqrt{y}}{\sqrt{c}+\frac{6}{5}}$ $-4x^2-29x-7=0$ $\begin{cases} -3x-15 \geq -4x-9 \\ 4x \leq 5x \end{cases}$ $\frac{27y^2}{18b^2y^2}$
2014	3.Найдите значение выражения, где $k=0{,}04,\ n=1{,}69$ 4. Решить уравнение 8.Решите систему неравенств 21.Вычислите	$\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}-0{,}3}$ $x^2+3x-29=0$ $\begin{cases} 14-3x \geq 10-2x \\ 12-3x \leq 10-4x \end{cases}$ $\frac{3^{4k-3}0{,}25^{1-2k}}{36^{2k-3}}$

2015	3. Вычислите 4. Найдите значение выражения 8.Решить неравенство 21. Вычислите	$\sqrt{5*3^2}*\sqrt{5*2^6}$ $\frac{a}{5c}-\frac{a^2+c^2}{5ac}+\frac{5c-a}{a}$ $x^2-2x-28>0$ $\frac{4a-5b+6}{5a-4b+6}=\frac{3}{1}$
2016	Часть 1: 3.Какое из данных ниже чисел является значением выражения 4.Решите уравнение 7.Найдите значение выражения, при x=6,9, y= -9,3 8.Укажите решение неравенства Часть 2: 21.Решите уравнения	$\frac{4^{-2}*4^{-6}}{4^{-5}}$ 64 , 2) $-\frac{1}{64}$, 3) $\frac{1}{64}$, 4)-64 (x−2)(−x−3)=0 $\frac{xy+y^2}{18x}*\frac{6x}{x+y}$ $81x^2\leq 16$ $x^4=(x-12)^2$
2017	1.Вычислите 3.Значение какого из выражений является рациональным числом 4.Найдите корень уравнения 7. Найдите значение выражения, если $x=2+\sqrt{5}$, $v=2-\sqrt{5}$ 8.Решить неравенство	$\frac{256*10^3}{3200}\div 20+\frac{2}{5}$ 1) $(\sqrt{2}+\sqrt{5})(2+\sqrt{5})$ 2) $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{2}\ -5)$ 3) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{5})$ 4) $(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)$ $x^3-16x=0$ $\frac{v^2-x^2}{v^2+x^2+2vx}\div\frac{x-v}{2}$ $\frac{1}{(2x+3)^2}\geq 4$

Анализ материалов ЕГЭ показал, что в заданиях степени и корни встречаю не только в чистом виде, но и при решении уравнений, неравенств или систем уравнений, неравенств. В 2010-2013 подобные задания содержались в малых количествах как в части В, так и в части С. За последние года количество заданий увеличилось, откуда и следует актуальность выбранной темы.

Таблица 3- Анализ ЕГЭ по математике 2010-2017 года.

Год	Задания	Примеры заданий
2010	В 3−найдите корень уравнения С 1−решить систему уравнений	$3^{x-2} = 27$ $\begin{cases} x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x - 1} = 7, \\ 2\sqrt{2} sin\, y = x. \end{cases}$
2011	В 3−найдите корень уравнения С 1−решить уравнение С 5−найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение	$2^{4-2x} = 64$ $\frac{6cos^2x - cosx - 2}{\sqrt{-sinx}} = 0$ $\begin{cases} a(x^4 + 1) = y + 2 - \lvert x \rvert \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$
2012	С 3 − решить систему неравенств С 5−найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции больше 1	$\begin{cases} 4^x \le 9 * 2^x - 22 \\ \log_3(x^2 - x + 3) \le 1 + \log_3 \frac{x+1}{x-2} \end{cases}$ f(a)=2a x +$\lvert x^2 - 8x + 7 \rvert$
2013	В 7−решить уравнение	$\sqrt{14 - 5x} = 3$
2014	В 11− найдите значение выражения С 1−решить уравнение С 3−решить систему неравенств С 5−найдите все значения параметра a,при которых уравнение имеет единственное решение	$\frac{3^{-10} * 3^5}{3^{-7}}$ $4^{x^2-2x+1} + 4^{x^2-2x} = 20$ $\begin{cases} 4^x - 29 * 2^x + 168 \le 0 \\ \frac{x^4 - 5x^3 + 3x - 25}{x^2 - 5x} \ge x^2 - \frac{1}{x-4} + \frac{5}{x} \end{cases}$ $\sqrt{x^4 + (a-5)^4} = \lvert x + a - 5 \rvert + \lvert x - a + 5 \rvert$

2015	В 7−решить уравнение В 11− найдите значение выражения С 3− найдите целое решение неравенства С 5−найдите все значения параметра a,для которых ровно при одном x из промежутка (0;2) значение выражения x^4-2x^2+a равно значению выражения - ax^2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-8}=\frac{1}{9}$ $\frac{0{,}8*10^{-1}}{4*10^{-2}}$ $\log_{3x^2+2}(9x^4+27x^2+28)>2$ x^4-2x^2+a и - ax^2
2016	<u>Базовый уровень:</u> Задача 2 - найдите значение выражения Задача 5 - найдите значение Выражения Задача 7 – найдите корень уравнения <u>Профильный уровень:</u> Задача 5 - Найдите корень уравнения Задача 9 - Найдите значение выражения	$(3*10^{-3})(2{,}1*10^{3})$ $\frac{4\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ $2^{1-4x}=32$ $2^{4-2x}=64$ $\sqrt{65^2-56^2}$
2017	<u>Базовый уровень:</u> Задача 2 - найдите значение выражения Задача 5 - найдите значение Выражения Задача 7 – найдите корень уравнения <u>Профильный уровень:</u> Задача 5 - Найдите корень уравнения Задача 9 - Найдите значение выражения	$\frac{9^{-2}}{(9^2)^{-2}}$ $(\sqrt{22}-1)(\sqrt{22}+1)$ $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-8}$ 4^{1-2x} $\frac{3^{6,5}}{9^{2,25}}$

§ 2. Структура и содержание факультативного курса «Степени и корни» для 8-9 классов

Факультатив по теме «Степени и корни» предназначен для тех, кто готовит учащихся к выпускным экзаменам и к конкурсным экзаменам по математике при поступлении в учебные заведения. По данной теме часто возникает много вопросов не только в школе, но и на вступительных экзаменах. Он призван расширить рамки математических знаний каждого ученика, учитывая уровень его математической подготовки.

Курс рассчитан на 10 часов для учеников 8-9 классов, его программа может корректироваться. Учитывая особенности школы, класса, уровень подготовки учащихся, учитель может изменять последовательность изучения материала, уровень его сложности, самостоятельно распределять часы и выбирать конкретные формы занятий.

Цель курса: расширить знания учащихся по теории степеней и корней, подготовить к итоговой аттестации.

Задачи:

1. Рассмотреть теоретический материал по теме «Степени и корни»

2. Провести практические занятия по теме.

3. Сформировать представления о методах и способах решения уравнений, неравенств и систем, содержащих степени и корни.

Таблица 4- Тематическое планирование занятий.

№ п/п	Тема занятия	Количество часов
1	Повторение «Степени и корни», их свойства. Решение простейших номеров.	2
2	Решение уравнений и неравенств со степенями и корнями.	2
3	Обобщающий урок на тему «Квадратные корни»	2
4	Решение систем уравнений и неравенств со степенями и корнями.	2
5	Итоговый тест	2

В качестве примера проведения занятий рассмотрим методическую разработку обобщающего урока в 8-ом классе на тему «Квадратные корни».

Цель урока: создание условий для обобщения знаний и умений по теме «Квадратные корни».

Задачи урока:

- *образовательная:* обобщить изученный материал; проверить знания по теме «Квадратные корни»;
- *развивающая:* развивать «умения учиться»: использовать знания, умения и навыки в учебной деятельности; развивать память и логическое мышление;
- *воспитательная:* воспитывать в учениках средствами урока уверенность в своих силах, а так же творческую и самоответственную личность, стремящуюся к самоорганизации.

Тип урока: Урок обобщения и систематизации знаний и умений обучающихся.

Формы работы на уроке: Устная работа, самостоятельная работа.

Метод проведения: Беседа с повторением пройденного материала; урок практикум, работа на доске; самостоятельная работа обучающихся.

Материально – техническое оснащение урока: компьютер; компьютерная презентация; учебник «Алгебра 8», Ю.Н.Макарычев; карточки.

В результате изучения темы «Квадратные корни»

Учащиеся должны знать:

- понятие арифметического квадратного корня

- основные свойства арифметического квадратного корня.

Учащиеся должны уметь:

-находить значения арифметического квадратного корня;

- применять свойства арифметического квадратного корня;

- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни;

- для практических расчетов по формулам, включая формулы, содержащие степени, радикалы, используя при необходимости справочные материалы и простейшие вычислительные устройства.

Таблица 5-Технологическая карта урока математики по теме «Квадратные корни»

Этапы урока	Задачи этапа	Деятельность учителя	Деятельность учащихся
1. Организационный момент	Создать благоприятную обстановку в классе. Психологически подготовить обучающихся к предстоящему уроку. Постановка цели и задач урока.	Приветствие, проверка подготовленности к учебному занятию, организация внимания обучающихся. -Начнем наш урок. Вспомним, какую тему мы с вами изучали на предыдущих уроках? - Верно. Сегодня на уроке мы так же продолжим изучать данную тему. Откройте тетради, запишите в тетрадях число и тему урока «Обобщение	Включаются в деловой ритм урока. Квадратные корни Записывают в тетради число и тему урока.

		по теме “Квадратные корни”» - Попробуйте сформулировать основные цели, стоящие перед нами на сегодняшнем уроке. -Правильно. Знания, полученные вами по теме “Квадратные корни”, пригодятся при решении уравнений, в частности квадратных уравнений, рассматриваемых в следующем параграфе, а так же при решении геометрических задач с использованием теоремы Пифагора. -Ваша, ребята, задача: показать свои знания и умения в процессе тестирования по теме и практике, разноуровневой самостоятельной работы.	-Повторение опорных знаний по пройденной теме. -Повторить и обобщить, отработать решение заданий с квадратными корнями .
2. Актуализация и фиксирование индивидуального затруднения в учебном действии.	Актуализация опорных знаний и способов действий.	Вызывает двоих учащихся к доске для индивидуальной работы. -Прежде, чем начинать решать уравнения, давайте с вами немного повторим. 1)Что такое квадратный корень из числа? 2)При каких а и b верно равенство $\sqrt{a}$=b? 3)Всегда ли верно	*Учащимися индивидуально и коллективно выполняются различного рода устные и письменные задания* Двое учащихся выполняют задания на доске, а в это время идет фронтальный опрос обучающихся по теме “Квадратные корни”.

		равенство $\sqrt{b^2} = b$? 4)Сформулируйте свойства квадратных корней. 5)Какие числа называются иррациональными? 6)Приведите примеры иррациональных чисел. 7)Что такое корень n-ой степени? 8)При каких значениях а можно говорить о числе $\sqrt[3]{a}$? 9)При каких значениях , а можно говорить о числе $\sqrt[4]{a}$? 10)Чему равен $\sqrt{a^2}$?	
		Проверяет и оценивает выполнение заданий учащимися на доске *Карточки для учащихся, работающих на доске.* Карточка 1 Упростите: 1) $\sqrt{27} + \sqrt{48} + \sqrt{75}$; 2) $(\sqrt{5} + \sqrt{20})^2$; 3)$\left(a\sqrt{a} + b\sqrt{b}\right)\sqrt{ab}$; 4)$(\sqrt[4]{a} + b)(\sqrt[4]{a} - b)$ Карточка 2 Освободите знаменатель от радикалов: 1) $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2\sqrt{3}}}$;	Проверяют и оценивают работу учащихся на доске Ответы: Карточка 1 1) $12\sqrt{3}$ 2) 45 3) $a^2\sqrt{b} + b^2\sqrt{a}$ 4))$\sqrt{a} - b^2$ Карточка 2 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $(\sqrt{7} - \sqrt{5})$ 3) $(-5 - 2\sqrt{6})$

		2) $\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$; 3) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.	
3.Целеполагание и мотивация. Закрепление	Установление правильности и осознанности изучения темы. Выявление пробелов изученного материала, коррекция выявленных пробелов, обеспечение закрепления в памяти обучающихся знаний и способов действий.	- А теперь ответьте на вопросы теста, выбирая единственный правильный ответ из предложенных. Какие из чисел $\sqrt{125}$, $\sqrt{1024}$, $\sqrt{2} \times \sqrt{18}$, $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}}$ являются рациональными? а) Все б) Только второе в) Все, кроме первого г) Ни одно из них Сколько положительных среди чисел $\sqrt{2}-\sqrt{3}$; $3-\sqrt{5}$; $\sqrt{73}-9$; $\sqrt{0{,}99}-0{,}99$ а) 1; б) 2; в) 3; г) 4. 3) Число х удовлетворяет неравенству х > 1. Какие из равенств $\sqrt{(x-1)^2}=x-1$; $\sqrt{(1-x)^2}=1-ч$; $\sqrt{(x-1)^2}=\lvert x-1\rvert$; $\sqrt{(1-x)^2}=x-1$. являются верными? а) Все б) Все, кроме второго в) Первое и третье г) Только первое 4) Сколько рациональных среди чисел $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$, $(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})$, $(1+\sqrt{2})$,	После выполнения теста учащиеся обмениваются работами и сверяют ответы одноклассников с правильными ответами на экране.

		$$\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$ а) 4; б) 3; в) 2; г) 1. 5) Прикиньте, к какому из указанных чисел ближе всех число$\frac{\sqrt{10^3}+\sqrt{10^5}}{\sqrt{10^7}-\sqrt{10^5}}$. а) 1; б) 0,1; в) 0,01; г) 0,001. 6) Какое расположение чисел $b=\sqrt{5}+\sqrt{8}$, $c=\sqrt{6}+\sqrt{7}$, $a=\sqrt{26}$ является верным? а) a < c < b; б) b < c < a; в) a < b < c; г) c < a < b. - Выполнение задания «Различные формы записи чисел» в парах (Приложение № 3)	По окончанию работы один из учащихся отмечает на интерактивной доске свои ответа, а учащиеся класса обсуждают их правильность, вспоминая определения чисел, принадлежащих различным классам.
4. Организация контроля	Выявление качества и уровня усвоения знаний и способов действий, а также выявление недостатков в знаниях и способах действий, установление причин выявленных недостатков.	- Сейчас, чтобы проверить, как вы умеете решать задания содержащие квадратные корни, предлагаю выполнить вам *п*роверочную работу по теме «Квадратные корни» для групп с различным уровнем подготовленности. *Вариант работы базового уровня.* 1) Вычислите:$\sqrt{\frac{225}{81}}$, $\sqrt{0{,}0144}$, $\sqrt{2^6\times5^2\times7^7}$. 2) Сравните: $\sqrt{17}$ и $3\sqrt{2}$. 3) Освободитесь от иррациональности в знаменателе: $\frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$.	Выполняют проверочную работу, с последующей проверкой с помощью ключа**.**

		Вариант работы повышенного уровня. 1) Вычислите: $\sqrt{\frac{784}{361}}$, $\sqrt{0{,}001444}$, $\sqrt{\frac{15^5 \times 33^3}{55}}$. 2) Сравните: $\sqrt{10}-3$, 3-$2\sqrt{2}$. 3) Освободитесь от иррациональности в знаменателе: $\frac{2}{2-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.	
5. Итог.	Подведение итогов. Рефлексия.	Оценивает результаты урока. За ответы во время фронтального опроса, за проверочную работу , в парах выставляет оценки. Организует беседу с группой по вопросам: 1. Достигли ли вы цели урока? 2. Что было главным на уроке? 3. Какие затруднения у вас возникли при работе на уроке? 4. Что нового вы узнали? 5. Что было интересным? 6. Чему научились?	Отвечают на вопросы.
6.Домашнее задание		Задает домашнее задание	Записывают домашнее задание, задают вопросы.

§ 3. Структура и содержание факультативного курса «Степени и корни» для 10-11 классов

Факультатив по теме «Степени и корни» предназначен для тех, кто готовит учащихся к школьным выпускным экзаменам и к конкурсным экзаменам по математике при поступлении в высшие учебные заведения. Вопросы данной темы часто вызывают затруднения на вступительных экзаменах. Он призван расширить рамки математических знаний каждого ученика, учитывая уровень его математической подготовки.

Курс рассчитан на 10 часов для учеников 10-11 классов, однако его программа может корректироваться. Учитывая особенности школы, класса, уровень подготовки учащихся, учитель может изменять последовательность изучения материала, уровень его сложности, самостоятельно распределять часы и выбирать конкретные формы занятий.

Цель курса: расширить знания учащихся по теории степеней и корней, подготовить к выпускным экзаменам.

Задачи:

1. Рассмотреть теоретический материал по теме «Степени и корни»

2. Провести практические занятия по теме.

3. Сформировать представления о методах и способах решения уравнений, неравенств и систем, содержащих степени и корни.

Таблица 6- Тематическое планирование занятий.

№ п/п	Тема занятия	Количество часов
1	Повторение. «Степени и корни», их свойства. Решение простейших номеров.	2
2	Обобщающий урок по теме «Степени и корни»	2
3	Решение уравнений и неравенств со степенями и корнями.	2
4	Решение систем уравнений и неравенств.	2
5	Итоговый тест	2

В качестве примера проведения занятий рассмотрим методическую разработку обобщающего урока в 10-ом классе на тему «Степени и корни».

Цель урока: создание условий для обобщения знаний и умений по теме «Степени и корни».

Задачи:

-обучающие: - обобщить и систематизировать знания и умения по теме «Степени и корни», использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности для практических расчетов по формулам, содержащим степени, радикалы, формирование образовательной компетенции;

- развивающие: - развивать познавательную и творческую активность в процессе решения задач, рефлексия способов и условий действия; контроль и самооценка процесса и результатов деятельности.

- воспитательные: воспитывать умение слушать и вступать в диалог, участвовать в коллективном обсуждении проблем, интегрироваться в группу сверстников и строить продуктивное взаимодействие, воспитание ответственности, уверенности, настойчивости в достижении поставленной цели и заинтересованности в конечном результате труда.

Тип урока: Урок обобщения и систематизации знаний.

Формы работы на уроке: Устная работа, самостоятельная работа.

Метод проведения: Беседа с повторением пройденного материала; урок практикум, работа на доске; самостоятельная работа обучающихся.

Материально – техническое оснащение урока: компьютер; компьютерная презентация; учебник «Алгебра и начала анализа 10 », С.М. Никольский; карточки.

В результате изучения раздела «Степени и корни»

Учащиеся должны знать:

- понятие степени, корня

- основные свойства степеней, корней.

Учащиеся должны уметь:

- находить значения корня, степени, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;

- выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней;

- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни:

-для практических расчетов по формулам, включая формулы, содержащие степени, радикалы, используя при необходимости справочные материалы и простейшие вычислительные устройства.

Ход урока

1.Организационный момент.

Учитель: Здравствуйте, садитесь. У всех есть ручки, справочные материалы на столах, Все готовы к уроку. Будьте предельно внимательны и аккуратны в вычислениях, будьте активными, уверенными в себе. Желаю Вам успехов на сегодняшнем уроке.

Эпиграфом к нашему сегодняшнему занятию будут слова И. Гете «Часто говорят, что цифры управляют миром, по крайней мере, нет сомнения в том, что цифры показывают, как он управляется». Мир математики богат и разнообразен, но базовыми камешками, на которых построен фундамент математики, являются числа. Мир чисел это огромная вселенная, путешествовать по которой мы начинаем с самого рождения и по мере нашего взросления открываем для себя все новые и новые уголки этой необъятной вселенной. На сегодняшнем уроке мы побываем на двух планетах вселенной. «Как Вы думаете, что же это будут за планеты?

Учащиеся: «Степени и корни»

Учитель: Да. Действительно на протяжении 7 уроков мы с Вами проходили раздел алгебры «Степени и корни». Как вы думаете, что мы сегодня должны сделать, чтобы подвести итоги нашей работы по этому разделу?

Учащиеся: Вспомнить определение степеней и корней, их свойства и опираясь на эти свойства решать практические задания.

Учитель: Эти задания вы видите на слайде. Следовательно: цель – обобщить и систематизировать знания, полученные в ходе изучения раздела

Учитель: Работать вы будете на бланках, за каждое выполненное задание вы будете ставить себе оценку в бланк, а потом передавать свои бланки помощникам (статистам), они будет переносить все ваши оценки в ваш оценочный лист, и в конце урока выведут итоговую оценку за весь урок. Я хочу вам представить наших статистов: И, Л, В. Статисты не только переносят в оценочный лист оценки и выводят среднюю оценку, но еще и проверяют соответствие оценки выполненному заданию. На столах у них эталоны ответов с полным решением.

Помимо индивидуальной работы у нас сегодня будет и командное соревнование, которое покажет, какая из команд лучше усвоила пройденную тему. На каждую команду тоже есть оценочный лист. Он у статистов.

2. Актуализация

1 этап. *Учитель*: Давайте приступим. Возьмите бланк № 1 (Приложение № 1)Он содержит два задания, где вы должны вспомнить свойства степеней и свойства корней. В первом задании вы ставите плюс, если согласны с утверждением, или минус, если не согласны, во втором задании необходимо дописать вторую часть формулы. Приступайте.

Время истекло, приступаем к проверке. Возьмите красную ручку. За каждый правильный ответ ставьте себе один балл. Оценка соответствует количеству правильных ответов. Все внимание на слайд. Идет проверка.

3-е задание. Обменяйтесь тетрадями. Смотрим на экран. Где были допущены ошибки. Учащиеся отвечают. Выставляют соседу оценку и возвращают тетради. Выставляем оценки и передаем бланк № 1 своим статистам.

Итак, мы с Вами повторили свойства, степеней и корней. Переходим к следующему этапу нашей работы - командным соревнованиям. Вы уже разделились сами на команды. В каждой команде по 5 человек. Дайте название командам и выберите капитанов и представьтесь.

3. Применение знаний и умений на практике

2 этап. Начнем с разминки. Каждой команде надо ответить на 5 вопросов. За каждый вопрос один балл. Все баллы выставляются в оценочный лист команды статистами. Если команда затрудняется ответить, то ответить может другая команда и заработать себе балл.

Учитель по очереди задает вопросы.

1команда Степени

1. Что такое степень числа а? (произведение n-множителей, каждый из которых равен а).

2. Чему равно $16^{\frac{1}{4}}$

3. Каким числом может быть основание степени? Положительным, отрицательным и равным нулю.

4. Вычислить: $32^{\frac{8}{5}}$

5. Чему равен корень уравнения $x^6=64$

2 команда Корни

1.Что такое арифметический корень n-ой степени из числа в?

2.Чему равен $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$

3.Вычислить $\sqrt{20} \times \sqrt{5}$

4.Может ли подкоренное выражение принимать отрицательные значения? В каком случае?

5.Чему равно $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}$

Статисты посчитайте количество баллов команд за это задание и выставьте в оценочный лист команды.

Вывод: Итак, повторив, определение корней и степеней, мы можем снова перейти к индивидуальной работе.

3 этап. Переходим к индивидуальной работе. Найдите бланк № 1 (Приложение № 2)

Учитель: На столах у Вас карточки – задания разного уровня усвоения. Выберите себе ту карточку с которой вы справитесь. В этой карточке два примеры на преобразование выражений, содержащих степени и корни **.** Свои ответы сверяем с эталоном, который Вы видите на слайде. Оценка «5» - нет ошибки, все верно, «4» - 1 ошибка, «3» - 2 ошибки, «2»- ни один пример не решен правильно. Передаем бланк № 1 вашим помощникам (статистам).

4 этап. Следующий этап работы командное соревнование.

Учитель: Устали? Давайте отдохнем и поиграем. Угадай-ка**.**

Вам необходимо угадать неопознанный математический объект. Вам предлагается пять характеристик этого объекта, если угадываете с первой попытки получаете 5 баллов, со второй 4 балла и так далее. Какая из команд угадывает та и выигрывает.

Послушайте, пожалуйсто первая подсказка.

1. Она не такая как все, она не принадлежит множеству рациональных чисел. Подумайте, посовещайтесь.

2. Она дружит с логарифмом, но дружба эта странная: если она встает с ним рядом, то его запись сокращается с трех букв до двух.

3. С латинского ее название переводится как показывающая.

4. Она приближенно равна 2.71828

5. Она записывается буквой е.

Так команда «Степени или корни» зарабатывает баллы, которые уходят в их копилку.

5 этап. Дешифратор.

Вам нужно найти значение следующих выражений. За каждым ответом зашифрована буква, порядковый номер задания показывает, какая по счету буква зашифрована в слове. Победит та команда, которая угадает это слово первой и заработает 5 баллов. Что же это за слово? Кто же окажется быстрее? Мы узнаем через несколько минут.

Возьмите бланк № 2 (Приложение № 2) команды. Приступайте к выполнению. Команда «Степени или корни» Молодец. Она первой справилось с заданием. В ее копилку 5 баллов. Кто это? В чем его заслуга? Мы сейчас с вами узнаем.

Учитель: И. подготовила нам небольшое сообщение об этом математике. Давайте послушаем.

Учитель: Помимо математики, Декарт занимался философией, механикой, физикой и физиологией, создатель аналитической геометрии и современной алгебраической символики . Все его изобретения имели практические применение . Декарт автор метода радикального сомнения в философии, механицизма в физике, предтеча рефлексологии. Умер Декарт в Стокгольме 11 февраля 1650.

6 Этап. Практическое задание.

Итак, все знания, которые вы получили по теме «Степени и корни», могут быть использованы вами по назначению в вашей жизни. Командный бланк №3. На нем две задачи прикладного характера. Я предлагаю решить одну вам незатейливую задачу. На ваш выбор, за правильно выполненное задание команда получает 5 баллов и еще один балл получает та команда, которая сделает задание первой.

Начинаем проверку. На экране вы видите ответы. Ставьте количество баллов и передавайте командный бланк № 3 статистам. Я потом проверю решение задачи.

4. Подведение итогов.

Пока наши помощники считают. Давайте подведем итоги нашего занятия. Что сегодня мы делали?

Учащиеся: повторили свойства и определение степеней и корней , решали примеры и задачу , которая имеет практическое применение.

Учитель: Да, действительно, мы с вами сегодня вспомнили и систематизировали все знания по теме: «Степени и корни ». Как вы думаете нужны нам эти знания? Да нужны. Где? Знания необходимы в астрономии, технике, физике, химии и в других областях. Они нужны еще и для того чтобы познать красоту окружающего мира, его закономерности и тайны.

Учитель: Помощники готовы? Пожалуйста, назовите оценки, заработанные каждым в ходе индивидуальной работы и баллы команды. Оценки я выставлю в журнал. Следовательно, мы делаем вывод, что команда «___» победила. Она набрала «_» баллов. Я поздравляю ее и награждаю таблицей степеней. Но я хочу заметить, что все ребята сегодня хорошо работали, были активными. Мне хочется выделить таких учащихся как…Считаю, что урок у нас был насыщенным и плодотворным? Как вы считаете? Какие у Вас остались впечатления об уроке? Понравился урок, было интересно? Возьмите веселый смайлик, если нет, то грустный и положите мне на стол при выходе.

5.Домашнее задание: Повторить свойства степеней и корней. Создать презентацию «Мир степеней», «Мир корней» по выбору.

Урок окончен. Спасибо за урок.

Апробация факультативных занятий

Апробация результатов исследования проводилась в период практики МБОУ Гимназия №1 г. Челябинска в 11 классе.

Для определения остаточных знаний, было проведено занятие на повторение ранее изученного материала, написан тест, по результатам которого у 9 из 20 учащихся возникли трудности в разных по уровню сложности заданиях.

Во время занятий было выявлено, что большинство учащихся плохо усвоили тему на уроках и не помнили определения, свойства, как степеней, так и корней, а также методов решения уравнений, неравенств. Это осложнило работу, которая заключалась в систематизации и обобщении пройденного ими ранее материала и разборе заданий более сложного уровня. Также учащиеся не владеют математическим языком и неверно объясняют решение.

Были проанализированы ошибки учащихся, подобраны задания и разработан обобщающий урок по теме «Степени и корни». Проведено ещё два занятия на решение уравнений, неравенств со степенями, корнями и их систем. На последнем занятие выполнен итоговый тест, с которым справились 17 из 20 учащихся. Тема факультатива была усвоена, значит, учащиеся смогут применить полученные знания при сдаче ЕГЭ.

Заключение

В квалификационной работе по теме «Методика обучения тождественным преобразованиям в теме «Степени и корни»» нами было рассмотрено введение материала в обучение в школьном курсе алгебры и начала анализа.

Проанализировав современные учебники по изучению темы «Степени и корни», был сделан вывод, что не во всех учебниках достаточное количество заданий для закрепления темы. Были рассмотрены и представлены методы формирования навыков у учеников при изучении материала, а также выделены наиболее частые ошибки учащихся в изучении темы, даны рекомендации по их устранению. Очевидна необходимость пропедевтики в формировании умений у учащихся решать задачи подобного типа.

Подводя итоги, следует отметить, что достигнуты цель и все поставленные задачи квалификационной работы. В первую очередь рассмотрены стандартные методы решения типовых задач с корнями и степенями, а также подобраны и решены задания более сложного уровня. Использование подобных задач способствует развитию математической и логической культуры у учащихся, развитию интереса к математике, поскольку открывает для них новые способы и возможности для самостоятельного поиска.

В работе были решены следующие задачи:

1. Проанализированы современные учебники школьного курса математики и материалы ОГЭ и ЕГЭ;
2. Изучена методическая литература по математике, выделены основные принципы и приемы подачи материала;
3. Выделены типичные ошибки учащихся при изучении данной темы и даны рекомендации по их устранению;

4. Так же разработаны два факультативных курса по теме «Степени и корни» в 8-9 классах и в 10-11 классах. В приложении приведены подробные решения двух итоговых тестов из этих факультативных курсов.

Практическая значимость работы определяется тем, что в ней разработаны и проверены учебные материалы для преподавания темы «Степени и корни». Подобрана система задач для указанной темы. Данная работа может быть использована как педагогами, так и учащимися при подготовке к ОГЭ и ЕГЭ по математике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1) Дорофеев, Г. В. Алгебра и начала анализа.10 кл. В 2 ч. Ч. I : учеб. для общеобразоват. учеб.заведений / Г. В. Дорофеев, Л. В. Кузнецова, Е. А. Седова. – 6-е изд. , стереотип. – М.: Дрофа, 2008. – 316, [4] с.:

2) Дорофеев, Г. В. Математика. Алгебра. Функции. Анализ данных.8 класс: Учеб. для общеобразоват. учеб.заведений / Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева; Под ред. Г. В. Дорофеева. – М.: Дрофа, 2007. – 304с.:

3) Дорофеев, Г. В. Математика. Алгебра. Функции. Анализ данных.9 кл: Учеб. для общеобразоват. учеб.заведений / Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева; Под ред. Г. В. Дорофеева. –3-е изд. , стереотип. - М.: Дрофа, 2006. – 352с.:

4) Дорофеев, Г. В. Математика. Арифметика. Алгебра. Анализ данных.7 класс: Учеб. для общеобразоват. учеб.заведений / Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева; Под ред. Г. В. Дорофеева. – М.: Дрофа, 2003. – 288с.:

5) ЕГЭ 2017. Математика. Базовый уровень. 10 вариантов типовых тестовых заданий/ А.В. Андропов, А.В. Забелин и др.; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2017. – 56 с.

6) ЕГЭ 2017. Математика. Профильный уровень. Типовые тестовые задания/ И.В. Ященко, М. А. Волчкевич и др.; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2017. – 55 с.

7) Кучугурова, Н. Д. Интенсивный курс общей методики преподавания математики: учеб. пособие. – М.: МПГУ, 2014. — 152с.:

8) Малова, И.Е. Теория и методика обучения математике в средней школе/И.Е. Малова, С.К.Горохова, Н.А. Малинникова, Г.А.Яцковская. -М.: ВЛАДОС, 2009. — 445 с.:

9) Методика преподавания математики в восьмилетней школе / С. Е. Ляпин. – М.: Просвещение, 1965. – 730с.:

10) Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики. Учеб. Пособие для студентов физ.- мат. Фак. пед. ин-тов. М., «Просвещение», 1997.- 480с.:

11) Мордкович А. Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: В двух частях. Ч. 1: Учебник для общеобразоват. учреждений. – 11-е изд. – М.: Мнемозина, 2010. – 375с.:

12) Мордкович А. Г. Алгебра. 7 кл.: В двух частях. Ч. 1: Учебник для общеобразоват. учреждений. – 16-е изд. – М.: Мнемозина, 2013. – 160с.:

13) Мордкович А. Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1.Учебник для общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович. – 12-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2010. – 215с.:

14) Мордкович А. Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1.Учебник для общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович. – 14-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 231с.:

15) Новик, И.А. Практикум по методике обучения математике. – М.: Дрофа, 2008. — 240с.

16) Преподавание алгебры в 6-8 классах / Сост. Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк. – М.: Просвещение, 1980. – 270.:

17) Теляковский, С.А. Алгебра: Учеб. для 7кл. общеобразоват. учреждений / Ю.Н.Макарычев, Н.Г.Миндюк, К.Н.Нешков, С.Б.Суворова; Под ред. С.А. Теляковского. – 17-е изд. – М.: Просвещение, 2008. – 181с.:

18) Теляковский, С.А. Алгебра: Учеб. для 8кл. общеобразоват. учреждений / Ю.Н.Макарычев, Н.Г.Миндюк, К.Н.Нешков, С.Б.Суворова; Под ред. С.А. Теляковского. – 19-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 276с.:

19) Теляковский, С.А. Алгебра: Учеб. для 9 кл. общеобразоват. учреждений / Ю.Н.Макарычев, Н.Г.Миндюк, К.Н.Нешков, С.Б.Суворова; Под ред. С.А. Теляковского. – 17-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 214с.:

20) Демонстрационные варианты КИМ ЕГЭ 2012 [Электронный ресурс] / Официальный информационный портал единого государственного экзамена. – Режим доступа: http://ege.edu.ru/main/demovers.

21) Единый государственный экзамен [Электронный ресурс] / Российское образование. Федеральный портал. – Режим доступа: http://www.edu.ru/Единый государственный экзамен по математике, 2011 год [Электронный ресурс] / Компания «Ваш репетитор». – Режим доступа: http://repetitors.info/library.php?ege_math_2011

22) КИМы к ЕГЭ [Электронный ресурс]/ Подготовка к ЕГЭ и ОГЭ. – Режим доступа: http://егэша.рф/news/kim_ege13/2014-05-14-181.