Титульный лист выпускной квалификационной работы

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Основы изучения дифференциального исчисления в школе

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05 педагогическое образование
код, направление
Направленность программы бакалавриата

«Математика. Экономика»

Выполнил (а):
Студент (ка) группы ОФ-513/086-5-1
Шенмаер Ирина Владимировна

Проверка на объем заимствований:
___________% авторского текста

Работа _______________ к защите
рекомендована/не рекомендована

« ___ » ___________ 20__ г.
зав. кафедрой _______________
(название кафедры)
_____________ ФИО

Научный руководитель:
канд. пед. наук, доцент кафедры ММОМ
Коржакова Светлана Васильевна

Челябинск
2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

ГЛАВА I. ИЗУЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ В ШКОЛЕ 6

1.1 Теория производной 6

1.1.1 Определение производной 6

1.1.2 Непрерывность функции 7

1.1.3 Формулы дифференцирования элементарных, сложных и обратных функций 8

1.1.4 Правила дифференцирования 10

1.1.5 Геометрический смысл производной 12

1.1.6 Применение производной к исследованию функции 13

1.1.7 Приближенные вычисления 18

1.2 Полнота содержания темы «Производная» в школьных учебниках 19

1.3 Анализ материалов ЕГЭ 31

ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА МЕТОДИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ИСЧИСЛЕНИЯМ 38

2.1 Разработка теста и его решение 38

2.1.1 Тест по теме «Дифференциальные исчисления» 38

2.1.2 Решение теста 41

2.2 Факультативный курс по математике: «Производная в заданиях ЕГЭ» 55

2.2.1 Пояснительная записка 55

2.2.2 Тематическое планирование 56

2.2.3 Контрольная работа 57

2.3 Апробация результатов исследования 64

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 67

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 68

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 70

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 81

ВВЕДЕНИЕ

Математическое образование развивает воображение и интуицию, формирует навыки логического и алгоритмического мышления. Поэтому в школе математика является одним из значимых предметов с точки зрения развития интеллекта учащихся, а одной из главных целей школ – обеспечение учащихся необходимыми математическими знаниями, умениями и навыками. Тема «Производная, её применение» в школьном курсе математики является важным разделом начал математического анализа. С помощью производной осуществляется исследование функций, а функции в свою очередь описывают реальные процессы, происходящие в природе. В перечень заданий ЕГЭ по математике включены задачи, решение которых связано с использованием производной. Во время сдачи экзамена выпускники часто сталкиваются с трудностями при решении задач такого рода.

Таким образом, особую актуальность приобретает исследование методических основ изучения производной в школе, и разработка факультативных занятий, способствующих укреплению и росту знаний по теме «Производная».

Объект исследования: содержание раздела «Начала математического анализа» в школьном курсе математике.

Предметом исследования является методика обучения дифференциальному исчислению в школьном курсе математики.

Цель исследования: Выявить основные направления расширения и углубления знаний, умений, навыков учащихся по теме «Производная» и разработать факультатив, способствующий формированию практических навыков для решения заданий единого государственного экзамена по теме «Производная функции».

Для достижения цели необходимо решить следующие **задачи исследования:**

- Проанализировать содержание темы «Производная» в школьных учебниках.
- Осуществить анализ материалов ЕГЭ с целью выделения задач по теме «Производная».
- Разработать тесты по типу ЕГЭ и факультативный курс занятий для учащихся с целью развития у учащихся навыков применения теоретических знаний по теме «Производная функции» для подготовки к единому государственному экзамену.

Гипотеза исследования состоит в том, что факультатив «Производная в заданиях ЕГЭ», предполагающий дополнительное изучение производной, включающий ряд примеров, задач, контрольную работу, может обеспечить существенное повышение качества усвоения математических знаний и результатов в подготовки к ЕГЭ.

Первая глава дипломной работы включает в себя основную теорию по теме «Производная», анализ полноты содержания данной темы в школьных учебниках базового уровня и уровня с углубленным изучением, который позволит выявить основные направления и различия в изложение темы, а так же в главе приведен анализ материалов ЕГЭ за 2013-2017 годы.

Вторая глава содержит факультативный курс, направленный на усвоение учащимися материала по теме «Производная» и подготовку к сдаче единого государственного экзамена по математике.

Данная работа может быть использована учителями математики для подготовки учащихся к сдаче единого государственного экзамена.

ГЛАВА I. ИЗУЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ В ШКОЛЕ

1.1 Теория производной

При изучении школьной математики используется разнообразная литература. Ее содержание во многом совпадает, но есть и различая в способах и объемах изложения. Ниже представлен систематизированный материал из школьных учебников по теме «Производная».

1.1.1 Определение производной

Определение. Производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(a; b)$, в точке x этого интервала называют предел отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю. [3, С.88]

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Пример 1. Найти производную функции $f(x) = x^2$.

Решение. 1) $\Delta f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$

2) $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$

3) $\lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x$

Следовательно, $(x^2)' = 2x$

Пример 2. Доказать: $C' = 0$, где C – заданное число.

Доказательство:

1) $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{C - C}{\Delta x} = 0$

2) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$

Следовательно, $C' = 0$.

Пример 3.Доказать: $x' = 1$

Доказательство:

1) $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1$

2) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$

Следовательно, $x' = 1$. [12, С.162]

1.1.2 Непрерывность функции

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке: $\Delta f(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Доказательство:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \Delta x\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0$$

т.е. $f\,(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$ при $\Delta x \to 0 \Rightarrow$ функция $y = f(x)$ непрерывна.

Замечание: обратная теорема неверна.

Пример. Функция $f(x) = |x|$ непрерывна для всех x, но в точке $x = 0$ она не имеет производной.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 1, \qquad \Delta x > 0.$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = -1, \qquad \Delta x < 0.$$

Это означает, что в точке $x = 0$ не существует предел, т.е. точке $x = 0$ функция не имеет производной. (Никольский94)

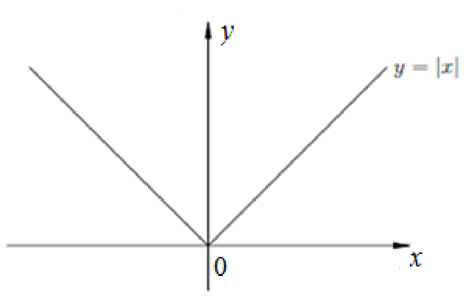


Рис. 1

Определение. Функция называется непрерывной на промежутке, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

1.1.3 Формулы дифференцирования элементарных, сложных и обратных функций

1. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

Доказательство. В точке $x > 0$ зададим приращение аргумента $\Delta x \neq 0$ $(x + \Delta x > 0)$ и вычислим приращение функции $f(x) = \log_a x$.

$\Delta f = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x+\Delta x}{x} = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{\Delta x}{x}\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{\Delta x}{x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$.

Пусть $t = \frac{\Delta x}{x}$, тогда $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{x \ln a}\ \ln(1+t)^{\frac{1}{t}}$.

Очевидно, что $t \to 0$ при $\Delta x \to 0$ *и* $\ln(1+t)^{\frac{1}{t}} \to 1$.

Поэтому для любого $x > 0$ имеем $(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{x \ln a}$.

2. $(a^x)' = a^x \ln a$

Доказательство. В точке x зададим приращение аргумента $\Delta x \neq 0$ и вычислим приращение функции $f(x) = a^x$*:*

$\Delta f = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1) = a^x\left(e^{\Delta x\, \ln a} - 1\right) = a^x \frac{e^{\Delta x\, \ln a} - 1}{\Delta x \ln a}\Delta x\ \ln a = a^x\ \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha}\Delta x \ln a$,

Где $\alpha = \ln a\ \Delta x$. Тогда $\frac{\Delta f}{\Delta x} = a^x \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha}\ln a$.

Очевидно, что $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$ *и* $\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha} \to 1$. Поэтому для любого x имеем $(a^x)' = a^x \ln a$. [3, С. 100]

3. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, рассмотрим без доказательства.

Производные тригонометрических функций.

1. $(\sin x)' = \cos x$.

Доказательство:

$$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{2\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}).$$

$$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \to 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0.$$

2. $(\cos x)' = -\sin x$.

Доказательство:

$$(\cos x)' = \left(\sin(\frac{\pi}{2} - x)\right)' = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\sin x.$$

3. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Доказательство:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

4. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Доказательство:

$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$ [2, С.121].

Производная сложной функции.

Теорема. Пусть сложная функция $y = f(x) = \varphi(\psi(x))$ такова, что функция $y = \varphi(u)$ определена на промежутке U, а функция $u = \psi(x)$ определена на промежутке X и множество всех ее значений входит в промежуток U. Пусть функция $u = \psi(x)$ имеет производную в каждой точке внутри промежутка X, а функция $y = \varphi(u)$ имеет производную в каждой точке внутри промежутка U. Тогда функция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке внутри промежутка X, вычисляемую по формуле

$$f'(x) = \varphi'(u)\psi'(x).$$

Теорема. $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x > 0$ и $n \neq 0$.

Доказательство. Так как $x^n = e^{n \ln x}$ для $x > 0$ и $n \neq 0$, то, полагая, $\varphi(u) = e^u$, $u = \psi(x) = n \ln x$, получаем, что $y = x^n = \varphi(\psi(x))$.

Тогда $y'_x = (e^u)'_u (n \ln x)'_x = e^u n \frac{1}{x} = nx^n \frac{1}{n} = nx^{n-1}$. [3, С.103]

Производные обратно тригонометрических функций.

1. Найдем производную функции $y = \arcsin x$, $-1 < x < 1$.

Функция $y = \arcsin x$ является обратной к функции $x = \sin y, y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Поэтому для каждого $x \in (-1; 1)$

$(\arcsin x)' = y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}$.

Так как $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, то $\cos y > 0$, и из равенства $x = \sin y$ имеем $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. Следовательно, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Аналогичными рассуждениями можно доказать, что $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. Найдем производную функции $y = \arctan x, x \in R$

Функция $y = \mathrm{arctng}\, x$ является обратной к функции $x = \mathrm{tng}\, y\,, y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Потому для любого $x \in R$

$(\mathrm{arctng}\, x)' = y'(x) = \frac{1}{(\mathrm{tg}\, y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\, y}$.

Так как $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, то из равенства $x = \mathrm{tg}\, y$ получаем, что $x^2 = \mathrm{tg}^2\, y$. Следовательно, $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

5. Аналогично получаем, что $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$. [3, С.106]

1.1.4 Правила дифференцирования

1. Производная суммы равна сумме производных:

$(u + v)' = u' + v'$

Доказательство:

1) $\Delta(u + v) = u(x_0 + \Delta x) + v(x_0 + \Delta x) - \big(u(x_0) + v(x_0)\big) = \big(u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)\big) + \big(v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)\big) = \Delta u + \Delta v.$

2) $\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$

3) Функции u и v дифференцируемы в точке x_0, т.е. при $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u', \frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'.$

Тогда $\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = u' + v'$ при $\Delta x \to 0$, т.е. $(u + v)' = u' + v'$.

Пример 1. $(x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$ [12, С.167].

2. Если функции u и v дифференцируемы в точке x_0, то их произведение дифференцируемо в этой точке и $(uv)' = u'v + v'u$.

Доказательство:

1)$\Delta\,(uv) = u(x_0 + \Delta x)v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)v(x_0) = (u(x_0) + \Delta u)(v(x_0) + \Delta v) - u(x_0)v(x_0) = u(x_0)v(x_0) + \Delta u v(x_0) + u(x_0)\Delta v + \Delta u \Delta v - u(x_0)v(x_0) = \Delta u v(x_0) + u(x_0)\Delta v + \Delta u \Delta v$

2) $\frac{\Delta\,(uv)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v(x_0) + \frac{\Delta v}{\Delta x} u(x_0) + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}$

3) В силу дифференцируемости функций u и v точке x_0 при $\Delta x \to 0$ имеем $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$, $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$, $\Delta u \to 0$. Поэтому $\frac{\Delta\,(uv)}{\Delta x} \to \frac{\Delta u}{\Delta x} v(x_0) + \frac{\Delta v}{\Delta x} u(x_0)$, т.е. $(uv)' = u'v + v'u$.

Пример 2. $(5x^2)' = 5(x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x$ [12, С.167].

Следствие: Постоянный множитель можно выносить за знак производной: $(Cu)' = Cu'$.

Пример 3. $\big((2x+3)\sin x\big)' = (2x+3)'\sin x + (2x+3)(\sin x)' = 2\sin x + (2x+3)\cos x$ [12, С.168].

3. Если функции u и v дифференцируемы в точке x_0 и функция v не равна нулю в этой точке, то частное $\frac{u}{v}$ также дифференцируемо в x_0 и $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Доказательство:

1) Найдем приращение функции $\frac{1}{v}$:

$$\Delta\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v(x_0+\Delta x)} - \frac{1}{v(x_0)} = \frac{v(x_0) - v(x_0+\Delta x)}{v(x_0)v(x_0+\Delta x)} = \frac{-\Delta v}{v(x_0)(v(x_0)+\Delta v)}.$$

2) Отсюда $\frac{\Delta\left(\frac{1}{v}\right)}{\Delta x} = \frac{-\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0)(v(x_0)+\Delta v)}$.

3) При $\Delta x \to 0$ имеем $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$ (в силу дифференцируемости v в точке x_0), $\Delta v \to 0$. Поэтому $\frac{\Delta\left(\frac{1}{v}\right)}{\Delta x} \to \frac{-v'}{v \cdot v} = -\frac{v'}{v^2}$, т.е. $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

Пользуясь правилом нахождения производной произведения функций, находим производную частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' = u' \cdot \frac{1}{v} + u\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} + u \cdot \frac{-v'}{v^2} = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Пример 4. $\left(\frac{x^2}{5-4x}\right)' = \frac{(x^2)'(5-4x) - x^2(5-4x)'}{(5-4x)^2} = \frac{2x(5-4x) - x^2(-4)}{(5-4x)^2} = \frac{10x - 4x^2}{(5-4x)^2}$ [12, С.168].

1.1.5 Геометрический смысл производной

Выясним геометрический смысл производной.

Пусть точки А и М принадлежат графику функции $y = f(x)$ (рис 1.1).

Пусть x и $x + h$ абсциссы точек А и М, тогда их ординаты равны $f(x)$ и $f(x+h)$. Из треугольника АСМ, где $\mathrm{C}\big(x + h; f(x)\big)$, найдем угловой коэффициент k прямой АМ:

$$k = \tan\angle\mathrm{CAM} = \frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{AC}}, \text{ где } \mathrm{MC} = f(x+h) - f(x),\ \mathrm{AC} = h, \text{ т.е.}$$

$$k = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Пусть число x фиксировано, а $h \to 0$, тогда точка А неподвижна, а точка М, двигаясь по графику, стремится к точке А. При этом прямая АМ стремиться занять положение касательной к графику функции $y = f(x)$, поэтому $f'(x) = k$ (рис. 2) [1, С. 252].

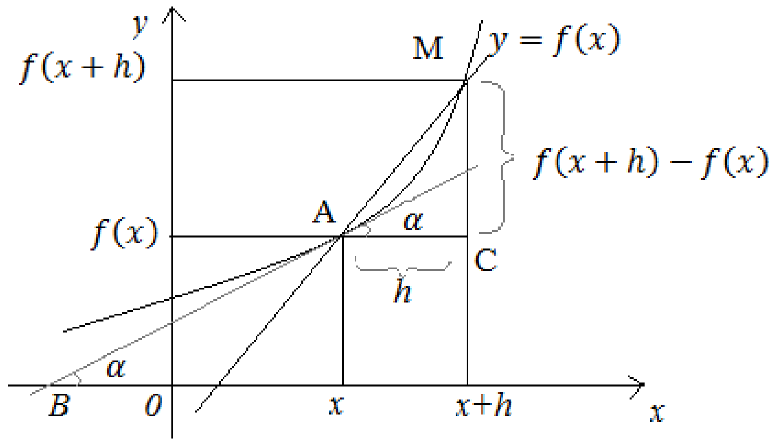


Рис 2. Геометрический смысл производной

Геометрический смысл производной: угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен $f'(x_0)$.

Выведем уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке А $\left(x_0; f(x_0)\right)$.

Уравнение прямой имеет вид: $y = kx + b$. Угловой коэффициент наклона касательной равен $f'(x_0)$, тогда $y = f'(x_0)x + b$.

Касательная проходит через точку А поэтому $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$, откуда $b = f'(x_0)x_0 - f(x_0)$, значит, уравнение касательной примет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Пример 1. Найдите уравнение касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 + 1$ в точке $x_0 = -1$.

Решение: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ – уравнение касательной

$$f(-1) = -3$$

Найдем производную функции: $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$$f'(-1) = 9$$

Подставим полученные значения в уравнение касательной, получим:

$$y = -3 + 9(x + 1) = 9x + 6$$

$y = 9x + 6$ – уравнение касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 + 1$ в точке $x_0 = -1$. [2, С.131]

Механический смысл производной: если при прямолинейном движении путь s, пройденный точкой, есть функция от времени t, т.е. $s = f(t)$, то скорость точки есть производная от пути по времени, т.е. $v(t) = f'(t)$.

1.1.6 Применение производной к исследованию функции

Для доказательства следующей теоремы рассмотрим теорему Лагранжа.

Теорема Лагранжа. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, то существует точка $c \in (a; b)$ такая, что $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Достаточный признак возрастания функции. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a; b)$, то функция возрастает на интервале $(a; b)$.

Доказательство: Пусть произвольные точки x_1, x_2 принадлежат $(a; b)$, где $x_1 < x_2$.

Применяя к отрезку $[x_1; x_2]$ теорему Лагранжа, получаем

$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, где $c \in (x_1; x_2)$.

Т.к. $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала $(a; b)$, значит, $f'(c) > 0$; $x_1 < x_2$, значит, $(x_2 - x_1) > 0$. Следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т.е. $f(x_1) < f(x_2)$. Это означает, что функция $f(x)$ возрастает.

Достаточный признак убывания функции. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a; b)$, то функция убывает на интервале $(a; b)$. Доказательство проводится аналогично доказательству для достаточного признака возрастания функции.

Пример 1. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Решение. Найдем производную $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

$3x^2 - 6x = 0$

Решая полученное уравнение получим $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

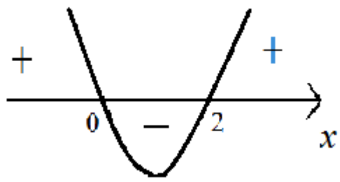


Рис. 3

На промежутке $(-\infty; 0)$ и $(2; \infty)$ производная положительна (рис. 3), значит на этих интервалах функция возрастает.

На промежутке $[0; 2]$ производная отрицательна, значит функция $f(x)$ убывает на данном отрезке [1, С. 263].

Определение. Точка x_0 называется точкой максимума функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Определение. Точка x_0 называется точкой минимума функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Точки минимума и максимума называют точками экстремума.

Теорема Ферма (необходимое условие экстремума). Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$ и в этой точке существует производная $f'(x_0)$, то она равно нулю: $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ определена на $[a;b]$ и в точке $x_0 \in (a;b)$ принимает наибольшее значение. Тогда для любого $x \in [a;b]$ $f(x) \leq f(x_0)$, тогда $f(x) - f(x_0) \leq 0$.

Найдем $f'(x)$. По определению $f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

1 случай: $x < x_0$. Тогда $x - x_0 < 0$ и $f(x) - f(x_0) \leq 0$. Значит, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, т.е. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. Следовательно, $f'(x_0) \geq 0$.

2 случай: $x > x_0$. Тогда $x - x_0 > 0$ и $f(x) - f(x_0) \leq 0$. Значит, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$, т.е. $f'(x_0) \leq 0$.

Из первого и второго случая $f'(x_0) \geq 0$ и $f'(x_0) \leq 0$, следовательно . $f'(x_0) = 0$.

Замечание. 1) Если x_0 – точка экстремума функции $f(x)$, то производная $f'(x_0)$ может не существовать.

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x) = |x|$ (рис. 4). Данная функция не имеет производной в точке 0, но очевидно, что в этой точке функция имеет минимум.

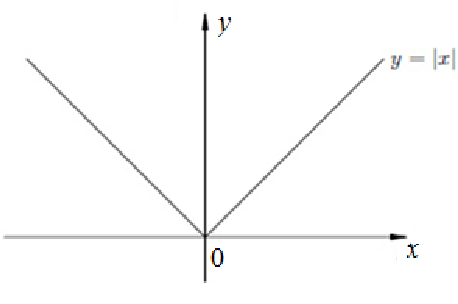


Рис. 4

2) Обратная теорема не выполняется. Если $f'(x_0) = 0$, то это не означает, что x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$.

Пример 3. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3$ (рис. 5). $f'(0) = 0$, но точка $x = 0$ не является точкой экстремума, так как данная функция возрастает на всей числовой оси.

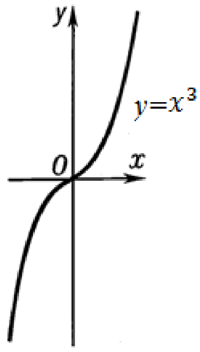


Рис. 5

Признак максимума функции. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции $f(x)$.

Доказательство. Производная $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$, а функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, следовательно, функция $f(x)$возрастает на промежутке $(a; x_0]$, и поэтому $f(x) < f(x_0)$ для всех x из интервала $(a; x_0)$.

Аналогично получаем, что на промежутке $[x_0; b)$ функция $f(x)$ убывает, и поэтому $f(x) < f(x_0)$ для всех x из интервала $(x_0; b)$.

Итак, $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \neq x_0$ из интервала $(a; b)$, т.е. x_0 есть точка минимума функции $f(x)$.

Признак минимума функции. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $f'(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой минимума функции $f(x)$.

Доказательство проводится аналогично доказательству признака максимума [2, С. 149].

Пример 4. Найти точки экстремума функции $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Решение. Найдем производную: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$.

Найдем стационарные точки:

$4x^2(x-3)=0$, $x_1=0$, $x_2=3$.

Методом интервалов устанавливаем, что производная $f'(x)$ положительна при $x>3$, отрицательна при $x<0$ и при $0<x<3$.

Так как при переходе через точку $x_1=0$ знак производной не меняется, то эта точка не является точкой экстремума.

При переходе через точку $x_2=3$ производная меняет знак с отрицательного на положительный. Поэтому $x_2=3$ – точка минимума.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, затем выбрать наибольшее и наименьшее значения.

Выпуклость и вогнутость графика.

Определение. График называют выпуклым вверх на интервале $(a;b)$, если он расположен ниже касательной, проведенной в любой точке интервала $(a;b)$.

График называют выпуклым вниз на интервале $(a;b)$, если он расположен выше касательной, проведенной в любой точке интервала $(a;b)$. (Никольскй)

Геометрический смысл второй производной: если функция $f(x)$ на интервале $(a;b)$ имеет положительную вторую производную $f''(x)$, то на этом интервале график функции $y=f(x)$ имеет выпуклость вниз; если же функция $f(x)$ на интервале $(a;b)$ имеет отрицательную вторую производную $f''(x)$, то на этом интервале график функции $y=f(x)$ имеет выпуклость вверх.

Теорема. Пусть функция $y=f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ на отрезке $[x_0-\delta;x_0+\delta]$ $(\delta>0)$ и первая производная этой функции в точке x_0 равна нулю: $f'(x_0)=0$. Тогда:

а) если $f''(x)>0$ на отрезке $[x_0-\delta;x_0+\delta]$, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет локальный минимум.

б) если $f''(x) < 0$ на отрезке $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет локальный максимум.

Доказательство. а) Пусть $f''(x) > 0$ на отрезке $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ и $f'(x_0) = 0$.Так как вторая производная есть первая производная от первой производной: $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$, то на основании признака возрастания функции функция $f'(x)$ на отрезке $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ возрастает, но $f'(x_0) = 0$, поэтому $f'(x) < 0$ на полуинтервале $[x_0 - \delta;\ x_0)$ и $f'(x) > 0$ на полуинтервале $(x_0; x_0 + \delta]$, т.е. первая производная при переходе через точку x_0 меняет знак «-» на «+». Это означает, что функция f в точке x_0 имеет локальный минимум.

б) Подобным образом доказывается теорема в случае $f''(x) < 0$, приводящем к локальному максимуму в точке x_0 [3, С.131-133].

1.1.7 Приближенные вычисления

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 и требуется найти приближенно значение этой функции в достаточно близкой к точке x_0 точке $x = x_0 + \Delta x$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

При Δx, близких к нулю, справедливо приближенное равенство $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ (1), которое выполняется тем точнее, чем ближе значение Δx к нулю.

Из приближенного равенства (1) получаем приближенное равенство

$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x$. (2)

Пример 1. Вычислим приближенно значение функции $f(x) = x^{10}$ в точке $x = 1{,}01$.

Имеем $x = 1 + 0{,}01$. Примем $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}01$. Тогда так как $f'(x) = 10x^9$, то $f(x_0) = f(1) = 1^{10} = 1$, $f'(x_0) = f'(1) = 10$.

Используя равенство (2), имеем

$f(1{,}01) = f(1 + 0{,}01) \approx f(1) + f'(1) \cdot 0{,}01 = 1 + 10 \cdot 0{,}01 = 1{,}1$ [3, С. 119].

1.2 Полнота содержания темы «Производная» в школьных учебниках

Рассмотрим различные подходы к изложению темы «Производная» в школьных учебниках базового и профильного уровней:

1. Алгебра и начала анализа.10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачев и др. – 3-е изд. - М. : Просвещение, 2016. – 463 с.
2. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 - 11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый уровень) / А. Г. Мордкович. – 14-е изд., стер.- М.: Мнемозина, 2013. – 400 с.
3. Алгебра и начала математического анализа : учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / [А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др.] ; под ред. А. Н. Колмогорова. – 17-е изд. – М. : Просвещение, 2008. – 384 с.

Учебники профильного уровня:

4. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч. 1. : учебник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов – 4-е изд., доп. – М. : Мнемозина, 2007. – 424 с.
5. Виленкин Н. Я. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Учебник для учащихся общеобразоват. организаций (углубленный уровень) / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. – 18-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2014. – 352 с.
6. Алгебра и начала анализа : Учеб. для 11 кл. общеобразоват. учреждений / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М. : Просвещение, 2002. – 448 с.

В учебнике Ш. А. Алимова «Алгебра и начало математического анализа» изучение производной автор закладывает в главу «Производная и её геометрический смысл», которую он начинает с задачи на мгновенную скорость, приводящей к понятию производной функции.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке, x – точка этого промежутка и число $h \neq 0$ такое, что $x+h$ также принадлежит данному промежутку. Тогда предел разностного отношения $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $h \to 0$ (если этот предел существует) называется производной функции $f(x)$ в точке x.

Таким образом, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Сразу после определения вводится понятие дифференцируемой функции в точке, на промежутке, название операции нахождения производной. Автор приводит определение предела функции в точке и дает пояснения. Выясняется понятие непрерывной функции.

В учебнике подробно описаны задачи, приводящие к формулам: $C' = 0$, $x' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$. Производная степенной функции дается на интуитивном уровне.

Рассматривая привила дифференцирования, автор доказывает следующие: производная суммы равна сумме производных; постоянный множитель можно вынести за знак производной. К каждому правилу Алимов Ш.А. приводит разобранные примеры.

В параграфе «Производные некоторых элементарных функций» включены следующие производные:

1. Производная показательной функции.
2. Производная логарифмической функции.
3. Производные тригонометрических функций.

Данная глава заканчивается изучением геометрического смысла производной дифференцируемой функции. Выводится уравнение касательной.

Следующая глава «Применение производной к исследованию функции» содержит параграфы:

- Возрастание и убывание функции.

  Данный пункт содержит определение возрастающей (убывающей) функции. Формулируется теорема Лагранжа для доказательства теорем о достаточных условиях возрастания (убывания) функций.

- Экстремумы функций.

  Определяются понятия критических и стационарных точек, точек максимума и минимума. Формулируется теорема Ферма, теорема о необходимом и достаточном условии для точек максимума и минимума.

- Применение производной к построению графиков функций. Предлагается схема исследования свойств функции.

- Наибольшее и наименьшее значения функции.

  Составлен алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции.

- Выпуклость графика функции, точки перегиба.

  Вводится производная второго порядка, применяемая для определения выпуклости графика функции и нахождения точек перегиба.

В данном учебнике большое внимание уделяется решению задач. Автор в теоретической части дает доказательства не всех свойств и теорем, но приводит набор подробно разобранных примеров. К каждому пункту прилагаются задачи для самостоятельного решения, в основном все задания направлены на закрепление теории и развитие регулятивных УУД. Задания содержат трехуровневую систему: обязательные (выделены серым цветом), дополнительные более сложные (выделены светло-розовым цветом), трудные (выделены темно-розовым цветом). Так же в задачнике есть раздел «Проверь себя».

В отличие от Ш. А. Алимова в учебнике Мордковича А.Г. раздел, посвященный изучению производной, начинается с определения числовой последовательности, введения ее свойств и вычисления пределов, затем изучается предел функции на бесконечности и в точке. Формулируется понятие непрерывной функции в точке, на промежутке. Без доказательства приведена теорема об арифметических операциях над пределами. Введены определения приращения аргумента и приращения функции.

После чего автор рассматривает задачи о скорости движения, о касательной к графику функции, решение которых приводит к новой математической модели – пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. На основе полученного автор вводит определение производной.

Определение. Пусть функция $y = f(x)$определена в некотором интервале, содержащем внутри себя точку x_0. Дадим аргументу приращение Δx такое, чтобы не выйти из этого интервала. Найдем соответствующее приращение функции Δy (при переходе от точки x_0 к точке $x_0 + \Delta x$) и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то указанный предел называют производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f'(x_0)$.

Итак,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

В данном учебнике присутствует алгоритм нахождения производной и примеры по его применению. Вводится понятие дифференцируемой функции в точке, название операции нахождения производной, после этого рассматривается вопрос о том, как по графику сделать выводы о дифференцируемости функции.

В учебнике отражены физический и геометрический смыслы производной. Рассматриваются основные формулы дифференцирования. Перед выводом правил дифференцирования, автор предлагает рассмотреть примеры с их применением, а затем доказательства правил нахождения производной от суммы функций, от произведения функции на постоянный множитель и от произведения двух функций. Методом математической индукции доказывается формула дифференцирования степенной функции для любого натурального показателя. Вычисляется производная для функции $y = f(kx + m)$. После изучения логарифмической и показательной функций, определяются их производные.

Отдельный параграф посвящен уравнению касательной к графику функции, здесь присутствует алгоритм составления уравнения касательной. Составление алгоритмов является одной из характерных черт этого учебника, Мордкович А.Г. предлагает алгоритмы для исследования непрерывной функции на монотонность и экстремумы, для отыскания наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции на отрезке. Сформулированы понятия о признаке возрастания (убывания) функции, определение критической точки функции, признак максимума и минимума (экстремумы), теорема о постоянстве функции; теорема о нахождении точек максимума и минимума; понятия горизонтальной и вертикальной асимптот. В конце главы указаны основные результаты, которых должен был достичь школьник, при изучении данной темы.

Изложение теоретического материала в большей степени ориентировано на самостоятельное изучение, в связи с чем, в каждом параграфе содержится большое число примеров с подробными решениями. К учебнику прилагается задачник, в котором представлены упражнения для самостоятельного решения трех уровней сложности. Число упражнений достаточно велико как по объему, так и по содержанию, что позволяет работать без привлечения других источников.

В учебнике А. Н. Колмогорова «Алгебра и начала математического анализа» изучение производной начинается с изучения приращения функции. Затем вводится понятие о касательной к графику функции, перед которым описано геометрическое устройство гладких кривых. Автор подробно рассматривает задачу о нахождении точного положения касательной к графику функции в заданной точке (геометрический смысл производной) и задачу об определении мгновенной скорости движения (механический смысл производной). На основе полученных решений введена следующая схема, применимая к произвольной функции f и любой точке x_0 ее области определения:

1. С помощью формулы, задающей функцию f, находим ее приращение в точке x_0: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

2. Находим выражение для разностного отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$:

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta f) - f(x_0)}{\Delta x}$,

которое затем преобразуем – упрощаем, сокращаем, на Δx и т.п.

3. Выясняем, к какому числу стремится $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, если считать, что Δx стремится к нулю.

Определение производной дается без использования понятия предела.

Определение. Производной функции f в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta f) - f(x_0)}{\Delta x}$ при Δx стремящемся к нулю.

Вводится понятие дифференцируемой функции в точке, понятие производной как функции, название операции нахождения производной, ее обозначение. Выделяются формулы дифференцирования, полученные в ходе объяснения материала.

Отдельный параграф посвящен понятию о непрерывности функции и правилам о предельном переходе.

Рассматривая основные формулы и правила дифференцирования, в учебнике приведены подробные доказательства. Производная степенной функции формулируется на интуитивной основе. Определяется понятие сложной функции и выводится формула ее дифференцирования. С доказательством приведены формулы дифференцирования тригонометрических функций. Изучая понятие касательной к графику функции, разъясняется геометрический смысл производной, автор выводит уравнение касательной, формулу Лагранжа. Рассматриваются способы приближенного вычисления значения функции в некоторой точке, производная в физике и технике, примеры применения производной. Далее учебник содержит следующие параграфы:

- Признак возрастания (убывания) функции.

Доказательство признака возрастания (убывания) проводится на основании формулы Лагранжа. В теоретической части есть примеры иллюстрирующие применение признаков.

- Критические точки функции, максимумы и минимумы.

Здесь учащиеся знакомятся с теоремой Ферма, признаком максимума функции, признаком минимума функции. В данном пункте в отличие от предыдущих учебников, автор также не пренебрегает доказательствами.

- Примеры применения производной к исследованию функции.

Автор приводит алгоритм исследования функции и на примерах проводит исследования по указанной схеме.

- Наибольшее и наименьшее значение функции.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значения введено следующее правило: чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значение функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее. Теорию автор закрепляет примерами.

- Сведения из истории.

После изучения логарифмической, показательной и степенной функций, определяются их производные. Вводится понятие о дифференциальных уравнениях: дифференциальные уравнения показательного роста и показательного убывания, гармонические колебания, падение тел в атмосферной среде.

Теория учебника Мордковича А.Г. для профильного уровня подробно описана и во многом совпадает с теорией учебника базового уровня того же автора. Также имеются различая: в рассматриваемом учебнике отдельный параграф посвящен изучению числовой последовательности, здесь авторы подробно рассматривают определение последовательности, способы ее задания и свойства; изучается понятие и вычисление производной n-го порядка, применение производной для доказательств тождеств и неравенств. Помимо этого подробно рассмотрено определение композиции (сложной функции), вводятся формулы для нахождения производной сложной функции, на основании которых выводят формулы дифференцирования обратных тригонометрических функций. Характерной чертой учебника является большое число разобранных примеров.

Виленкин Н. Я. предлагает объемный теоретический материал. Большое внимание в книге уделено решению задач. Каждый пункт сопровождается разбором ряда примеров в тексте и списком задач для самостоятельного изучения. При этом наряду с обычными задачами предлагаются задачи повышенной трудности.

Изучение математического анализа начинается с понятия предела функции на бесконечности, предела в точке. Предел последовательности рассматривается как частный случай предела функции на бесконечности.

Изучение темы «Производная» начинается с введения понятий приращение функции, дифференцируемость функции. Затем на основании задач направленных на вычисление мгновенной скорости движения и углового коэффициента касательной определяется понятие производной.

Определение. Производной функции f называется функция f', значение которой в точке x выражается формулой $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Виленкин Н. Я. рассматривает следующий алгоритм нахождения производной:

- найти выражение для приращения $f(x+h)-f(x)$ функции f;

- разделить это выражение на приращение аргумента h;

- найти предел полученного отношения при $h \to 0$.

Вводится понятие дифференциала функции. Формулируется формула дифференциала функции $df = f'(x)d$. Вычисляются приближенные значения функции.

При определении механического смысла производной приводятся задачи, описывающие процесс радиоактивного распада и задачи на отыскание линейной плотности вещества. Выясняется геометрический смысл производной. Выводится уравнение касательной: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

В данном учебнике также показана связь между непрерывностью и дифференцируемостью, формулируется соответствующая теорема.

Все основные правила дифференцирования приведены с доказательствами. Определяется вторая производная, дается определение производной высшего порядка.

В параграф «Приложение производной» входят следующие пункты:

1. Производная и экстремумы.

Формулируются и доказываются теоремы: о знаке приращения аргумента и функции; о точке экстремума;

2. Отыскание наибольших и наименьших значений функции на отрезке.

Приводят план решения задач на наибольшее и наименьшее значения функции.

3. Теорема Лагранжа и ее следствия.

4. Исследование функций на возрастание и убывание. Достаточное условие экстремума.

Формулируются и доказываются теоремы: о связи между монотонностью функции на отрезке и знаке ее производной на этом отрезке, достаточные условия экстремума.

5. Исследование графиков на выпуклость.

6. Точки перегиба.

7. Построение графиков функций.

Предлагается схема построения графиков функций, включающая в том числе точки разрыва, асимптоты, исследование на выпуклость и нахождение точек перегиба.

8. Производные и доказательство неравенств.

9. Бином Ньютона.

10. Некоторые свойства биноминальных коэффициентов.

Следующие пункты для повышенного уровня изучения (в учебнике отмечены звездочкой):

1. Приложение бинома Ньютона для приближенных вычислений.

2. Приближенное решение уравнений методом хорд и касательных.

Формулы дифференцирования тригонометрических, показательных и логарифмических функций даются после изучения соответствующих функций.

В данной книге Понятие производной вводится на основе определения предела, которое изучается ранее. Все определения, теоремы, следствия имеют доказательства. Терминология имеет строгую формулировку и строгую доказательную структуру.

Учебник Никольского содержит материал как для базового, так и для профильного уровня. Перед изучением производной определяются понятие предела и обратных функций. В книге рассмотрены задачи на вычисление мгновенной скорости прямолинейного движения, на вычисление тангенса угла наклона касательной к графику функции, на определение силы тока, приводящие к определению производной.

Определение. Производной функции $y = f(x)$, заданной на некотором интервале $(a; b)$, в точке x этого интервала, называют предел отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Выясняется механический и геометрический смыслы производной.

С доказательством приведены следующие теоремы: производная суммы, производная разности, вынесение постоянного множителя за знак производной, непрерывность функции, имеющей производную, производная произведения, производная частного. Доказаны формулы дифференцирования элементарных функций. Введена производная сложной функции и производная обратной функции. В изучении применения производной внимание уделяется максимуму и минимуму функции, выводится уравнение касательной, осуществляются приближенные вычисления, формулируются и доказываются теоремы Ролля и Лагранжа, изучаются свойства возрастания и убывания функции, определяются вторая производная и производные высших порядков, а также механический смысл второй производной. Выясняется применение второй производной для определения выпуклости и вогнутости графика функции, а также геометрический смысл второй производной

Рассматриваются особенности экстремума функции с единственной критической точкой, использование производных для построения графиков функций (с применением второй производной).

Решаются задачи на оптимизацию.

Введён дополнительный углубленный материал, отмеченный звездочкой: на нахождение асимптот (рассматриваются дробно-линейные функции), на разложение функции в ряд Тейлора.

Характерной чертой данного учебника является большой объем дополнительного и углубленного материала, что позволяет учащимся более широко и глубоко овладеть знаниями.

Ниже представлена таблица 1, в которой кратко изложена полнота содержания темы «Производная» в рассматриваемых нами учебниках.

Таблица 1. Полнота изложения темы «Производная» в школьных учебниках.

Понятия, теоремы формулы/ Авторы учебников	Базовый уровень			Профильный уровень		
	Ш. А. Алимов	А. Г. Мордкович	А. Н. Колмогоров	А. Г. Мордкович	Н. Я. Виленкин	С. М. Никольский
Приращение функции.		+	+	+	+	+
Определение предела	+	+		+	+	+
Определение производной	+	+	+	+	+	+
Дифференцируемая функция	+	+	+	+	+	+
Физический смысл производной		+		+	+	+
Геометрический смысл производной	+	+	+	+	+	+
Уравнение касательной	+	+	+	+	+	+
Правила дифференцирования	+	+	+	+	+	+
Производные элементарных функций	+	+	+	+	+	+
Дифференцирование сложной функции	+	+	+	+	+	+
Дифференцирование обратно тригонометрических функций				+	+	+
Исследование функции на монотонность	+	+	+	+	+	+
Экстремумы функций	+	+	+	+	+	+
Наибольшее и наименьшее значения функции	+	+	+	+	+	+
Теорема Лагранжа	+		+		+	+
Теорема Ферма	+		+			
Приближенное вычисление значений функции			+		+	+

Из таблицы видно, что в учебниках, предназначенных для классов с углубленным изучением математики теория по теме «Производная» обширнее, чем в учебниках для базового уровня, но по изложению некоторых тем книги во многом совпадают.

Из проведенного нами анализа в рассматриваемых учебниках базового уровня алгебры и начал анализа для учащихся старших классов можно сделать вывод о том, что изложение темы дается на наглядно-интуитивном уровне, на котором создается материальный образ математического объекта, дается формальное определение производной. Учебник Колмогорова является наиболее полным в изложении теории, автор достаточно подробно рассматривает математические факты, приводит большое количество разобранных примеров, а также данный учебник отличается наличием многих доказательств. Учебник Алимова является отличным учебником с практической точки зрения, автор, кратко излагая теорию, приводит обширный список подобранных заданий и разобранных примеров. В учебнике Мордковича более обширно используется понятие предела, которое лежит в основе определения производной, но при этом его понимание остается на наглядно-интуитивном уровне.

В отличие от учебников базового уровня в учебниках А.Г. Мордковича, С.М. Никольского, Н.Я. Виленкина для учащихся старших классов с углубленным изучением математики изложение темы «Производная» сопровождается с большим количеством доказательств и содержит дополнительный материал.

Основные принципы изучения темы «Производная» в этих учебниках практически схожи, но различия все равно существуют и по большей степени в приложении производной.

1.3 Анализ материалов ЕГЭ

Мы провели анализ материалов ЕГЭ по математике за последние пять лет (с 2013 года по 2017 год) на содержание заданий с использованием производной.

ЕГЭ 2013 года состояло из двух частей. Первая часть – это задания В1-В14 базового уровня сложности с кратким ответом в виде конечного целого числа или конечной десятичной дроби. Вторая часть содержит задания С1-С6 повышенного и высокого уровня сложности с развернутым ответом. Номера В8, В14 – это задания, направленные на применение производной функции [16].

В 2014 году особых изменений в структуре экзамене нет. Задание В15 было направлено на поиски точки максимума (минимума) функции или наибольшего (наименьшего) значения функции на заданном отрезке, а В9 включало в себя задачи на определение характеристик производной по графику функции, задачи на определение характеристик функции по графику её производной [16].

В 2015 ЕГЭ по математике разделён на два отдельных экзамена: базовый уровень и профильный уровень. Базовый ЕГЭ сдают выпускники, которые идут на специальности, где математика не является профильным предметом или не является вступительным экзаменом. Если математика включена в список вступительных экзаменов в вуз, то учащиеся сдают экзамен профильного уровня. Каждый выпускник вправе выбрать себе желаемый вариант сдачи ЕГЭ.

Базовый тест состоит из 20 заданий с кратким ответом, которым является целое число, конечная десятичная дробь или последовательность цифр. Данный тест оценивается по пятибалльной шкале. Задачи на определение характеристик производной по графику функции и задачи на определение характеристик функции по графику её производной можно встретить под номером 7 и 14.

Профильный тест состоит из двух частей. В 2015 году экзамен содержит 21 задание. Первая часть включает девять заданий базового уровня, вторая часть – пять заданий с кратким ответом и семь номеров с развернутым ответом повышенного и высокого уровня сложности [16].

В 2016 году тест ЕГЭ по математике профильного уровня состоит из 19 заданий:

- Часть 1: 8 заданий (1–8) базового уровня сложности с кратким ответом.

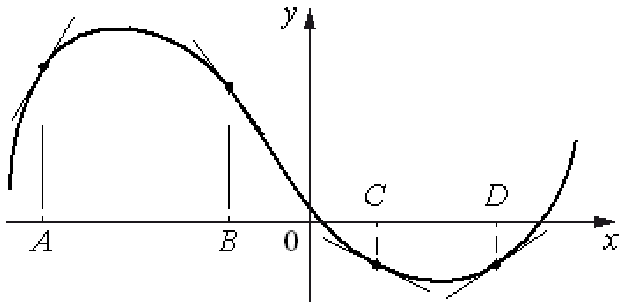
- Часть 2: 4 задания (9–12) повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий (13–19) повышенного и высокого уровней сложности с развернутым ответом.

В 2017 году изменений в экзамене нет.

Приведем примеры задач ЕГЭ, в которых проверяются знания и умения по теме «Производная».

Задания из ЕГЭ базового уровня:

1. На рисунке изображены график функции и касательные, проведённые к нему в точках с абсциссами A, B, C и D.



В правом столбце указаны значения производной функции в точках A, B, C и D. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке значение производной функции в ней.

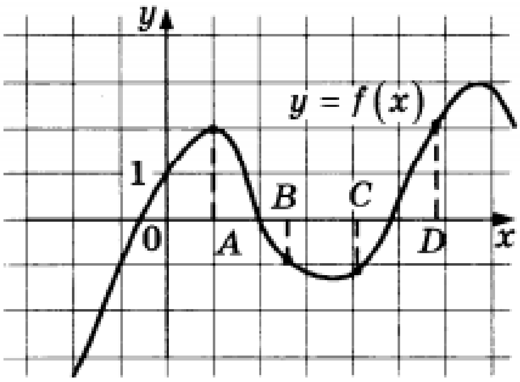
Точки	Значения производной
A	1) 23
B	2) -12
C	3) -113
D	4) 123

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

A	B	C	D

2. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки A, B, C и D на оси Ox.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке характеристики функции и её производной.

Точки	Характеристики функции и производной
A	1) значение функции в точке отрицательно и значение производной функции в точке отрицательно
B	2) значение функции в точке положительно и значение производной функции в точке положительно
C	3) значение функции в точке отрицательно, а значение производной функции в точке положительно
D	4) значение функции в точке положительно, а значение производной функции в точке равно нулю.

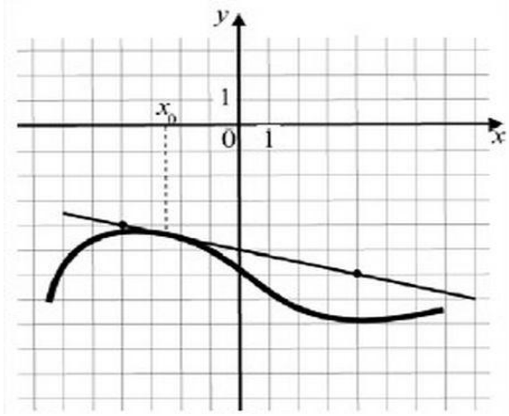
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

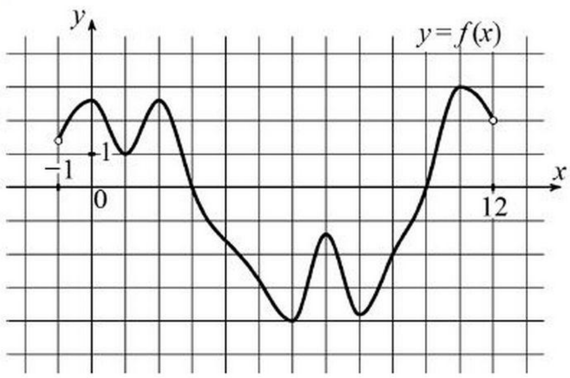
A	B	C	D

Примеры заданий ЕГЭ профильного уровня:

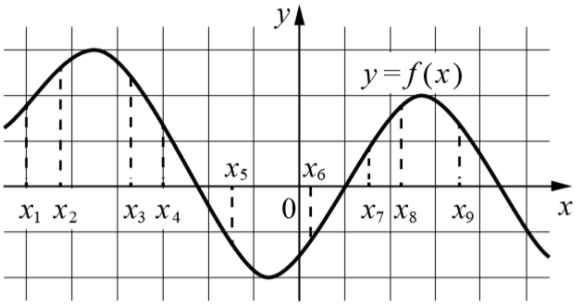
1. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



2. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-1;12). Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



3. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$. На оси абсцисс отмечено девять точек: $x_1, x_2, \dots x_9$.



Найдите все отмеченные точки, которые лежат на промежутке возрастания функции $y = f(x)$. В ответе укажите количество этих точек.

4. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 3x^2 - 2$ на отрезке $\left[-3; \frac{1}{2}\right]$.

5. Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $y = ax^2 + 2x + 3$.Найдите a.

6. Чему равна сумма возможных значений a, при которых прямая $y = ax$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 8x^2 + x$?

7. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \left(\frac{1}{3}\right) t^3 - 3t^2 - 5t + 3$, где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?

8. Найдите точку максимума функции: $y = \log_8(1 + 8x - x^2) + 1$.

9. Найдите точку минимума функции: $y = \sqrt{x^2 + 4x + 26}$.

10. Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{8 + 2x - x^2}$.

Изучив задания ЕГЭ за последние годы, мы пришли к выводу о том, что упражнения с использованием производной включены в базовый уровень сложности, подобные задания отсутствуют в части повышенной сложности. Несмотря на изменения структуры ЕГЭ в 2015 году в экзамене профильного уровня часть повышенной сложности также не охватывает задания на применение производной функции.

Благодаря данному анализу можно выделить основные направления деятельности учащихся при подготовке к единому государственному экзамену.

Выводы по главе. Нами был представлен систематизированный материал из школьных учебников по теме «Производная». Проанализировав содержание данной темы в некоторых школьных учебниках базового и профильного уровней, мы пришли к следующему выводу: в учебниках, предназначенных для классов с углубленным изучением математики, теория по теме «Производная» обширнее, чем в учебниках для базового уровня; основные принципы изучения темы «Производная» в рассматриваемых книгах схожи, но существуют различая в способах ее изложения, по большей степени в приложении производной.

ЕГЭ по математике включает задачи, решение которых связано с использованием производной. Во время сдачи экзамена выпускники часто сталкиваются с трудностями при решении задач такого рода. Поэтому мы осуществили анализ материалов ЕГЭ по математике за последние пять лет с целью выделения задач по теме «Производная», которые задают ориентир при подготовке к единому государственному экзамену.

ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА МЕТОДИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ИСЧИСЛЕНИЯМ

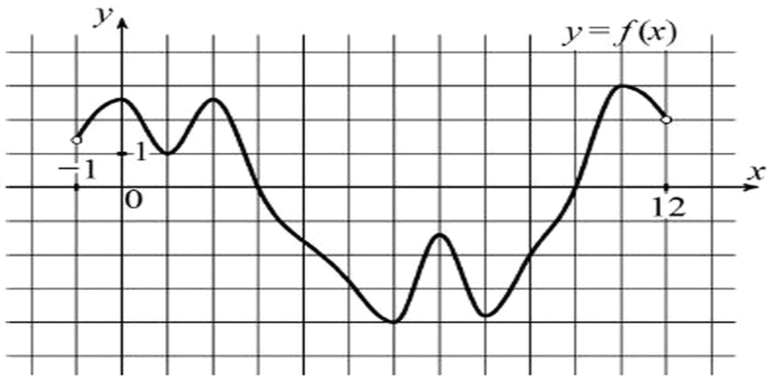
2.1 Разработка теста и его решение

Нами был разработан тест по типу ЕГЭ на тему «Дифференциальные исчисления». Задачи, входящие в тест, позволяют обнаружить недостатки, пробелы в знаниях учащихся. По результатам тестирования можно выделить основные направления деятельности школьников при подготовке к единому государственному экзамену.

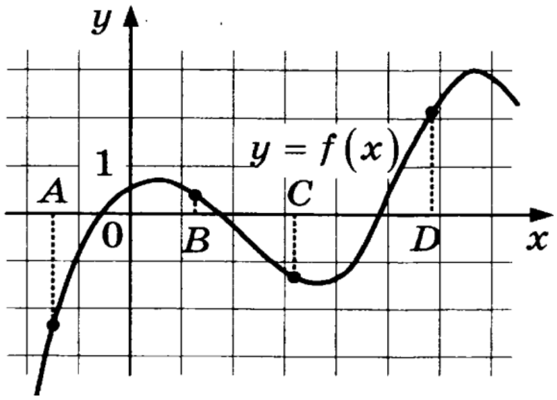
2.1.1 Тест по теме «Дифференциальные исчисления»

1. Найдите производную функции $y = \sqrt{x^2 + 5x + 1}$ в точке $x_0 = 0$.

2. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-1;12). Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки A, B, C и D на оси Ox. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке характеристику функции и ее производной.



Точки	Характеристики
A	1) Значение функции в точке положительно, а значение производной функции в точке отрицательно
B	2) Значение функции в точке отрицательно и значение производной функции в точке отрицательно
C	3) Значение функции в точке отрицательно, а значение производной функции в точке положительно
D	4) Значение функции в точке положительно и значение производной функции в точке положительно

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

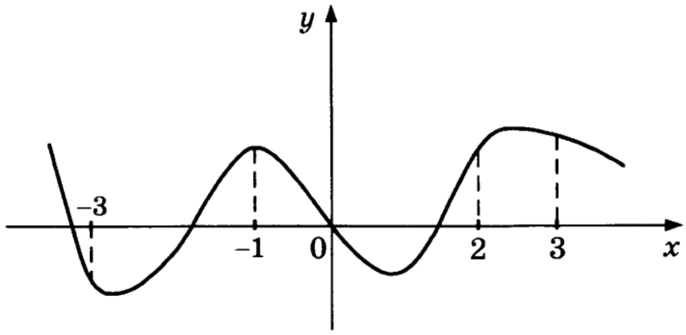
Ответ:

4. Найдите точку максимума функции $y = 7 + 12x - x^3$.

5. Найдите пересечение касательной к графику функции $y = x^4 - 2x - 2$ в точке $x_0 = 1$ с осью ординат.

6. Найдите минимальное значение функции $y = 2x^3 - 15x^2 - 36x + 2$ при $x \in [-4; 10]$.

7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -3, -1, 2, 3. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответ укажите эту точку.



8. Найдите наименьшее значение функции $y = 3\cos x - 4\sin x$

9. Найдите наименьшее значение функции $y = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 12$.

10. Чему равно количество целых чисел, которые находятся в промежутке, на котором функция $y = 4x^3 + 13x^2 - 10x + 2$ убывает?

11. Найдите произведение координат точки, в которой прямая, проходящая через точку (0;1) является касательной к графику функции $y = x - \frac{1}{x} + 2$.

12. Найдите сумму точек пресечения прямых, касательных к графику функции $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 1$ и параллельных прямой $y = 3x - 2$, с осью ординат.

13. Чему равна сумма возможных значений a, при которых прямая $y = x - a$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - 8x + 2$?

14. Найдите максимально возможный угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x^4 - 24x^2 - 2x + 1$ на промежутке [-5,1].

15. Площадь поверхности цилиндра равна 24π. При какой высоте цилиндра, объем будет наибольшим?

16. Две прямые, касательные к графику функции$y = 1 - x^2$ перпендикулярны друг к другу в точке (0;c). Найдите 4c.

17. Чему равно количество действительных корней уравнения $x^3 + 6x^2 + 21x - 5 = 0$?

18. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 24 см и углом 60^0 вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Каковы должны быть длины сторон прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

19. Найдите наименьшее значение объема конуса, описанного около шара, площадь поверхности которого равна 36 см^2

2.1.2 Решение теста

1. Найдите производную функции $y = \sqrt{x^2 + 5x + 1}$ в точке $x_0 = 0$

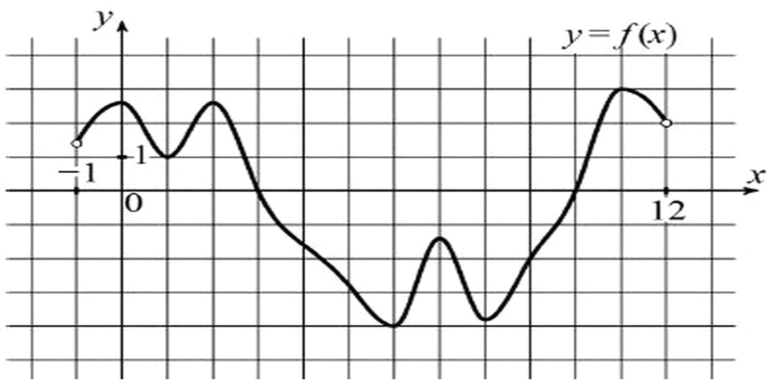
Решение.

$$y' = \frac{2x + 5}{2\sqrt{x^2 + 5x + 1}}$$

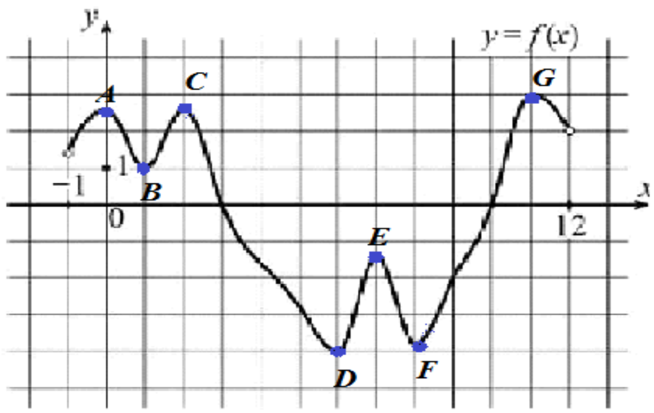
$$y'(0) = \frac{2 \times 0 + 5}{2\sqrt{0^2 + 5 \times 0 + 1}} = \frac{5}{2\sqrt{1}} = 2{,}5$$

Ответ: 2,5.

2. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-1;12). Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

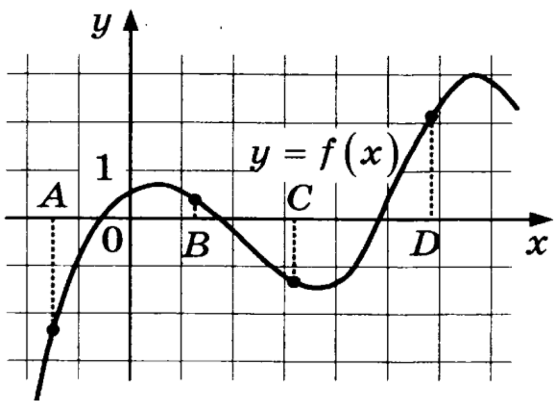


Решение. Производная $f'(x)$ будет равна 0 в некоторой точке, если угловой коэффициент наклона касательной в этой точке равен нулю. Т.е. касательная к графику функции в этой точке должна быть параллельна оси абсцисс. Выделим точки, в которых касательная параллельна оси *Ox*.



Ответ: 7.

3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки A, B, C и D на оси Ox. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке характеристику функции и ее производной.



Точки Характеристики

A 5) Значение функции в

	точке положительно, а значение производной функции в точке отрицательно
B	6) Значение функции в точке отрицательно и значение производной функции в точке отрицательно
C	7) Значение функции в точке отрицательно, а значение производной функции в точке положительно
D	8) Значение функции в точке положительно и значение производной функции в точке положительно

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

Решение. Значение функции положительно в точках B и D, отрицательно в A и C. В промежутках возрастания функции производная принимает положительные значения, а в промежутках убывания – отрицательные значения. Точки A и D принадлежат промежуткам, на которых функция возрастает, следовательно, производная в этих точках положительна. В точках B и C производная отрицательна.

Ответ:

A	B	C	D

3	1	2	4

4. Найдите точку максимума функции $y = 7 + 12x - x^3$.

Решение. Найдем производную функции $y' = 12 - 3x^2$.

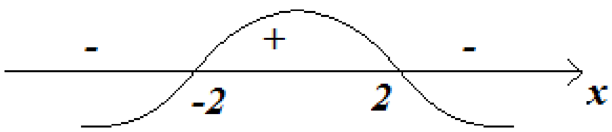
Используем необходимое условие экстремума, т.е. приравняем производную к нулю: $y' = 0$

$$12 - 3x^2 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Решая уравнение, получили критические точки 2, -2.



Из достаточного условия экстремума $x = 2$ – точка максимума, так как в этой точке знак производной меняется с плюса на минус.

Ответ: 2.

5. Найдите пересечение касательной к графику функции $y = x^4 - 2x - 2$ в точке $x_0 = 1$ с осью ординат.

Решение. $y' = 4x^3 - 2$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y_{\text{кас}} = -3 + 2(x - 1) = 2x - 5$$

$$x = 0 \Rightarrow y = -5$$

Ответ: -5.

6. Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^3 - 15x^2 - 36x + 2$ при $x \in [-4; 10]$.

Решение. Найдем производную функции $y' = 6x^2 - 30x - 36$, приравняем ее к нулю и найдем корни полученного уравнения (критические точки):

$$y' = 0$$

$$6x^2 - 30x - 36 = 0$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Находим значение функции в точках, подозрительных на экстремум и на краях заданного отрезка:

$$y(-1) = 21$$

$$y(6) = -322$$

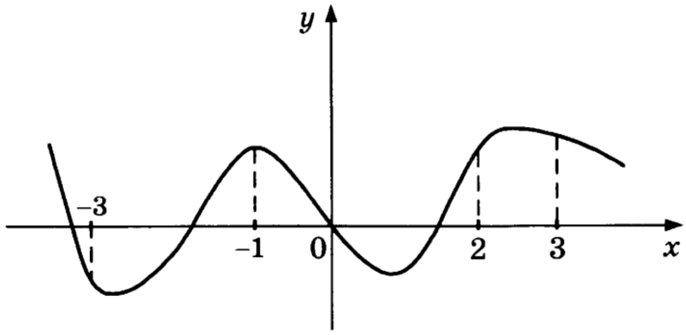
$$y(-4) = -222$$

$$y(10) = 142$$

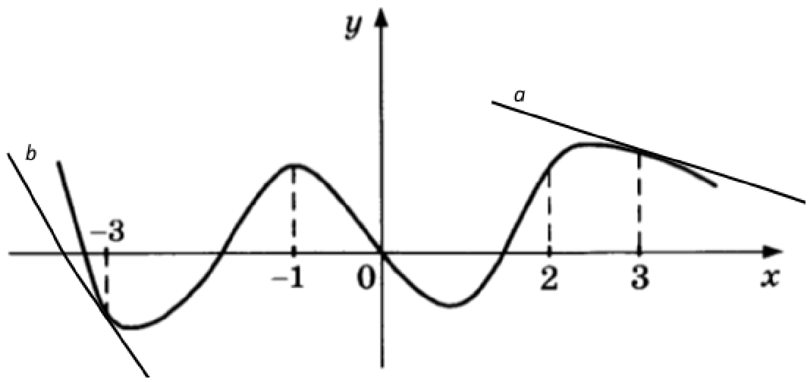
Из полученных значений наименьшим является -322.

Ответ: -322.

7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -3, -1, 2, 3. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответ укажите эту точку.



Решение. Точка равная -1 является экстремумом функции, в ней производная равна нулю. В точке 2 функция возрастает, значит производная больше нуля. В точках 3 и -3 функция убывает, значит производная меньше нуля. Проведем касательные к этим точкам.



Тупой угол между прямой b и осью Ox находится «ближе» к 180^0, поэтому его тангенс будет больше тангенса угла, образованного прямой a и осью Ox, а значит, и значение производной в этой точке будет больше. Таким образом, в точке -3 значение производной будет наименьшим.

Ответ: -3.

8. Найдите наименьшее значение функции $y = 3\cos x - 4\sin x$

Решение. Найдем производную функции $y' = -3\sin x - 4\cos x$, приравняем ее к нулю:

$$-3\sin x - 4\cos x = 0$$

$$-3\sin x = 4\cos x$$

$$\operatorname{tng} x = -\frac{4}{3}$$

$$x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)$$

Подставим полученный корень в функцию и вычислим значения:

$$y = 3\cos\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) - 4\sin\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}} - \frac{4}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{9}{5} - \frac{16}{5} = -\frac{7}{5}.$$

$$y = 3\cos\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) - 4\sin\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{-\sqrt{1+\frac{16}{9}}} - \frac{4}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = -\frac{9}{5} - \frac{16}{5} = -5.$$

$$y = 3\cos\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) - 4\sin\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{-\sqrt{1+\frac{16}{9}}} + \frac{4}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = -\frac{9}{5} + \frac{16}{5} = \frac{7}{5}.$$

$$y = 3\cos\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) - 4\sin\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}} + \frac{4}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{9}{5} + \frac{16}{5} = 5.$$

Наименьшее значение функции равно -5.

Ответ: -5.

9. Найдите наименьшее значение функции $y = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 12$.

Решение. Найдем производную функции $y' = 4x^3 - 12x^2 + 16x - 8$, приравняем ее к нулю.

$$4x^3 - 12x^2 + 16x - 8 = 0$$

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$$

$\pm 1,\ \pm 2$ – делители -2

$$y'(1) = 0$$

$x = 1$ – корень уравнения

$$(x-1)(x^2 - 2x + 2) = 0$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$D = -2 \Rightarrow$ нет корней

$$y(1) = 9$$

Ответ: 9.

10. Чему равно количество целых чисел, которые находятся в промежутке, на котором функция $y = 4x^3 + 13x^2 - 10x + 2$ убывает?

Решение. Найдем производную функции $y' = 12x^2 + 26x - 10$, приравняем ее к нулю.

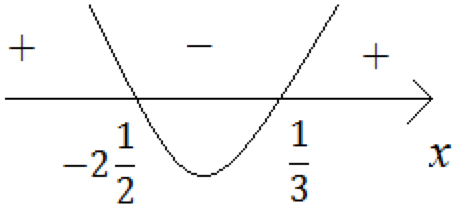
$$12x^2 + 26x - 10 = 0$$

$$6x^2 + 13x - 5 = 0$$

$D = 169 - 4 \times 6 \times (-5) = 289$

$x_1 = \frac{-13 + 17}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$x_2 = \frac{-13 - 17}{12} = \frac{-30}{12} = -2\frac{1}{2}$



Функция $y = 4x^3 + 13x^2 - 10x + 2$ убывает на промежутке $\left(-2\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$. В данный промежуток входит 3 целых числа.

Ответ: 3.

11. Найдите произведение координат точки, в которой прямая, проходящая через точку (0;1) является касательной к графику функции $y = x - \frac{1}{x} + 2$

Решение.

$y = x - \frac{1}{x} + 2$

$y' = 1 + \frac{1}{x^2}$

Уравнение касательной: $y = x_0 - \frac{1}{x_0} + 2 + \left(1 + \frac{1}{x_0^2}\right)(x - x_0)$

$$1 = x_0 - \frac{1}{x_0} + 2 - x_0 - \frac{1}{x_0} = 2 - \frac{2}{x_0}$$

$$\frac{2}{x_0} = 1$$

$$x_0 = 2$$

$$y_0 = 2 - \frac{1}{2} + 2 = 3\frac{1}{2}$$

$$x_0 \times y_0 = 2 \times 3\frac{1}{2} = 7$$

Ответ: 7.

12. Найдите сумму точек пресечения прямых, касательных к графику функции $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 1$ и параллельных прямой $y = 3x - 2$, с осью ординат.

Решение. $y = 3x - 2$, $k = 3$ – коэффициент наклона прямой

$y = x^3 - 6x^2 + 12x + 1$

$y' = 3x^2 - 12x + 12$ – коэффициент наклона касательной

Т.к. прямые параллельны, то $3x^2 - 12x + 12 = 3$

$x^2 - 4x + 4 = 1$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ – уравнение касательной

$y(1) = 8 + 3(x - 1)$ – уравнение касательной при $x_1 = 1;$

$y(1) = 3x + 5$.

$\text{y}(3) = 27 - 54 + 36 + 1 + (27 - 36 + 12)(x - 3)$ – уравнение касательной при $x_2 = 3$;

$\text{y}(3) = 3x + 1$.

Т.к. касательная пересекает ось $0y$, $x = 0 \Rightarrow \text{y}(1) = 5; \text{y}(3) = 1$

$$y_1 + y_2 = 6$$

Ответ: 6.

13. Чему равна сумма возможных значений a, при которых прямая $y = x - a$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - 8x + 2$?

Решение.

$y = x^3 - 3x^2 - 8x + 2$

$y' = 3x^2 - 6x - 8$ – коэффициент наклона касательной.

$y = x - a \Rightarrow k = 1$

$$3x^2 - 6x - 8 = 1$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 6 \\ y_2 = -22 \end{cases}$$

$a = x - y$

$a_1 = -1 - 6 = -7$

$a_2 = 3 + 22 = 25$

$a_1 + a_2 = 18$

Ответ: 18.

14. Найдите максимально возможный угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x^4 - 24x^2 - 2x + 1$на промежутке [-5,1]

Решение.

$y = x^4 - 24x^2 - 2x + 1$

$y' = 4x^3 - 48x - 2$ – угловой коэффициент касательной.

Найдем максимальное значение полученной функции.

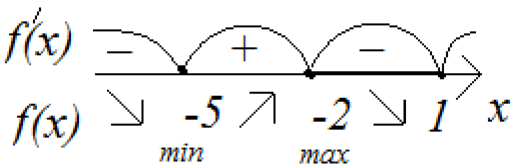
$$y'' = 12x^2 - 48x$$

$$12x^2 - 48 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

$$x = 2 \notin [-5,1]$$



$$y'(-2) = 4 \times 2^3 - 48 \times 2 - 2 = 62$$

Ответ: 62.

15. Площадь поверхности цилиндра равна 24π. При какой высоте цилиндра, объем будет наибольшим?

Решение. $V = \pi R^2 H$ – объем цилиндра.

$S = 2\pi R(H + R)$ – площадь полной поверхности цилиндра.

$$2\pi R(H + R) = 24\pi$$

$$H + R = \frac{12}{R}$$

$$H = \frac{12 - R^2}{R}$$

$$V = \pi R^2 \frac{12 - R^2}{R} = 12\pi R - \pi R^3$$

$$V' = 12\pi - 3\pi R^2 = 0$$

$$3\pi R^2 = 12\pi$$

$$R^2 = 4$$

$$\begin{cases} R_1 = 2, \\ R_2 = -2. \end{cases}$$

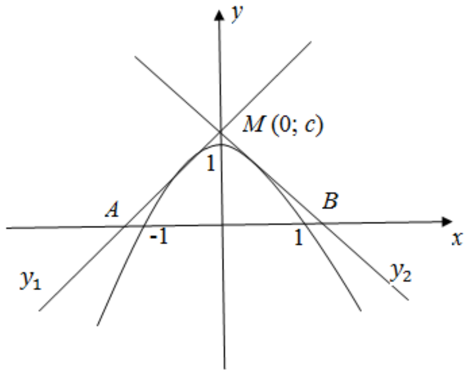
$R_2 = -2$ не подходит по смыслу задачи.

При $R_1 = 2$ объем цилиндра будет наибольшим $\Rightarrow H = 4$

Ответ: 4.

16. Две прямые, касательные к графику функции $y = 1 - x^2$ перпендикулярны друг к другу в точке (0;с). Найдите 4с.

Решение. Прямые y_1, y_2 – касательные к графику функции $y = 1 - x^2$, $y_1 \perp y_2$ в точке М (0;с).



Рассмотрим ⊿AMB – прямоугольный, AM=MB (так как касательные симметричны относительно оси ординат) $\Longrightarrow \angle \text{MAB} = 45^0$.

$\text{tng}\angle\text{MAB} = 1$, тогда $k_1 = 1$ – угловой коэффициент наклона касательной y_1.

С другой стороны $k_1 = y'$.

$$y' = -2x$$

$$-2x_0 = 1$$

$$x_0 = -\frac{1}{2}$$

x_0 – абсцисса точки касания.

$f(x_0) = 1 - x_0^2 = 0{,}75$,

$f'(x_0) = 1$.

Подставим полученные значения в уравнение касательной $y_1 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Получим $y_1 = 1{,}25 + x$.

По условию $x = 0 \Longrightarrow y_1 = 1{,}25$. Т.е. касательная проходит через точку (0; 1,25), $c = 1{,}25 \Rightarrow 4c = 5$.

Рассматривая угол наклона касательной y_2, придем к тому же результату.

Ответ: 5.

17. Чему равно количество действительных корней уравнения $x^3 + 6x^2 + 21x - 5 = 0$?

Решение.

$$y = x^3 + 6x^2 + 21x - 5$$

$$y' = 3x^2 + 12x + 21$$

$$3x^2 + 12x + 21 = 0$$

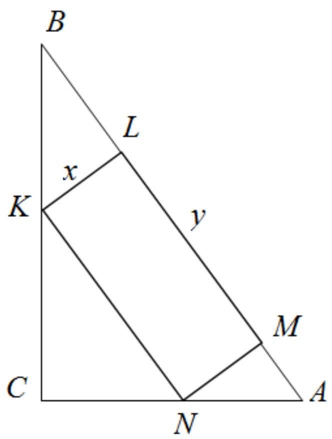
$$x^2 + 4x + 7 = 0$$

$D < 0 \Rightarrow$ функция возрастает на $(-\infty;\ +\infty)$, тогда одна точка пересечения с осью Ox, значит уравнение имеет один действительный корень.

Ответ: 1.

18. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 24 см и углом 60^0 вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Каковы должны быть длины сторон прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

Решение. Изобразим прямоугольный треугольник ABC:



По условию, $AB = 24$см,$\angle A = 60^0$, откуда $\angle B = 30^0$.

Пусть $KL = x$ и $LM = y$. Выразим x через y.

$$y = LM = AB - BL - AM$$

Из ΔKBL: $BL = KLctg30^0 \Rightarrow BL = x\sqrt{3}$.

Из ΔMNA: $AM = MNctg60^0 \Rightarrow AM = \frac{x\sqrt{3}}{3}$.

Тогда $y = 24 - \ x\sqrt{3} - \frac{x\sqrt{3}}{3} = 24 - \frac{4x\sqrt{3}}{3}$.

$S(x) = x \cdot y$ – площадь вписанного прямоугольника.

$S(x) = x\left(24 - \frac{4x\sqrt{3}}{3}\right) = 24x - \frac{4x^2\sqrt{3}}{3}$

$S'(x) = 24 - \frac{8\sqrt{3}}{3}x$,откуда $S' = 0$, при $x = 3\sqrt{3}$.

Точка $x = 3\sqrt{3}$ является точкой максимума функции $S(x)$ (т.к. если $x < 3\sqrt{3}$, то $S'(x) > 0$; если $x > 3\sqrt{3}$, то $S'(x) < 0$).

Длины искомого прямоугольника равны $3\sqrt{3}$см и $24 - \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 12$см.

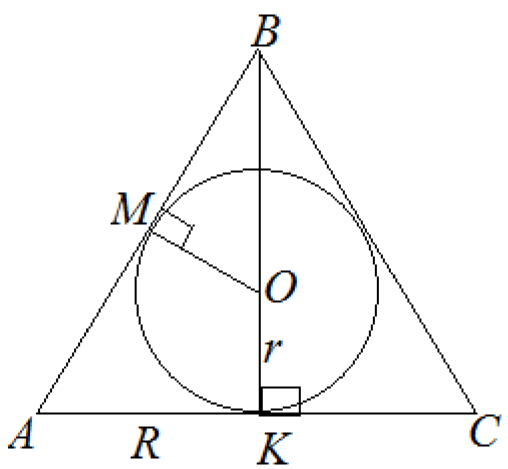
Ответ: $3\sqrt{3}$см, 12см.

19. Найдите наименьшее значение объема конуса, описанного около шара, площадь поверхности которого равна 36 см^2

Решение.

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ – формула объема конуса, где R- радиус основания, Н- высота конуса.

Рассмотрим поперечное сечение конуса:



Пусть Н=ВК= x

$S = 4\pi r^2$- площадь полной поверхности шара, где r- радиус шара.

$$4\pi r^2 = 36$$

$$r^2 = \frac{36}{4\pi}$$

$$r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi AK^2 x$$

ВК= x, $OK = r = OM$.

$OB = x - r$.

Треугольник ВОМ прямоугольный т.к. ВМ ⊥ОМ. По т. Пифагора

$MB = \sqrt{(x-r)^2 - r^2} = \sqrt{x^2 - 2xr}$.

Шар вписан в конус ⇒ АВ – касательная для окр, (*O*,*r*), ОМ=*r* – радиус проведенный к точке касания ⇒ $OM \perp AB$.

Рассмотрим ΔAKB и ΔBOM : $<$ В- общий, $< ABK =< BMO = 90^0$

⇒ $\Delta AKB \sim \Delta BOM$ (по двум углам).

$$\frac{OM}{AK} = \frac{MB}{BK}$$

$$\frac{r}{AK} = \frac{\sqrt{x^2 - 2xr}}{x}$$

$$AK = \frac{rx}{\sqrt{x^2 - 2xr}}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \frac{r^2x^2}{x^2 - 2xr} x = \frac{1}{3}\pi \frac{r^2x^2}{x - 2r}$$

$x > 2r$, т.к. $V > 0$

$$V' = \frac{1}{3}\pi \frac{2r^2x(x-2r) - r^2x^2}{(x-2r)^2} = \frac{1}{3}\pi \frac{r^2x^2 - 4r^3x}{(x-2r)^2} = \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{x^2 - 4rx}{(x-2r)^2}$$

$$\frac{1}{3}\pi r^2 \frac{x^2-4rx}{(x-2r)^2} = 0$$

$$x^2 - 4rx = 0$$

$x = 0$ или $x = 4r$

$x = 0 \Rightarrow V = 0$

$x = 4r \Rightarrow x = \dfrac{12}{\sqrt{\pi}}$

$$V = \frac{1}{3}\pi \frac{\frac{9}{\pi} \cdot \frac{144}{\pi}}{\frac{12}{\sqrt{\pi}} - 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{\pi}}} = 72\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$$

$V = 72\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ – наименьшее значение объема конуса (т.к. при $x < \frac{12}{\sqrt{\pi}}$ или при $x > \frac{12}{\sqrt{\pi}}$ $V > 72\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$)

Ответ: $72\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$.

2.2 Факультативный курс по математике: «Производная в заданиях ЕГЭ»

2.2.1 Пояснительная записка

Одной из главных задач обучения математике в школе является обеспечение прочного и сознательного овладения учащимися системой математических знаний, умений и навыков. Помимо самих уроков, которых иногда бывает недостаточно для хорошего закрепления материала, в решении данной задачи могут помочь дополнительные занятия по математике – факультативы. Такие занятия способствуют развитию познавательных способностей у школьников, формируют математическое мышление, способствуют интеллектуальному развитию [13]. Факультативы повышают интерес к предмету, влияют на профессиональную ориентацию учащихся.

Результаты ЕГЭ по математике предоставляют сведения об уровне подготовки выпускников по предмету. Полученная информация учитывается в итоговой аттестации учащихся, а также при их поступлении в вуз. Поэтому факультативные занятия «Производная в занятиях ЕГЭ» направлены на отработку навыков решения задач, наиболее часто встречающихся на итоговом экзамене, с целью подготовки к сдаче ЕГЭ.

Преподавание факультатива обеспечивает систематизацию знаний и усовершенствование умений учащихся на уровне, требуемом при проведении итоговой аттестации.

2.2.2 Тематическое планирование

Опираясь на ранее представленный нами анализ материалов ЕГЭ, мы разработали факультативные занятия на следующие темы:

1. «Геометрический смысл производной».
2. «Исследование функции».
3. Контрольная работа.

Таблица 1. Тематическое планирование

Номер занятия	Тема занятия	Количество часов
1	Задачи на геометрический смысл производной.	1
2	Определение характеристик производной по графику функции.	1
3	Определение характеристик функции по графику ее производной.	1
4	Задачи на наибольшее и наименьшее значения функции.	1
5	Контрольная работа.	1

Целью данного факультатива является развитие у учащихся навыков применения теоретических знаний по теме «Производная функции» для решения заданий единого государственного экзамена.

Задачи факультатива:

Расширить и углубить знания учащихся по теме «Производная»;

Поспособствовать формированию практических навыков;

Обеспечить усвоение программного материала;

Сформировать умения решать задания единого государственного экзамена с использованием производной.

Для реализации программы факультатива «Производная в заданиях ЕГЭ» использовался ранее описанный анализ заданий ЕГЭ за 2013 год и по 2017 год.

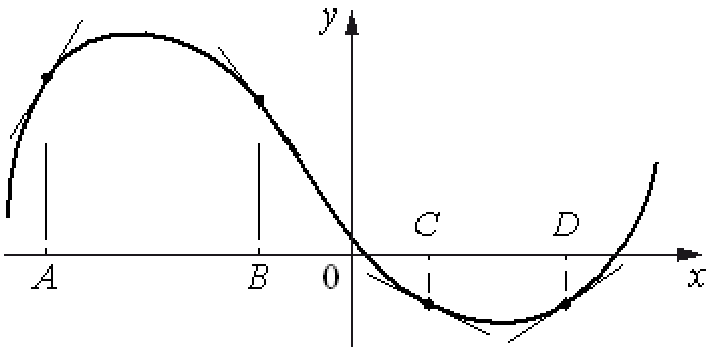
2.2.3 Контрольная работа

<u>Инструкция по выполнению работы</u>

На выполнение контрольной работы по математике на тему «Производная» дается 45 минут. Работа состоит из заданий базового уровня данной темы, с кратким ответом. Задания считаются выполненными если, учащийся дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Вариант 1

Задание 1. На рисунке изображены график функции и касательные, проведённые к нему в точках с абсциссами A, B, C и D.

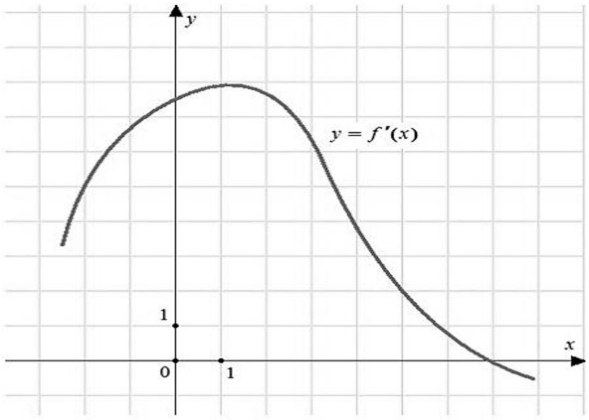


В правом столбце указаны значения производной функции в точках A, B, C

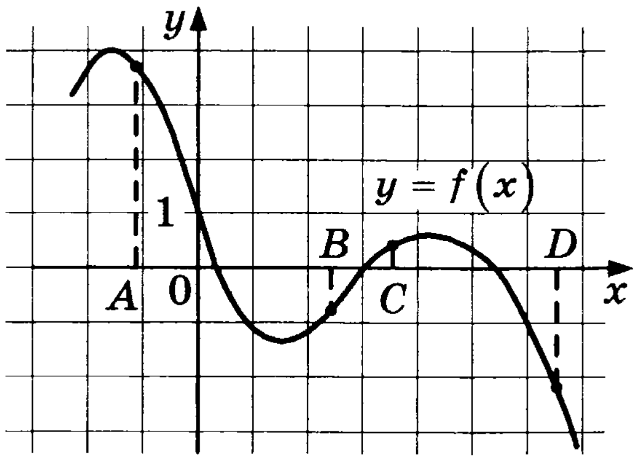
и D. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке значение производной функции в ней.

Точки	Значения производной
A	1) 23
B	2) -12
C	3) -113
D	4) 123

Задание 2. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ - производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 2$ или совпадает с ней.



Задание 3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки A, B, C и D на оси Ox. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке характеристику функции и ее производной.



Точки	Характеристики
A	1) Значение функции в точке положительно, а значение производной функции в точке отрицательно.
B	2) Значение функции в точке отрицательно и значение производной функции в точке отрицательно.

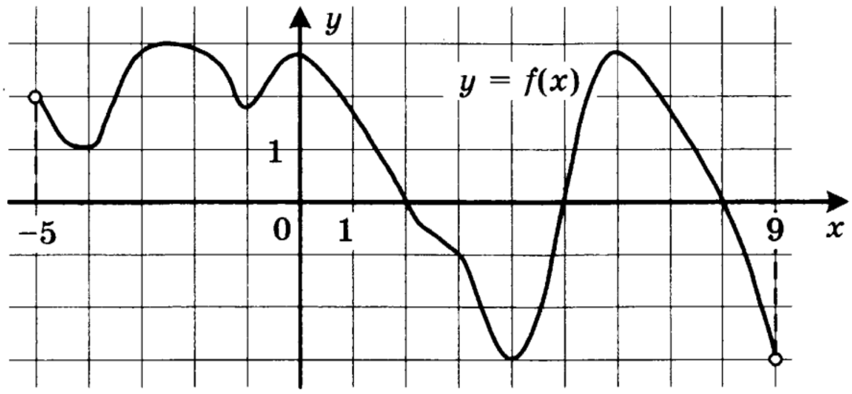
C	3) Значение функции в точке отрицательно, а значение производной функции в точке положительно.
D	4) Значение функции в точке положительно и значение производной функции в точке положительно.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

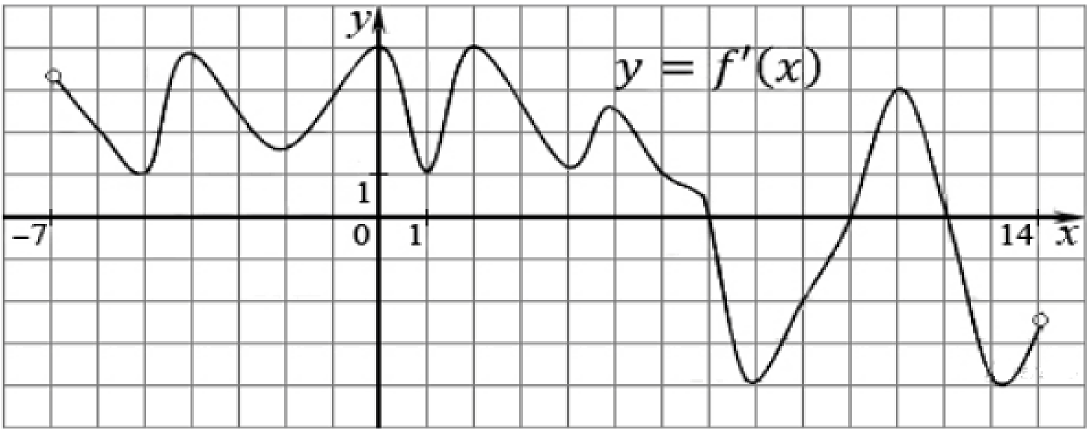
Ответ:

A	B	C	D

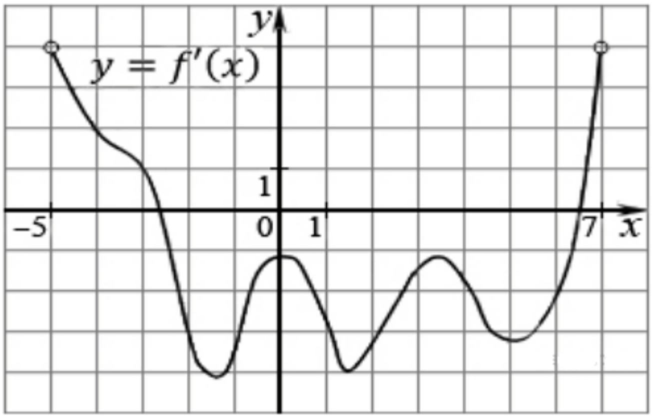
Задание 4. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-5; 9). Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Задание 5. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале (–7;14). Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку [–6;9].



Задание 6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале (–5;7). Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

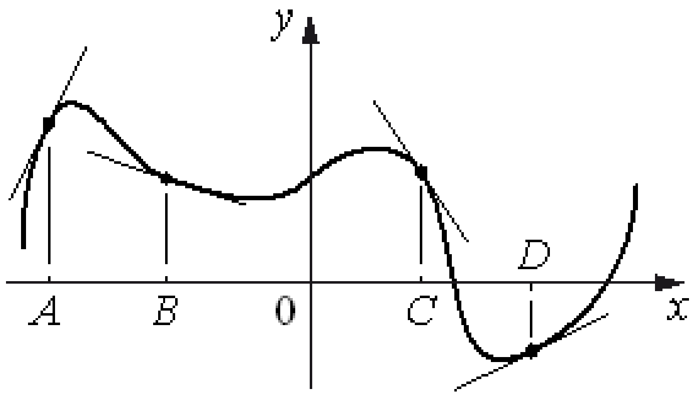


Задание 7. Найдите наибольшее значение функции $y = 15x - 3\sin x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Задание 8. Найдите наименьшее значение функции $y = 4x^3 - 2x^2 + 4$ на отрезке [0; 5].

Вариант 2

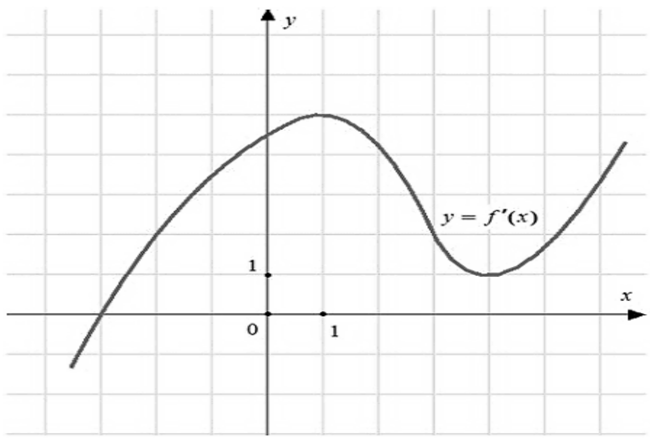
Задание 1. На рисунке изображены график функции и касательные, проведённые к нему в точках с абсциссами A, B, C и D.



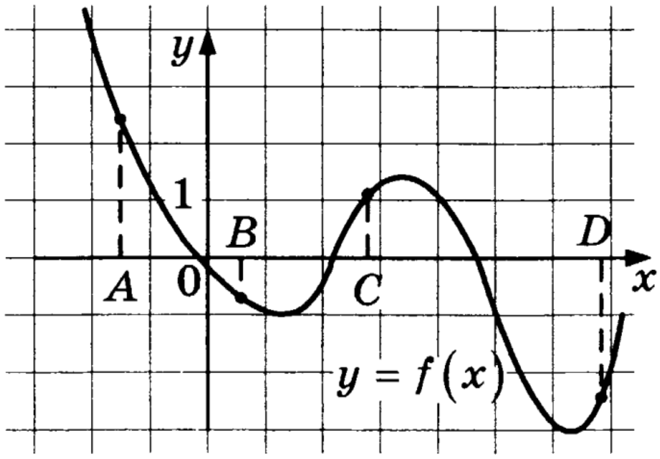
В правом столбце указаны значения производной функции в точках A, B, C
и D. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке значение производной функции в ней.

Точки	Значения производной
A	1) -1,5
B	2) 0,5
C	3) 2
D	4) -0,3

Задание 2. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



Задание 3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки A, B, C и D на оси Ox. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке характеристику функции и ее производной.



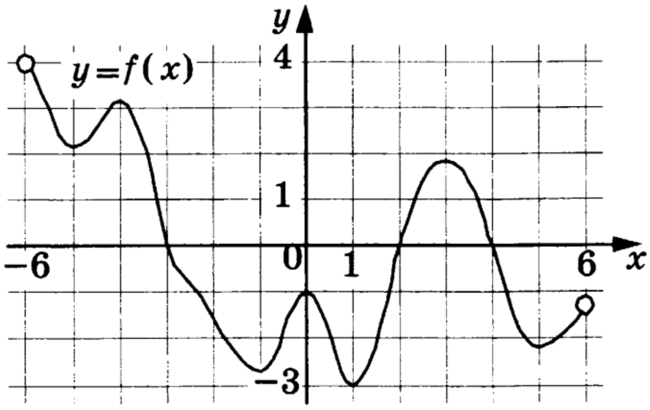
Точки	Характеристики
A	1) Значение функции в точке положительно, а значение производной функции в точке отрицательно
B	2) Значение функции в точке отрицательно и значение производной функции в точке отрицательно
C	3) Значение функции в точке отрицательно, а значение производной функции в точке положительно
D	4) Значение функции в точке положительно и значение производной функции в точке положительно

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

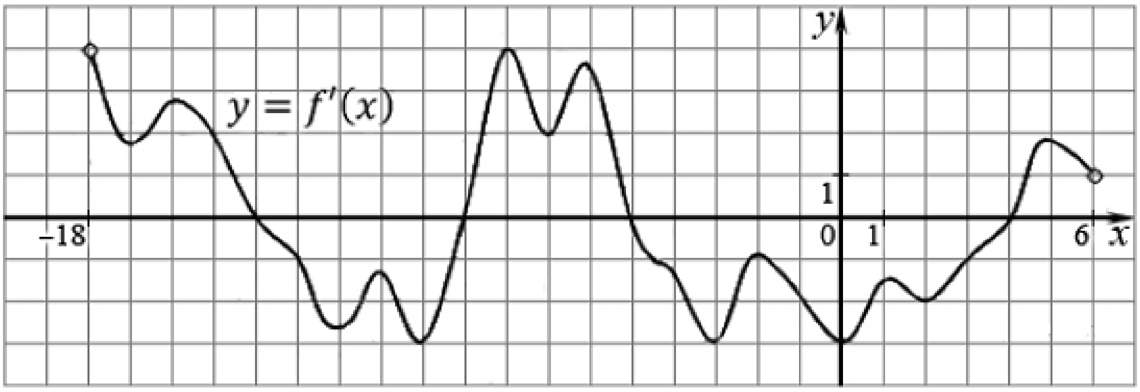
Ответ:

A	B	C	D

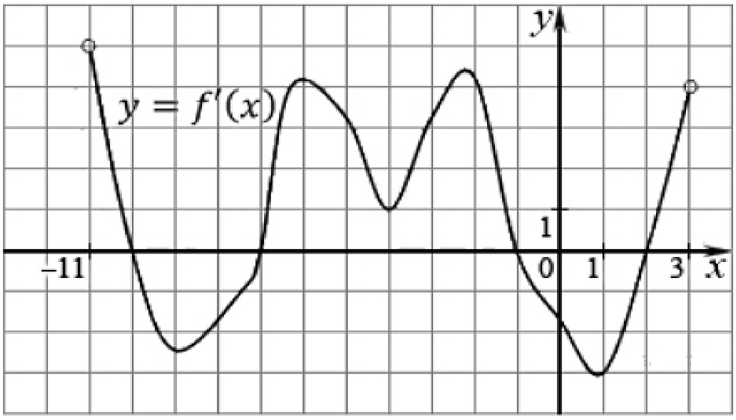
Задание 4. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-6; 6). Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0 на отрезке [-5,5; 4].



Задание 5. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале (–18;6). Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку [–13;1].



Задание 6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале (–11;3). Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



Задание 7. Найдите наибольшее значение функции $y = 3\tan x - 3x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

Задание 8. Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 3$ на отрезке [-1;2].

Решение контрольной работы представлено в приложении 2.

2.3 Апробация результатов исследования

Экспериментальное исследование проводилось в МОУ «Октябрьская СОШ» п. Октябрьский Красноармейского района.

Участниками исследования были учащиеся 10 класса.

Цель эксперимента состояла в проверке гипотезы: факультатив «Производная в заданиях ЕГЭ», предполагающий дополнительное изучение производной, включающий ряд примеров, задач, контрольную работу, может обеспечить существенное повышение качества усвоения математических знаний и результатов в подготовки к ЕГЭ.

Для проверки результатов исследования в рамках факультативного курса был проведен урок «Геометрический смысл производной», конспект данного урока представлен в приложении 1. В конце занятия учащимся была предложена самостоятельная работа. Ее содержание включало 3 задачи на геометрический смысл производной, решение которых было рассчитано на 8 минут. Ниже приведен график результатов проверочной работы.

Результаты показали, что работы выполнены успешно, были сформированы умения решать задачи ЕГЭ на тему «Геометрический смысл производной», удалось обеспечить усвоение материала, расширить и углубить знания учащихся по теме «Производная».

Таким образом, исследование показало реализуемость гипотезы.

Оценка результатов педагогической деятельности позволяет сделать вывод об эффективности разработанной системы заданий.

Выводы по главе. На основании проведенного анализа материалов ЕГЭ во второй главе работы был разработан тест по типу ЕГЭ на тему «Дифференциальные исчисления». Тест позволяет определить слабые места в знаниях учащихся. В соответствии результатам тестирования можно сформировать дальнейшую деятельность школьников при подготовке к итоговой аттестации. Помимо теста в главе находится его подробное решение.

С целью развития у учащихся навыков применения теоретических знаний по теме «Производная функции» при решении задач единого государственного экзамена по математике был разработан факультативный курс занятий «Производная в заданиях ЕГЭ». В рамках факультативного курса для проверки результатов исследования был проведен урок «Геометрический смысл производной». Преподавание данного факультатива способствует систематизации знаний и усовершенствованию умений учащихся на уровне, требуемом при проведении итоговой аттестации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Благодаря своей универсальности математический анализ вооружает учащихся методами познания других наук, способствует развитию аналитических, дедуктивных, критических и прогностических способностей. Изучение производной формирует умения математически исследовать различные явления. Выпускник должен иметь представления о производной и ее применении для исследования функций. Задания, связанные с применением производной включены в единый государственный экзамен. Вследствие этого мы выявили основные направления расширения и углубления знаний, умений, навыков учащихся по теме «Производная», разработали факультатив, способствующий формированию практических навыков для решения заданий единого государственного экзамена по теме «Производная функции». Таким образом, цель квалификационной работы достигнута.

В результате решены задачи, поставленные в начале работы: был проведен анализ школьных учебников на содержание темы «Производная»; затем анализ материалов ЕГЭ, с помощью которого удалось выделить основные экзаменационные задачи по теме «Производная»; на основе анализа разработан тест по типу ЕГЭ и факультативный курс, способствующий формированию практических навыков для решения заданий единого государственного экзамена по теме «Производная функции». Факультативный курс раскрывает следующие темы: геометрический смысл производной, определение характеристик производной по графику функции, определение характеристик функции по графику ее производной, нахождение наибольшего и наименьшего значений функций. С целью проверки результатов исследования был проведен урок «Геометрический смысл производной». В конце курса предложены два варианта контрольной работы с полным решением.

Данная квалификационная работа может быть использована учителями при подготовке школьников к сдаче единого государственного экзамена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра и начала анализа.10-11 классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачев и др. – 3-е изд. - М. : Просвещение, 2016. – 463 с.Глазков Ю.А. Математика ЕГЭ: Сборник заданий и методических рекомендаций. – М.: Экзамен, 2013.

2. Алгебра и начала математического анализа [Текст]: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / [А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др.] ; под ред. А. Н. Колмогорова. – 17-е изд. – М. : Просвещение, 2008. – 384 с.

3. Алгебра и начала анализа [Текст]: Учеб. для 11 кл. общеобразоват. учреждений / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М. : Просвещение, 2002. – 448 с.

4. ЕГЭ 2016. Математика. Базовый уровень. 10 вариантов типовых тестовых знаний [Текст] / А. В. Антропов, А. В. Забелин, Е. А. Семенко, Н. А. Сопрунова, С. В. Станченко, И. А. Хованская, Д. Э. Шноль, И. В. Ященко; под ред. И. В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2016. – 56 с.

5. ЕГЭ 2016. Математика. Типовые тестовые задания [Текст] / И. В. Ященко, М. А. Волкевич, И. Р. Высоцкий, Р. К. Гордин, П. В. Семенов, О. Н. Косухин, Д. А. Федоровых, А. И. Суздальцев, А. Р. Рязановский, И. Н. Сергеев, В. А. Смирнов, А. В. Хачатурян, С. А. Шестаков, Д. Э. Шноль; под ред И. В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2016. – 55 с.

6. ЕГЭ 2017. Математика. Базовый уровень. 10 вариантов типовых тестовых знаний [Текст] / А. В. Антропов, А. В. Забелин, Е. А. Семенко, Н. А. Сопрунова, С. В. Станченко, И. А. Хованская, Д. Э. Шноль, И. В. Ященко; под ред. И. В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2017. – 56 с.

7. ЕГЭ 2017. Математика. Экзаменационные тесты. Практикум по выполнению типовых тестовых заданий ЕГЭ [Текст] / Л. Д. Лаппо, М. А. Попов. – М. : Издательство «Экзамен», 2017. – 56 с.

8. ЕГЭ 2017. Математика. Тематические тренировочные задания [Текст] / В.В. Кочагин, М. Н. Кочагина. – Москва : Эксмо, 2016. – 208 с.

9. ЕГЭ 2017. Математика. Экзаменационные тесты. Базовый уровень. Практикум по выполнению типовых тестовых заданий ЕГЭ [Текст] / Л. Д. Лаппо, М. А. Попов. – М. : Издательство «Экзамен», 2017. – 79 с.

10. Виленкин Н. Я. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. [Текст]: учебник для учащихся общеобразоват. организаций (углубленный уровень) / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. – 18-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2014. – 352 с.

11. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 - 11 классы. [Текст]: в 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый уровень) / А. Г. Мордкович. – 14-е изд., стер.- М.: Мнемозина, 2013. – 400 с.

12. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. [Текст]: в 2 ч. Ч. 1. Учебник для общеобразовательных учреждений

(профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов – 4-е изд., доп. – М. : Мнемозина, 2007. – 424 с.

13. Харламов, И. Ф. Педагогика [Текст]: учебник/ И. Ф. Харламов. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Гардарики, 1999. – 520 с.

14. Задания из ЕГЭ [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.ctege.info/zadaniya-ege-po-matematike

15. Задания ЕГЭ по математике [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://alexlarin.net

16. КИМы к ЕГЭ [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://егэша.рф/news/kim_ege

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Конспект урока «Геометрический смысл производной».

Тема занятия: «Геометрический смысл производной».

Количество отведенных часов: 1 академический час

Цель занятия: развитие у учащихся навыков применения теоретических знаний по теме «геометрический смысл производной» для решения заданий единого государственного экзамена.

Задачи

Образовательные: обобщить и систематизировать знания учащихся по теме «Геометрический смысл производной», рассмотреть прототипы задач ЕГЭ по данной теме.

Развивающие: способствовать формированию основных ключевых компетенций (сравнение, сопоставление, контроль и оценивание своей деятельности).

Воспитательные: создать условия для развития у учащихся ответственного отношения к учению.

Ход урока:

1. Организационный момент (2 мин.)
2. Актуализация знаний (7 мин.)
3. Решение задач (26 мин.)
4. Проверка знаний (8 мин)
5. Подведение итогов и домашнее задание (2мин.)

Ход урока:

1 этап. Организационный момент включает в себя приветствие учителем класса, проверку отсутствующих, готовность помещения к уроку.

2 этап. Актуализация знаний.

Учитель предлагает заполнить карточку содержащую список следующих вопросов:

1. Запишите формулу, задающую линейную функцию.

2. Число ____ называют угловым коэффициентом прямой, а угол α - углом между ____________

3. Графики двух линейных функций $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$:

- пересекаются, если ____________

- совпадают, если _________

- параллельны, если ___________

4. Геометрический смысл производной состоит в том, что ________

5. Уравнение касательной имеет вид _____________

6. Продолжите равенство $k =$ _____________________

Проверка ответов происходит в парах.

3 этап**.** Решение задач.

Этап посвящен закреплению и расширению знаний.

В рамках данного занятия необходимо рассмотреть задачи аналогичные задачам из ЕГЭ, основанным на геометрическом смысле производной функции: угловой коэффициент касательной к графику функции равен значению производной этой функции в точке касания.

Пусть задан график функции $y = f(x)$ и точка A $(x_0; y_0)$, принадлежащая данной функции, тогда уравнение касательной в данной точке примет следующий вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

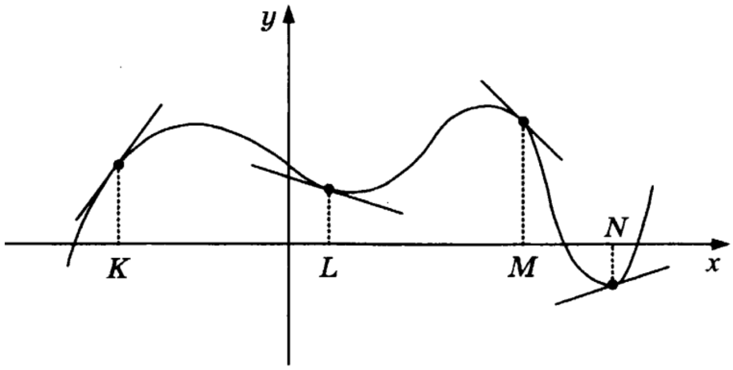
Через точку A$(x_0; y_0)$ проходит множество прямых:

$y = y_0 + k(x - x_0)$.

Данные прямые имеют различный угловой коэффициент $k = \tan \alpha$, где α – угол наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс. Угловой коэффициент $k = f'(x_0)$ задает единственную прямую являющуюся касательной к графику функции, проходящей через точку A$(x_0; y_0)$.

Следующие примеры учащиеся решают коллективно совместно с учителем.

Пример 1. На рисунке изображен график функции, к которому проведены касательные в четырех точках.



Ниже указаны значения производной этой функции в данных точках. Пользуясь графиком, поставьте в соответствии каждой точке значение производной в ней.

точки	Значения производной
K	1) $\frac{1}{3}$
L	2) 1,2
M	3) -0,4
N	4) -1

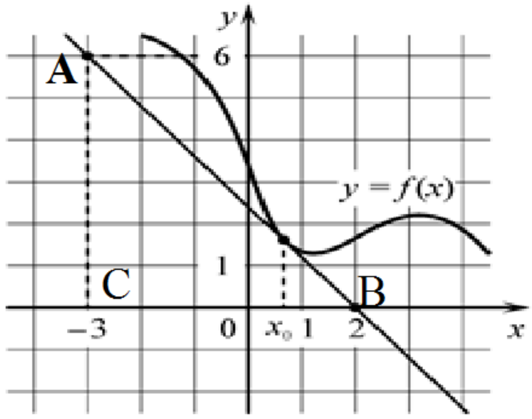
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

K	L	M	N

Решение: производная $f'(x_0)$ равна тангенсу острого угла наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс, значит, в точках K, N $f'(x_0)$>0. Большему углу отвечает большее значение производной. Тогда точке К будет соответствовать значение 1,2. Точке N соответствует значение $\frac{1}{3}$. В точках L, M угол между касательной и положительным направлением оси абсцисс тупой, поэтому в этих точках знак производной $f'(x_0)$<0. Значит, точке L соответствует значение равное -0,4, а для точки M значение производной равно -1.

Пример 2. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

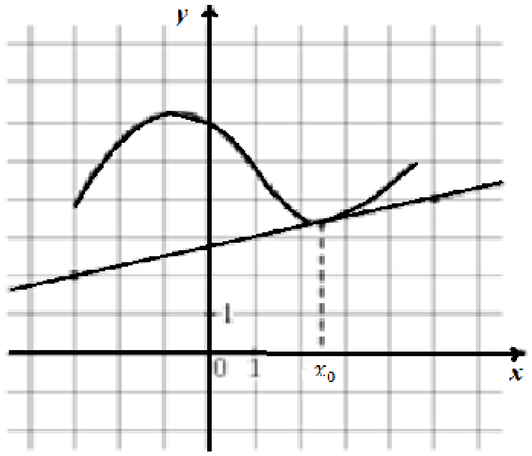


Решение: Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором гипотенуза AB является отрезком касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$, из рисунка по клеткам определим длину катетов: |AC|=6 и |BC|=5. Следует учесть, что производная $f'(x_0)$ равна тангенсу острого угла наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс, значит, $f'(x_0)$>0. Но в данном примере угол α между прямой AB и положительным направлением оси абсцисс тупой, т.е. α>90˚, поэтому знак производной $f'(x_0)$<0. Для нахождения численного значения производной $f'(x_0)$ достаточно вычислить тангенс угла α в треугольнике ABC:

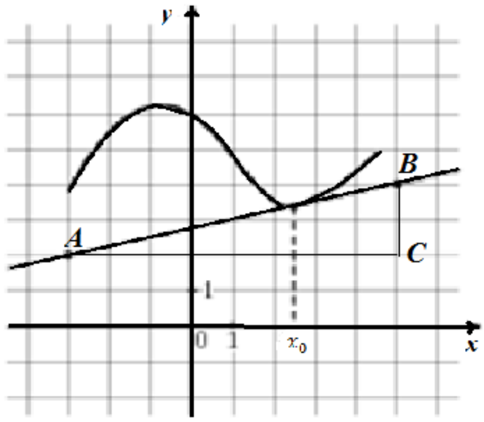
$$f'(x_0) = -\tan \alpha = -\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{6}{5} = -1{,}2$$

Ответ: -1,2

Пример 3. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение. Значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 равно тангенсу угла между касательной и положительным направлением оси абсцисс. Для нахождения тангенса выделим прямоугольный треугольник, гипотенуза которого лежит на касательной, а катеты параллельны осям координат. На касательной обозначим точки с целыми координатами буквами А и В. Проведем через точку А прямую параллельно оси *Ox*, а через точку В - параллельно оси *Oy*. Получим прямоугольный треугольник ABC:



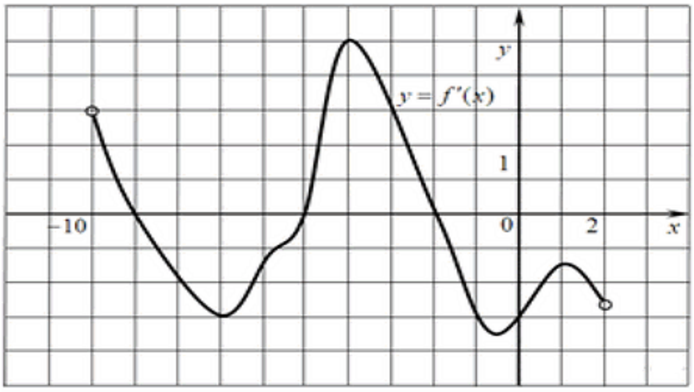
Если две прямые параллельны, то они наклонены под одним и тем же углом к третьей прямой. Следовательно, угол наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс – это ∠BAC, ∠BAC острый, значит, $f'(x_0)$>0.

Тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к прилежащему. Считая длину катетов по клеткам, получим:

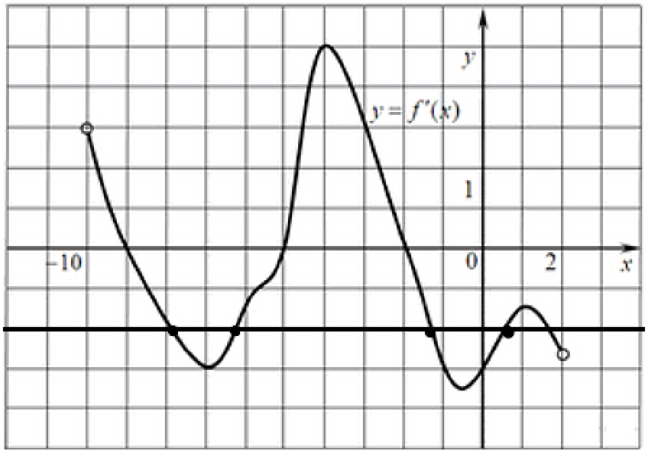
$$f'(x_0) = \tan\alpha = \frac{\text{BC}}{\text{AC}} = \frac{2}{8} = 0{,}25$$

Ответ: 0,25.

Пример 4. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале (–10; 2). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней.



Решение. Угловой коэффициент заданной прямой $y = -2x - 11$ равен -2. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, поэтому чтобы касательная была параллельна данной прямой или совпадала с ней, нужно, чтобы $f'(x_0) = -2$. Отметим на графике точки в которых производная равна -2, для этого через точку $y = -2$ проведем прямую, параллельную оси абсцисс.



Полученные 4 точки пересечения данного графика с построенной прямой будут искомыми.

Ответ: 4.

Рассмотрим задачи на геометрический смысл производной, в которых не требуется умение чтения графика.

Пример 5. Прямая $y = 2x + 37$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 7x + 10$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение. Угловой коэффициент прямой $y = 2x + 37$ равен 2. Если прямая является касательной к графику функции, то ее угловой коэффициент должен быть равен производной функции в точке касания.

$$y' = 3x^2 + 6x - 7$$

$$3x^2 + 6x - 7 = 2$$

$$3x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

Это квадратное уравнение имеет два корня: −3 и 1. Таким образом, есть две точки, в которых касательная к данному графику функции имеет угловой коэффициент, равный 2. Для того чтобы определить, в какой из этих двух точек прямая $y = 2x + 37$ касается графика функции, вычислим значения функции в этих точках и проверим, удовлетворяют ли они уравнению касательной. Значение функции $y = x^3 + 3x^2 - 7x + 10$ в точке −3 равно −27+27+21+10=31, а значение в точке 1 равно 1 + 3 − 7 + 10 = 7. Заметим, что точка с координатами (1; 7) не удовлетворяет уравнению касательной, так как 7 6= 2 + 37. А вот точка (−3; 31) уравнению касательной удовлетворяет, так как −6 + 37 = 31. Значит, искомая абсцисса точки касания равна −3.

Ответ: −3.

Пример 6. Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 5 - 5x - x^2$ равен -3. Найдите точку пересечения касательной с осью абсцисс.

Решение. Производная функции есть угловой коэффициент наклона касательной, т.е. $f(x)'$- угловой коэффициент наклона касательной.

Найдем производную функции $y = 5 - 5x - x^2$, получим $f(x)' = -5 - 2x$. По условию угловой коэффициент касательной равен -3, тогда

$$f(x_0)' = -5 - 2x_0 = -3$$

$$-2x_0 = 2$$

$$x_0 = -1$$

Найдем уравнение касательной с коэффициентом наклона -3. Для этого воспользуемся формулой касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$f(x_0) = 9$$

$$f(x_0)' = -3$$

Тогда $y_{\text{кас}} = 9 - 3(x + 1) = -3x + 6$. Касательная пересекает ось абсцисс, следовательно, $y = 0$.

Таким образом $-3x + 6 = 0$

$-3x = -6$

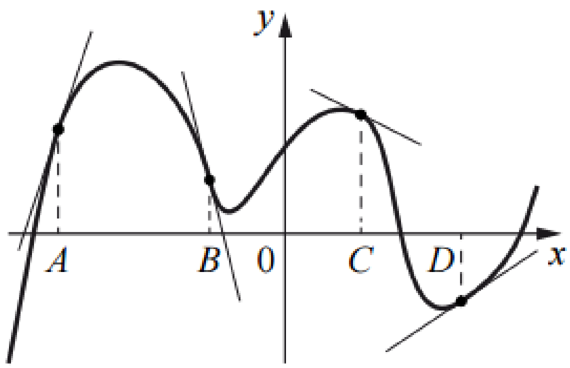
$x = 2$

Ответ: 2.

4 этап. Задачи для самостоятельного решения.

Вариант 1.

1. На рисунке изображен график функции, к которому проведены касательные в четырех точках.



Ниже указаны значения производной этой функции в данных точках. Пользуясь графиком, поставьте в соответствии каждой точке значение производной в ней.

Точки	Значения производной
A	1) -4
B	2) 3
C	3) $\frac{2}{3}$
D	4) -0,5

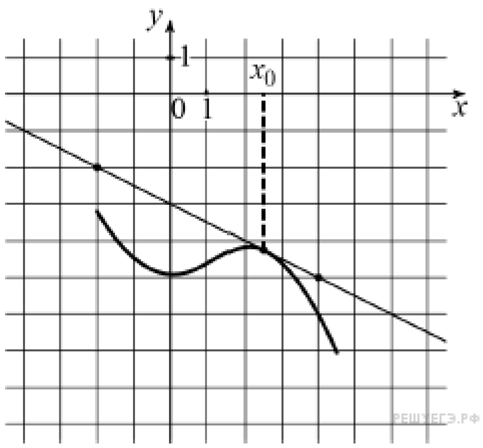
Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

A	B	C	D

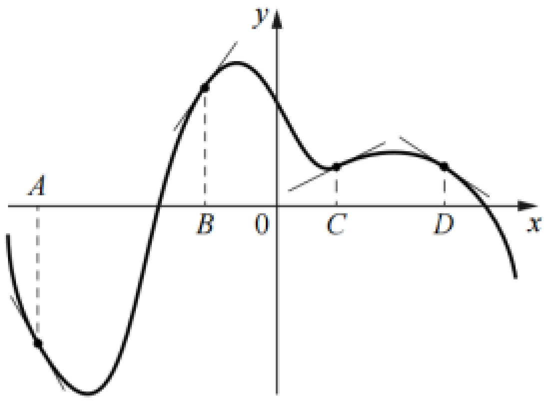
2. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



3. Прямая $y = -5x + 4$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 3x + 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Вариант 2.

1. На рисунке изображен график функции, к которому проведены касательные в четырех точках.



Ниже указаны значения производной этой функции в данных точках. Пользуясь графиком, поставьте в соответствии каждой точке значение производной в ней.

Точки	Значения производной
A	1) 1,4
B	2) -0,7
C	3) 0,5
D	4) -1,8

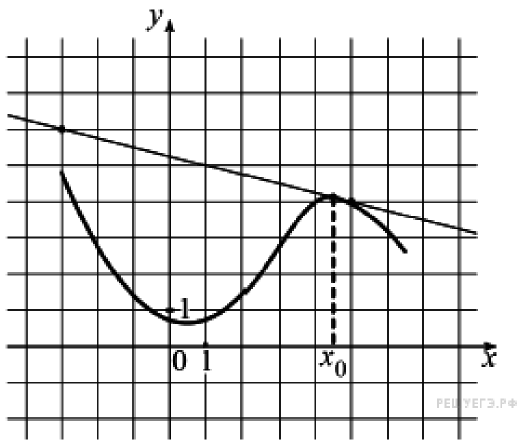
Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

A	B	C	D

2. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



3. Прямая $y = -3x - 6$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 5x - 4$. Найдите абсциссу точки касания.

4 этап. Рефлексия.

Какие типы задач мы рассмотрели?

(задачи на применение геометрического смысла производной)

Какие знания использовали для решения задач?

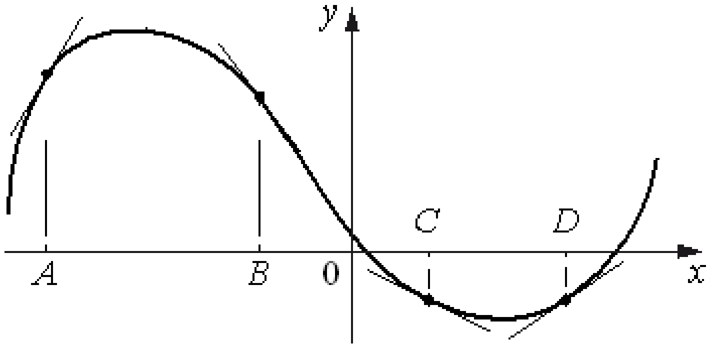
(геометрический смысл производной, значение тангенса угла наклона прямой к оси Ox, условие параллельности прямых)

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Решение контрольной работы

Вариант 1.

Задание 1. На рисунке изображены график функции и касательные, проведённые к нему в точках с абсциссами A, B, C и D.



В правом столбце указаны значения производной функции в точках *A*, *B*, *C*
и *D*. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке значение производной функции в ней.

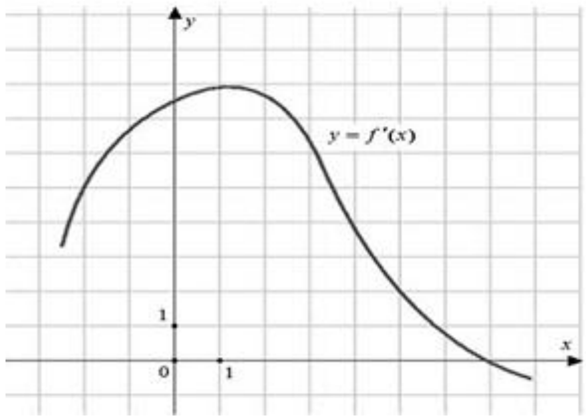
Точки	Значения производной
A	1) 23
B	2) -12
C	3) -113
D	4) 123

Решение. Производная $f'(x_0)$ равна тангенсу острого угла наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс, значит, в точках D и A $f'(x_0)$>0. Большему углу отвечает большее значение производной. Тогда точке A будет соответствовать значение 123. Точке D соответствует значение 23. В точках B, C угол между касательной и положительным направлением оси абсцисс тупой, поэтому в этих точках знак производной $f'(x_0)$<0. Значит, точке B соответствует значение равное -113, а для точки C значение производной равно -12.

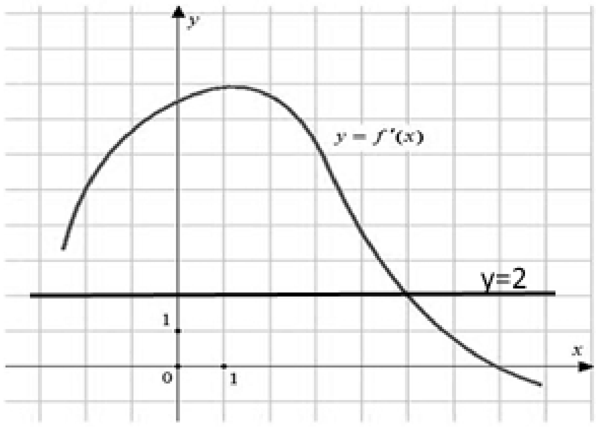
Ответ:

A	B	C	D
4	3	2	1

Задание 2. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ - производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 2$ или совпадает с ней.



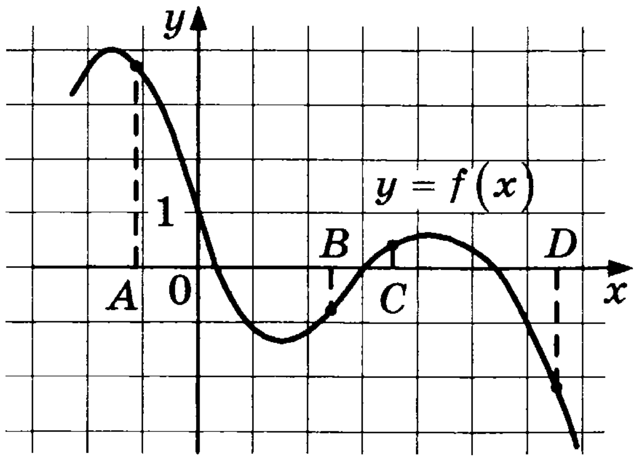
Решение. Угловой коэффициент заданной прямой $y = 2x - 2$ равен 2. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, поэтому чтобы касательная была параллельна данной прямой или совпадала с ней, нужно, чтобы $f'(x_0) = 2$. Отметим на графике точки в которых производная равна 2, для этого через точку $y = 2$ проведем прямую, параллельную оси абсцисс.



Прямая $y = 2$ пересекает график функции $y = f'(x)$ в точке $x = 5$

Ответ: 5.

Задание 3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки A, B, C и D на оси Ox. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке характеристику функции и ее производной.



Точки	Характеристики
A	5) Значение функции в точке положительно, а значение производной функции в точке отрицательно.
B	6) Значение функции в точке отрицательно и значение производной функции в точке отрицательно.
C	7) Значение функции в точке отрицательно, а значение производной функции в точке положительно.
D	8) Значение функции в точке положительно и значение производной функции в точке положительно.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

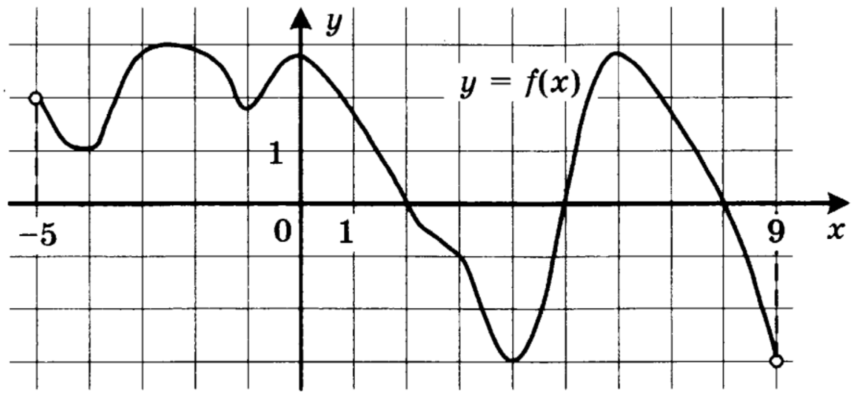
A	B	C	D

Решение: Значение функции положительно в точках A и C, отрицательно в B и D. В промежутках возрастания функции производная принимает положительные значения, а в промежутках убывания – отрицательные значения. Точки B и C принадлежат промежуткам, на которых функция возрастает, следовательно, производная в этих точках положительна. В точках A и D производная отрицательна.

Ответ:

A	B	C	D
1	3	4	2

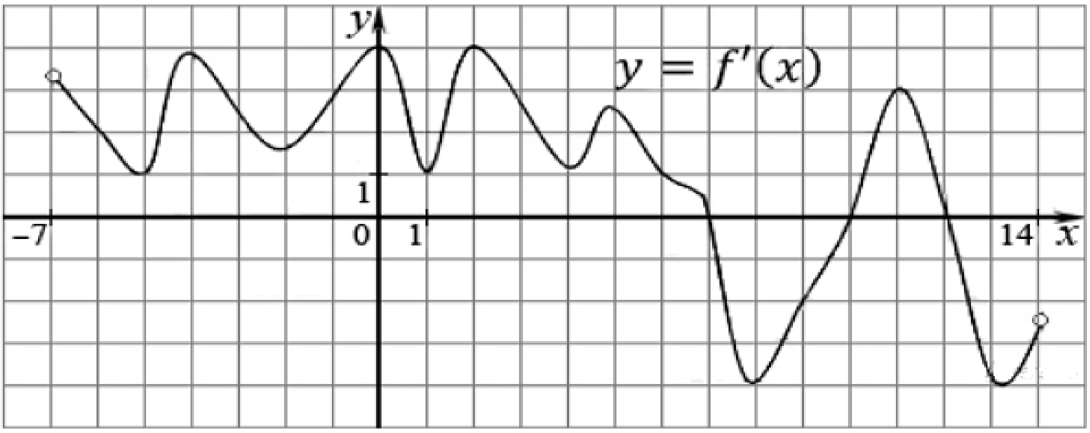
Задание 4. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-5; 9). Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Решение. Производная $f'(x)$ будет равна 0 в некоторой точке, если угловой коэффициент наклона касательной в этой точке равен нулю. Т.е. касательная к графику функции в этой точке должна быть параллельна оси абсцисс. По графику видно, что таких точек 6.

Ответ: 6.

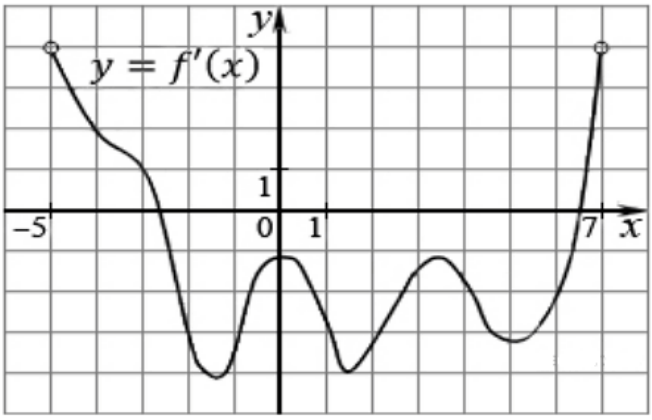
Задание 5. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале (–7;14). Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку [–6;9].



Решение. Точкам максимума соответствуют точки смены знака производной с положительного на отрицательный. Таким образом, на заданном отрезке [–6;9] функция имеет одну точку максимума $x = 7$.

Ответ: 1.

Задание 6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале (–5;7). Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



Решение. Промежутки возрастания функции соответствуют промежуткам, на которых производная положительна. В данной задаче это интервал (-5; -2,5) и интервал (6,5; 7). Они включают 2 целые точки.

Ответ: 2.

Задание 7. Найдите наибольшее значение функции $y = 15x - 3\sin x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Решение. Найдем производную функции:

$y' = 15 - 3\cos x$.

Приравняем производную к нулю и решим уравнение.

$$15 - 3\cos x = 0$$

$$-3\cos x = -15$$

$\cos x = 5$ нет решений.

Найдем значение функции на концах отрезка, выберем наибольшее значение:

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 15\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 5 = -\frac{15\pi}{2} + 3 + 5 = \frac{16 - 15\pi}{2} \approx -15{,}6$$

$$y(0) = 15 \cdot 0 - 3\sin 0 + 5 = 5$$

Ответ: 5.

Задание 8. Найдите наименьшее значение функции $y = 4x^3 - 2x^2 + 4$ на отрезке [0; 5].

Решение. Найдем производную функции:

$y' = 12x^2 - 4x$.

Приравняем производную к нулю и решим уравнение.

$$12x^2 - 4x = 0$$

$$(3x - 1)4x = 0$$

$x = 0$ или $x = \frac{1}{3}$.

Обе точки принадлежат отрезку [0; 5].

Вычислим значения функции в данных точках и на концах отрезка, выберем наибольшее значение:

$$y\left(\frac{1}{3}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4 = \frac{4}{27} - \frac{2}{9} + 4 = \frac{106}{27} \approx 3{,}9$$

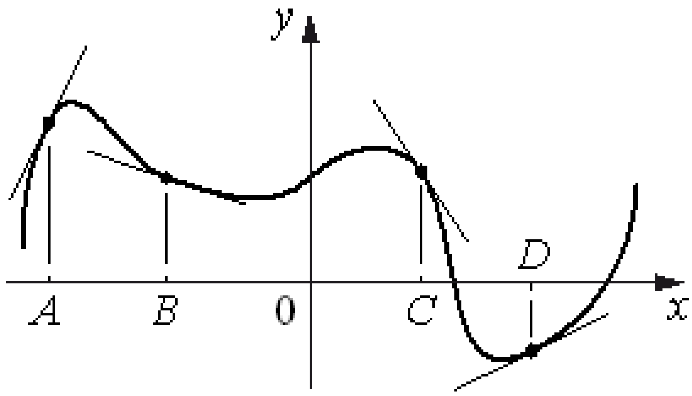
$$y(0) = 4 \cdot 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 4 = 4$$

$$y(5) = 4 \cdot 5^3 - 2 \cdot 5^2 + 4 = 454$$

Ответ: 454.

Вариант 2.

Задание 1. На рисунке изображены график функции и касательные, проведённые к нему в точках с абсциссами A, B, C и D.



В правом столбце указаны значения производной функции в точках A, B, C
и D. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке значение производной функции в ней.

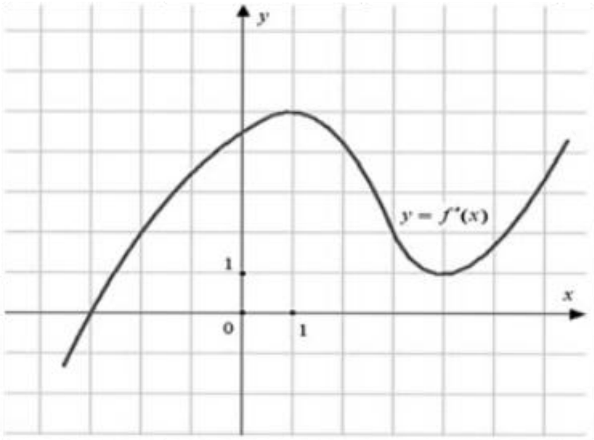
Точки	Значения производной
A	1) -1,5
B	2) 0,5
C	3) 2
D	4) -0,3

Решение. Производная $f'(x_0)$ равна тангенсу острого угла наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс, значит, в точках A и D $f'(x_0)>0$. Большему углу отвечает большее значение производной. Тогда точке A будет соответствовать значение 2. Точке D соответствует значение 0,5. В точках B, C угол между касательной и положительным направлением оси абсцисс тупой, поэтому в этих точках знак производной $f'(x_0)<0$. Значит, точке B соответствует значение равное -0,3, а для точки C значение производной равно -1,5.

Ответ:

A	B	C	D
3	4	1	2

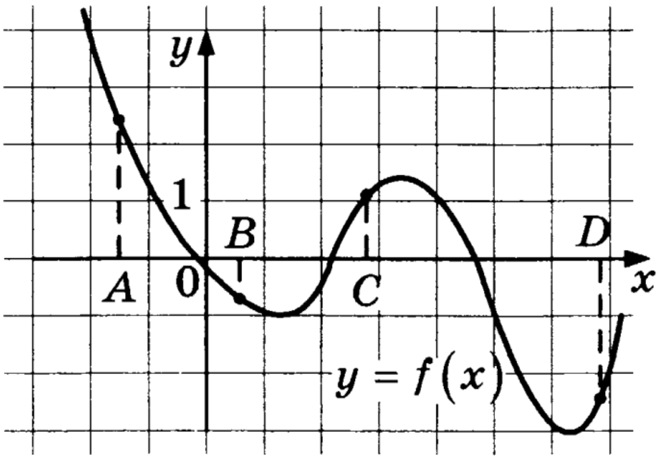
Задание 2. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



Решение. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, поэтому чтобы касательная была параллельна оси абсцисс или совпадала с ней, нужно, чтобы $f'(x) = 0$. На графике видно, что $f'(x) = 0$ в точке $x = -3$.

Ответ: -3.

Задание 3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки A, B, C и D на оси Ox. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке характеристику функции и ее производной.



Точки Характеристики

A	5) Значение функции в точке положительно, а значение производной функции в точке отрицательно
B	6) Значение функции в точке отрицательно и значение производной функции в точке отрицательно
C	7) Значение функции в точке отрицательно, а значение производной функции в точке положительно
D	8) Значение функции в точке положительно и значение производной функции в точке положительно

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

A	B	C	D

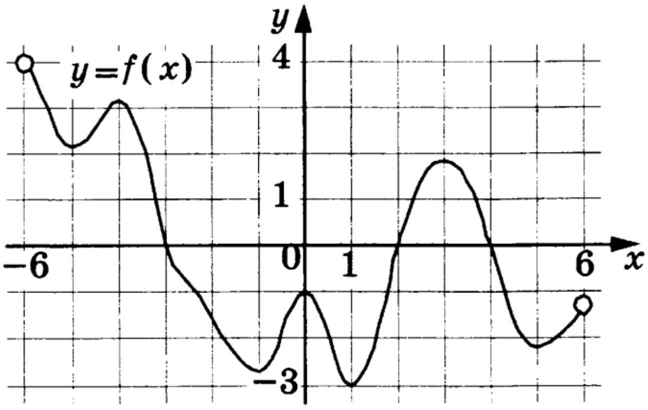
Решение: Значение функции положительно в точках A и C, отрицательно в B и D. В промежутках возрастания функции производная принимает положительные значения, а в промежутках убывания – отрицательные значения. Точки C и D принадлежат промежуткам, на которых функция возрастает, следовательно, производная в этих точках положительна. В точках A и B производная отрицательна.

Ответ:

A	B	C	D

1	2	4	3

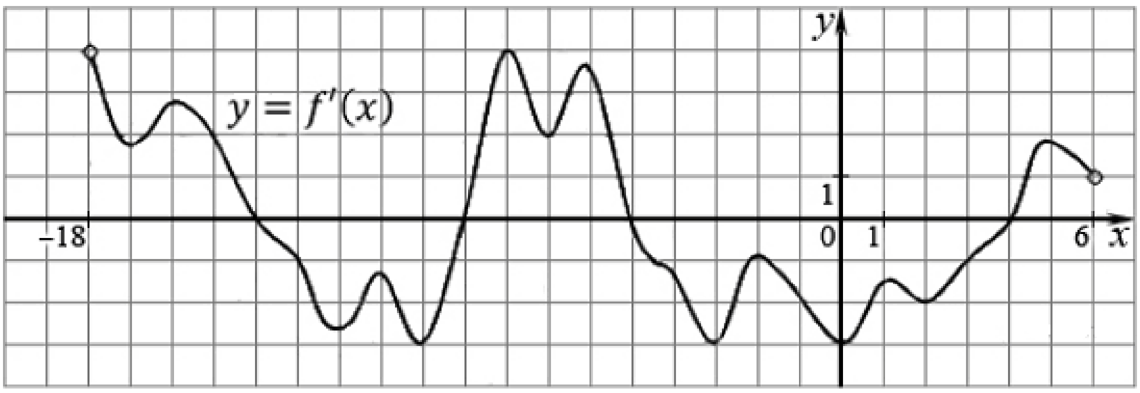
Задание 4. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-6; 6). Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0 на отрезке [-5,5; 4].



Решение. Производная $f'(x)$ будет равна 0 в некоторой точке, если угловой коэффициент наклона касательной в этой точке равен нулю. Т.е. касательная к графику функции в этой точке должна быть параллельна оси абсцисс. По графику видно, что таких точек 7.

Ответ: 7.

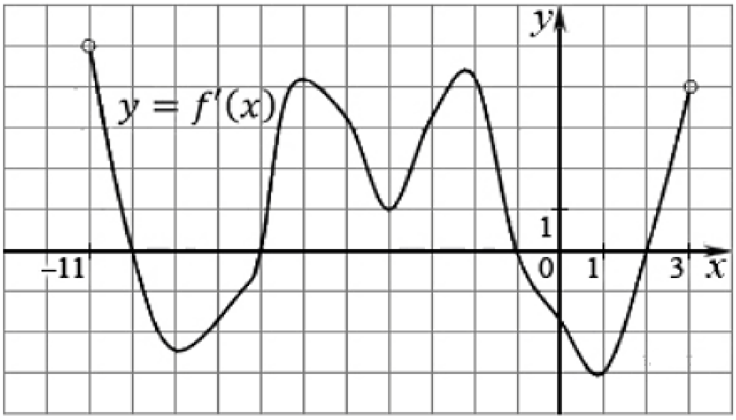
Задание 5. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале (–18;6). Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку [–13;1].



Решение: Точкам минимума соответствуют точки смены знака производной с отрицательного на положительный. Таким образом, на отрезке [–13;1] функция имеет только одну точку минимума $x = 3$.

Ответ: 1.

Задание 6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале (–11;3). Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



Решение. Промежутки убывания функции соответствуют промежуткам, на которых производная отрицательна. В данной задаче это интервал (-10; 7) и интервал (-1; 2). Они включают 4 целых точек.

Ответ: 4.

Задание 7. Найдите наибольшее значение функции $y = 3\tan x - 3x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

Решение. Найдем производную функции:

$y' = \frac{3}{\cos^2 x} - 3$.

Приравняем производную к нулю и решим уравнение.

$$\frac{3}{\cos^2 x} - 3 = 0$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} - 1 = 0$$

$$\tan^2 x = 0$$

$$x = \pi n, n \in Z$$

В отрезок $\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$ попадает $x = \pi n$ при $n = 0$.

Найдем значение функции в точках на краях заданного отрезка, выберем наибольшее значение:

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 3\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 3\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 5 = -3 + \frac{3\pi}{4} + 5 = \frac{(8+3\pi)}{4} \approx 4{,}36$$

$$y(0) = 3\tan 0 - 3 \cdot 0 + 5 = 5$$

Ответ: 5.

Задание 8. Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 3$ на отрезке [-1;2].

Найдем производную функции:

$y' = 6x^2 - 24x + 18$.

Приравняем производную к нулю и решим уравнение.

$$6x^2 - 24x + 18 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

В отрезок $[-1;2]$ попадает $x = 1$.

Вычислим значения функции в данной точке и на концах отрезка, выберем наибольшее значение:

$$y(1) = 2 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 18 \cdot 1 + 3 = 11$$

$$y(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 12 \cdot (-1)^2 + 18 \cdot (-1) + 3 = -29$$

$$y(2) = 2 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 18 \cdot 2 + 3 = 7$$

Ответ: 11.