МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Исследование области устойчивости линейного разностного уравнения четвертого порядка

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05 Педагогическое образование
код, направление
Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»

Проверка на объем заимствований:
74 % авторского текста

Работа рекомендована к защите
рекомендована/не рекомендована

« 6 » апреля 2017 г.
зав. кафедрой МиМОМ
(название кафедры)
Суховиенко Е.А.

Выполнил (а):
Студент (ка) группы ОФ-513/086-5-1
Ясницкая Марина Николаевна

Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры МиМОМ
Нигматулин Равиль Михайлович

Челябинск
2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Исследование области устойчивости линейного разностного уравнения четвертого порядка

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05 Педагогическое образование
код, направление
Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»

Проверка на объем заимствований:
___________% авторского текста

Работа _______________ к защите
рекомендована/не рекомендована
« ___ » ___________ 20__ г.
зав. кафедрой ______МиМОМ____
(название кафедры)
_____________ Суховиенко Е.А.

Выполнил (а):
Студент (ка) группы ОФ-513/086-5-1
Ясницкая Марина Николаевна

Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры МиМОМ
Нигматулин Равиль Михайлович

Челябинск
2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Разностные уравнения в математике изучаются достаточно давно. Некоторые результаты были оформлены в трудах Эйлера, Лагранжа, Лапласа и других математиков 18 века.

В 19 веке круг применения разностных уравнений расширяется. Они используются не только в математических, но и в экономических, биологических исследованиях, а впоследствии и в теории автоматического управления и в других научных областях [8, 9].

Среди линейных уравнений, поддающихся аналитическому решению, были исследованы области устойчивости линейных разностных уравнений второго и третьего порядков, получены геометрические описания области устойчивости, уравнения границ, исследовано асимптотическое поведение решений [3, 4, 10, 13].

Для полного уравнения четвертого порядка область устойчивости не имеет простой геометрической интерпретации. Чтобы получить решение проблемы для полного уравнения, необходимо вначале решить эту проблему для неполных уравнений. В этих случаях можно получить геометрические свойства областей устойчивости в трехмерном пространстве – пространстве коэффициентов уравнения.

В изученной нами литературе эта проблема не рассматривалась и ссылок на ее решение не было обнаружено [1, 2, 17]. Однако в литературе рассматриваются некоторые практические модели, сводящиеся к уравнению четвертого порядка [2, 15]. Поэтому проблема полного исследования уравнения четвертого порядка является актуальной. В связи с этим нами была поставлена **цель**: получить полное описание областей устойчивости неполных линейных разностных уравнений четвертого порядка. Дать описание структуры этой области и ее геометрических свойств в пространстве параметров.

Исходя из поставленной цели, нами были определены следующие **задачи:**

1. Рассмотреть всевозможные случаи корней характеристического уравнения, для которых коэффициенты уравнения лежат на границе области устойчивости.
2. Получить уравнения для описания границ области устойчивости линейного разностного уравнения четвертого порядка.
3. Выявить особенности геометрии области устойчивости.
4. Выявить участки границы области устойчивости, для которых нулевой решение остается устойчивым.

Объект исследования: устойчивость неполных разностных уравнений четвертого порядка.

Предмет исследования: области устойчивости неполных линейных разностных уравнений четвертого порядка в пространстве коэффициентов уравнений.

Структура квалификационной работы: введение, теоретическая и практическая часть, заключение, список литературы, приложения.

Во *введении* обоснована актуальность данной темы, поставлены цели и определены задачи квалификационной работы.

Первая глава «Основные понятия и факты теории линейных разностных уравнений» содержит наиболее важные понятия и факты общей теории линейных разностных уравнений.

Вторая глава «Устойчивость линейного разностного уравнения четвертого порядка» носит исследовательский характер. В ней исследуется устойчивость нулевого решения разностного уравнения четвертого порядка, находятся границы области устойчивости неполных линейных разностных уравнений четвертого порядка. В этой главе также проводится полное описание структуры области асимптотической устойчивости неполных линейных разностных уравнений четвертого порядка и ее геометрических свойств в пространстве параметров. Исследуется асимптотическое поведение решений неполных линейных разностных уравнений четвертого порядка на границе области асимптотической устойчивости.

В *заключении* подводятся итоги проделанной работы.

В *приложении* представлена таблица всевозможных случаев наборов корней характеристического уравнения на границе области устойчивости. Также приводятся листинги команд в программе «Wolfram Mathematica» для построения области устойчивости неполного линейного разностного уравнения для случаев $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Формула общего решения линейного разностного уравнения

В этом параграфе приводятся основные понятия теории линейных разностных уравнений, необходимые для дальнейшего изложения материала, выводится формула общего решения [18].

Линейным разностным уравнением порядка k называется уравнение вида

$$x_{n+k} + a_n^{(1)} x_{n+k-1} + \cdots + a_n^{(k)} x_n = f_n, \tag{1.1}$$

где $a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(k)}, f_n,$ - заданные функции целочисленного аргумента $n \in N_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, причем $a_n^{(k)} \neq 0$ для всех $n \in N_0$, а x_n - искомая функция $n \in N_0$.

В дальнейшем будем считать, что все эти функции могут быть как вещественными, так и комплекснозначными. Так как функции целочисленного аргумента принято называть последовательностями, то с этой точки зрения $a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(k)}, f_n$ – заданные последовательности, а x_n – искомая последовательность. Функции $a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(k)}$ называются коэффициентами уравнения (1.1), а функция f_n называется правой частью уравнения (1.1).

Уравнение (1.1) иногда называют линейным рекуррентным уравнением порядка k или линейным дискретным отображением порядка k, а аргумент $n \in N_0$ называют дискретным временем. Началом отсчета аргумента n может быть не только 0, но и любое целое число $n_0 > 0$.

Условие $a_n^{(k)} \neq 0$ для всех $n \in N_0$ является существенным и обеспечивает единственность решения так называемой разностной задачи Коши для (1.1).

Наряду с уравнением (1.1) иногда рассматривают и более общие линейные разностные уравнения. Уравнение вида

$$\sum_{m=-k_1}^{k_2} a_n^{(m)} x_{n+m} = f_n,$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и $a_n^{(-k_1)} \neq 0$, $a_n^{(k_2)} \neq 0$ для всех n, называют линейным разностным уравнением порядка $(k_1 + k_2)$. Ясно, что заменой это уравнение сводится к уравнению (1.1). Кроме таких уравнений, на практике встречается случай, когда аргумент n пробегает лишь конечное множество значений из N – множества натуральных чисел.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением уравнений вида (1.1).

Если $f_n \equiv 0$ для всех $n \in N_0$, то уравнение (1.1) называется линейным однородным уравнением порядка k.

Заданная последовательность φ_n, $n \in N_0$ называется решением уравнения (1.1), если она обращает (1.1) в числовое тождество для каждого $n \in N_0$. График решения (1.1) представляет собой последовательность точек плоскости с координатами (n, φ_n) для всех $n \in N_0$.

Решение линейных разностных уравнений не определяется единственным образом, то есть для получения единственного решения таких уравнений необходимо задавать дополнительные условия. Если для уравнения (1.1) задаются дополнительные условия, то будем говорить, что задана разностная задача.

Начальные условия для уравнения (1.1) задаются:

$$x_0 = u_1,\ x_1 = u_2, \dots, x_{k-1} = u_k, \tag{1.2}$$

где $u_1,\ u_2, \dots, u_k$ – заданные числа.

Задачу нахождения решения уравнения (1.1), удовлетворяющего начальным условиям (1.2), будем называть разностной задачей Коши (1.1) - (1.2).

Как будет далее установлено, условие $a_n^{(k)} \neq 0$ для всех $n \in N_0$ при определении уравнения (1.1) обеспечивает единственность решения разностной задачей Коши (1.1) - (1.2).

Теорема 1.1. Решение разностной задачи Коши (1.1) - (1.2) всегда существует и единственно.

Доказательство этой теоремы приводится в [18].

Рассмотрим теперь линейное однородное разностное уравнение порядка k

$$x_{n+k} + a_n^{(1)} x_{n+k-1} + \cdots + a_n^{(k-1)} x_{n-1} + a_n^{(k)} x_n = 0, \qquad (1.2)$$

где $a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \dots, a_n^{(k)}$ - заданные функции дискретного аргумента $n \in N_0$, причем $a_n^{(k)} \neq 0$ для всех $n \in N_0$. Эти функции могут принимать как вещественные, так и комплексные значения.

Для однородного уравнения (1.2) имеет место следующая теорема, называемая принципом суперпозиции для уравнения (1.2).

Теорема 1.2. Если $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(m)}$ – решения линейного однородного уравнения (1.2), то их линейная комбинация

$$x_n = C_1 x_n^{(1)} + C_2 x_n^{(2)} + \cdots + C_m x_n^{(m)}$$

с произвольным числовыми коэффициентами $C_1, C_2, \dots, C_m$ также является решением уравнения (1.2).

Доказательство этой теоремы рассмотрено в [18].

Определение 1.1. Функции $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(m)}$ дискретного аргумента $n \in N_0$ называются линейно зависимыми на множестве N_0, если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, не равные нулю одновременно, такие, что

$$\alpha_1 x_n^{(1)} + \alpha_2 x_n^{(2)} + \cdots \alpha_m x_n^{(m)} = 0$$

для всех $n \in N_0$.

Если же это равенство для всех $n \in N_0$ справедливо лишь при

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0,$$

то функции $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(m)}$ называются линейно независимыми на множестве N_0.

Рассмотрим определитель

$$D\left[x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(m)}\right] = \begin{vmatrix} x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & x_n^{(m)} \\ x_{n+1}^{(1)} & x_{n+1}^{(2)} & x_{n+1}^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n+m-1}^{(1)} & x_{n+m-1}^{(2)} & x_{n+m-1}^{(m)} \end{vmatrix}.$$

Теорема 1.3. Если функции $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(m)}$ - линейно зависимы на множестве N_0, то определитель

$$D\left[x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(m)}\right] = 0$$

для всех $n \in N_0$.

Доказательство этой теоремы проведено в [18].

Теорема 1.4. Если $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k)}$ являются решениями линейного однородного уравнения (1.2), то для всех $n \in N_0$ справедлива формула

$$D\left[x_{n+1}^{(1)}, \dots, x_{n+1}^{(k)}\right] = (-1)^{(k)} \cdot a_n^{(k)} \cdot D\left[x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k)}\right].$$

Доказательство этой теоремы приводится в [18].

Теорема 1.5. Пусть $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k)}$ являются решениями линейного однородного уравнения (1.2). Если определитель $D\left[x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k)}\right] = 0$ для всех $n \in N_0$, то $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k)}$ – линейно зависимые функции на множестве N_0.

Доказательство этой теоремы рассмотрено в [18].

Из теоремы 1.3 и теоремы 1.5 следует, что решения $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k)}$ уравнения (1.2) линейно зависимы на множестве N_0 тогда и только тогда, когда на множестве N_0 определитель

$$D\left[x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k)}\right] \equiv 0.$$

Теорема 1.6. Решения $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k)}$ линейного однородного уравнения (1.2) линейно независимы на множестве N_0 тогда и только тогда, когда определитель $D\left[x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k)}\right] \neq 0$ для всех $n \in N_0$.

Доказательство этой теоремы проведено в [18].

Определение 1.2. Система k линейно независимых на множестве N_0 решений $\varphi_n^{(1)}, \varphi_n^{(2)}, \dots, \varphi_n^{(k)}$ линейного однородного разностного уравнения порядка k (1.2) называется фундаментальной системой решений уравнения (1.2).

Теорема 1.7. Для линейного однородного уравнения (1.2) существует бесконечно много фундаментальных систем решений.

Доказательство этой теоремы приводится в [18].

Определение 1.3. Множество всех решений линейного однородного разностного уравнения (1.2) называется общим решением уравнения (1.2).

Общее решение (1.2) содержит все без исключения решения (1.2), определяемые произвольно заданными начальными условиями $x_0 = u_1$, $x_1 = u_2, \dots, x_{k-1} = u_k$.

Теорема 1.8. Если $\varphi_n^{(1)}, \varphi_n^{(2)}, \dots, \varphi_n^{(k)}$ - фундаментальная система решений уравнения (1.2), то общее решение уравнения (1.2) задается формулой

$$x_n = C_1\varphi_n^{(1)} + \varphi_n^{(2)} + \dots + C_k\varphi_n^{(k)},$$

где $C_1, C_2, \dots, C_k$ – произвольные постоянные, $n \in N_0$.

Доказательство этой теоремы рассмотрено в [18].

На основании доказанных утверждений можно дать геометрическую интерпретацию множества решений уравнения (1.2).

Используя теорему 1.2, легко проверить, что для решений (1.2) выполняются все аксиомы линейного пространства. Из теоремы 1.6 следует, что фундаментальная система решений уравнения (1.2) служит базисом этого линейного пространства. Следовательно, множество всех решений линейного однородного разностного уравнения (1.2) образует k – мерное линейное пространство.

Если задано уравнение (1.2), то в общем случае невозможно найти его фундаментальную систему решений. Обратную же задачу, то есть задачу о нахождении уравнения (1.2), имеющего заданную фундаментальную систему решений, можно легко решить при некотором дополнительном условии.

Рассмотрим линейное неоднородное разностное уравнение (1.1).

Покажем, что если известно какое-либо частное решение $x_n^{(0)}$ уравнения (1.1), то замена $x_n = z_n + x_n^{(0)}$ приводит неоднородное уравнение (1.1) к соответствующему однородному уравнению. Обозначим левую часть уравнения (1.1) через Lx_n, проверяется, что для такой замены $Lx_n = Lz_n + Lx_n^{(0)} = f_n$.

Так как $x_n^{(0)}$ – решение (1), то $Lx_n^{(0)} = f_n$ и, значит, $Lz_n = 0$. Это означает, что z_n – решение линейного однородного уравнения (1.2).

Если $\varphi_n^{(1)}, \varphi_n^{(2)}, \dots, \varphi_n^{(k)}$ – фундаментальная система решений уравнения (1.2), то $z_n = C_1\varphi_n^{(1)} + C_2\varphi_n^{(2)} + \dots + C_k\varphi_n^{(k)}$ и, следовательно, любое решение уравнения (1.1) имеет вид

$$x_n = C_1\varphi_n^{(1)} + C_2\varphi_n^{(2)} + \dots + C_k\varphi_n^{(k)} + x_n^{(0)}.$$

Эта формула, где $C_1, C_2, \dots, C_k$ – произвольные постоянные, называется формулой общего решения линейного неоднородного разностного уравнения (1.1). Она содержит все решения уравнения (1.1).

Таким образом, зная фундаментальную систему решений однородного уравнения (1.2) и угадав частное решение неоднородного уравнения (1.1), можно всегда получить общее решение неоднородного уравнения (1.1).

Для упрощения решения линейного неоднородного уравнения (1.1) применяется принцип суперпозиции.

Теорема 1.9. Пусть $f_n = f_n^{(1)} + f_n^{(2)}$ для всех $n \in N_0$ и пусть $x_n^{(1)}$ – какое-либо решение уравнения (1.1) при $f_n \equiv f_n^{(1)}$ и $x_n^{(2)}$ – какое-либо решение уравнения (1.1) при $f_n \equiv f_n^{(2)}$. Тогда $x_n = {x_n}^{(1)} + x_n^{(2)}$ является решением уравнения (1.1).

Доказательство этой теоремы рассмотрено в [18].

Если известна лишь фундаментальная система решений $\varphi_n^{(1)}, \varphi_n^{(2)}, \dots, \varphi_n^{(k)}$ линейного однородного уравнения (1.2), то методом вариации постоянных всегда можно найти общее решение линейного неоднородного уравнения (1.1).

1.2. Линейные разностные стационарные уравнения

В данном параграфе рассматриваются линейные разностные стационарные уравнения. Данные уравнения являются наиболее важными в связи с тем, что для линейных однородных разностных стационарных уравнений всегда можно построить фундаментальную систему решений [18].

Линейным разностным стационарным уравнением порядка k называют уравнение

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \cdots + a_k x_n = f_n, \tag{1.3}$$

где $a_1, \dots, a_k$ - заданные вещественные числа, причем $a_k \neq 0$ и f_n – заданная функция $n \in N_0$.

Для линейных однородных разностных стационарных уравнений

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \cdots + a_k x_n = 0 \tag{1.4}$$

всегда можно построить фундаментальную систему решений. Очевидно, уравнение (1.4) всегда имеет решение $x_n \equiv 0$ на N_0 . Будем искать нетривиальные решение уравнения (1.4) в виде

$$x_n = \lambda^n,$$

где число $\lambda \neq 0$ подлежит определению. Подставляя x_n в уравнение (1.4) и сокращая на λ^n, получим уравнение

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \cdots + a_k = 0. \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) называется характеристическим уравнением для уравнения (1.4). Заметим, что (1.5) не может иметь нулевых корней, так как по условию $a_k \neq 0$. Итак, λ^n – решение (1.4) только тогда, когда λ – корень уравнения (1.5). Корни характеристического уравнения (1.5) могут быть как простые, так и кратные. Рассмотрим все возможные случаи.

1. Пусть все корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ уравнения (1.5) вещественны и попарно различны. В этом случае решения уравнения (1.4)

$$\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n$$

являются линейно независимыми. В самом деле, составив из этих решений определитель

$$D = D(\lambda_1^n, \dots, \lambda_k^n) = \begin{vmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n & \lambda_k^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} & \lambda_k^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n+k-1} & \lambda_2^{n+k-1} & \lambda_k^{n+k-1} \end{vmatrix},$$

нетрудно увидеть, что $D = \lambda_1^n \lambda_2^n \dots \lambda_k^n \cdot W(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \neq 0$, так как $W(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ – определитель Вандермонда для $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Как известно, он отличен от нуля для случаев по парно различных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Поэтому решения $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n$ уравнения (1.4) будут линейно независимы. Следовательно, они образуют фундаментальную систему решений уравнения (1.4) и

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \dots + C_k\lambda_k^n,$$

где $C_1, C_2, \dots, C_k$ – произвольные постоянные, являются общим решением линейного однородного разностного стационарного уравнения (1.4).

2. Пусть характеристическое уравнение (1.5) имеет кратные корни. Обозначим левую часть уравнения (1.5) через $L(\lambda)$, то есть

$$L(\lambda) = \lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \dots + a_k,$$

характеристическое уравнение (1.5) примет вид $L(\lambda) = 0$.

Определение 1.4. Число λ_0(вещественное или комплексное) называется корнем кратности m ($m \in N, 1 \le m \le k$) уравнения $L(\lambda) = 0$, если

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m \cdot L_1(\lambda),$$

где $L_1(\lambda)$ – многочлен степени $(k - m)$ и $L_1(\lambda_0) \neq 0$.

Нетрудно установить, что λ_0 – корень кратности m уравнения $L(\lambda) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$L(\lambda_0) = L'(\lambda_0) = \dots = L^{(m-1)}(\lambda_0) = 0,\ L^{(m)}(\lambda_0) \neq 0.$$

Если λ_0 – корень кратности m характеристического уравнения (1.5), то можно показать, что каждая из функций $\lambda_0^n,\ n\lambda_0^n,\ n^2\lambda_0^n, \dots ,n^{m-1}\lambda_0^n$ является решением уравнения (1.4). Если же собрать все функции такого вида для всех корней характеристического уравнения (1.5), то система таких функций будет содержать k решений (1.4). Можно доказать, что найденные k решений уравнения (1.4) образуют фундаментальную систему решений (1.4). Тогда можно написать формулу общего решения (1.4).

Пусть характеристическое уравнение (1.5) имеет корни $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots ,\lambda_s\ (s \in N, 1 \le s \le k)$ соответственно кратностей $m_1, m_2, \dots ,m_s\ (m_1 + m_2 + \dots + m_s = k)$. Тогда общее решение линейного однородного разностного стационарного уравнения (1.4) имеет вид

$$x_n = \sum_{j=1}^{s}(C_j^{(0)} + C_j^{(1)}n + C_j^{(2)}n^2 + \dots + C_j^{(m_j-1)}n^{m_j-1})\lambda_j^n, \tag{1.6}$$

где C_{ij} – произвольные постоянные.

3. Характеристическое уравнение (1.5) имеет комплексные корни. В этом случае формула (1.6) дает общее комплексное решение, если даже ограничиться вещественными значениями постоянных $C_1, C_2, \dots, C_k$. Под комплексным решением уравнения (1.3) понимается функция $x_n,\ n \in N_0$, принимающая комплексные значения и обращающая уравнение (1.3) в тождество на множестве N_0. Однако под общим решением уравнения (1.3), а следовательно, и уравнения (1.4), всегда понимается общее вещественное решение. Для получения из формулы (1.6) общего вещественного решения при наличии комплексных корней характеристического уравнения (1.5) рассмотрим следующие леммы.

Лемма 1.1. Функция $x_n = u_n + v_n i$ – комплексное решение уравнения (1.4) тогда и только тогда, когда $u_n = Rex_n$ и $v_n = Imx_n$ – решение (1.4).

Лемма 1.2. Если $\lambda_0 = \lambda + \beta i$ – комплексный корень кратности m характеристического уравнения (1.5) $L(\lambda) = 0$, то и комплексно сопряженное число $\bar{\lambda}_0 = \alpha - \beta i$ также является корнем уравнения (1.5) одинаковой с λ_0 кратности m.

Получим правило выделения общего вещественного решения уравнения (1.4) при наличии комплексных корней характеристического уравнения (1.5).

Если $\lambda = \alpha + \beta i$ – комплексный корень кратности m характеристического уравнения (1.5), то в силу леммы 1.2 $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ также корень кратности m уравнения (1.5). Поэтому наряду с решениями уравнения (1.4) вида $x_n^{(l)} = n^l \cdot \lambda^n$ в форме общего решения (1.6) содержаться и решения (1.4) вида $\bar{x}_n^{(l)} = n^l \cdot \bar{\lambda}^n$ при всех $l = \overline{0, m-1}$. Если $\lambda = |\lambda|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $|\lambda|$ – модуль числа λ, а φ – аргумент числа λ, причем $0 \le \varphi < 2\pi$, то по формуле Муавра $\lambda^n = |\lambda|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$. Значит,

$$x_n^{(l)} = n^l\lambda^n = n^l|\lambda|^n\cos n\varphi + in^l|\lambda|^n\sin n\varphi = u_n^{(l)} + i \cdot v_n^{(l)}$$

при всех $l = \overline{0, m-1}$.

По лемме 1.1 функции $u_n^{(l)}, v_n^{(l)}$ – являются вещественными решениями уравнения (1.4) при всех $l = \overline{0, m-1}$.

Перейдем от исходного базиса решений уравнения (1.4) к новому базису, заменив каждую комплексно сопряженную пару решений $x_n^{(l)},\ \bar{x}_n^{(l)}$ на вещественную пару решений $u_n^{(l)}, v_n^{(l)}$ при всех $l = \overline{0, m-1}$. Получим, таким образом, вещественную фундаментальную систему решений уравнения (1.4), а, значит, общее вещественное решение уравнения (1.4).

Точнее, если для каждого вещественного корня λ кратности p характеристического уравнения (1.5) построить функции $\lambda^n, n\lambda^n, \ldots\ , n^{p-1}\lambda^n$, а для каждого комплексного корня $\lambda = |\lambda|(\cos\varphi + i\sin\varphi), 0 \le \varphi < 2\pi$, кратности m и комплексно сопряженного корня $\bar{\lambda} = |\lambda|(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ построить функции

$$|\lambda|^n\cos n\varphi\,, n|\lambda|^n\cos n\varphi, \ldots, n^{m-1}|\lambda|^n\cos n\varphi,$$

$$|\lambda|^n\sin n\varphi\,, n|\lambda|^n\sin n\varphi\ , \ldots, n^{m-1}|\lambda|^n\sin n\varphi,$$

то совокупность всех таких функций образует фундаментальную систему решений линейного однородного разностного стационарного уравнения (1.4).

1.3. Устойчивость нулевого решения линейного разностного уравнения (по Ляпунову)

Важное место в теории разностных уравнений занимает понятие устойчивости [1, 5, 13]. Для дальнейшего изложения приведем некоторые понятия из [18].

В общем случае разностным уравнением порядка s будем называть уравнение вида

$$x_n = F(x_{n-1}, \dots, x_{n-s}), n = 0, 1, \dots \tag{1.7}$$

Решение разностного уравнения (1.7) называется последовательность $(\tilde{x}_n)_{n=0}^{\infty}$, для которой при любом $n \geq 0$ выполняется равенство $(\tilde{x}_n)_{n=0}^{\infty} = F(\tilde{x}_{n-1}, \dots, \tilde{x}_{n-s})$.

Пусть $\alpha_{-s}, \dots, \alpha_{-1}$ заданные постоянные. Тогда каждое решение $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ уравнения (1.7) однозначно определяется начальными условиями

$$x_i = \alpha_i, -s \leq i \leq -1. \tag{1.8}$$

В дальнейшем мы будем говорить об устойчивости нулевого решения $\bar{x} = 0$, исходя из следующих определений.

Определение 1.5. Нулевое решение $\bar{x} = 0$ уравнения (1.7) называется устойчивым (локально устойчивым), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого решения $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ уравнения (1.7) с начальными условиями (1.8) из системы $|x_i| < \delta$ ($-s \leq i \leq -1$) следует, что для $n \geq 0$ выполняется неравенство $|x_n| < \varepsilon$.

Определение 1.6. Нулевое решение $\bar{x} = 0$ уравнения (1.7) называется асимптотически устойчивым (локально асимптотически устойчивым), если оно устойчиво и существует $\gamma > 0$ такое, что для любого решения $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ уравнения (1.7) с начальными условиями (1.8) из системы ограничений $|x_i| < \gamma$ $(-s \leq i \leq -1)$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

ГЛАВА 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

2.1. Формула общего решения для линейного разностного уравнения четвертого порядка

В данном параграфе мы рассматриваем линейное разностное уравнение четвертого порядка, находим его характеристическое уравнение, составляем таблицу всевозможных случаев наборов корней характеристического уравнения на границе области устойчивости.

Рассмотрим линейное разностное уравнение четвертого порядка

$$x_{n+4} + ax_{n+3} + bx_{n+2} + cx_{n+1} + dx_n = 0, \tag{2.1}$$

где $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$.

Следуя параграфу 1.2, запишем его характеристическое уравнение

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,. \tag{2.2}$$

Выделим возможные случаи для корней характеристического уравнения:

- четыре действительных корня;
- два действительных и два комплексно сопряженных корня;
- две пары комплексно сопряженных корней.

Исходя из параграфа 1.2, корни характеристического уравнения могут быть как простые, так и кратные.

В связи с этим, возникают следующие случаи наборов корней и соответствующие им формулы общего решения:

1. Все корни действительные.

   1.1. Все корни различные (x_1, x_2, x_3, x_4). Тогда общее решение уравнения (2.2) имеет вид

   $$x_n = C_1x_1^n + C_2x_2^n + C_3x_3^n + C_4x_4^n.$$

   1.2. Есть кратные корни.

1.2.1. Один корень кратности 2, остальные простые $(x_1, x_2, x_3 = x_4)$. Тогда общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$x_n = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n + (C_3 + C_4 n) x_3^n.$$

1.2.2. Один корень кратности 3 $(x_1, x_2 = x_3 = x_4)$. Тогда общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$x_n = C_1 x_1^n + (C_2 + C_3 n + C_4 n^2) x_2^n.$$

1.2.3. Корень кратности 4 $(x_1 = x_2 = x_3 = x_4)$. Тогда общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$x_n = (C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + C_4 n^3) x_1^n.$$

1.2.4. Две пары кратных корней $(x_1 = x_3,\ x_2 = x_4)$. Тогда общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$x_n = (C_1 + C_2 n) {x_1}^n + (C_3 + C_4 n) {x_2}^n.$$

2. Два действительных и два комплексно сопряженных корня.

2.1. $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R},\ x_3, x_4 \in \boldsymbol{C}, |x_3| = |x_4|$. Тогда общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$x_n = C_1 {x_1}^n + C_2 {x_2}^n + (C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi)) |x_3|^n,$$

где φ – аргумент числа x_3.

2.2. $x_1 = x_2 \in \boldsymbol{R},\ x_3, x_4 \in \boldsymbol{C}, |x_3| = |x_4|$. Тогда общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$x_n = (C_1 + C_2 n) {x_1}^n + (C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi)) |x_3|^n,$$

где φ – аргумент числа x_3.

3. Все корни комплексно сопряженные.

3.1. Две различные пары комплексно сопряженных корней $(x_1, x_2, x_3, x_4 \in \boldsymbol{C},\ |x_1| = |x_3|,\ |x_2| = |x_4|)$. Тогда общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$x_n = (C_1 \cos(n\varphi_1) + C_2 \sin(n\varphi_1)) |x_1|^n + (C_3 \cos(n\varphi_2) + C_4 \sin(n\varphi_2)) |x_2|^n,$$

где φ_1, φ_2– аргументы чисел x_1, x_2.

3.2. Два комплексно сопряженных корня кратности 2 каждый. Тогда общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$x_n = ((C_1 + C_2 n) \cos(n\varphi) + (C_3 + C_4 n) \sin(n\varphi)) |x_1|^n,$$

где φ – аргумент числа x_1.

Исходя из параграфа 1.3, решение уравнения (2.1) будет устойчиво, если корни по модулю равные 1 будут простыми, а остальные корни по модулю меньше 1.

Зная конечный набор корней, строим таблицу всевозможных случаев наборов корней уравнения (2.2) на границе области устойчивости (Таблица №1. Приложение 1).

2.2. Границы области устойчивости неполных линейных разностных уравнений четвертого порядка

В данном параграфе исследуются неполные линейные разностные уравнения четвертого порядка, получаемые из уравнения (2.1), когда ровно один из коэффициентов $a, b,$ или c равен нулю. Для каждого неполного уравнения, мы выделим и рассмотрим все случаи для корней характеристического уравнения, при которых коэффициенты уравнения лежат на границе области устойчивости (то есть, хотя бы один корень по модулю равен 1, а остальные по модулю не больше 1). В каждом случае мы получим явные или параметрические формулы для границ области устойчивости, при этом, где возможно указываем явные или естественные границы изменения параметров.

Случай $\boldsymbol{a = 0}$

Характеристический многочлен имеет вид

$$P(x) = x^4 + bx^2 + cx + d. \qquad (2.3)$$

Найдем все значения коэффициентов b, c, d, при которых (2.3) имеет хотя бы один корень по модулю равный 1, а остальные корни по модулю не больше 1.

Рассмотрим всевозможные случаи из Таблицы №1 (Приложение 1). Получаем следующие границы области, содержащие все искомые значения коэффициентов $b, c, d \in \boldsymbol{R}$.

1) Случай 10. Таблица №1.

Многочлен (2.3) имеет действительные корни, два из которых по модулю равных 1, а два других корня по модулю меньших 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} b = -1 - t^2 \\ c = 0 \\ d = t^2 \end{cases}, (\ |t| < 1) \tag{2.4}$$

Эта система задает отрезок.

Подставив формулы (2.4) в (2.3), получим разложение (2.3) на множители и явные формулы для его корней.

$$(x - t)(x - 1)(x + 1)(x + t) = 0.$$

Получаем, что $x_{1,2} = \pm 1$; $x_{3,4} = \pm t$.

2) Случай 11. Таблица №1.

Многочлен (2.3) имеет действительные корни, один из которых по модулю равный 1, а три других корня по модулю меньших 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} b = -(s + t)^2 - (s + t) + st - 1 \\ c = (s + t)^2 + (s + t)st + s + t \\ d = -st - (s + t)st \end{cases}, (|t| < 1, |s| < 1) \tag{2.5}$$

Подставив формулы (2.5) в (2.3), получим разложение (2.3) на множители и явные формулы для его корней.

$$(x - s)(x - t)(x - 1)(x + 1 + s + t) = 0.$$

Получаем, что $x_1 = 1$; $x_2 = s$; $x_3 = -1 - s - t$; $x_4 = t$. Заметим, что $|x_3| < 1$ (так как $-1 < -1 - s - t < 1$).

Система (2.5) задает плоскость, явное уравнение этой плоскости имеет вид $d = -b - c - 1$, используя теорему Виета, получим ограничения на коэффициенты $|b| \leq 2, |c| \leq 2, |d| \leq 1$.

3) Случай 12. Таблица №1.

Многочлен (2.3) имеет действительные корни, один из которых по модулю равный 1, а три других корня по модулю меньших 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} b = -(s+t)^2 + s + t + st - 1 \\ c = -(s+t)^2 + (s+t)st + s + t, (|t| < 1, |s| < 1) \\ d = -st + (s+t)st \end{cases} \quad (2.6)$$

Подставив формулы (2.6) в (2.3), получим разложение (2.3) на множители и явные формулы для его корней.

$$(x-s)(x-t)(x+1)(x-1+s+t) = 0.$$

Получаем, что $x_1 = -1$; $x_2 = s$; $x_3 = t$; $x_4 = 1 - s - t$. Заметим, что $|x_4| < 1$ (так как $-1 < 1 - s - t < 1$).

Система (2.6) задает плоскость, явное уравнение этой плоскости имеет вид $d = -b + c - 1$, используя теорему Виета, получим ограничения на коэффициенты $|b| \leq 2, |c| \leq 2, |d| \leq 1$.

4) Случай 13. Таблица №1.

Многочлен (2.3) имеет два действительных корня, один из которых по модулю равный 1, а другой по модулю меньше 1 и два комплексных корня по модулю равных 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} b = -s^2 - s \\ c = s^2 - 1 \quad , (|s| < 1) \\ d = s \end{cases} \quad (2.7)$$

Эта система задает дугу кривой.

Подставив формулы (2.7) в (2.3), получим разложение (2.3) на множители и явные формулы для его корней.

$$(x-s)(x-1)(1+x+sx+x^2) = 0.$$

Получаем, что $x_1 = 1$; $x_2 = s$; $x_{3,4} = \frac{1}{2}\left(-1 - s \pm \sqrt{-3+2s+s^2}\right)$. При $|s| < 1$ получаем $-3 + 2s + s^2 < 0$, следовательно, $x_{3,4} = \frac{1}{2}\left(-1 - s \pm i\sqrt{3-2s-s^2}\right)$. Заметим, что $|x_3| = |x_4| = \sqrt{\frac{(1+s)^2+3-2s-s^2}{4}} = 1$.

5) Случай 14. Таблица №1.

Многочлен (2.3) имеет два действительных корня, один из которых по модулю равный 1, а другой по модулю меньше 1 и два комплексных корня по модулю равных 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} b = -s^2 + s \\ c = 1 - s^2 \quad ,(|s| < 1) \\ d = -s \end{cases} \tag{2.8}$$

Эта система задает дугу кривой.

Подставив формулы (2.8) в (2.3), получим разложение (2.3) на множители и явные формулы для его корней.

$$(x - s)(x + 1)(1 - x + sx + x^2) = 0.$$

Получаем, что $x_1 = -1$; $x_2 = s$; $x_{3,4} = \frac{1}{2}\left(1 - s \pm \sqrt{-3 - 2s + s^2}\right)$. При $|s| < 1$ получаем $-3 - 2s + s^2 < 0$, следовательно, $x_{3,4} = \frac{1}{2}\left(1 - s \pm i\sqrt{3 + 2s - s^2}\right)$. Заметим, что $|x_3| = |x_4| = \sqrt{\frac{(1-s)^2+3+2s-s^2}{4}} = 1$.

6) Случай 17. Таблица №1.

Многочлен (2.3) имеет два действительных корня по модулю меньших 1 и два комплексных корня по модулю равных 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} b = st - (s + t)^2 + 1 \\ c = (s + t)(st - 1) \quad ,(|t| < 1, |s| < 1) \\ d = st \end{cases} \tag{2.9}$$

Проверим, лежат ли точки (b, c, d) на одной плоскости. Рассмотрим три точки, не лежащие на одной прямой $M_1\left(\frac{5}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$, $M_2\left(\frac{7}{18}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $M_3\left(\frac{41}{36}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$. Возьмем произвольную точку $M(b; c; d)$ и составим векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_2M}$, $\overrightarrow{M_3M}$. Проверим условия компланарности трех векторов:

$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_2M}, \overrightarrow{M_3M}) = 0$. В нашем случае $\begin{vmatrix} b-\frac{5}{4} & c-\frac{1}{4} & d-\frac{1}{2} \\ \frac{7}{18}-\frac{5}{4} & -\frac{1}{2}-\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ \frac{41}{36}-\frac{5}{4} & -\frac{1}{4}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\frac{1}{2} \end{vmatrix} \neq 0$, следовательно, точки не принадлежат одной плоскости, значит система (2.9) задает поверхность.

Подставив формулы (2.9) в (2.3), получим разложение (2.3) на множители и явные формулы для его корней.

$$(x-s)(x-t)(1+sx+tx+x^2) = 0.$$

Получаем, что $x_1 = s$; $x_2 = t$; $x_{3,4} = \frac{1}{2}\left(-s-t \pm \sqrt{-4+(s+t)^2}\right)$. Так как $-4+(s+t)^2 < 0$, то $x_{3,4} = \frac{1}{2}\left(-s-t \pm i\sqrt{4-(s+t)^2}\right)$. Заметим, что $|x_3| = |x_4| = \sqrt{\frac{(s+t)^2+4-(s+t)^2}{4}} = 1$.

7) Случай 21. Таблица №1.

Многочлен (2.3) имеет два действительных корня по модулю равных 1 и два комплексных корня по модулю меньших 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} b = -1+\beta^2 \\ c = 0 \\ d = -\beta^2 \end{cases}, |\beta| < 1 \qquad (2.10)$$

Эта система задает отрезок.

Подставив формулы (2.10) в (2.3), получим разложение (2.3) на множители и явные формулы для его корней.

$$(x-1)(x+1)(x^2+\beta^2) = 0.$$

Получаем, что $x_{1,2} = \pm 1$; $x_{3,4} = \pm i\beta$. Заметим, что $|x_3| = |x_4| = |\beta| < 1$ (так как $|\beta| < 1$).

8) Случай 22. Таблица №1.

Многочлен (2.3) имеет комплексные корни, два из которых по модулю равных 1, а два других корня по модулю меньших 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} b = -3p^2 + q^2 + 1 \\ c = 2p(p^2 + q^2 - 1), (p^2 + q^2 < 1) \\ d = p^2 + q^2 \end{cases} \quad (2.11)$$

Выполнив проверку, по аналогии с пунктом 6 параграфа 2.2. для случая $a = 0$, получаем, что система (2.11) задает поверхность.

Подставив формулы (2.11) в (2.3), получим разложение (2.3) на множители и явные формулы для его корней.

$$(p^2 + q^2 - 2px + x^2)(1 + 2px + x^2) = 0.$$

Получаем, что $x_{1,2} = p \pm iq$; $x_{3,4} = -p \pm \sqrt{-1 + p^2}$. Так как $|p| < 1$, то $-1 + p^2 < 0$, следовательно, $x_{3,4} = -p \pm i\sqrt{1 - p^2}$. Заметим, что $|x_1| = |x_2| = \sqrt{p^2 + q^2} < 1$ (так как $p^2 + q^2 < 1$), $|x_3| = |x_4| = 1$.

9) Случай 26. Таблица №1.

Многочлен (2.3) имеет четыре комплексных корня по модулю равных 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} b = 2 - 4p^2 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}, (|p| < 1) \quad (2.12)$$

Эта система задает отрезок.

Подставив формулы (2.12) в (2.3), получим разложение (2.3) на множители и явные формулы для его корней.

$$(-1 + 2px - x^2)(1 + 2px + x^2) = 0.$$

Получаем, что $x_{1,2} = -p \pm \sqrt{-1 + p^2}$; $x_{3,4} = p \pm \sqrt{-1 + p^2}$. Так как $|p| < 1$, то $-1 + p^2 < 0$, следовательно, $x_{1,2} = -p \pm i\sqrt{1 - p^2}$; $x_{3,4} = p \pm i\sqrt{1 - p^2}$. Заметим, что $|x_1| = |x_2| = 1, |x_3| = |x_4| = 1$.

Случай $\boldsymbol{b = 0}$

Характеристический многочлен имеет вид

$$P(x) = x^4 + ax^3 + cx + d. \quad (2.13)$$

Найдем все значения коэффициентов $a, c, d,$ при которых (2.13) имеет хотя бы один корень по модулю равный 1, а остальные корни по модулю не больше 1.

Рассмотрим всевозможные случаи из Таблицы №1 (Приложение 1). Получаем следующие границы области, содержащие все искомые значения коэффициентов $a, c, d \in \boldsymbol{R}$.

1) Случай 11. Таблица №1.

Многочлен (2.13) имеет действительные корни, один из которых по модулю равный 1, а три других корня по модулю меньших 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = \frac{-(s+t)^2-(s+t)+st-1}{1+s+t} \\ c = \frac{(s+t+st)^2-(s+t)st-st}{1+s+t} \\ d = \frac{-(st)^2-(s+t)st}{1+s+t} \end{cases}, (|t| < 1, |s| < 1) \tag{2.14}$$

Подставив формулы (2.14) в (2.13), получим разложение (2.13) на множители и явные формулы для его корней.

$$\frac{(x-s)(x-t)(x-1)(s+t+st+x+sx+tx)}{1+s+t} = 0.$$

Получаем, что $x_1 = 1$; $x_2 = s$; $x_3 = \frac{-(s+t)-st}{1+s+t}$; $x_4 = t$. Заметим, что при некоторых дополнительных ограничениях s, t $\left(-1 < s < 1 \wedge \frac{-1-2s}{2+s} < t < 1\right)$, удовлетворяющих $|st| < 1$ можно показать, что $|x_3| < 1$.

Система (2.14) задает плоскость, явное уравнение этой плоскости имеет вид $d = -a - c - 1$, используя теорему Виета, получим ограничения на коэффициенты $|a| \le 2, |c| \le 2, |d| \le 1$.

2) Случай 12. Таблица №1.

Многочлен (2.13) имеет действительные корни, один из которых по модулю равный 1, а три других корня по модулю меньших 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = \frac{-(s+t)^2+s+t+st-1}{s+t-1} \\ c = \frac{(s+t-st)^2+(s+t)st-st}{s+t-1}, (|t| < 1, |s| < 1) \\ d = \frac{(st)^2-(s+t)st}{s+t-1} \end{cases} \tag{2.15}$$

Подставив формулы (2.15) в (2.13), получим разложение (2.13) на множители и явные формулы для его корней.

$$\frac{(x-s)(x-t)(x+1)(-s-t+st-x+sx+tx)}{-1+s+t} = 0.$$

Получаем, что $x_1 = -1$; $x_2 = s$; $x_3 = t$; $x_4 = \frac{s+t-\mathrm{st}}{-1+s+t}$. Заметим, что при некоторых дополнительных ограничениях s, t $\left(-1 < s < 1 \wedge -1 < t < \frac{-1+2s}{-2+s}\right)$, удовлетворяющих $|st| < 1$ можно показать, что $|x_4| < 1$.

Система (2.15) задает плоскость, явное уравнение этой плоскости имеет вид $d = a + c - 1$, используя теорему Виета, получим ограничения на коэффициенты $|a| \le 2, |c| \le 2, |d| \le 1$.

3) Случай 13. Таблица №1.

Многочлен (2.13) имеет два действительных корня, один из которых по модулю равный 1, а другой по модулю меньше 1 и два комплексных корня по модулю равных 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = -s \\ c = -1, (|s| < 1) \\ d = s \end{cases} \tag{2.16}$$

Эта система задает отрезок.

Подставив формулы (2.16) в (2.13), получим разложение (2.13) на множители и явные формулы для его корней.

$$(s-x)(-1+x)(1+x+x^2) = 0.$$

Получаем, что $x_1 = 1$; $x_2 = s$; $x_{3,4} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$. Так как $-3 < 0$, следовательно, $x_{3,4} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$. Заметим, что $|x_3| = |x_4| = 1$.

4) Случай 14. Таблица №1.

Многочлен (2.13) имеет два действительных корня, один из которых по модулю равный 1, а другой по модулю меньше 1 и два комплексных корня по модулю равных 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = -s \\ c = 1 \\ d = -s \end{cases}, (|s| < 1) \tag{2.17}$$

Эта система задает отрезок.

Подставив формулы (2.17) в (2.13), получим разложение (2.13) на множители и явные формулы для его корней.

$$(x - s)(x + 1)(1 - x + x^2) = 0.$$

Получаем, что $x_1 = -1$; $x_2 = s$; $x_{3,4} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$. Так как $-3 < 0$, следовательно, $x_{3,4} = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$. Заметим, что $|x_3| = |x_4| = 1$.

5) Случай 17. Таблица №1.

Многочлен (2.13) имеет два действительных корня по модулю меньших 1 и два комплексных корня по модулю равных 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = \frac{-(s+t)^2+st+1}{s+t} \\ c = \frac{(st)^2-(s+t)^2+st}{s+t} \\ d = st \end{cases}, (|t| < 1, |s| < 1) \tag{2.18}$$

Выполнив проверку, по аналогии с пунктом 6 параграфа 2.2. для случая $a = 0$, получаем, что система (2.18) задает поверхность.

Подставив формулы (2.18) в (2.13), получим разложение (2.13) на множители и явные формулы для его корней.

$$\frac{(x - s)(x - t)(s + t + x + stx + sx^2 + tx^2)}{s + t} = 0.$$

Получаем, что $x_1 = s$; $x_2 = t$; $x_{3,4} = \frac{-1-st\pm\sqrt{-4(s+t)^2+(1+st)^2}}{2(s+t)}$. При $0 < |s + t| < 2$, $|st| < 1$ получаем $-4(s + t)^2 + (1 + st)^2 < 0$, значит,

$x_{3,4} = \frac{-1-st \pm i\sqrt{4(s+t)^2-(1+st)^2}}{2(s+t)}$. Заметим, что $|x_3| = |x_4| = \sqrt{\frac{(1+st)^2+4(s+t)^2-(1+st)^2}{4(s+t)^2}} = 1.$

Пусть $\begin{cases} s+t=u \\ st=v \end{cases}, (0<|u|<2, |v|<1)$. Тогда систему (2.18) для коэффициентов многочлена можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} a = \dfrac{-u^2+v+1}{u} \\ c = \dfrac{v^2-u^2+v}{u} \\ d = v \end{cases}, (0<|u|<2, |v|<1).$$

6) Случай 20. Таблица №1.

Многочлен (2.13) имеет два действительных корня по модулю равных 1 и два комплексных корня по модулю равных 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = -2\alpha \\ c = 2\alpha \\ d = -1 \end{cases}, (|\alpha|<1) \tag{2.19}$$

Эта система задает отрезок.

Подставив формулы (2.19) в (2.13), получим разложение (2.13) на множители и явные формулы для его корней.

$$(x-1)(x+1)(1+x^2-2x\alpha) = 0.$$

Получаем, что $x_{1,2} = \pm 1$; $x_{3,4} = \alpha \pm \sqrt{-1+\alpha^2}$. Так как $|\alpha|<1$, то $-1+\alpha^2<0$, следовательно, $x_{3,4} = \alpha \pm i\sqrt{1-\alpha^2}$. Заметим, что $|x_3| = |x_4| = 1$.

7) Случай 26. Таблица №1.

Многочлен (2.13) имеет четыре комплексных корня по модулю равных 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = \frac{-2p^2+1}{p} \\ c = \frac{-2p^2+1}{p} \\ d = 1 \end{cases}, (\tfrac{1}{2} < |p| < 1) \tag{2.20}$$

Эта система задает отрезок.

Подставив формулы (2.20) в (2.13), получим разложение (2.13) на множители и явные формулы для его корней.

$$\frac{(-1+2px-x^2)(p+x+px^2)}{p}=0.$$

Получаем, что $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4p^2}}{2p}$; $x_{3,4}=p\pm\sqrt{-1+p^2}$.

Рассмотрим функцию $y=1-4p^2$. При $\frac{1}{2}<|p|<1$ получаем $y<0$, следовательно, $x_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{4p^2-1}}{2p}$.

Так как $|p|<1$, то $-1+p^2<0$, следовательно, $x_{3,4}=p\pm i\sqrt{1-p^2}$. Заметим, что $|x_1|=|x_2|=\sqrt{\frac{1+4p^2-1}{4p^2}}=1$, $|x_3|=|x_4|=1$.

8) Случай 22. Таблица №1.

Многочлен (2.13) имеет комплексные корни, два из которых по модулю равных 1, а два других корня по модулю меньших 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a=\frac{-3p^2+q^2+1}{2p} \\ c=\frac{p^2+q^2+(p^2+q^2)^2}{2p}-2p \\ d=p^2+q^2 \end{cases} \quad (p^2+q^2<1,\ 0<|p|<1) \qquad (2.21)$$

Выполнив проверку, по аналогии с пунктом 6 параграфа 2.2. для случая $a=0$, получаем, что система (2.21) задает поверхность.

Подставив формулы (2.21) в (2.13), получим разложение (2.13) на множители и явные формулы для его корней.

$$\frac{(p^2+q^2-2px+x^2)(2p+x+p^2x+q^2x+2px^2)}{2p}=0.$$

Получаем, что $x_{1,2}=p\pm iq$; $x_{3,4}=\frac{-1-p^2-q^2\pm\sqrt{-16p^2+(1+p^2+q^2)^2}}{4p}$.

Рассмотрим

$-16p^2+(1+p^2+q^2)^2$=$(1+p^2+q^2-4p)(1+p^2+q^2+4p)$.

При $p^2+q^2<1$, $0<|p|<1$ получаем $\left((1+p^2+q^2-4p)(1+p^2+q^2+4p)\right)<0$, следовательно, $x_{3,4}=\frac{-1-p^2-q^2\pm i\sqrt{16p^2-(1+p^2+q^2)^2}}{4p}$.

Заметим, что $|x_1|=|x_2|=\sqrt{p^2+q^2}<1$ (так как $p^2+q^2<1$), $|x_3|=|x_4|=\sqrt{\frac{(1+p^2+q^2)^2+16p^2-(1+p^2+q^2)^2}{16p^2}}$=1.

При $b=0$ $p^2+q^2=-(4p\alpha+1)$. Пусть $\begin{cases} p=t \\ \alpha=s \end{cases}, (|s|<1, |t|<1)$. Тогда систему для коэффициентов многочлена можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} a=-2(s+t) \\ c=2s(4st+1)-2t \\ d=-(4st+1) \end{cases}, (|s|<1, |t|<1).$$

9) Случай 8. Таблица №1.

Многочлен (2.13) имеет действительные корни, два из которых по модулю равных 1, а два других корня по модулю меньших 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a=-2-(s+t) \\ c=3(s+t)+2 \\ d=-1-2(s+t) \end{cases}, (-4+2\sqrt{3}<(s+t)<0) \qquad (2.22)$$

Эта система задает отрезок.

Подставив формулы (2.22) в (2.13), получим разложение (2.13) на множители и явные формулы для его корней.

$$(x-1)^2(1+2s+2t+sx+tx-x^2)=0.$$

Получаем, что $x_1=1$; $x_2=1$; $x_{3,4}=\frac{1}{2}(s+t\pm\sqrt{(s+t)^2+8(s+t)+4})$.

Рассмотрим $x_{3,4}=\frac{1}{2}\left(s+t\pm\sqrt{(s+t)^2+8(s+t)+4}\right)$. По теореме Виета $|d|<1$, следовательно, $|1-2(s+t)|<1$, то $-1<(s+t)<0$. Рассмотрим функцию $y=(s+t)^2+8(s+t)+4$. При

$-4+2\sqrt{3}<(s+t)<0$ получаем $y>0$. Заметим, что $|x_3|=|x_4|<1$ (так как $-4+2\sqrt{3}<(s+t)<0$).

10) Случай 9. Таблица №1.

Многочлен (2.13) имеет действительные корни, два из которых по модулю равных 1, а два других корня по модулю меньших 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a=2-(s+t) \\ c=3(s+t)-2\ ,(0<(s+t)<4-2\sqrt{3}) \\ d=2(s+t)-1 \end{cases} \tag{2.23}$$

Эта система задает отрезок.

Подставив формулы (2.23) в (2.13), получим разложение (2.13) на множители и явные формулы для его корней.

$$(x+1)^2(1-2s-2t+sx+tx-x^2)=0.$$

Получаем, что $x_1=-1$; $x_2=-1$; $x_{3,4}=\frac{1}{2}(s+t\pm\sqrt{(s+t)^2-8(s+t)+4})$.

Рассмотрим $x_{3,4}=\frac{1}{2}\left(s+t\pm\sqrt{(s+t)^2-8(s+t)+4}\right)$. По теореме Виета $|d|<1$, следовательно, $|2(s+t)-1|<1$ то $0<(s+t)<1$. Рассмотрим функцию $y=(s+t)^2-8(s+t)+4$. При $0<(s+t)<4-2\sqrt{3}$ получаем $y>0$. Заметим, что $|x_3|=|x_4|<1$ (так как $0<(s+t)<4-2\sqrt{3}$).

Случай $\boldsymbol{c=0}$

Характеристический многочлен имеет вид

$$P(x)=x^4+ax^3+bx^2+d. \tag{2.24}$$

Найдем все значения коэффициентов $a,b,d,$ при которых (2.24) имеет хотя бы один корень по модулю равный 1, а остальные корни по модулю не больше 1.

Рассмотрим всевозможные случаи из Таблицы №1 (Приложение 1). Получаем следующие границы области, содержащие все искомые значения коэффициентов $a, b, d \in \boldsymbol{R}$.

1) Случай 8. Таблица №1.

Многочлен (2.24) имеет действительные корни, два из которых по модулю равных 1, а два других корня по модулю меньших 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = -2 - (s+t) \\ b = 1 + \frac{3}{2}(s+t) \\ d = -\frac{1}{2}(s+t) \end{cases}, (0 < (s+t) < 2) \qquad (2.25)$$

Эта система задает отрезок.

Подставив формулы (2.25) в (2.24), получим разложение (2.24) на множители и явные формулы для его корней.

$$(x-1)^2(s+t+2sx+2tx-2x^2) = 0.$$

Получаем, что $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_{3,4} = \frac{1}{2}(s+t \pm \sqrt{(s+t)^2 + 2(s+t)})$.

Рассмотрим $x_{3,4} = \frac{1}{2}\left(s+t \pm \sqrt{(s+t)^2 + 2(s+t)}\right)$. По теореме Виета $|d| < 1$, следовательно, $\left|\frac{1}{2}(s+t)\right| < 1$ то $-2 < (s+t) < 2$. Рассмотрим функцию $y = (s+t)^2 + 2(s+t)$. При $0 < (s+t) < 2$ получаем $y > 0$. Заметим, что $|x_3| = |x_4| < 1$ (так как $0 < (s+t) < 2$).

2) Случай 9. Таблица №1.

Многочлен (2.24) имеет действительные корни, два из которых по модулю равных 1, а два других корня по модулю меньших 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = 2 - (s+t) \\ b = 1 - \frac{3}{2}(s+t) \\ d = \frac{1}{2}(s+t) \end{cases}, (-2 < (s+t) < 0) \qquad (2.26)$$

Эта система задает отрезок.

Подставив формулы (2.26) в (2.24), получим разложение (2.24) на множители и явные формулы для его корней.

$$(x+1)^2(-s-t+2sx+2tx-2x^2)=0.$$

Получаем, что $x_1=-1$; $x_2=-1$; $x_{3,4}=\frac{1}{2}(s+t\pm\sqrt{(s+t)^2-2(s+t)})$.

Рассмотрим $x_{3,4}=\frac{1}{2}\left(s+t\pm\sqrt{(s+t)^2-2(s+t)}\right)$. По теореме Виета $|d|<1$, следовательно, $\left|\frac{1}{2}(s+t)\right|<1$ то $-2<(s+t)<2$. Рассмотрим функцию $y=(s+t)^2-2(s+t)$. При $-2<(s+t)<0$ получаем $y>0$. Заметим, что $|x_3|=|x_4|<1$ (так как $-2<(s+t)<0$).

3) Случай 10. Таблица №1.

Многочлен (2.24) имеет действительные корни, два из которых по модулю равных 1, а два других корня по модулю меньших 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a=0 \\ b=-1-t^2, (|t|<1) \\ d= t^2 \end{cases} \tag{2.27}$$

Эта система задает отрезок.

Подставив формулы (2.27) в (2.24), получим разложение (2.24) на множители и явные формулы для его корней.

$$(x-t)(x-1)(x+1)(x+t)=0.$$

Получаем, что $x_{1,2}=\pm1$; $x_{3,4}=\pm t$.

4) Случай 11. Таблица №1.

Многочлен (2.24) имеет действительные корни, один из которых по модулю равный 1, а три других корня по модулю меньших 1.В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a=-(1+s+t-\frac{st}{s+t+st}) \\ b=s+t+st-\frac{st(s+t+1)}{s+t+st} \quad ,(|t|<1,|s|<1) \\ d= -\frac{(st)^2}{s+t+st} \end{cases} \tag{2.28}$$

Подставив формулы (2.28) в (2.24), получим разложение (2.24) на множители и явные формулы для его корней.

$$\frac{(x-s)(x-t)(x-1)(st+sx+tx+stx)}{s+t+st}=0.$$

Получаем, что $x_1 = 1$; $x_2 = s$; $x_3 = -\frac{st}{s+t+st}$; $x_4 = t$. Заметим, что при некоторых дополнительных ограничениях s, t $\left(-1 < s \le -\frac{1}{3} \wedge -1 < t < -s\right)$, $\left(-\frac{1}{3} < s < 1 \wedge \left(-1 < t < -s \vee -\frac{s}{1+2s} < t < 1\right)\right)$, удовлетворяющих $|st| < 1$ можно показать, что $|x_3| < 1$.

Система (2.28) задает плоскость, явное уравнение этой плоскости имеет вид $d = -a - b - 1$, используя теорему Виета, получим ограничения на коэффициенты $|a| \le 2, |b| \le 2, |d| \le 1$.

5) Случай 12. Таблица №1.

Многочлен (2.24) имеет действительные корни, один из которых по модулю равный 1, а три других корня по модулю меньших 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = 1-(s+t)+\frac{st}{s+t-st} \\ b = -(s+t)+st+\frac{st(-(s+t)+1)}{s+t-st}, (|t|<1, |s|<1) \\ d = \frac{(st)^2}{s+t-st} \end{cases} \quad (2.29)$$

Подставив формулы (2.29) в (2.24), получим разложение (2.24) на множители и явные формулы для его корней.

$$\frac{(x-s)(x-t)(x+1)(-st-sx-tx+stx)}{-s-t+st}=0.$$

Получаем, что $x_1 = -1$; $x_2 = s$; $x_3 = t$; $x_4 = \frac{st}{-s-t+st}$. Заметим, что при некоторых дополнительных ограничениях s, t $\left(-1 < s \le \frac{1}{3} \wedge \left(-1 < t < \frac{s}{-1+2s} \vee -s < t < 1\right)\right)$, $(\frac{1}{3} < s < 1 \wedge -s < t < 1)$, удовлетворяющих $|st| < 1$ можно показать, что $|x_4| < 1$.

Система (2.29) задает плоскость, явное уравнение этой плоскости имеет вид $d = a - b - 1$, используя теорему Виета, получим ограничения на коэффициенты $|a| \le 2, |b| \le 2, |d| \le 1$.

6) Случай 13. Таблица №1.

Многочлен (2.24) имеет два действительных корня, один из которых по модулю равный 1, а другой по модулю меньше 1 и два комплексных корня по модулю равных 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = \frac{1-s^2}{s} \\ b = -\frac{s+1}{s}, (-1 < s < -\frac{1}{3}) \\ d = s \end{cases} \tag{2.30}$$

Эта система задает дугу кривой.

Подставив формулы (2.30) в (2.24), получим разложение (2.24) на множители и явные формулы для его корней.

$$\frac{(x-s)(x-1)(s+x+sx+sx^2)}{s} = 0.$$

Получаем, что $x_1 = 1$; $x_2 = s$; $x_{3,4} = \frac{-1-s\pm\sqrt{1+2s-3s^2}}{2s}$.

Рассмотрим функцию $y = 1 + 2s - 3s^2$. При $-1 < s < -\frac{1}{3}$ получаем $y < 0$, следовательно, $x_{3,4} = \frac{-1-s\pm i\sqrt{3s^2-2s-1}}{2s}$. Заметим, что $|x_3| = |x_4| = \sqrt{\frac{(1+s)^2-1-2s+3s^2}{4s^2}} = 1$.

7) Случай 14. Таблица №1.

Многочлен (2.24) имеет два действительных корня, один из которых по модулю равный 1, а другой по модулю меньше 1 и два комплексных корня по модулю равных 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = \frac{1-s^2}{s} \\ b = \frac{1-s}{s}, (\frac{1}{3} < s < 1) \\ d = -s \end{cases} \tag{2.31}$$

Эта система задает дугу кривой.

Подставив формулы (2.31) в (2.24), получим разложение (2.24) на множители и явные формулы для его корней.

$$\frac{(x-s)(x+1)(s+x-sx+sx^2)}{s}=0.$$

Получаем, что $x_1=-1$; $x_2=s$; $x_{3,4}=\frac{-1+s\pm\sqrt{1-2s-3s^2}}{2s}$.

Рассмотрим функцию $y=1-2s-3s^2$. При $\frac{1}{3}<s<1$ получаем $y<0$, следовательно, $x_{3,4}=\frac{-1+s\pm i\sqrt{3s^2+2s-1}}{2s}$. Заметим, что $|x_3|=|x_4|=\sqrt{\frac{(s-1)^2+3s^2+2s-1}{4}}=1$.

8) Случай 17. Таблица №1.

Многочлен (2.24) имеет два действительных корня по модулю меньших 1 и два комплексных корня по модулю равных 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a=-(s+t)+\frac{s+t}{st} \\ b=st+1-\frac{(s+t)^2}{st}, (|s|<1,|t|<1) \\ d=\ st \end{cases} \tag{2.32}$$

Выполнив проверку, по аналогии с пунктом 6 параграфа 2.2. для случая $a=0$, получаем, что система (2.32) задает поверхность.

Подставив формулы (2.32) в (2.24), получим разложение (2.24) на множители и явные формулы для его корней.

$$\frac{(x-s)(x-t)(st+sx+tx+stx^2)}{st}=0.$$

Получаем, что $x_1=s$; $x_2=t$; $x_{3,4}=\frac{-s-t\pm\sqrt{-4s^2t^2+(s+t)^2}}{2st}$.

При $\left(-1<s\le-\frac{1}{3}\wedge\frac{s}{-1+2s}<t<1\right)$, $\left(-\frac{1}{3}<s<0\wedge\frac{s}{-1+2s}<t<-\frac{s}{1+2s}\right)$, $\left(0<s\le\frac{1}{3}\wedge\frac{s}{-1+2s}<t<-\frac{s}{1+2s}\right)$ и $\left(\frac{1}{3}<s<1\wedge-1<t<-\frac{s}{1+2s}\right)$ получаем $-4s^2t^2+(s+t)^2<0$. Следовательно, $x_{3,4}=\frac{-s-t\pm i\sqrt{4s^2t^2-(s+t)^2}}{2st}$. Заметим, что $|x_3|=|x_4|=\sqrt{\frac{(s+t)^2+4s^2t^2-(s+t)^2}{4s^2t^2}}=1$.

Пусть $\begin{cases} st = v \\ \frac{s+t}{st} = t \end{cases}, \left(|v| < 1,\ \frac{1}{3} \le |t| \le 1\right)$. Тогда систему для коэффициентов многочлена можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} a = t(1 - v) \\ b = v(1 - t^2) + 1 \quad (|v| < 1,\ \frac{1}{3} \le |t| \le 1). \\ d = v \end{cases}$$

9) Случай 21. Таблица №1.

Многочлен (2.24) имеет два действительных корня по модулю равных 1 и два комплексных корня по модулю меньших 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -1 + \beta^2 \\ d = -\beta^2 \end{cases}, (0 < \beta^2 < 1) \qquad (2.33)$$

Эта система задает отрезок.

Подставив формулы (2.33) в (2.24), получим разложение (2.24) на множители и явные формулы для его корней.

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + \beta^2) = 0.$$

Получаем, что $x_{1,2} = \pm 1$; $x_{3,4} = \pm i\beta$. Заметим, что $|x_3| = |x_4| = |\beta| < 1$ (так как $|\beta| < 1$).

10) Случай 26. Таблица №1.

Многочлен (2.24) имеет четыре комплексных корня по модулю равных 1. В этом случае коэффициенты многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 2 - 4p^2 \\ d = 1 \end{cases}, (|p| < 1) \qquad (2.34)$$

Эта система задает отрезок.

Подставив формулы (2.34) в (2.24), получим разложение (2.24) на множители и явные формулы для его корней.

$$(-1 + 2px - x^2)(1 + 2px + x^2) = 0.$$

Получаем, что $x_{1,2} = -p \pm \sqrt{-1+p^2}$; $x_{3,4} = p \pm \sqrt{-1+p^2}$. Так как $|p| < 1$, то $-1+p^2 < 0$, следовательно, $x_{1,2} = -p \pm i\sqrt{1-p^2}$; $x_{3,4} = p \pm i\sqrt{1-p^2}$. Заметим, что $|x_1| = |x_2| = 1$; $|x_3| = |x_4| = 1$.

2.3. Области асимптотической устойчивости неполных линейных разностных уравнений четвертого порядка и их свойства

В данном параграфе для каждого неполного линейного разностного уравнения опишем область асимптотической устойчивости в пространстве коэффициентов этого уравнения.

Известно, что нулевое решение уравнения (2.1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все корни его характеристического многочлена (2.2) по модулю меньше 1.

Область асимптотической устойчивости, в пространстве коэффициентов, это тело ограниченное поверхностями (может быть плоскостями). Любое пересечение поверхностей будем называть ребром. Вершиной будем называть общую точку ребер. Вершинам области устойчивости соответствует такой набор корней, при котором коэффициенты уравнения являются постоянными.

Случай $\boldsymbol{a = 0}$

Для уравнения

$$x_{n+4} + bx_{n+2} + cx_{n+1} + dx_n = 0 \tag{2.35}$$

характеристический многочлен имеет вид (2.3).

Область асимптотической устойчивости уравнения (2.35) в пространстве коэффициентов $b, c, d \in \boldsymbol{R}$ изображена на рисунке 2.1.

Она представляет собой тело, ограниченное двумя поверхностями

$$\begin{cases} b = st - (s+t)^2 + 1 \\ c = (s+t)(st-1) \\ d = \ st \\ \quad |s| < 1, |t| < 1 \end{cases}, \begin{cases} b = -3p^2 + q^2 + 1 \\ c = 2p(p^2 + q^2 - 1) \\ d = \ p^2 + q^2 \\ \quad p^2 + q^2 < 1 \end{cases}$$ и двумя пересекающимися плоскостями $d = -b - c - 1,\ d = -b + c - 1$, где $|b| \le 2, |c| \le 1, |d| \le 1$.

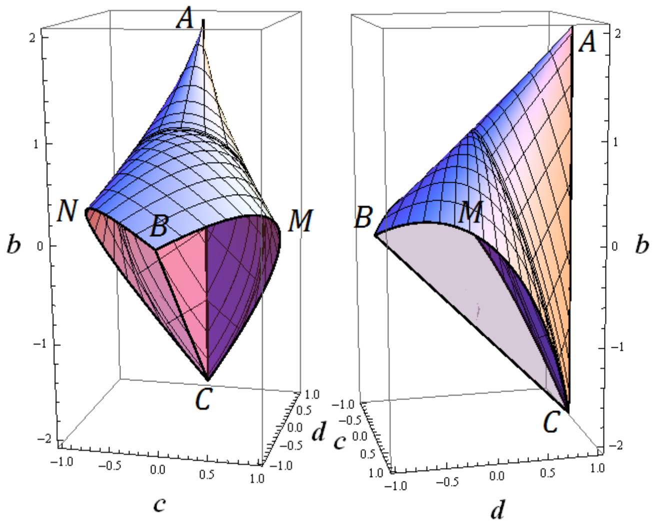

Рис.2.1. Область асимптотической устойчивости уравнения (2.35) (в двух видах).

Выделим границы области асимптотической устойчивости.

1) Набору корней для случая 2 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует характеристическое уравнение, которое имеет вид $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$, его коэффициенты b, c, d определяют точку в пространстве, это вершина области $C(-2; 0; 1)$.

2) Набору корней для случая 20 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует характеристическое уравнение, которое имеет вид $x^4 - 1 = 0$, его коэффициенты b, c, d определяют точку в пространстве, это вершина области $B(0; 0; -1)$.

3) Набору корней для случая 25 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует характеристическое уравнение, которое имеет вид $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$, его коэффициенты b, c, d определяют точку в пространстве, это вершина области $A(2; 0; 1)$.

4) Набору корней для случая 10 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует ребро, характеристическое уравнение которого имеет вид $x^4+(-1-t^2)x^2+t^2=0$, его параметрические уравнения (2.4) задают отрезок.

5) Набору корней для случая 13 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует ребро, в виде дуги CNB, характеристическое уравнение которого имеет вид $x^4+(-s^2-s)x^2+(s^2-1)x+s=0$, его параметрические уравнения (2.7) задают дугу кривой.

6) Набору корней для случая 14 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует ребро, в виде дуги CMB, характеристическое уравнение которого имеет вид $x^4+(-s^2+s)x^2+(1-s^2)x-s=0$, его параметрические уравнения (2.8) задают дугу кривой.

7) Набору корней для случая 21 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует ребро, характеристическое уравнение которого имеет вид $x^4+(-1+\beta^2)x^2-\beta^2=0$, его параметрические уравнения (2.10) задают отрезок.

8) Набору корней для случая 26 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует ребро AC, характеристическое уравнение которого имеет вид $x^4+(2-p^2)x^2+1=0$, его параметрические уравнения (2.12) задают отрезок.

9) Набору корней для случая 11 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует характеристическое уравнение, которое имеет вид $x^4+(-(s+t)^2-s-t+st-1)x^2+\big((s+t)^2+s+t+st(s+t)\big)x+$ $+(-st(s+t)-st)=0$, его коэффициенты b,c,d являющиеся параметрическими функциями двух параметров (2.5), определяют плоскость (CNB).

10) Набору корней для случая 12 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует характеристическое уравнение, которое имеет вид $x^4+(-(s+t)^2+(s+t)+st-1)x^2+\big(-(s+t)^2+(s+t)+st(s+t)\big)x+$ $+(st(s+t)-st)=0$, его коэффициенты b,c,d являющиеся

параметрическими функциями двух параметров (2.6), определяют плоскость (CMB).

11) Набору корней для случая 17 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует характеристическое уравнение, которое имеет вид $x^4 + (st - (s+t)^2 + 1)x^2 + \big((s+t)(st-1)\big)x + st = 0$, его коэффициенты b, c, d являющиеся параметрическими функциями двух параметров (2.9), определяют поверхность.

12) Набору корней для случая 22 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует характеристическое уравнение, которое имеет вид $x^4 + (-3p^2 + q^2 + 1)x^3 + (2p(p^2 + q^2 - 1))x + p^2 + q^2 = 0,$ его коэффициенты b, c, d являющиеся параметрическими функциями двух параметров (2.11), определяют поверхность.

Формулы в случаях 4 и 7 образуют одно ребро CB.

Границу области асимптотической устойчивости уравнения (2.35) (см. рис. 2.1) образуют три вершины: C, B, A (п.п. 1, 2, 3), четыре ребра: два отрезка AC, CB (п.п. 4, 7, 8), и две дуги CNB, CMB (п.п. 5, 6), две плоскости (CNB) и (CMB) (п.п. 9, 10), две поверхности (п.п. 11, 12).

Область асимптотической устойчивости обладает единственной плоскостью симметрии $c = 0$.

Случай $\boldsymbol{b = 0}$

Для уравнения

$$x_{n+4} + ax_{n+3} + cx_{n+1} + dx_n = 0 \qquad (2.36)$$

характеристический многочлен имеет вид (2.13).

Область асимптотической устойчивости уравнения (2.36) в пространстве коэффициентов $a, c, d \in \boldsymbol{R}$ изображена на рисунке 2.2.

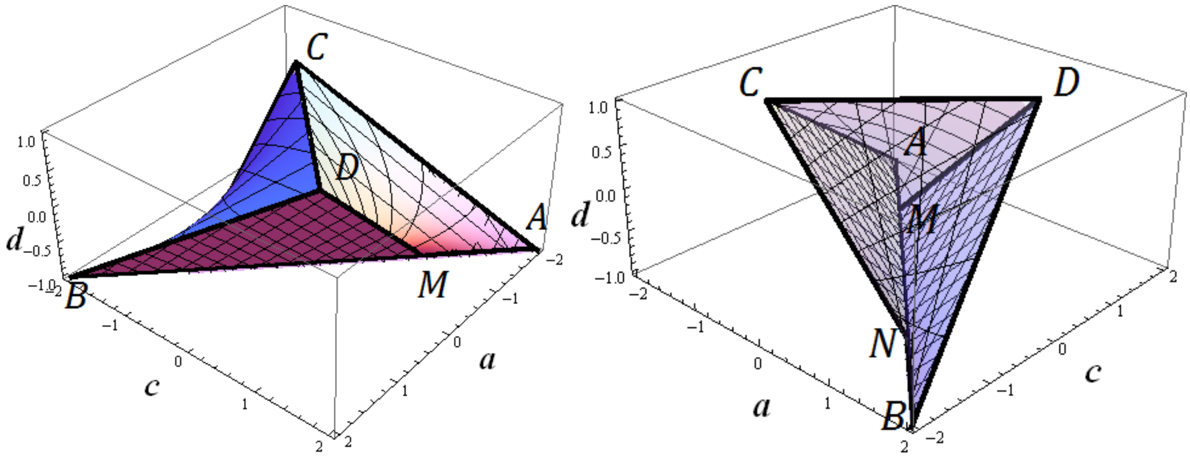

Рис.2.2. Область асимптотической устойчивости уравнения (2.36) (в двух видах).

Она представляет собой тело, ограниченное двумя поверхностями

$$\begin{cases} a = \frac{-u^2+v+1}{u} \\ c = \frac{v^2-u^2+v}{u} \\ d = v \\ 0 < |u| < 2, |v| < 1 \end{cases}, \begin{cases} a = \frac{-3p^2+q^2+1}{2p} \\ c = \frac{p^2+q^2+(p^2+q^2)^2}{2p} - 2p \\ d = p^2 + q^2 \\ |p^2 + q^2| < 1,\ 0 < |p| < 1 \end{cases}$$ и двумя пересекающимися плоскостями $d = -a - c - 1,\ d = a + c - 1$, где $|a| \leq 2,\ |c| \leq 2$,$|d| \leq 1$.

Выделим границы области асимптотической устойчивости.

1) Набору корней для случая 1 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует характеристическое уравнение, которое имеет вид $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$, его коэффициенты a, c, d определяют точку в пространстве, это вершина области $A(-2; 2; -1)$.

2) Набору корней для случая 3 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует характеристическое уравнение, которое имеет вид $x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = 0$, его коэффициенты a, c, d определяют точку в пространстве, это вершина области $B(2; -2; -1)$.

3) Набору корней для случая 18 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует характеристическое уравнение, которое имеет вид $x^4 - x^3 - x + 1 = 0$, его коэффициенты a, c, d определяют точку в пространстве, это вершина области $C(-1; -1; 1)$.

4) Набору корней для случая 19 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует характеристическое уравнение, которое имеет вид $x^4 + x^3 + x + 1 = 0$, его коэффициенты a, c, d определяют точку в пространстве, это вершина области $D(1; 1; 1)$.

5) Набору корней для случая 8 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует ребро AC, характеристическое уравнение которого имеет вид $x^4 + \left(-2 - (s+t)\right)x^3 + (3(s+t) + 2)x - 1 - 2(s+t) = 0$, его параметрические уравнения (2.22) задают отрезок.

6) Набору корней для случая 9 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует ребро DB, характеристическое уравнение которого имеет вид $x^4 + \left(2 - (s+t)\right)x^3 + (3(s+t) - 2)x - 1 + 2(s+t) = 0$, его параметрические уравнения (2.23) задают отрезок.

7) Набору корней для случая 13 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует ребро CN, характеристическое уравнение которого имеет вид $x^4 - sx^3 - x + s = 0$, его параметрические уравнения (2.16) задают отрезок.

8) Набору корней для случая 14 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует ребро DM, характеристическое уравнение которого имеет вид $x^4 - sx^3 + x - s = 0$, его параметрические уравнения (2.17) задают отрезок.

9) Набору корней для случая 20 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует ребро AB, характеристическое уравнение которого имеет вид $x^4 - 2\alpha x^3 + 2\alpha x - 1 = 0$, его параметрические уравнения (2.19) задают отрезок.

10) Набору корней для случая 26 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует ребро CD, характеристическое уравнение которого имеет вид $x^4 + \left(\frac{-2p^2+1}{p}\right)x^3 + \left(\frac{-2p^2+1}{p}\right)x + 1 = 0$, его параметрические уравнения (2.20) задают отрезок.

11) Набору корней для случая 11 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует характеристическое уравнение, которое имеет вид $x^4 + \left(\frac{-(s+t)^2 - (s+t) + st - 1}{1 + (s+t)}\right)x^3 + \left(\frac{((s+t) + st)^2 - (s+t)st - st}{1 + (s+t)}\right)x + \frac{-(st)^2 - (s+t)st}{1 + (s+t)} = 0$, его

коэффициенты a, c, d являющиеся параметрическими функциями двух параметров (2.14), определяют плоскость (ACN).

12) Набору корней для случая 12 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует характеристическое уравнение, которое имеет вид $x^4 + \left(\frac{-(s+t)^2+(s+t)+st-1}{-1+(s+t)}\right)x^3 + \left(\frac{((s+t)-st)^2+(s+t)st-st}{-1+(s+t)}\right)x + \frac{(st)^2-(s+t)st}{-1+(s+t)} = 0,$ его коэффициенты a, c, d являющиеся параметрическими функциями двух параметров (2.15), определяют плоскость (BDM).

13) Набору корней для случая 17 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует характеристическое уравнение, которое имеет вид $x^4 + \left(\frac{-(s+t)^2+st+1}{(s+t)}\right)x^3 + \left(\frac{(s*t)^2-(s+t)^2+s*t}{(s+t)}\right)x + v = 0$, его коэффициенты a, c, d являющиеся параметрическими функциями двух параметров (2.18), определяют поверхность.

14) Набору корней для случая 22 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует характеристическое уравнение, которое имеет вид $x^4 + \left(\frac{-3p^2+q^2+1}{2p}\right)x^3 + \left(\frac{p^2+q^2+(p^2+q^2)^2}{2p} - 2p\right)x + p^2 + q^2 = 0,$ его коэффициенты a, c, d являющиеся параметрическими функциями двух параметров (2.21), определяют поверхность.

Границу области асимптотической устойчивости уравнения (2.36) (см. рис. 2.2) образуют четыре вершины: A, B, C, D (п.п. 1, 2, 3, 4), шесть ребер: отрезки AC, DB, CN, DM, AB, CD (п.п. 5, 6, 7, 8, 9, 10), две плоскости (ACN) и (BDM) (п.п. 11, 12), две поверхности (п.п. 13, 14).

Область асимптотической устойчивости обладает единственной осью симметрии $\begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$.

Случай $\boldsymbol{c = 0}$

Для уравнения

$$x_{n+4} + ax_{n+3} + bx_{n+2} + dx_n = 0 \tag{2.37}$$

характеристический многочлен имеет вид (2.24).

Область асимптотической устойчивости уравнения (2.37) в пространстве коэффициентов $a, b, d \in \boldsymbol{R}$ изображена на рисунке 2.3.

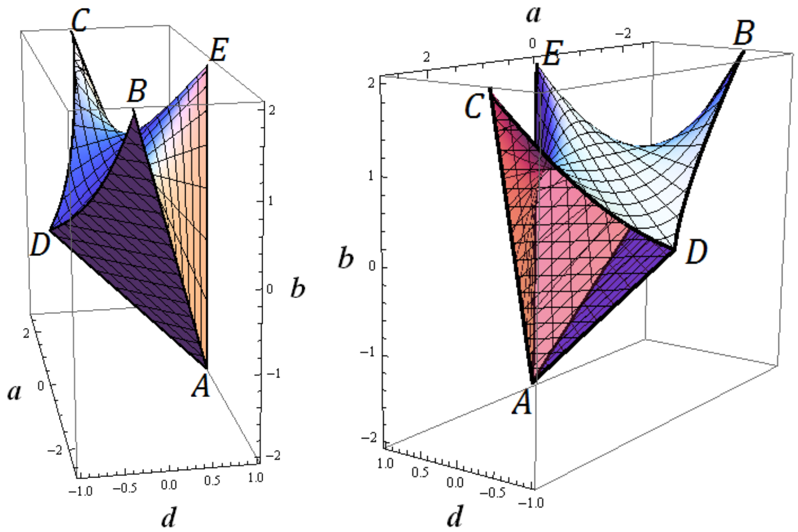

Рис.2.3. Область асимптотической устойчивости уравнения (2.37) (в двух видах).

Она представляет собой тело, ограниченное поверхностью $\begin{cases} a = t(1-v) \\ b = v(1-t^2)+1 \\ d = v \\ |v| < 1, \ \frac{1}{3} \leq |t| \leq 1 \end{cases}$ и двумя пересекающимися плоскостями $d = -a - b - 1$, $d = a - b - 1$, где $|a| \leq 2$, $|c| \leq 2$,$|d| \leq 1$.

Выделим границы области асимптотической устойчивости.

1) Набору корней для случая 2 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует характеристическое уравнение, которое имеет вид $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$, его коэффициенты a, b, d определяют точку в пространстве, это вершина области $A(0; -2; 1)$.

2) Набору корней для случая 4 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует характеристическое уравнение, которое имеет вид $x^4 - 2\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{3} = 0$, его коэффициенты a, b, d определяют точку в пространстве, это вершина области $B(-2\frac{2}{3}; 2; -\frac{1}{3})$.

3) Набору корней для случая 7 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует характеристическое уравнение, которое имеет вид

$x^4 + 2\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{3} = 0$, его коэффициенты a, b, d определяют точку в пространстве, это вершина области $C(2\frac{2}{3}; 2; -\frac{1}{3})$.

4) Набору корней для случая 20 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует характеристическое уравнение, которое имеет вид $x^4 - 1 = 0$, его коэффициенты a, b, d определяют точку в пространстве, это вершина области $D(0; 0; -1)$.

5) Набору корней для случая 25 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует характеристическое уравнение, которое имеет вид $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$, его коэффициенты a, b, d определяют точку в пространстве, это вершина области $E(0; 2; 1)$.

6) Набору корней для случая 8 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует ребро AB, характеристическое уравнение которого имеет вид $x^4 + (-2 - (s + t))x^3 + \left(1 + \frac{3}{2}(s + t)\right)x^2 - \frac{1}{2}(s + t) = 0$, его параметрические уравнения (2.25) задают отрезок.

7) Набору корней для случая 9 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует ребро AC, характеристическое уравнение которого имеет вид $x^4 + (2 - (s + t))x^3 + \left(1 - \frac{3}{2}(s + t)\right)x^2 + \frac{1}{2}(s + t) = 0$, его параметрические уравнения (2.26) задают отрезок.

8) Набору корней для случая 10 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует ребро, характеристическое уравнение которого имеет вид $x^4 + (-1 - t^2)x^2 + t^2 = 0$, его параметрические уравнения (2.27) задают отрезок.

9) Набору корней для случая 13 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует ребро, в виде дуги BD, характеристическое уравнение которого имеет вид $x^4 + \frac{1-s^2}{s}x^3 - \frac{s+1}{s}x^2 + s = 0$, его параметрические уравнения (2.30) задают дугу кривой.

10) Набору корней для случая 14 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует ребро, в виде дуги CD, характеристическое уравнение

которого имеет вид $x^4 + \frac{1-s^2}{s}x^3 + \frac{1-s}{s}x^2 - s = 0$, его параметрические уравнения (2.31) задают дугу кривой.

11) Набору корней для случая 21 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует ребро, характеристическое уравнение которого имеет вид $x^4 + (-1+\beta^2)x^2 - \beta^2 = 0$, его параметрические уравнения (2.33) задают отрезок.

12) Набору корней для случая 26 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует ребро AE, характеристическое уравнение которого имеет вид $x^4 + (2-4p^2)x^2 + 1 = 0$, его параметрические уравнения (2.34) задают отрезок.

13) Набору корней для случая 11 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует характеристическое уравнение, которое имеет вид $x^4 - (1 + s + t - \frac{st}{s+t+st})x^3 + \left(s + t + st - \frac{st(s+t+1)}{s+t+st}\right)x^2 - \frac{(st)^2}{s+t+st} = 0$, его коэффициенты a, b, d являющиеся параметрическими функциями двух параметров (2.28), определяют плоскость (ABD).

14) Набору корней для случая 12 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует характеристическое уравнение, которое имеет вид $x^4 + \left(1 - s - t + \frac{st}{s+t-st}\right)x^3 + \left(-s - t + st + \frac{st(-(s+t)+1)}{s+t-st}\right)x^2 + \frac{(st)^2}{s+t-st} = 0$, его коэффициенты a, b, d являющиеся параметрическими функциями двух параметров (2.29), определяют плоскость (ACD).

15) Набору корней для случая 17 из Таблицы №1 (Приложение 1) соответствует характеристическое уравнение, которое имеет вид $x^4 + \left(-(s+t) + \frac{s+t}{st}\right)x^3 + \left(st + 1 - \frac{(s+t)^2}{st}\right)x^2 + st = 0$, его коэффициенты a, b, d являющиеся параметрическими функциями двух параметров (2.32), определяют поверхность.

Формулы в случаях 8 и 11 образуют одно ребро AD.

Границу области асимптотической устойчивости уравнения (2.37) (см. рис. 2.3) образуют пять вершин: A, B, C, D, E (п.п. 1, 2, 3, 4, 5), шесть ребер:

отрезки AB, AC, AD, AE (п.п. 6, 7, 8, 11, 12), дуги BD, CD (п.п. 9, 10), две плоскости (ABD) и (ACD) (п.п. 13, 14), одна поверхность (п.п. 15).

Область асимптотической устойчивости обладает единственной плоскостью симметрии $a = 0$.

2.4. Асимптотическое поведение решений неполных линейных разностных уравнений четвертого порядка на границе области асимптотической устойчивости

В данном параграфе для каждого неполного линейного разностного уравнения опишем асимптотическое поведение решений уравнения на каждом участке границы области асимптотической устойчивости.

Случай $\boldsymbol{a = 0}$

Выделим свойства корней характеристического многочлена (2.3) и асимптотическое поведение решений уравнения (2.35) на каждом участке границы области асимптотической устойчивости изображенной на рисунке 2.1.

1. В вершине $C(-2; 0; 1)$ имеем $P(x) = (x-1)^2(x+1)^2$.

Все корни характеристического многочлена $P(x)$ действительные и по модулю равные 1, причем $x = 1$ – корень кратности 2 и $x = -1$ – корень кратности 2. Тогда общее решение уравнения (2.35) имеет вид

$$x_n = C_1 + nC_2 + (-1)^n(C_3 + nC_4).$$

2. В вершине $B(0; 0; -1)$ имеем $P(x) = (x-1)(x+1)Q(x)$.

Многочлен $Q(x)$ имеет два комплексно сопряженных корня $x_{3,4} = \cos\varphi \pm i \sin\varphi$ по модулю равных 1. Тогда общее решение уравнения (2.35) имеет вид

$$x_n = C_1 + (-1)^n C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi).$$

3. В вершине $A(2; 0; 1)$ имеем $P(x) = (x^2+1)^2 = Q(x)$.

Многочлен $Q(x)$ имеет две пары одинаковых комплексно сопряженных корней по модулю равных 1, причем $x = i$ – корень кратности 2 и $x = -i$ – корень кратности 2. Тогда общее решение уравнения (2.35) имеет вид

$$x_n = (C_1 + nC_2)\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) + (C_3 + nC_4)\sin(n \cdot \frac{\pi}{2}).$$

4. На ребре CB (2.4) имеем $P(x) = (x - t)(x - 1)(x + 1)(x + t)$.

Все корни характеристического многочлена $P(x)$ действительные. Тогда общее решение уравнения (2.35) имеет вид

$$x_n = C_1 + (-1)^n C_2 + (-t)^n C_3 + t^n C_4.$$

5. На ребре CNB (2.7) имеем

$$P(x) = (x - s)(x - 1)(1 + x + sx + x^2) = (x - s)(x - 1)Q(x).$$

Многочлен $Q(x)$ имеет два комплексно сопряженных корня $x_{3,4} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$ по модулю равных 1. Тогда общее решение уравнения (2.35) имеет вид

$$x_n = C_1 + s^n C_2 + C_3\cos(n\varphi) + C_4\sin(n\varphi).$$

6. На ребре CMB (2.8) имеем

$$P(x) = (x - s)(x + 1)(1 - x + sx + x^2) = (x - s)(x + 1)Q(x).$$

Многочлен $Q(x)$ имеет два комплексно сопряженных корня $x_{3,4} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$ по модулю равных 1. Тогда общее решение уравнения (2.35) имеет вид

$$x_n = (-1)^n C_1 + s^n C_2 + C_3\cos(n\varphi) + C_4\sin(n\varphi).$$

7. На ребре CB (2.10) имеем

$$P(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + \beta^2) = (x - 1)(x + 1)Q(x).$$

Многочлен $Q(x)$ имеет два комплексно сопряженных корня по модулю меньших 1. Тогда общее решение уравнения (2.35) имеет вид

$$x_n = C_1 + (-1)^n C_2 + |\beta|^n (C_3\cos(n\varphi) + C_4\sin(n\varphi)).$$

8. На ребре AC (2.12) имеем

$$P(x) = (-1 + 2px - x^2)(1 + 2px + x^2) = Q_1(x)Q(x).$$

Многочлен $Q(x)$ имеет два комплексно сопряженных корня $x_{1,2} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$ по модулю равных 1. Многочлен $Q_1(x)$ имеет два комплексно сопряженных корня $x_{3,4} = \cos\varphi_1 \pm i\sin\varphi_1$ по модулю равных 1. Тогда общее решение уравнения (2.35) имеет вид

$$x_n = C_1\cos(n\varphi) + C_2\sin(n\varphi) + C_3\cos(n\varphi_1) + C_4\sin(n\varphi_1).$$

9. На грани (CNB) (2.5) имеем

$$P(x) = (x-s)(x-t)(x-1)(x+1+s+t).$$

Все корни характеристического многочлена $P(x)$ действительные. Тогда общее решение уравнения (2.35) имеет вид

$$x_n = C_1 + s^nC_2 + t^nC_3 + (-1-s-t)^nC_4.$$

10. На грани (CMB) (2.6) имеем

$$P(x) = (x-s)(x-t)(x+1)(x-1+s+t).$$

Все корни характеристического многочлена $P(x)$ действительные. Тогда общее решение уравнения (2.35) имеет вид

$$x_n = (-1)^nC_1 + s^nC_2 + t^nC_3 + (1-s-t)^nC_4.$$

11. На поверхности (2.9) имеем

$$P(x) = (x-s)(x-t)(1+sx+tx+x^2) = (x-s)(x-t)Q(x).$$

Многочлен $P(x)$ имеет два действительных корня по модулю меньших 1 и два комплексно сопряженных $x_{3,4} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$ по модулю равных 1. Тогда общее решение уравнения (2.35) имеет вид

$$x_n = t^nC_1 + s^nC_2 + C_3\cos(n\varphi) + C_4\sin(n\varphi).$$

12. На поверхности (2.11) имеем

$$P(x) = (p^2+q^2-2px+x^2)(1+2px+x^2) = Q_1(x)Q(x).$$

Многочлен $Q(x)$ имеет два комплексно сопряженных корня $x_{1,2} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$ по модулю равных 1. Многочлен $Q_1(x)$ имеет два комплексно сопряженных корня $x_{3,4} = \sqrt{p^2+q^2}\,(\cos\varphi_1 \pm i\sin\varphi_1)$ по модулю меньших 1. Тогда общее решение уравнения (2.35) имеет вид

$$x_n = C_1\cos(n\varphi) + C_2\sin(n\varphi) + (\sqrt{p^2+q^2})^n(C_3\cos(n\varphi_1) + C_4\sin(n\varphi_1)).$$

На каждом участке границы области устойчивости решения уравнения (2.35) (см. рис. 2.1) обладают следующими особенностями асимптотического поведения:

- в вершинах $C(-2;0;1)$, $A(2{,}0{,}1)$, в общем случае устойчивость не сохраняется в виду наличия кратных корней по модулю равных 1;
- в вершине $B(0;0;-1)$ устойчивость сохраняется, но не асимптотическая;
- на ребрах AC, BC, дугах CNB, CMB устойчивость сохраняется, но не асимптотическая;
- во внутренних точках граней (CNB), (CMB) система устойчива (не асимптотически);
- в точках, лежащих на поверхностях (2.9), (2.11) система (2.35) устойчива (не асимптотически).

В таблице 2.1. представлены особенности асимптотического поведения на каждом участке границы области устойчивости решения уравнения (2.35).

Таблица 2.1. Особенности асимптотического поведения на каждом участке границы области устойчивости решения уравнения (2.35) (рис. 2.1)

Устойчивость (не асимптотическая)	Неустойчивость
Вершина $B(0;0;-1)$ Ребра AC, BC, CNB, CMB Грани (CNB), (CMB) Поверхности (2.9),(2.11)	Вершины $C(-2;0;1)$, $A(2{,}0{,}1)$

Случай $\boldsymbol{b=0}$

Выделим свойства корней характеристического многочлена (2.13) и асимптотическое поведение решений уравнения (2.36) на каждом участке границы области асимптотической устойчивости изображенной на рисунке2.2.

1. В вершине $A(-2;2;-1)$ имеем $P(x)=(x-1)^3(x+1)$.

Все корни характеристического многочлена $P(x)$ действительные и по модулю равные 1, причем $x=1$ – корень кратности 3. Тогда общее решение уравнения (2.36) имеет вид

$$x_n = C_1 + nC_2 + n^2C_3 + (-1)^nC_4.$$

2. В вершине $B(2;-2;-1)$ имеем $P(x) = (x+1)^3(x-1)$.

Все корни характеристического многочлена $P(x)$ действительные и по модулю равные 1, причем $x=-1$ – корень кратности 3. Тогда общее решение уравнения (2.36) имеет вид

$$x_n = (-1)^n(C_1 + nC_2 + n^2C_3) + C_4.$$

3. В вершине $C(-1;-1;1)$ имеем

$$P(x) = (x-1)^2(x^2+x+1) = (x-1)^2Q(x).$$

Многочлен $Q(x)$ имеет два комплексно сопряженных корня по модулю равных 1. Таким образом, многочлен $P(x)$ имеет действительный корень по модулю равный 1, причем $x=1$ – корень кратности 2 и два комплексно сопряженных корня по модулю равных 1. Тогда общее решение уравнения (2.36) имеет вид

$$x_n = C_1 + nC_2 + C_3\cos(n\varphi) + C_4\sin(n\varphi).$$

4. В вершине $D(1,1,1)$ имеем $P(x) = (x^2 - x + 1) = (x+1)^2Q(x)$.

Многочлен $Q(x)$ имеет два комплексно сопряженных корня по модулю равных 1. Таким образом, многочлен $P(x)$ имеет действительный корень по модулю равный 1, причем $x=-1$ – корень кратности 2 и два комплексно сопряженных корня по модулю равных 1. Тогда общее решение уравнения (2.36) имеет вид

$$x_n = (-1)^n(C_1 + nC_2) + C_3\cos(n\varphi) + C_4\sin(n\varphi).$$

5. На ребре AC (2.22) имеем

$$P(x) = (x-1)^2(-1 - 2s - 2t - sx - tx + x^2).$$

Все корни характеристического многочлена $P(x)$ действительные, причем $x=1$ – корень кратности 2. Тогда общее решение уравнения (2.36) имеет вид

$$x_n = C_1 + nC_2 + \left(\frac{1}{2}\left(s + t - \sqrt{(s+t)^2 + 8(s+t) + 4}\right)\right)^n C_3 + \left(\frac{1}{2}\left(s + t +\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sqrt{(s+t)^2 + 8(s+t) + 4}\right)\right)^n C_4.$$

6. На ребре DB (2.23) имеем

$$P(x) = (x+1)^2(-1 + 2s + 2t - sx - tx + x^2).$$

Все корни характеристического многочлена $P(x)$ действительные, причем $x = -1$ – корень кратности 2. Тогда общее решение уравнения (2.36) имеет вид

$$x_n = (-1)^n(C_1 + nC_2) + (\tfrac{1}{2}(s + t - \sqrt{(s + t)^2 - 8(s + t) + 4}))^n C_3 +$$

$$+(\tfrac{1}{2}(s + t + \sqrt{(s + t)^2 - 8(s + t) + 4}))^n C_4.$$

7. На ребре CN (2.16) имеем

$$P(x) = (x - 1)(x - s)(x^2 + x + 1) = (x - 1)(x - s)Q(x).$$

Многочлен $Q(x)$ имеет два комплексно сопряженных корня по модулю равных 1. Тогда общее решение уравнения (2.36) имеет вид

$$x_n = C_1 + s^n C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi).$$

8. На ребре DM (2.17) имеем

$$P(x) = (x + 1)(x - s)(x^2 - x + 1) = (x + 1)(x - s)Q(x).$$

Многочлен $Q(x)$ имеет два комплексно сопряженных корня по модулю равных 1. Тогда общее решение уравнения (2.36) имеет вид

$$x_n = (-1)^n C_1 + s^n C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi).$$

9. На ребре AB (2.19) имеем

$$P(x) = (x + 1)(x - 1)(x^2 - 2\alpha x + 1) = (x + 1)(x - 1)Q(x).$$

Многочлен $Q(x)$ имеет два комплексно сопряженных корня $x_{3,4} = \cos\varphi \pm i \sin\varphi$ по модулю равных 1. Тогда общее решение уравнения (2.36) имеет вид

$$x_n = C_1 + (-1)^n C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi).$$

10. На ребре CD (2.20) имеем $P(x) = \frac{(1-2px+x^2)(p+x+px^2)}{p} = Q_1(x)Q(x)$.

Многочлен $Q_1(x)$ имеет два комплексно сопряженных корня $x_{3,4} = \cos\varphi_1 \pm i \sin\varphi_1$ по модулю равных 1. Многочлен $Q(x)$ имеет два комплексно сопряженных корня $x_{1,2} = \cos\varphi \pm i \sin\varphi$ по модулю равных 1. Тогда общее решение уравнения (2.36) имеет вид

$$x_n = C_1 \cos(n\varphi) + C_2 \sin(n\varphi) + C_3 \cos(n\varphi_1) + C_4 \sin(n\varphi_1).$$

11. На грани (ACN) (2.14) имеем $P(x) = \frac{(x-s)(x-t)(x-1)(s+t+st+x+sx+tx)}{1+s+t}$.

Все корни характеристического многочлена $P(x)$ действительные. Тогда общее решение уравнения (2.36) имеет вид

$$x_n = C_1 + s^n C_2 + t^n C_3 + (\frac{-s-t-st}{1+s+t})^n C_4.$$

12.На грани (BDM) (2.15) имеем $P(x) = \frac{(x-s)(x-t)(x+1)(-s-t+st-x+sx+tx)}{-1+s+t}$.

Все корни характеристического многочлена $P(x)$ действительные. Тогда общее решение уравнения (2.36) имеет вид

$$x_n = (-1)^n C_1 + s^n C_2 + t^n C_3 + (\frac{s+t-st}{-1+s+t})^n C_4.$$

13.На поверхности (2.18) имеем

$$P(x) = \frac{(x-s)(x-t)(s+t+x+stx+sx^2+tx^2)}{s+t} = (x-s)(x-t)Q(x).$$

Многочлен $P(x)$ имеет два действительных корня по модулю меньших 1 и два комплексно сопряженных $x_{3,4} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$ по модулю равных 1. Тогда общее решение уравнения (2.36) имеет вид

$$x_n = t^n C_1 + s^n C_2 + C_3\cos(n\varphi) + C_4\sin(n\varphi).$$

14.На поверхности (2.21) имеем

$$P(x) = \frac{(p^2+q^2-2px+x^2)(2p+x+p^2x+q^2x+2px^2)}{2p} = Q_1(x)Q(x).$$

Многочлен $Q_1(x)$ имеет два комплексно сопряженных $x_{3,4} = \sqrt{p^2+q^2}\,(\cos\varphi_1 \pm i\sin\varphi_1)$ корня по модулю меньших 1. Многочлен $Q(x)$ имеет два комплексно сопряженных корня $x_{1,2} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$ по модулю равных 1. Тогда общее решение уравнения (2.36) имеет вид

$$x_n = C_1\cos(n\varphi) + C_2\sin(n\varphi) + (\sqrt{p^2+q^2})^n(C_3\cos(n\varphi_1) + C_4\sin(n\varphi_1)).$$

На каждом участке границы области устойчивости решения уравнения (2.36) (рис. 2.2) обладают следующими особенностями асимптотического поведения:

- в каждой из четырех вершин $A(-2;2;-1)$, $B(2;-2;1)$, $C(-1;-1;1)$, $D(1;1;1)$, в общем случае устойчивость не сохраняется в виду наличия кратных корней по модулю равных 1;

- на рёбрах DB, AC устойчивость не сохраняется в виду наличия кратных корней по модулю равных 1;
- на ребрах CD, AB, DM, CN устойчивость сохраняется, но не асимптотическая;
- во внутренних точках граней (ACN), (BDM) система устойчива (не асимптотически);
- в точках, лежащих на поверхностях (2.18), (2.21) система (2.36) устойчива (не асимптотически).

В таблице 2.2 представлены особенности асимптотического поведения на каждом участке границы области устойчивости решения уравнения (2.36).

Таблица 2.2. Особенности асимптотического поведения на каждом участке границы области устойчивости решения уравнения (2.36) (рис. 2.2)

Устойчивость (не асимптотическая)	Неустойчивость
Ребра CD, AB, DM, CN Грани (ACN), (BDM) Поверхности (2.18), (2.21)	Вершины $A(-2; 2; -1)$, $B(2; -2; 1)$, $C(-1; -1; 1)$, $D(1; 1; 1)$ Ребра DB, AC

Случай $c = 0$

Выделим свойства корней характеристического многочлена (2.24) и асимптотическое поведение решений уравнения (2.37) на каждом участке границы области асимптотической устойчивости изображенной на рисунке 2.3.

1. В вершине $A(0; -2; 1)$ имеем $P(x) = (x-1)^2(x+1)^2$.

Все корни характеристического многочлена $P(x)$ действительные и по модулю равные 1, причем $x = 1$ – корень кратности 2 и $x = -1$ – корень кратности 2. Тогда общее решение уравнения (2.37) имеет вид

$$x_n = C_1 + nC_2 + (-1)^n(C_3 + nC_4).$$

2. В вершине $B(-2\frac{2}{3}; 2; -\frac{1}{3})$ имеем $P(x) = (x-1)^3(3x+1)$.

Все корни характеристического многочлена $P(x)$ действительные, причем $x = 1$ – корень кратности 3 по модулю равен 1, а $x = -\frac{1}{3}$ по модулю меньше 1. Тогда общее решение уравнения (2.37) имеет вид

$$x_n = C_1 + nC_2 + n^2C_3 + (-\tfrac{1}{3})^n C_4.$$

3. В вершине $C(2\frac{2}{3}; 2; -\frac{1}{3})$ имеем $P(x) = (x+1)^3(3x-1)$.

Все корни характеристического многочлена $P(x)$ действительные, причем $x = -1$ – корень кратности 3 по модулю равный 1, а $x = \frac{1}{3}$ по модулю меньше 1. Тогда общее решение уравнения (2.37) имеет вид

$$x_n = (-1)^n(C_1 + nC_2 + n^2C_3) + (\tfrac{1}{3})^n C_4.$$

4. В вершине $D(0; 0; -1)$ имеем

$$P(x) = (x+1)(x-1)(x^2+1) = (x+1)(x-1)Q(x).$$

Многочлен $Q(x)$ имеет два комплексно сопряженных корня по модулю равных 1. Тогда общее решение уравнения (2.37) имеет вид

$$x_n = (-1)^n \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + C_3\cos(n\varphi) + \mathrm{C}_4\sin(n\varphi).$$

5. В вершине $E(0; 2; 1)$ имеем $P(x) = (x^2+1)^2 = Q(x)$.

Многочлен $Q(x)$ имеет две пары одинаковых комплексно сопряженных корней по модулю равных 1, причем $x = i$ – корень кратности 2 и $x = -i$ – корень кратности 2. Тогда общее решение уравнения (2.37) имеет вид

$$x_n = (C_1 + nC_2)\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) + (C_3 + nC_4)\sin(n \cdot \tfrac{\pi}{2}).$$

6. На ребре AB (2.25) имеем

$$P(x) = (x-1)^2(s + t + 2sx + 2tx - 2x^2).$$

Все корни характеристического многочлена $P(x)$ действительные, причем $x = 1$ – корень кратности 2. Тогда общее решение уравнения (2.37) имеет вид

$$x_n = C_1 + nC_2 + (\frac{1}{2}(s + t - \sqrt{(s+t)^2 + 2(s+t)})^n C_3 +$$

$$+(\tfrac{1}{2}(s + t + \sqrt{(s+t)^2 + 2(s+t)})^n C_4.$$

7. На ребре AC (2.26) имеем

$$P(x) = (x+1)^2(-s-t+2sx+2tx-2x^2).$$

Все корни характеристического многочлена $P(x)$ действительные, причем $x = -1$ – корень кратности 2. Тогда общее решение уравнения (2.37) имеет вид

$$x_n = (-1)^n(C_1 + nC_2) + (\frac{1}{2}(s+t-\sqrt{(s+t)^2-2(s+t)})^n C_3 +$$

$$+(\frac{1}{2}(s+t+\sqrt{(s+t)^2-2(s+t)})^n C_4.$$

8. На ребре AD (2.27) имеем $P(x) = (x-t)(x-1)(x+1)(x+t)$.

Все корни характеристического многочлена $P(x)$ действительные. Тогда общее решение уравнения (2.37) имеет вид

$$x_n = C_1 + (-1)^n C_2 + (-t)^n C_3 + t^n C_4.$$

9. На ребре BD (2.30) имеем

$$P(x) = \frac{(x-s)(x-1)(s+x+sx+sx^2)}{s} = (x-s)(x-1)Q(x).$$

Многочлен $Q(x)$ имеет два комплексно сопряженных корня $x_{3,4} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$ по модулю равных 1. Тогда общее решение уравнения (2.37) имеет вид

$$x_n = C_1 + s^n C_2 + C_3\cos(n\varphi) + C_4\sin(n\varphi).$$

10.На ребре CD (2.31) имеем

$$P(x) = \frac{(x-s)(x+1)(s+x-sx+sx^2)}{s} = (x-s)(x+1)Q(x).$$

Многочлен $Q(x)$ имеет два комплексно сопряженных корня $x_{3,4} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$ по модулю равных 1. Тогда общее решение уравнения (2.37) имеет вид

$$x_n = (-1)^n C_1 + s^n C_2 + C_3\cos(n\varphi) + C_4\sin(n\varphi).$$

11.На ребре AD (2.33) имеем

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x^2+\beta^2) = (x-1)(x+1)Q(x).$$

Многочлен $Q(x)$ имеет два комплексно сопряженных корня по модулю меньших 1. Тогда общее решение уравнения (2.37) имеет вид

$$x_n = C_1 + (-1)^n C_2 + |\beta|^n(C_3\cos(n\varphi) + C_4\sin(n\varphi)).$$

12.На ребре AE (2.34) имеем

$$P(x) = (-1 + 2px - x^2)(1 + 2px + x^2) = Q_1(x)Q(x).$$

Многочлен $Q_1(x)$ имеет два комплексно сопряженных корня $x_{3,4} = \cos\varphi_1 \pm i\sin\varphi_1$ по модулю равных 1. Многочлен $Q(x)$ имеет два комплексно сопряженных корня $x_{1,2} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$ по модулю равных 1. Тогда общее решение уравнения (2.37) имеет вид

$$x_n = C_1\cos(n\varphi) + C_2\sin(n\varphi) + C_3\cos(n\varphi_1) + C_4\sin(n\varphi_1).$$

13.На грани (ABD) (2.28) имеем $P(x) = \frac{(x-s)(x-t)(x-1)(st+sx+tx+stx)}{s+t+st}$.

Все корни характеристического многочлена $P(x)$ действительные. Тогда общее решение уравнения (2.37) имеет вид

$$x_n = C_1 + s^n C_2 + t^n C_3 + (-\frac{st}{s+t+st})^n C_4.$$

14.На грани (ACD) (2.29) имеем $P(x) = \frac{(x-s)(x-t)(x+1)(-st-sx-tx+stx)}{-s-t+st}$.

Все корни характеристического многочлена $P(x)$ действительные. Тогда общее решение уравнения (2.37) имеет вид

$$x_n = (-1)^n C_1 + s^n C_2 + t^n C_3 + (\frac{st}{-s-t+st})^n C_4.$$

15.На поверхности (2.32) имеем

$$P(x) = \frac{(x-s)(x-t)(st+sx+tx+stx^2)}{st} = (x-s)(x-t)Q(x).$$

Многочлен $P(x)$ имеет два действительных корня по модулю меньших 1 и два комплексно сопряженных корня $x_{3,4} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$ по модулю равных 1. Тогда общее решение уравнения (2.37) имеет вид

$$x_n = t^n C_1 + s^n C_2 + C_3\cos(n\varphi) + C_4\sin(n\varphi).$$

На каждом участке границы области устойчивости решения уравнения (2.37) (рис. 2.3) обладают следующими особенностями асимптотического поведения:

- в вершинах $A(0;-2;1)$, $B(-2\frac{2}{3};2;-\frac{1}{3})$, $C(2\frac{2}{3};2;-\frac{1}{3})$, $E(0;2;1)$, в общем случае устойчивость не сохраняется в виду наличия кратных корней по модулю равных 1;
- в вершине $D(0;0;-1)$ устойчивость сохраняется, но не асимптотическая;

- на ребрах AE, AD, CD, BD устойчивость сохраняется, но не асимптотическая;
- на ребрах AC, AB устойчивость не сохраняется в виду наличия кратных корней по модулю равных 1;
- во внутренних точках граней (ACD), (ABD) система устойчива (не асимптотически);
- в точках, лежащих на поверхности (2.32) система (2.37) устойчива (не асимптотически).

В таблице 2.3. представлены особенности асимптотического поведения на каждом участке границы области устойчивости решения уравнения (2.37).

Таблица 2.3. Особенности асимптотического поведения на каждом участке границы области устойчивости решения уравнения (2.37) (рис. 2.3)

Устойчивость (не асимптотическая)	Неустойчивость
Вершина $D(0;0;-1)$ Ребра AE, AD, CD, BD Грани (ACD), (ABD) Поверхность (2.32)	Вершины $A(0;-2;1)$, $B(-2\frac{2}{3};2;-\frac{1}{3})$, $C(2\frac{2}{3};2;-\frac{1}{3})$, $E(0;2;1)$ Ребра AC, AB

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В связи широким применением разностных уравнений, изучение различных свойств их решений, особенно устойчивости, на данный момент является одной из интенсивно изучаемых тем.

В данной работе были исследованы области устойчивости неполных линейных разностных уравнений четвертого порядка, полученных из полного уравнения (2.1) в случаях, когда ровно один из коэффициентов $a, b,$ или c равен нулю.

В квалификационной работе получены уравнения границ областей устойчивости для каждого случая. Проведено полное описание области асимптотической устойчивости неполных линейных разностных уравнений четвертого порядка и ее геометрических свойств в пространстве параметров. Указаны свойства симметрии для области устойчивости каждого уравнения рассмотренного в работе. Исследовано асимптотическое поведение решений для данных уравнений на границе области асимптотической устойчивости. Выявлены участки границы области устойчивости, для которых нулевое решение остается устойчивым, а на которых устойчивость теряется.

Полученное аналитическое описание областей устойчивости неполных линейных разностных уравнений четвертого порядка позволило выполнить их визуализацию с помощью программы «Wolfram Mathematica».

Естественным продолжением данной работы, с применением полученных результатов, может быть исследование полного уравнения четвертого порядка, описание его границ области устойчивости.

Таким образом, задачи решены в полном объеме, цель достигнута.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Elaydi, S. An introduction to difference equations. [Text] / S. Elaydi. New York: Springer, 2005. – 546 p.

2. Parhi, N. On the behavior of solutions of a class third order difference equations[Text] / N. Parhi, A.K. Tripathy // Journal of Difference Equations and Applications. – 2002. – V. 8, No. 5. – P. 415–426.

3. Баранова, А.Я. Периодические решения разностного уравнения третьего порядка [Текст] / А.Я. Баранова, И.В. Шенмаер, Р.М. Нигматулин // Молодой ученый. – 2016. – № 28(132).

4. Баранова, А.Я. Условная устойчивость разностного уравнения третьего порядка в критических случаях [Текст] / А.Я. Баранова, И.В. Шенмаер, Р.М. Нигматулин // Молодой ученый. – 2016. – № 25(129). – С. 113–122.

5. Баутин, Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости [Текст] / Н.Н. Баутин. - М.: Наука, 1984. – 176 с.

6. Бурд, В.Ш. Дискретное операторное исчисление и линейные разностные уравнениях [Текст]: учеб. пособие / В.Ш. Бурд; науч. ред. С.Д. Глызин; Яросл. гос. ун-т им. П.Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2009 – 156 с.

7. Васильев, М.Д. Исследование одной математической модели трехвидовой конкуренции [Текст] / М.Д. Васильев // Математические заметки ЯГУ.– 2003. – Т. 10, № 2. – С. 33-39.

8. Джури, Э. Импульсные системы автоматического регулирования [Текст] / Э. Джури. – М.: Физматгиз, 1963. – 456 с.

9. Иванов, В.А. Теория дискретных систем автоматического управления [Текст] / В.А. Иванов, А.С. Ющенко. – М.: Наука, 1983. – 336 с.

10. Кипнис, М.М. Устойчивость трехчленных линейных разностных уравнений с двумя запаздываниями [Текст] / М.М. Кипнис, Р.М. Нигматулин // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 11. – С. 25–39.

11. Козак, А.Д. Асимптотическое поведение решений линейного однородного разностного уравнения второго порядка [Текст] / А.Д. Козак, О.Н. Новоселов // Математические заметки. – 1999. – Т. 66, Вып. 2. – С. 211–215.

12. Кудинов, А.Ф. Общее решение разностного уравнения третьего порядка [Текст] / А.Ф. Кудинов // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2009. – № 2. – С. 69-70

13. Нигматулин, Р.М. Свойства дискретных систем третьего порядка на границе их областей устойчивости [Текст] / Р.М. Нигматулин, М.М. Кипнис // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 9-1. – С. 39-43.

14. Николаев, Ю.П. Анализ геометрии *D*-разбиения двумерной плоскости произвольных коэффициентов характеристического полинома дискретной системы [Текст] / Ю.П. Николаев // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 12. – С. 49–61.

15. Николаев, Ю.П. Геометрия многомерной области устойчивости в пространстве четных (нечетных) коэффициентов характеристического полинома линейных систем [Текст] / Ю.П. Николаев // Автоматика и телемеханика. – 2014. – № 9. – С. 3–20.

16. Николаев, Ю.П. О симметрии и других свойствах многомерной области асимптотической устойчивости линейных дискретных систем [Текст] / Ю.П. Николаев // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 11. – С. 109–120.

17. Олейник, В.Л. Рекуррентны соотношения и разностные уравнения [Текст] / В.Л. Олейник // Соросовский образовательный журнал. - 2001. – № 3.– С. 114 – 120.

18. Романко, В.К. Разностные уравнения [Текст]: учеб. пособие / В.К. Романко. – БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 112 с.

19. Садовский, П.А. Критические случаи устойчивости математической модели трехвидовой популяции [Текст] / П.А. Садовский //

Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки». – 2006. – № 4. – С. 61-71.

20. Ясницкая, М.Н. Свойства областей устойчивости неполных линейных разностных уравнений четвертого порядка [Текст] / М.Н. Ясницкая, Р.М. Нигматулин // Наука и современность – 2016: сб. материалов XLIX Международной научно-практической конференции. – 2016. – С. 83–89.

21. Ясницкая, М.Н. Средства Wolfram Mathematica для визуализации трехмерных областей устойчивости линейного разностного уравнения четвертого порядка [Текст] / М.Н. Ясницкая // Актуальные проблемы информатики и информационных технологий в образовании: материалы Всероссийской научно-практической конференции с международным участием в рамках XVI международного научно-практического форума студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и наука XXI века». КГПУ им. В.П. Астафьева, Красноярск, 2017 (в печати).

22. Ясницкая, М.Н. Свойства решений линейного разностного уравнения четвертого порядка на границе области устойчивости [Текст] / М.Н. Ясницкая // Достижения современной науки и образования: материалы II международной междисциплинарной конференции, Пятигорск, 2017 (в печати).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица всевозможных случаев наборов корней характеристического уравнения на границе области устойчивости

№	Действительные корни		Комплексные корни		$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$
	$\lvert\lambda_i\rvert = 1$	$\lvert\lambda_i\rvert < 1$	$\lvert\lambda_i\rvert = 1$	$\lvert\lambda_i\rvert < 1$	
1.	1, 1, 1, –1	–	–	–	$x^4 - 2x^3 + 2x - 1$
2.	1, 1, –1, –1	–	–	–	$x^4 - 2x^2 + 1$
3.	1, –1, –1, –1	–	–	–	$x^4 + 2x^3 - 2x - 1$
4.	1, 1, 1	s	–	–	$x^4 + (-3 - s)x^3 + (3 + 3s)x^2 + (-1 - 3s)x + s$
5.	1, 1, –1	s	–	–	$x^4 + (-1 - s)x^3 + (-1 + s)x^2 + (1 + s)x - s$
6.	1, –1, –1	s	–	–	$x^4 + (1 - s)x^3 + (-1 - s)x^2 + (-1 + s)x + s$
7.	–1, –1, –1	s	–	–	$x^4 + (3 - s)x^3 + (3 - 3s)x^2 + (1 - 3s)x - s$
8.	1, 1	s, t	–	–	$x^4 + (-2 - s - t)x^3 + (1 + 2s + 2t + st)x^2 + (-s - t - 2st)x + st$
9.	–1, –1	s, t	–	–	$x^4 + (2 - s - t)x^3 + (1 - 2s - 2t + st)x^2 + (-s - t + 2st)x + st$
10.	1, –1	s, t	–	–	$x^4 + (-s - t)x^3 + (-1 + st)x^2 + (s + t)x - st$
11.	1	s, t, r	–	–	$x^4 + (-1 - r - s - t)x^3 + (r + s + rs + t + rt + st)x^2 + (-rs - rt - st - rst)x + rst$
12.	–1	s, t, r	–	–	$x^4 + (1 - r - s - t)x^3 + (-r - s + rs - t + rt + st)x^2 + (rs + rt + st - rst)x - rst$
13.	1	s	$\alpha \pm \beta i$		$x^4 + (-1 - s - 2\alpha)x^3 + (s + 2\alpha + 2s\alpha + 1)x^2 + (-2s\alpha - 1 - s)x + s$
14.	–1	s	$\alpha \pm \beta i$		$x^4 + (1 - s - 2\alpha)x^3 + (-s - 2\alpha + 2s\alpha + 1)x^2 + (2s\alpha + 1 - s)x - s$
15.	1	s		$\alpha \pm \beta i$	$x^4 + (-1 - s - 2\alpha)x^3 + (s + 2\alpha + 2s\alpha + \alpha^2 + \beta^2)x^2 + (-2s\alpha - (\alpha^2 + \beta^2)(s + 1))x + s(\alpha^2 + \beta^2)$
16.	–1	s		$\alpha \pm \beta i$	$x^4 + (1 - s - 2\alpha)x^3 + (-s - 2\alpha + 2s\alpha + \alpha^2 + \beta^2)x^2 + (2s\alpha + (\alpha^2 + \beta^2)(1 - s))x - s(\alpha^2 + \beta^2)$
17.	–	s, t	$\alpha \pm \beta i$	–	$x^4 + (-s - t - 2\alpha)x^3 + (st + 2s\alpha + 2t\alpha + 1)x^2 + (-2st\alpha - s - t)x + st$
18.	1, 1	–	$\alpha \pm \beta i$	–	$x^4 + (-2 - 2\alpha)x^3 + (2 + 4\alpha)x^2 + (-2 - 2\alpha)x + 1$
19.	–1, –1	–	$\alpha \pm \beta i$	–	$x^4 + (2 - 2\alpha)x^3 + (2 - 4\alpha)x^2 + (2 - 2\alpha)x + 1$
20.	1, –1	–	$\alpha \pm \beta i$	–	$x^4 - 2\alpha x^3 + 2\alpha x - 1$
21.	1, –1	–	–	$\alpha \pm \beta i$	$x^4 - 2\alpha x^3 + (-1 + \alpha^2 + \beta^2)x^2 + 2\alpha x - \alpha^2 - \beta^2$
22.	–	–	$\alpha \pm \beta i$	$p \pm qi$	$x^4 + (-2p - 2\alpha)x^3 + (p^2 + q^2 + 4p\alpha + 1)x^2 + (-2p^2\alpha - 2q^2\alpha - 2p)x + p^2 + q^2$
23.	1, 1	–	–	$\alpha \pm \beta i$	$x^4 + (-2 - 2\alpha)x^3 + (1 + 4\alpha + \alpha^2 + \beta^2)x^2 + (-2\alpha - 2\alpha^2 - 2\beta^2)x + \alpha^2 + \beta^2$
24.	–1, –1	–	–	$\alpha \pm \beta i$	$x^4 + (2 - 2\alpha)x^3 + (1 - 4\alpha + \alpha^2 + \beta^2)x^2 + (-2\alpha + 2\alpha^2 + 2\beta^2)x + \alpha^2 + \beta^2$
25.	–	–	2пары $\alpha \pm \beta i$	–	$x^4 - 4\alpha x^3 + (4\alpha^2 + 2)x^2 - 4\alpha x + 1$
26.	-	-	$\alpha \pm \beta i$ $p \pm qi$	-	$x^4 + (-2p - 2\alpha)x^3 + (2 + 4p\alpha)x^2 + (-2p - 2\alpha)x + 1$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Набор команд в программе «Wolfram Mathematica» для построения области устойчивости неполного линейного разностного уравнения для случая $a = 0$

```
R10=ParametricPlot3D[{-1-t^2,0,t^2},{t,0,1}, PlotStyle→Thickness[0.01]];
R11=ParametricPlot3D[{-u^2-u+v-1,u^2+u+u*v, -u*v-v},{v,0,1},{u,-2,0},RegionFunction→Function[{b,c,d},b≥Abs[c]-d-1&&1≥Abs[d]],PlotStyle→Opacity[0.25],Mesh→None];
R12=ParametricPlot3D[{-u^2+u+v-1,-u^2+u+u*v, u*v-v},{v,0,1},{u,0,2},RegionFunction→Function[{b,c,d},b≥Abs[c]-d-1&&1≥Abs[d]],PlotStyle→Opacity[0.25],Mesh→None];
R13=ParametricPlot3D[{-s^2-s,s^2-1,s},{s,-1,1}, PlotStyle→Thickness[0.01]];
R14=ParametricPlot3D[{-s^2+s,1-s^2,-s},{s,-1,1}, PlotStyle→Thickness[0.01]];
R17=ParametricPlot3D[{s*t-(s+t)^2+1,(s+t)*(s*t-1),s*t},{s,-1,1},{t,-1,1},RegionFunction→Function[{b,c,d},Abs[b+d+1]≥Abs[c]&&1≥Abs[d]]];
R21=ParametricPlot3D[{-1+β2,0,-β2},{β,0,1}, PlotStyle→Thickness[0.01]];
R22=ParametricPlot3D[{-3 p^2+q^2+1, 2p(p^2+q^2-1), p^2+q^2},{p,-1,1},{q,-1,1},RegionFunction→Function[{b,c,d},Abs[b+d+1]≥Abs[c]&&1≥Abs[d]]];
R26=ParametricPlot3D[{2-4p^2,0,1},{p,-1,1},PlotStyle→Thickness[0.01]];
Show[R10,R11,R12,R13,R14,R17,R21,R22,R26,AxesLabel→{Style["b",Large,Bold,Italic],Style["c",Large,Bold,Italic],Style["d",Large,Bold,Italic]},PlotRange→All]
```

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Набор команд в программе «Wolfram Mathematica» для построения области устойчивости неполного линейного разностного уравнения для случая $b = 0$

```
R8=ParametricPlot3D[{-2-s,3*s+2,-1-2*s},{s,-1,1},PlotStyle→Thickness[0.01]];
R9=ParametricPlot3D[{2-s,3*s-2,2*s-1},{s,-1,1},PlotStyle→Thickness[0.01]];
R11=Plot3D[{-a-c-1},{a,-2,2},{c,-
2,2},RegionFunction→Function[{a,c,d},5/2≥Abs[c-3/2]&&Abs[-(1/3)c-a]≤4/3]];
R12=Plot3D[{a+c-1},{a,-2,2},{c,-2,2},RegionFunction→Function[{a,c,d},Abs[d-a-
1/2]≥1/2&&Abs[-(1/3)c-a]≤4/3]];
R13=ParametricPlot3D[{-s,-1,s},{s,-1,1}, PlotStyle→Thickness[0.01]];
R14=ParametricPlot3D[{-s,1,-s},{s,-1,1}, PlotStyle→Thickness[0.01]];
R17=ParametricPlot3D[{(-u²+v+1)/u,(v²-u²+v)/u,v},{u,-2,2},{v,-
1,1},RegionFunction→Function[{a,c,d},Abs[d+1]≥Abs[a+c]&&1≥Abs[d]]];
R20=ParametricPlot3D[{-2*α,2*α,-1},{α,-1,1},PlotStyle→Thickness[0.01]];
R22=ParametricPlot3D[{-2(s+t),2s(4s*t+1)-2t,-(4s*t+1)},{s,-1,1},{t,-
1,1},RegionFunction→Function[{a,c,d},Abs[d+1]≥Abs[a+c]&&1≥Abs[d]]];
R26=ParametricPlot3D[{(-2 p²+1)/p,(-2 p²+1)/p,1},{p,-1,-
(1/2)},PlotStyle→Thickness[0.01]];
R266=ParametricPlot3D[{(-2 p²+1)/p,(-2
p²+1)/p,1},{p,1/2,1},PlotStyle→Thickness[0.01]];
Show[R8,R9,R13,R14,R17,R22,R20,R11,R12,R26,R266,AxesLabel→{Style["a",Large,Bo
ld,Italic],Style["c",Large,Bold,Italic],Style["d",Large,Bold,Italic]},PlotRan
ge→{{-2,2},{-2,2},{-1,1}}]
```

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Набор команд в программе «Wolfram Mathematica» для построения области устойчивости неполного линейного разностного уравнения для случая $c = 0$

```
R8=ParametricPlot3D[{-2-s,1+3/2*s,-(1/2)*s},{s,-
2,2},PlotStyle→Thickness[0.01]];
R9=ParametricPlot3D[{2-s,1-3/2*s,1/2*s},{s,-2,2},PlotStyle→Thickness[0.01]];
R10=ParametricPlot3D[{0,-1-t,t},{t,0,1},PlotStyle→Thickness[0.01]];
R11=Plot3D[{-a-b-1},{a,-8/3,8/3},{b,-
2,2},RegionFunction→Function[{a,b,d},b≥Abs[a]-d-1&&1≥Abs[d]&&1/3-1/3 b>d &&
b<Abs[-1/d-1]]];
R12=Plot3D[{a-b-1},{a,-8/3,8/3},{b,-
2,2},RegionFunction→Function[{a,b,d},b≥Abs[a]-d-1&&1≥Abs[d]&&1/3-1/3 b>d&&
b<Abs[-1/d-1]]];
R13=ParametricPlot3D[{(1-s²)/s,-((1+s)/s),s},{s,-1,-
(1/3)},PlotStyle→Thickness[0.01]];
R14=ParametricPlot3D[{(1-s²)/s,(1-s)/s,-
s},{s,1/3,1},PlotStyle→Thickness[0.01]];
R21=ParametricPlot3D[{0,-1+β2,-β2},{β,-1,1},PlotStyle→Thickness[0.01]];
R17 = ParametricPlot3D[{t*(1-v), v*(1-t^2)+1, v},{t,-2,2},{v,-
1,1},RegionFunction→Function[{a,b,d},Abs[b+d+1]≥Abs[a]&&1≥Abs[d]]];
R26=ParametricPlot3D[{0,2-4p²,1},{p,-1,1},PlotStyle→Thickness[0.01]];
Show[R8,R9,R10,R13,R14,R17,R11,R12,R26,R21,AxesLabel→{Style["a",Large,Bold,It
alic],Style["b",Large,Bold,Italic],Style["d",Large,Bold,Italic]},
PlotRange→{{-8/3,8/3},{-2,2},{-1,1}}]
```