МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»»

(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ

Методика изучения сложных процентов при подготовке к ЕГЭ

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.01 Педагогическое образование,
направленность программы бакалавриата

«Математика»

Выполнила:
Студентка группы ЗФ-413/087-4-1
Бабазада Фарида Ясар кызы
____

Научный руководитель:
к.п.н., доцент кафедры МиМОМ
Эрентраут Елена Николаевна
____

Проверка на объем заимствований:
____________% авторского текста

Работа ________________ к защите
« ___ » ____________ 20__ г.

зав. кафедрой математики и методики обучения математике
_____________ Суховиенко Е.А.

Челябинск

2017

Оглавление

Введение

Сегодня уделяется большое внимание школьному образованию как первой ступени образовательного процесса. Одна из важнейших его задач – обеспечить учащимся глубокие и прочные знания, а также умение рационально применять их в учебной и практической деятельности.

Умение решать задачи на проценты является одним из важных, так как понятие процента широко используется как в реальной жизни, так и в разных областях науки.

«Проценты» - метапредметное понятие, которое актуально и используется при изучении математики, химии, биологии, физики, астрономии, экономики, обществознания и других школьных предметов. В химии процентное соотношение веществ и их массовых долей служат условиями задачи и получения верного раствора; для биологии значение процентных исчислений важно при работе с генетической и ботанической частью науки; физика и астрономия зачастую оперируют настолько крупными объемами, идеальными состояниями веществ и соотнесением масштабов объектов, что без процентов там также не обойтись. Экономика почти в полном объеме строится на соотнесении капиталов разных масштабов в различных ситуациях, подвижных и варьирующихся, что возможно проследить в процентном соотнесении, обществознание как и экономическая география, например, оперируют понятиями массовости, заселения, распределения благ или ресурсов по слоям общества или карте региона. Для отражения реальной ситуации в мире используется процент.

В школьном курсе математики эта тема начинает изучаться в 5 – 6 классах, но ей отводится недостаточно времени, в результате решения задач на проценты вызывают затруднения у учащихся. Наблюдения действительно показывают, что многие учащиеся испытывают трудности, когда встречаются с понятием процента.

Школьники не разбираются в вопросах инфляции, ценообразования, банковских вкладах и кредитах. Поэтому желательно к этой теме обращаться постоянно, учитывая, что проценты тесно связаны с повседневной жизнью и с ними постоянно приходится иметь дело. В настоящее время в программу Единого государственного экзамена по математике входят задания по теме «Проценты». В программе математики 10-11 класса тема «Проценты» отсутствует. Поэтому при подготовке к ЕГЭ по математике учителю предстоит повторить с учащимися процентные вычисления, а что-то придётся объяснить заново.

Тема «проценты» изучается под разными углами на протяжении всего курса обучения школьника, а понятие «процент» служит в том числе для выстраивания межпредметных связей.

Таким образом, тема, которую мы рассматриваем в данной работе подробно, является актуальной, необходимой для углубленного освоения.

Цель работы: рассмотреть тему «Проценты» в школьном курсе математики, проанализировать варианты ЕГЭ, предложить методические рекомендации для решения заданий по теме «Проценты».

Объект исследования: процесс изучения темы «Проценты» в школьном курсе математики.

Предмет исследования: методы решения задач по теме «Проценты».

Гипотеза, которая выдвигается в нашей работе, состоит в том, что материал задач с процентами будет усваиваться более успешно, при данных условиях:

– начиная с формирования понятия «проценты» в пятом-шестом классе средней школы, добиваться его содержательного усвоения, не допуская формального;

– выделить главные, типы задач с процентами;

– для претворения систематического подхода в жизнь, использовать задачи на проценты во время проведения уроков, чтобы закрепить и углубить знания учащихся по теме «Проценты» и подготовки обучающихся к сдаче ЕГЭ.

На основании выдвинутых цели и гипотезы данного исследования, мы выделяем такие **задачи** изучения темы «Проценты»:

1) проанализировать содержание темы «Проценты» в школьном курс математики;

2) анализ учебников разных школьных курсов;

3) анализ методических и выставленных для решения материалов ЕГЭ, чтобы выявить, где встречаются задачи с процентами, какие формулировки заданий попадаются чаще всего, какие методы решения нужно тренировать в первую очередь.

Глава 1. Проценты

§ 1. Понятие «процент»

Математическое понятие, одно из самых частых в повседневной жизни любого человека, связанного или не связанного с наукой и точными вычислениями непосредственно – это «процент». Само слово часто звучит по радио и телевидению, печатается в газетах и электронных изданиях. В чём заключается смысл слова «процент»?

Русское «процент» является калькой латинского выражения «pro centum», чей буквальный смысл «со ста». Смысл понятия в возможности быстро и просто сравнить, сопоставить части целого, упростить расчеты и добиться понимания от самой разной аудитории. Вследствие всего этого процентные вычисления и примеры весьма распространены.

Первое широкое распространение проценты получили во времена античности, в древнеримской империи, хотя сама идея использования процентов возникла гораздо раньше – уже в Вавилоне ростовщики умели высчитывать необходимые доли по займам, хотя они употребляли не «стопроцентную», а «шестидесятипроцентную» систему в качестве заместителя целого. Таким образом, можно сказать, что вавилоняне использовали шестидесятеричные дроби. Само обозначение «%» вошло в обиход из-за описки: в книгах и финансовых тетрадях, что вели предприниматели и казначеи, выражение «pro centum» заменяли слово «cento», то есть «сто». Сокращенная запись его выглядела как «cto», а в 1685 году, в парижской типографии была издана книга, руководство по решению арифметических задач, где ошибкой наборщика вместо употребимого сокращения было набрано «%», два «o», разделенные непрочтенным «t», изображенным как косая черта.

Результатом произошедшей ошибки стало то, что изрядное количество математиков приняли знак «%» для лаконичного изображения процентов, а позже, не быстро и постепенно, этот знак получил полное признание и всеобщее распространение.

Принятое соотнесение долей и процентов заключало в себе: 1% равняется одной сотой доле целого, а все целое равняется 100%. Одна сотая веса центнера называется килограмм, одна сотая метра именуется сантиметром, а одна сотая гектара носит название «ар» или более понятная «сотка».

Таким образом, в процентном выражении получается, что один килограмм это один процент центнера, один сантиметр это один процент метра, а один ар – один процент гектара.

$$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

В принятой системе получается, что условная единица, принимаемая за целое есть 100 %. Следовательно, любой показатель, любое число можно выразить в виде произведения единицы на данное число, то есть представить его в процентном отношении:

$$2 = 1 \cdot 2 = 100\% \cdot 2 = 200\%$$

$$1{,}534 = 1 \cdot 1{,}534 = 100\% \cdot 1{,}534 = 153{,}4\%$$

$$0{,}8 = 1 \cdot 0{,}8 = 100\% \cdot 0{,}8 = 80\%$$

Следовательно, для выражения числа с помощью процентов, нужно умножить его на 100 и поставить знак %.

Для оптимизации лучше сначала представить число в виде десятичной дроби, а после учесть изменения, перенося запятую двумя знаками правее и устанавливая обозначение «%».

Например:

$$4 = 4{,}00 = 400\%$$

$$\frac{5}{10} = 0{,}5 = 50\%$$

$$\frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$$

Предлагаем для рассмотрения противоположный пример: выражение процентов посредством десятичных дробей. Например, 9% означают 9 сотых частей. Выразить на письме данное соотношение можно подобным образом:

$9\% = \frac{9}{100} = 0{,}09$. Аналогично получается: $37\% = \frac{37}{100} = 0{,}37\%$;

$600\% = \frac{600}{100} = 6.$

Для выражения процентов посредством десятичных дробей, достаточно поделить их число на условную сотню. Данным правилом можно пользоваться в такой формулировке: чтобы проценты представить как десятичную дробь, необходимо перенести запятую на два знака влево в их числовом эквиваленте.

Например:

$$300\% = 3; \;\; 36{,}7\% = 0{,}367; \;\;\; 0{,}1\% = 0{,}001$$

§ 2. Типы задач на проценты и способы их решения

В школьном курсе и в тестах ЕГЭ существует несколько базовых, основных видов задач, тренирующих владение учеников навыком процентного расчета. В этом параграфе мы рассматриваем эти типы задач с процентами, ту часть, которую обучающиеся изучают в школьном курсе. Типология заданий проводилась по двум критериям, поэтому разделяется на два основания.

Задачи на проценты

1. основание классификации - операции над процентами
    - Нахождение процентов от числа
    - Нахождение числа по его проценту
    - Нахождение процентов от процента (сложные проценты)
2. основание классификации - содержание задач
    - Задачи на процентное содержание (задачи на растворы, смеси и сплавы)

- Задачи на вклады и банковское дело

Отдельно остановимся на заданиях первой группы, которые в школьном курсе проходят в 5-6 классах, сразу после знакомства учащихся с понятием «процент».

Каждый тип этих задач решается хорошо известным способом – по аналогии с материалом части программы, посвященной десятичным и простым дробям.

2.1 Нахождение процентов данного числа

Методика работы с подобными задачами предполагает первоначальное устное решение задач с конкретным содержанием, где необходимо определить проценты заданных условием чисел. После, когда предварительная устная работа закончена, перед учениками стоит задача справиться с отвлеченными числовыми примерами. Достижение решения производится в два действия, обязательно на классной доске – для наглядности.

Задача 1.

«Задача. В коробке 28 конфет, 25% конфет с клубничной начинкой. Сколько конфет с клубничной начинкой в коробке?»

В небольшом экскурсе, посвященном обзору решения данного типа заданий, школьники сами приходят к формулировке базового способа устного решения таких задач. Алгоритм, который они должны прорисовать себе сами, включает деление на 100, (кроме того, школьники должны ответить для себя на вопрос, с какой целью это деление производится) и умножение получившегося значения на число необходимых для уточнения процентов. Вывод, который должен сопутствовать выстраиванию алгоритма, также необходимо проконтролировать: подобным образом производится решение задач, направленных на нахождение части или дроби заданного числа; следовательно, нахождение процентов от данного числа тоже есть задача нахождения дроби данного числа, выраженной в процентах, т.е. в сотых долях.

Когда устное освоение решения задач с процентами завершено, ученики осваивают письменный способ решения задач первого типа.

$28 \cdot 0{,}25 = 7$, где $0{,}25 = 25\%$.

Задача 2.

За месяц на предприятии изготовили 500 приборов. 20% изготовленных приборов не смогли пройти контроль качества. Сколько приборов не прошло контроль качества?

Решение:

Нужно найти 20% от общего количества изготовленных приборов (500).

$20\% = 0{,}2 \quad 500 \cdot 0{,}2 = 100$

Ответ: 100 из общего количества изготовленных приборов контроль не прошло.

Чтобы в должной мере отработать навык, учащимся следует решить достаточное количество подобных задач. В заключительном повторении темы рекомендуется оформить запись задач первого типа в обобщенном виде, с помощью буквенных эквивалентов. Для того чтобы произвести данную запись, ученики должны проанализировать условия всех прорешанных задач, вывести закономерности: везде есть некоторое число (a), от которого условием задачи нужно найти определенную процентную часть ($p\%$). Для записи общего вида решения можно использовать такую форму:

$$p\% \text{ от } a?$$

$$p\% = \frac{p}{100};$$

$$a \cdot \frac{p}{100} = \frac{a \cdot p}{100}$$

Для записи решения задачи используется действие умножения. Получившаяся формула демонстрирует одновременно алгоритм рассуждений при устном счете действий в подобных задачах, то есть деление заданного числа на сто, а после – умножение на значение *p,* то есть количество процентов. Замещая значение буквенных обобщенных понятий a и p числовыми значениями из освоенных упражнений, школьники подтверждают для себя достоверность данной формулы. В последующей работе они могут использовать формулу как макет, образец – и просто вставлять данные задачей значения внутрь, вместо буквенных эквивалентов.

2.2 Нахождение числа по процентам

Этот тип включает в себя такие задачи с процентами, где нужно найти целое по его части, выраженной в процентном отношении. Покажем общую методику нахождения числа от одного или нескольких процентов. Так как это также является важной частью в изучение процентов, это особенно хорошо видно в задачах связочных с экономикой (например когда в банк кладется сумма под проценты, а через какое-то время забирается с набежавшими процентами и нужно найти данную сумму). Так что учащимся нужно так же раскрыть алгоритм нахождения числа от нескольких процентов.

Учащиеся уже знают, что один процент можно записать десятичной дробью:

$$1\% = 0{,}01 * a.$$

Так вот возникает вопрос, как найти искомое число, если известно лишь, сколько процентов составляет другое число от искомого? Для этого нужно сначала проценты записать десятичной дробью, после чего надо данное нам число разделить на эту десятичную дробь, в результате мы получим число от нескольких процентов.

Если дано, сколько процентов от искомого числа составляет данное число, то чтобы найти искомое число, нужно заменить проценты десятичной дробью и разделить на эту дробь данное число.

Например, найти число, если известно, что

1) 1% его равен: 17; 37; 84,5; 96,75 и т.п.
2) 2% его равны: 12; 25; 120; 1000 и т.п.

3) 3% его равны: 12; 27; 63; 1500 и т.п.

Все эти задачи можно наполнить конкретным содержанием.

Для лучшего усвоения означенные числа следует воспроизвести на классной доске, чтобы примеры оставались перед глазами, а от учащихся требовалось бы лишь произвести вычисления над известными величинами. По аналогии с предыдущим курсом, искомое число следует представлять латинской буквой x.

Пример:

6% x - 18 кг

1% x - 3 кг

100% x - 300 кг.

Все решение выполняется устно с таким объяснением: а) 6% искомого числа, то есть 0,06 его составляют 18 кг; б)1 % того же числа или 0,01 часть его составляет 3 кг; в)все искомое число составляет 100%, или сто сотых, целую единицу, и равно 300 кг.

Когда учащиеся поймут, в чём заключается сущность этих задач, и овладеют техникой устного решения их, следует сформулировать основные выводы:

1) В каждой задаче требуется найти искомое число, зная некоторую часть его, выраженную в процентах;
2) Каждая задача решается устно двумя действиями: делением данного числа на число процентов (нахождение одного процента) и умножением полученного результата на 100 (нахождение ста процентов, т.е. всего искомого числа);
3) Таким же образом решаются задачи на нахождение числа по его части, заданной дробью;
4) Следовательно, нахождение числа по нескольким его процентам, есть задача нахождения всего числа по его дроби, выраженной в

процентах, то есть в сотых долях; решение записывается делением данного числа на дробь.

После этих выводов учащиеся сначала опять решают устно такие же задачи, попутно проверяют сделанные выводы и закрепляют их.

В число последних необходимо включить и те задачи, в которых требуется найти число, зная 50% его, 25%, 20%, 10% и т.п.

Письменное оформление решения задач данного типа вызывается той же причиной, которая была указана при изучении письменного решения задач первого типа.

После решения достаточного числа задач надо сделать обзор их и сформулировать выводы.

Учащиеся опять записывают условие задачи с помощью букв, а потом решение её.

Задача. Найти x, если $p\%x$ составляют a,

$$p\% = \frac{p}{100};$$

Решение:

$$a \div \frac{p}{100} = \frac{a \cdot 100}{p}$$

Учащиеся проверяют справедливость этой формулы, подставляя вместо p и a числовые значения из любой решённой задачи; затем они составляют новые задачи, давая a и p различные числовые значения. Наконец, учащиеся сравнивают последнюю формулу с первой, указывают разницу в ходе решения и объясняют смысл той и другой формулы.

Задача.

Готовясь к экзамену, школьник решил 38 задач из пособия для самоподготовки. Что составляет 23% числа всех задач в пособии. Сколько всего задач собрано в этом пособии для самоподготовки?

Решение:

Мы не знаем, сколько всего задача в пособии. Но зато нам известно, что 38 задач составляют 25% от общего их количества. Запишем 23% в виде дроби: 0,23. Далее нам следует известную нам часть целого разделить на ту долю, которую она составляет от всего целого:

$38: 0{,}25 = 38 \cdot 100: 25 = 152$

Ответ: 152 задачи включили в этот сборник.

2.3 Нахождение процентных отношений

К этой группе задач относятся те из них, в которых требуется найти процентное отношение двух чисел или двух величин, измеряемых данными числами.

Задача.

В классе 30 учеников. 14 из них – девочки. Сколько процентов девочек в классе?

Решение:

Чтобы узнать, какой процент составляет одно число от другого, нужно то число, которое требуется найти, разделить на общее количество и умножить на 100%.

Значит, $14: 30 \cdot 100\% = 7: 15 \cdot 100\% = 7 \cdot 100\% : 15 = 47\%$.

Кратные отношения впервые были изучены в связи с делением обыкновенных дробей.

После окончания изучения десятичных дробей вновь следует вернуться к более подробному повторному обзору кратных отношений.

Вся эта работа должна строиться на решении простых тестовых задач и числовых примеров с соответствующим подбором чисел – целые числа, обыкновенные и десятичные дроби. Учащиеся сначала решают задачи с конкретным или отвлечённым содержанием на нахождение отношений, которые записываются теперь в виде десятичных дробей – точных или приближенных с данной точностью.

Примеры:

1) сократить отношение: 62,4:40; 7,8: 5,2.
2) Заменить отношение дробных чисел отношением целых чисел: $7{,}5: 1{,}84$; $750: 1{,}84$; $3{,}75: 9{,}2$.

Естественным продолжением этой работы на повторение будет решение задачи на нахождение процентных отношений.

Учащиеся сначала решают задачи с конкретным или отвлечённым содержанием на нахождение отношений, которые записываются теперь в виде десятичных дробей – точных или приближенных с данной точностью.

Примеры:

1) Найти отношения:

$$3дм:2см = 30:2 = 15$$

$$0{,}5кг:20г = 500:20 = 25.$$

Затем преподаватель предлагает задачи того же типа, но в условии указывает новое требование: найти отношение одного числа к другому и выразить его в процентах (или найти процентное отношение одного числа к другому).

Сначала в порядке устного счёта, учащиеся решают задачи и постепенно осваиваются с понятием «процентного отношения».

1. Найти отношение одного данного числа к другому и выразить его в процентах:

6 и 15; 8 и 64

Прежде чем решать первую задачу, преподаватель спрашивает:

1) Что подразумевается под нахождением отношения одного числа к другому?
2) С помощью какого действия выполняется поиск отношения?
3) Что подразумевает высказывание «выразить отношение в процентах»? (значит выразить его в сотых долях).

Учащиеся решают первый пример:

6:15=0,40=40%;

15:6=2,50=250%

Затем второй и т.д. Эти решения выполняются или только устно с объяснением или тоже устно, но с последующей записью решения некоторых задач, чтобы создать зрительное представление нового понятия - процентного отношения.

2. Сколько процентов одно число составляет от другого:

280 от 800; 12 от 50.

Перед тем как перейти к решению первого задания педагог опять вместе с учащимися уточняет смысл задачи:

1) Исходя из условия, необходимо узнать, сколько сотых долей одно число составляет от другого;
2) Задание решается делением первого числа на второе;
3) Таким образом, данная задача тоже составлена на тренировку нахождения отношения, однако его нужно выразить в сотых долях, иначе сказать – в процентах.

Учащиеся решают задачи сначала устно, а потом некоторые из них записывают:

$$280:800 = 0{,}35 = 35\%$$

$$12:50 = 0{,}24 = 24\%$$

3. Какой процент одно число составляет от другого? (5 от 20, 5 рублей от 40 рубля).

Эта задача повторяет предыдущую задачу; учащиеся знакомятся только с новой формулировкой её, а решение выполняется как и раньше:

1) 5 составляет $\frac{1}{4}$ – от 20, или 0,25 от 20, или 25% от 40;
2) 5 рублей составляют $\frac{1}{8}$ от 40 рубля, т.е. $0{,}125$ или $1{,}25\%$ (с точностью до 0,1%), что можно записать так:

$$5\text{руб.}:40\text{руб.} = 0{,}125 = 12{,}5\%.$$

В заключительной беседе учащиеся отмечают, что во всех задачах трёх последних групп надо было найти отношение одного числа к другому и выразить его в процентах, т.е. в сотых долях. Преподаватель сообщает им, что во всех этих задачах требовалось найти процентное отношение одного числа к другому, т.е. найти отношение в процентах или сотых долях.

Завершив этап, следует перейти к решению задач на письме, задач на нахождение процентных отношений. Предоставленные материалы и задачи должны отличаться от предыдущих только числовыми значениями (для усложнения вычислений, следует использовать более громоздкие числа). Текст их, как и в предыдущих задачах, формулируется по-разному, чтобы приучить учащихся видеть одно и то же арифметическое содержание в разном словесном его выражении:

1) Найти процентное отношение двух чисел;
2) Какой процент одно число составляет от другого?
3) Как относится одно число к другому?

Письменное решение этих задач состоит в записи деления одного числа на другое с дополнительным требованием представить частное - отношение сначала в виде десятичной дроби, а потом в виде процентов.

Завершается вся эта работа решением сложных текстовых задач в два, три и более действий, в которые могут входить простые задачи на процентные вычисления всех трёх типов, как составные части.

В заключительной беседе вводятся буквенная запись задач третьего типа и решения их с последующими упражнениями на подстановку числовых значений вместо букв a и b и выполняя вычислений: $a : b = q\%$.

2.4 Решение задач с процентами при помощи уравнений

Перед учащимися предстает, раскрывается и становится ходовой новая стратегия решения расчётных задач с процентами – при помощи формулировки условий обобщенно, то есть составления уравнений.

Задания, направленные на выяснение точного процентного соотношения в категориях «концентрация», «сплав», «банковский расчет» – наглядные примеры практико-ориентированных заданий, которые демонстрируют способ применения отвлеченных, казалось бы, математических выкладок в реальной жизни, более того, применения нужного и жизненного. Рассмотрим немного заданий с процентами, которые необходимо решить через составление уравнений.

Задача.

Производственное объединение получило задание увеличить вдвое объем выпускаемой продукции в течение двух лет. Каким должен быть ежегодный прирост продукции (в процентах), если он планируется одинаковым для каждого года?

Решение:

Принимая за x прирост продукции каждый год, мы получаем данное уравнение:

$$1 + 0{,}01x + 0{,}01x(1 + 0{,}01x) = 2, \qquad x > 0$$

$$0{,}01x + 0{,}01x + 0{,}0001x^2 = 1;$$

$$0{,}0001x^2 + 0{,}02x - 1 = 0;$$

$$x^2 + 200x - 10000 = 0;$$

$$\frac{D}{4} = 10000 + 10000 = 20000;$$

$$x = -100 \pm 100\sqrt{2} = 100(-1 \pm \sqrt{2})$$

По итогам вычислений получается $x = 100(-1 \pm \sqrt{2})$.

Ответ: около 42%.

2.5 Решение задач на вычисление смеси, растворы и сплавы

Данный вид задач достаточно сложный, поэтому эти задачи учащиеся решают очень плохо. После объяснения решения таких задач целесообразно прорешать аналогичные как индивидуально, так и со всеми вместе.

Для решения задач на смеси и сплавы, на концентрации нужно уметь рассуждать и решать задачи на дроби и проценты, на составление уравнений и их систем. В таких заданиях числовые и процентные соотношения позволяют классифицировать их, скорее к математическим заданиям, а не к тем, где нужно составлять уравнения.

Приступая к решению задач, связанных с понятиями «концентрация» и «процентное содержание», необходимо объяснить учащимся, что обычно в условиях таких задач речь идет о составлении сплавов, растворов, смесей из двух или нескольких веществ.

Подобные задачи стоит решать через составление уравнений или целых систем уравнений, по алгоритму, близкому к тому, который применяется в задачах на движение, работу и других «формульных» задач.

Не требует отдельного внимания и доказательства, что в основе методики решения данного типа заданий пролегает связь между тремя величинами в виде зависимости, выстроенной в прямом или обратном порядке:

$s = v \cdot t, t = \frac{s}{v}, v = \frac{s}{t}$ (верно для нахождения расстояния, показателя времени и скорости);

$A = v \cdot t, t = \frac{A}{v}, v = \frac{A}{t}$ (верно для поиска количества выполненной работы, времени и производительности). Похожим образом связаны показатели стоимости, цены и количества. К тому же, при решении данного типа задний, идут в ход отдельные закономерности, справедливые и для других формул: сложение или вычитание производительностей при совместной работе и другие.

Обратим внимание на способы освоения упражнений для нахождения смесей, растворов и сплавов, опирающиеся на похожие зависимости и правила.

Основные понятия в задачах по смесям, растворам и сплавам

При разговоре о смесях, растворах и сплавах, мы будем употреблять термин «смесь» независимо от ее вида (твёрдая, жидкая, газообразная, сыпучая и т.д.). Смесь условно делится на часть из «чистого вещества» и «примесей».

Термин «чистое вещество» определяется каждой задачей индивидуально, за него могут быть приняты разнообразные вещества, входящие в растворы, сплавы или составляющие смесь, однако это единственное допущение. Все прочие вещества, которые составляют смесь, относятся к примесям. Долей (*a)* чистого вещества в смеси называется отношение количества чистого вещества (*M*) в смеси к общему количеству (m) смеси при условии, что они измерены одной и той же единицей массы или объёма:

$$\alpha = \frac{m}{M}.$$

Отсюда следует

$$m = \alpha \cdot M, \;\; M = \frac{m}{\alpha}.$$

Отметим, что $0 \leq \alpha \leq 1$, ввиду того, что $0 \leq m \leq M$. Случай $\alpha = 0$ соответствует отсутствию выбранного чистого вещества в рассматриваемой смеси ($m = 0$), случай $\alpha = 1$ соответствует тому, что рассматриваемая смесь состоит только из чистого вещества ($m = M$). Обозначение для понятия процента чистого вещества в смеси предлагается ввести таковой обобщенной записью:

$$\text{доля чистого вещества в смеси} = \frac{\text{количество чистого вещества в смеси}}{\text{общее количество смеси}}$$

Чистое вещество в смеси (C) определяется процентным отношением:

$$C = \alpha \cdot 100\%; \; \alpha = \frac{c}{100\%};$$

Для решения заданий подобного типа нужно опираться на то, что при слиянии (разделении) смесей с одним и тем же чистым веществом количество чистого вещества и целого количества смесей суммируются (вычитаются). Производить действия сложения и вычитания в долях и процентных содержаниях нельзя.

Задача.

В емкости находится 5 литров водного раствора с концентраций вещества, равной 12%. В емкость добавили еще 7 литров воды. Раствор какой концентрации (с каким процентным содержанием вещества) получился после этого?

Решение:

Опишем концентрацию вещества в растворе такой формулой:

$C = V$вещества: Vраствора $\cdot$ 100% .

Изначально в растворе содержится $0{,}12 \cdot 5 = 0{,}6$ литра вещества. Когда были добавлены 7 литров воды, объем раствора в емкости увеличился. Но концентрация вещества понизилась (его объем остался неизменным). Подставим все известные нам цифры в формулу и получим:

$0{,}6{:}\,5 + 7 \cdot 100\% = 0{,}6\,/12 \cdot 100\% = 5\%.$

Ответ: 5%.

Основные этапы решения заданий

1) Выбором неизвестного (или неизвестных величин). Чаще прочего за неизвестное выбирают ту величину, которую необходимо прояснить по условиям задачи, однако временами лучше взять за неизвестное иные промежуточные величины, после прояснения которых, просто находятся заявленные условием задачи.

2) Выбором чистого вещества. Среди всех веществ, заявленных условиями задачи, одно следует выбрать как чистое вещество. Чаще прочего в качестве чистого выбирают вещество, про которое заявлено в требованиях к задаче, или вещество, про чью долю в условиях задания заключается преимущественная часть сведений. Учитывая, что n - доля чистого вещества, обозначение (m) – выраженная в долях примесь.

3) Взаимодействие с долями. При наличии в условии задания величин, выраженных процентными содержаниями, их необходимо перевести в доли, а впоследствии производить расчетные действия лишь на долевых показателях.

4) Изменения состояния смесей. По мере изменения текущего состояния смеси (прибавление, вычет) нужно отмечать текущее содержание смеси через три основные величины: m, n, a.

5) Работа по составлению тождества (уравнения). По итогам смены состояний смеси, которые описываются в формулировке задания, нужно

прийти к ее конечному состоянию. Такое состояние описывается отвлеченными величинами m, n, a. Уравнением, связывающим эти неизвестные, будет уравнение $m = \alpha \cdot M$.

Для удобства лучше всего делать записи сопроводительные записи в таблицу 1.

Таблица 1.

Состояние смеси	Масса чистого вещества (m)	Общее количество смеси (M)	Доля (α)
1 2 …			
Итоговое состояние			

6) Полученное уравнение (или система уравнений) находит решение и его результатом выступают требуемые условием задачи величины.

7) Формулировка ответа на вопрос в задании. Если по условию задачи необходимо было отыскать, какое-либо процентное отношение, выявленные доли нужно выразить в процентах и представить в ответе процентное содержание.

Примеры решения заданий со смесями

Задача 1.

Кусок сплава золота и серебра весом 3 кг содержит 30% золота. Сколько кг чистого золота нужно прибавить к этому куску, чтобы получившийся новый сплав содержал 40% золота?

Решение:

Порядок решения:

Пусть требуется добавить x кг чистого золота.

$3 \cdot 0{,}3 = 0{,}9$ (кг)– чистого золота было в сплаве.

Всего чистого золота стало $x + 0{,}9$ кг, а сплав массой $(x + 3)0{,}4$ (кг) – чистого золота.

Составим уравнение: $m = \alpha \cdot M$

$$x + 0{,}9 = (x + 3)0{,}4$$

$$06\text{x} = 0{,}3$$

$$x = 0{,}5$$

Ответ: 0,5 кг

Задача 2.

Сколько килограммов воды нужно выпарить из 0,5т целлюлозной массы, содержащей 85% воды, чтобы получить массу с содержанием 25% целлюлозы?

Решение:

1) Пусть x т воды следует выпарить.
2) За чистое вещество принимаем сухую целлюлозу.
3) Доля воды в данной целлюлозной массе – 0,85. Следовательно, доля целлюлозы в данной массе $1 - 0{,}85 = 0{,}15$. Выпаривается чистая вода, в ней доля целлюлозы равна нулю. Доля целлюлозы в смеси после выпаривания – 0,25.
4) Происходит разъединение смесей (изъятие из данной смеси воды выпариванием).

Таблица 2.

Состояние смеси	m(т)	M(т)	α
1	$0{,}15 \cdot 0{,}05$	$0{,}5$	$0{,}05$
2	$0 \cdot x$	X	0
3	$0{,}15 \cdot 0{,}5$	$0{,}5 - x$	$0{,}25$

5) Составим уравнение вида $m = M \cdot \alpha$ по третьей строке таблицы 2:

$$0{,}15 \cdot 0{,}5 = 0{,}25(0{,}5 - x)$$

6) Решая уравнение, получим $x = 0{,}2$.
7) Следует выпарить 0,2т воды. В соответствии с требованием задачи переводим ответ в килограммы.

Ответ: 200 кг.

По мере приобретения навыков учащимся необязательно выделять записями указанные этапы решения.

Задача 3.

Смешали 30%-ый раствор соляной кислоты с 10%-ым и получили 600г 15%-ого раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

Решение:

Пусть взяли x г первого раствора, тогда второго раствора (600-x) г.

Таблица 3.

Состояние смеси	m(г)	M(г)	α
1	$0{,}3x$	X	0,3
2	$0{,}1(600-x)$	$600-x$	0,1
1+2	$0,3x+0{,}1(600-x)$	600	0,15

Тогда $0{,}3x+0{,}1(600-x)=0{,}15\cdot 600$,

откуда $x=150$, $600-x=450$.

Ответ: 150г 30%-го раствора, 450г 10%-го раствора.

Во время решения задания с составлением уравнения, может выясниться, что одного уравнения не достаточно, поэтому необходимо выстроить систему. На это указывает в том числе текст задания, где по условию нужно найти не одну, а несколько неопределенных величин. Одни уравнения будут составляться с опорой на таблицу состояния смесей, а другие – по другим взаимосвязям величин, которые описаны в задании. Например, предыдущую задачу можно решить другим способом: пусть за x взяли граммы первого раствора и взяли y в граммах второго раствора, тогда условием задачи будет $x+y=600$ (таблица 4).

Таблица 4.

Состояние смеси	m(г)	M(г)	α
1	$0{,}3x$	X	0,3
2	$0{,}1y$	Y	0,1
1+2	$0{,}3x+0{,}1y$	$X+Y$	0,15

По таблице напрашивается следующее уравнение $0{,}3x+0{,}1y=0{,}15(x+y)$.

Таким образом, задача приходит к решению через систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 600 \\ 0{,}3x + 0{,}1y = 0{,}15(x + y) \end{cases}$$

В равной мере подобно другим текстовым задачам, этот вид – с поиском смеси, может быть решен через систему уравнений, где количество заявленных неизвестных больше, чем число уравнений, что нужно составить согласно условиям задачи.

Задания с процентным приростом и вычислением «сложных процентов»

Закономерности решения заданий с процентным приростом и вычислением «сложных процентов» основаны на применении таковых понятий и формул. Примем, что неопределенная переменная величина A, которая зависит от времени I, в первый момент времени $t = 0$ реализуется значением A_0, а a в отдельный момент t_1 имеет значение A_1. Абсолютным приростом величины A за время t_1 именуется разность $A_1 - A_0$, относительным приростом величины A за время t_1 – отношение $(A_1 - A_0)/A_0$ и процентным приростом величины A за время t_1 – величина $\frac{(A_1 - A_0)}{A_0} \cdot 100\%$. Принимая за обозначение процентного прироста величины через $p\%$, мы приходим к следующей формуле, связывающей значения A_0, A_1 и показатель процентного прироста p:

$$\frac{(A_1 - A_0)}{A_0} \cdot 100\% = p\%$$

Выражение финальной формулы как равенства: $A_1 = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) = A_0 + A_0 \cdot \frac{p}{100}$ дозволяет по известному значению A_0 и заданному значению p вычислить значение A_1, т.е. значение A в отдельный момент времени t_1.

Примем, что с этого момента узнано, что и дальше при $t > t_1$ величина A имеет процентный прирост $p\%$. Тогда в момент времени $t = 2t_1$ значение величины $A_2 = A(t_2)$ будет равно $A_2 = A\left(1 + \frac{p}{100}\right) = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$.

Если за время t_1 (на «первом этапе») величина A изменила на $p\%$, на «втором этапе» (т.е. за время $t_2 - t_1 = t_1$) – на $p_2\%$, на «третьем этапе» (т.е.

за $t_3 - t_2 = t_1)$ – на p_3%, и т.д., то значение A в момент $tn = n \cdot t_1$ вычисляется по формуле:

$$A_n = A_0\left(1 + \frac{p_1}{100}\right)\left(1 + \frac{p_2}{100}\right)\ldots\left(1 + \frac{p_n}{100}\right).$$

Задача 1.

Во время распродажи товар продается со скидкой 25%. Сколько товар стоит во время распродажи, если обычная его цена равна 1800 рублей?

Решение:

Можем сначала найти 25% от обычной цены, а потом вычесть из нее эту величину, а можем сразу воспользоваться полученной выше формулой. Скидка в 25% означает, что цена на данный товар снижена на 25%. То есть, число 1800 надо уменьшить на 25%. Подставим эти значения в формулу для уменьшения числа А на p%.

$$1800 \cdot (1 - \frac{25}{100}) = 1800 \cdot \frac{75}{100} = 18 \cdot 75 = 1350$$

Значит, цена этого товара во время распродажи составляет 1350 рублей.

Ответ: 1350р

Задача 2.

В 2013 году в отеле было 12000 посетителей. В 2014 их количество увеличилось на 20%, а в 2015 на 25%. Сколько посетителей было в отеле в 2015 году?

Решение:

В данной задаче увеличение происходило на разное количество процентов в первый и во второй год. Но если бы оба раза увеличение происходило на одно и то же количество процентов p, то обе скобки были бы одинаковые: (1+ $\frac{25}{100}$). И на такую скобку исходная величина будет умножаться столько раз, сколько раз происходило увеличение на p%.

$$A \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)}$$

n раз

Но n одинаковых множителей (скобок) можно заменить степенью с показателем n. Тогда получим:

$$\underbrace{A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)}_{n \text{ раз}} = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Сначала узнаем сколько посетителей отеля в 2014 году. Для этого надо 12000 увеличить на 20%.

$$12000\cdot(1+\frac{20}{100}) = 12000\cdot\frac{120}{100} = 120\cdot120 = 14400$$

Столько посетителей было в отеле за 2014 год. Теперь узнаем, сколько посетителей было в отеле за 2015 год. Для этого надо 14400 увеличить на 25%.

$$14400\cdot(1+\frac{25}{100}) = 14400\cdot\frac{125}{100} = 144\cdot125 = 18000$$

Обратите внимание на то, что во второй раз на 25% уже измененная величина, а не изначальная. То есть, во второй раз мы увеличивали уже число $12000\cdot(1+\frac{20}{100})$.

Все эти изменения можно записать в виде одного выражения:

12000·(1+20100)·(1+25100)=18000

Ответ: 18000.

Глава 2. Анализ представления темы «Проценты» в учебных изданиях по школьному курсу

§ 1. Сравнительный анализ материалов школьных учебников

Тема «Проценты» не относится к легкоусвояемым, не смотря на то что в школьной программе это понятие и решение задач по нахождению процентных показателей встречается уже в 5–6 классах. Конечно же, школьники данного возраста не осознают полного спектра практического приложения изучаемого материала. Это влияет на работу с процентами при первом знакомстве обучающихся с понятием. Для составления полной картины, мы проанализировали материалы по данной теме в нескольких учебниках, и результаты проведенного анализа представляем в следующих параграфах.

1.1 Учебники по математике для 5 и 6 классов под редакцией Н.Я. Виленкина 2014 года издания [1]

В этих учебниках начинается изучение процентов в 5 класса в главе второй, которая называется «Дробные числа», параграф восьмой «Инструменты для вычислений и измерений». Изучение процентов начинается с соответствия между величинами: сотая часть центнера – килограмм, сотая часть метра – сантиметр, сотая часть гектара – ар или сотка, и дается определение понятию «Процент», процентом называют одну сотую часть. Вводится обозначение процента: %.

Акцентируется внимание учеников на то, как читаются предложения, в которые входят проценты. Например, предложение «В поход ушли 1,5% учащихся нашей школы» читаю так: «В поход ушли полтора учащихся нашей школы», а предложение «В этом месяце завод перевыполнил план на 8%» читаю так: «В этом месяце завод перевыполнил план на восемь процентов».

Авторы приводят примеры решений задач на проценты.

Задача 1.

Швейная фабрика выпустила 1200 костюмов. Из них 32% костюмы нового фасона. Сколько костюмов нового фасона выпустила фабрика?

Решение:

Т.к. 1200 костюмов – это 100% выпуска, то, чтобы найти 1% выпуска, надо 1200 разделить на 100, получим, что $1200:100 = 12$, значит, 1% выпуска равен 12 костюмам. Чтобы найти, чему равны 32% выпуска, надо умножить 12 на 32. Так как $12 \cdot 32 = 384$, то фабрика выпустила 384 костюма нового фасона.

Учащиеся учатся переводить проценты в десятичную дробь и наоборот.

Чтобы обратить десятичную дробь в проценты, надо её умножить на 100.

Чтобы перевести проценты в десятичную дробь, надо разделить число процентов на 100. Например, $0{,}971 - 0{,}971 \cdot 100\% = 97{,}1\%$; $39\% = 39:100 = 0{,}39$.

Далее предлагаются упражнения для закрепления материала и задачи.

Авторы учебника обращают внимание ребят на то, как правильно употреблять в своей речи данное понятие «процент». Например, слова «процент» и «проценты» читаются в большинстве случаев в том же падеже, что и числительное.

$\frac{1}{5} = 20\%$ – одна пятая равно двадцати процентам.

В шестом классе в главе 1 «Обыкновенные дроби» в § 3 «Умножение и деление обыкновенных дробей» рассматривается пункт «Нахождение дроби от числа», в котором ребята изучают вопрос о том, как найти дробь от числа.

Чтобы найти дробь от числа, нужно умножить число на эту дробь.

После этих сведений ребята учатся находить несколько процентов от числа на примере разобранной в пункте учебника задаче.

Задача 3.

Из 1800 га колхозного поля 558 га засажено картофелем. Какой процент поля засажен картофелем?

Решение:

Картофелем засажено 558/1800 всего поля. Обратим дробь 558/1800 в десятичную. Для этого разделим 558 на 1800. Получаем 0,31. Значит, картофелем засажена 31 сотая всего поля. Каждая сотая равна 1% поля, поэтому картофелем засажен 31% всего поля.

Аналогично рассматривается вопрос о нахождении числа по известному значению его процентов. Сначала формулируется правило нахождение числа по его дроби: чтобы найти число по данному значению его дроби, надо это значение разделить на дробь.

Решив следующий пример задачи, учащиеся узнают, как найти число по данному значению его процентов.

Задача 4.

Увеличив производительность труда на 7%, рабочий сделал за этот же срок на 98 деталей больше, чем намечалось по плану. Сколько деталей рабочий должен был сделать по плану?

Решение:

Т.к. $7\% = 0{,}07$, а $98 : 0{,}07 = 1400$, то рабочий по плану должен был сделать 1400 деталей.

В §4 «Отношение и пропорции» учащиеся приобретают навыки нахождения отношение двух чисел.

Отношение двух чисел - это частное этих чисел. Отношение показывает, во сколько раз первое число больше второго или какую часть первое число составляет от второго.

Приводится примет.

Задача.

Масса станка 9,6 ц, а масса электромотора 36 кг. Найдите отношение массы электромотора к массе станка.

Решение:

$9{,}6$ ц $= 960$ кг. Значит, отношение массы электромотора к мессе станка равна $36/960 = 3/80 = 0{,}0375$. Далее уточняется, что ответ можно выразить в процентах: $0{,}0375 = 3{,}75\%$.

Решив эту задачу, ученики узнают, сколько процентов одно число составляет от другого.

В учебнике под редакцией Н.Я. Виленкина не формулируется правило нахождения сколько процентов одна величина составляет от другой, этот вопрос рассматривается только на примере.

Еще одной отличительной чертой этого учебника является то, что после каждой изученной темы предлагаются задания на повторение, в которых присутствуют один или два номера на проценты. То есть на протяжении всего курса математики за 6 класс ученики постоянно повторяют и систематизируют материал по решению задач на проценты.

1.2 Учебник по математике для 6 класса под редакцией Г.В. Дорофеева, И.Ф. Шарыгина 2010 года издания [3]

Обучающиеся по этой программе впервые знакомятся с понятием «Проценты» в 6 классе, где шестая глава называется «Отношения и проценты».

В параграфе 6.3 «Главная задача на проценты» учащиеся знакомятся со следующим правилом: чтобы выразить проценты десятичной дробью, нужно число, стоящее перед знаком % разделить на 100 или, что то же самое, умножить на 0,01.

Например, *65% – это 0,65*;

3,8% – это 0,038.

Учащиеся учатся находить процент величины умножением на десятичную дробь. Приведём пример задачи и её решение двумя различными способами.

Рубашка стоила 120 рублей. Сколько она стала стоить, когда её цена увеличилась на 35%?

1 способ.

Т.к. 35% – это 0,35, то надо найти 0,35 от 120 руб.

$120 \cdot 0{,}35 \ = \ 42$ (руб.) – настолько повысилась цена.

Теперь найдем новую цену: $120 + 42 = 162$ (руб.)

2 способ.

Старая цена составляет 100%, а новая на 35% больше, т.е. она составляет 135%. Т.к.135%) – это $135 : 100 = 1{,}35$, то цена увеличилась в 1,35 раза. Имеем $120 \cdot 1{,}35 = 162$(руб.).

Далее предлагаются упражнения для закрепления материала и задачи. Учащимся в этом пункте предлагаются задачи из повседневной практики.

№617. Ковер, цена которого 9880 рублей, на распродаже стоил на 20% дешевле. Сколько примерно рублей можно сэкономить, если купить ковер на распродаже?

Решение 1:

9880 руб. – это почти 10 000руб.

20% – это $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{5}$ от 10 000 – это $\frac{10\,000}{5} = 2000$.

Можно сэкономить примерно 2000 рублей.

Рассуждая так же, определите, сколько можно сэкономить, если купить на распродаже со скидкой 20% товар стоимостью 399 руб., 4890 руб., 19790 руб.

№618. Перед новым годом магазин скинул цену на товары на 25%. Насколько примерно рублей понизилась цена товара, если до снижения она составляла 799руб.? 1980руб.? 9880руб.? 11890руб.?

В пункте 26 «Выражение отношения в процентах» формулируется следующее правило:

Чтобы перейти от десятичной дроби к процентам, нужно эту дробь умножить на 100.

В этом пункте центральной является задача об определении того, сколько процентов одна величина составляет от другой.

Здесь в основном принят подход, в соответствии с которым сначала находят, какую часть одна величина составляет от другой, выражают её при необходимости десятичной дробью, а затем – в процентах.

Далее рассматриваются следующие задачи:

Пример 1:

Среди жителей села Дедово 350 человек имеют право участвовать в голосовании. На избирательный участок в день выборов пришли 189 человек.
Какая часть избирателей села Дедово приняла участие в голосовании?

Решение:

Часть жителей села, принявших участие в голосовании, выражается дробью $\frac{189}{350}$. Обратим эту дробь в десятичную: $\frac{189}{350} = 0{,}54$;

Для наглядности число избирателей принято выражать в процентах, то есть *0,54 = 54%* избирателей пришли голосовать.

В конце главы 2 предлагаются задания для самопроверки:

1) Выразить в процентах: а)0,66 жителей России, б) $\frac{1}{4}$ избирателей округа;
2) Сколько примерно процентов составляет: а) $\frac{1}{3}$ всех учащихся класса;
3) Найдите: а) 16% от 200 р., б) 125% от 200 р.;
4) В начале учебного годам в школе училось 550 учеников. За год число учащихся школы уменьшилось на 8%. Сколько учащихся стало в школе?
5) Для выращивания рассады посадили 50 семян помидора. Проросло 45 семян. Сколько процентов семян проросло?

На этом изучение процентов в шестом классе заканчивается, а продолжается в седьмом классе в главе «Дроби и проценты».

В этой главе учебника выделен пункт «Решение задач на проценты», в котором помещен материал, позволяющий вспомнить сведения из шестого класса и продвинуться в решении задач. Теперь рассматриваются более сложные в техническом отношении задачи. Они требуют достаточно прочного навыка представления процентов дробью и наоборот, умения находить процент от величины, понимание того, какая из величин, участвующих в задаче, принимается за 100%. Поэтому в теоретической части пункта рассматриваются примеры, с помощью которых десятичная дробь выражается в процентах и наоборот: чтобы перейти от десятичной дроби к процентам, надо в десятичной дроби перенести запятую на 2 разряда вправо и приписать знак %.

0,7 – это 70%.

Для замены процентов десятичной дробью надо передвинуть запятую на 2 разряда влево:

48% – это 0,48.

На примере приведенной ниже задачи подробно разбираются способы решения.

Весной цена на товар была повышена на 10%, а осенью – еще на 5%. Сколько стал стоить товар, если его первоначальная стоимость была 3000руб.?

Решение:

Сначала узнаем, насколько была повышена цена товара весной, т.е. найдем 10% от 3000руб.;

Т.к. 10% – это 0,1, то 3000руб. надо умножить на 0,1:

$$3000 \cdot 0{,}1 = 300(\text{руб.}).$$

Теперь узнаем, сколько стал стоить товар после первого повышения цены:

$$3000 + 300 = 3300(\text{руб.}).$$

Второе повышение цен происходило, когда товар уже имел новую стоимость, и 5% следует находить от этой новой стоимости, т.е. от 33000 руб.:

$$3000 \cdot 0{,}05 = 165(\text{руб.}).$$

Значит, осенью цена товара увеличилась на 165 руб., и он стал стоить

$$3300 + 165 = 3465(\text{руб.}).$$

Решим задачу другим способом.

Весной цена товара увеличилась на 10% и составила $100\% + 10\% = 110\%$ первоначальной стоимости. Выразив 110% десятичной дробью, получим 1,1. Значит, цена товара увеличилась в 1,1 раза и стала равной

$$3000 \cdot 1{,}1 = 3300(\text{руб.}).$$

Теперь эта новая стоимость составляет 100%, и после её увеличения на 5% осенняя цена окажется равной $100\% + 5\% = 105\%$ от 3300. Выразив 105% десятичной дробью, получим 1,05. Значит, осенью цена товара стала равной

$$3000 \cdot 1{,}05 = 3465(\text{руб.}).$$

Предлагаемые в системе упражнений задачи, как правило, допускают разные способы рассуждений, и учащиеся самостоятельно выбирают удобный и понятный для себя. Кроме задач на нахождение процента от величины, рассматриваются задачи на нахождение величины по известному её проценту. Ниже приведена задача и её решение.

Задача.

После повышения цены на 30% книга стала стоить 52 руб. сколько стоила книга до повышения цены?

Решение:

Первоначальная цена книги составляет 100%. Поэтому 52, т.е. цена после подорожания, составляет $100\% + 30\% = 130\%$ от первоначальной цены.

Теперь можно решить задачу на нахождение величины по известному её проценту. Рассуждать можно по-разному:

1) 1% – это $52 : 130 = 0{,}4(\text{руб.})$, а 100% – это $0{,}4 \cdot 100 = 40(\text{руб.})$;
2) 10% – это $52 : 13 = 4(\text{руб.})$, а 100% – это $4 \cdot 100 = 400(\text{руб.})$;
3) 130% – это $1{,}3$, поэтому 52руб. составляют $1{,}3$ первоначальной цены, а поэтому первоначальная цена равна $52 : 1{,}3 = 40(\text{руб.})$.

В конце главы есть пункт «Для тех, кому интересно», где еще раз учащиеся встречаются с задачами на проценты.

Вся методика обучению решению задач, принятая в учебнике позволяет показать учащимся наглядный способ их решения с помощью рисунков (хотя, конечно, эти задачи можно решить и арифметически).

При изучении следующей главы «Отношения и пропорции» учащиеся активно пользуются опытом работы с процентами и приобретают новый навык.

№191 («Деление в данном отношении»).

В сплав входят медь, олово и сурьма в отношении 4:15:6. Сколько процентов сплава составляет каждый металл?

Решение:

Всего имеется 25 частей.

1) Медь составляет $\frac{4}{25} \cdot 100\% = 16\%$;
2) Олово составляет $\frac{15}{25} \cdot 100\% = 60\%$;
3) Сурьма составляет $\frac{6}{25} \cdot 100\% = 24\%$;

№251 («Прямая и обратная пропорциональности»).

На облицовку плиткой подъезда в строящемся доме ушло 18 дней. За сколько дней можно было бы выполнить эту же работу, если повысить производительность труда на 20%?

Решение:

Пусть вся работа – это 1, тогда

1) $\frac{1}{18}$ – производительность труда в первом случае;
2) $\left(\frac{1}{18} \cdot 120\right) : 100 = \frac{1}{15}$ – производительность труда после увеличения её на 20%;
3) $1 : \frac{1}{15} = 15$ (дней) – количество дней, за которое можно было бы выполнить эту же работу, если повысить производительность труда на 20%.

Затем тема «Проценты» встречается в 8 классе.

В учебнике уточняется, что на проценты решать нетрудно, если уметь выражать проценты обыкновенной или десятичной дробью и решать «главную» задачу на проценты – находить процент от заданной величины.

Пример.

Сколько граммов воды надо добавить к 50 г раствора, содержащего 8% соли, чтобы получить 5%-ный раствор?

Эта так называемая задача «на концентрацию». В её условие входят проценты.

Составим уравнение по условию данной задачи.

Пусть x г – количество воды, которое надо добавить.

Т.к. исходное количество раствора – 50 г, то новое количество раствора – $(50 + x)$ г. Количество соли в исходном растворе составляет 8% от 50 г, то есть $0{,}08 \cdot 50$ г. Количество соли в новом растворе составляет 5% от $(50 + x)$г, то есть $0{,}05 \cdot (50 + x)$ г.

Т.к. количество соли от добавления воды не изменилось, то оно одинаково в исходном и новом растворах. Поэтому можно записать равенство:

$$0{,}08 \cdot 50 = 0{,}05 \cdot (50 + x).$$

Решим составленное уравнение.

$$100 \cdot 0{,}08 \cdot 50 = 100 \cdot 0{,}05 \cdot (50 + x)$$

$$8 \cdot 50 = 5 \cdot (50 + x)$$

$$8 \cdot 10 = 50 + x$$

$$x = 30$$

Ответ: надо добавить 30 г воды.

Для того чтобы помочь учащимся осознать на новом уровне подход к решению задач с процентами, в учебнике приводятся образцы решения ряда задач. К разобранному образцу учащийся может вернуться вновь и использовать его в качестве опоры при решении подобной задачи.

Тема «Алгебраические дроби».

№187. Разберите, как по условию задачи составлено уравнение и решите задачу.

Клиент открыл счет в банке на некоторую сумму денег. Первый доход по этому вкладу составляет 11%. Если бы он добавил 800 руб., то через год получил бы доход 220 руб. Какая сумма была внесена им в банк?

Решение:

Пусть x руб. – сумма, которую клиент внес в банк. Тогда $(x + 800)$ руб. было бы на вкладе, если бы клиент добавил 800 руб.; $0{,}11(x + 800)$ руб. – доход в 11%, который мог бы получить клиент с этой суммы. Так как доход равен 220 руб., то имеем равенство: $0{,}11(x + 800) = 200$.

№188. Получив премию, сотрудник фирмы решил положить её на счет в банк. Он может открыть счет с годовым доходом 8%. Если бы банк выплачивал 11% годовых, то для получения такого же дохода потребовалось бы на 900 руб. меньше. Определите, сколько рублей составила премия.

Решение:

Пусть x руб. – сумма, которую составила премия. Тогда $0{,}08x$ руб. было бы на вкладе с годовым доходом 8%. Если бы выплачивались 11% годовых на сумму $(x - 900)$ руб., то доход составил бы $0{,}11(x - 900)$ руб., что равно $0{,}08x$ руб. Отсюда $0{,}11(x - 900) = 0{,}08x$, или

$$0{,}11(x - 900) = 8x,$$

$$x = 3300\text{руб.}$$

Тема «Системы уравнений».

№657. Для проведения опыта научный сотрудник химической лаборатории смешал 4%-ый раствор некоторого химического вещества и 10%-ый раствор этого же вещества и получил 75мл 8%-ого раствора. Сколько миллилитров 4%-ого и 10%-ого растворов было взято?

Решение:

Обозначив через x и y количества *4%-го* и *10%-го* растворов, запишем первое уравнение системы: $x + y = 75$. Второе уравнение системы связывает количество соли в 4%-ом, 10%-ом и в получившемся растворах:

$$0{,}04x + 0{,}1y = 0{,}08(x + y).$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 75 \\ 0{,}04x + 0{,}1y = 0{,}08(x + y) \end{cases};\ \begin{cases} x + y = 75 \\ 2x - y = 0 \end{cases};\ \begin{cases} x = 25 \\ y = 50 \end{cases};$$

$$0{,}04x + 0{,}1y = 0{,}08(x\ 4\text{-}\ y)\ ,$$

$$2x — y = 0,$$

$$y = 50.$$

Завершается тема «Проценты» в 9 классе темой «Простые и сложные проценты», включенной в изучение главы «Арифметическая и геометрическая прогрессии». В учебнике не вводятся формулы простых и сложных процентов. Учащиеся должны решать задачи, опираясь не на формулы, а на понимание, на смысл понятия «процент», на умение находить процент от числа. В теме широко используется калькулятор, который и позволяет рассматривать самые разнообразные задачи. В учебнике рассматривается два примера, в которых применяются две различные схемы начисления процентов.

Пример.

Пусть на счет в банке, который выплачивает 20% годовых, положили 1000 руб. и оставили эти деньги на счете на год. Тогда по истечении года к сумме вклада добавляются 20% от 1000 руб. Если вкладчик не снимает в конце года со счета образовавшийся доход (как говорят, не снимает «проценты»), то в конце следующего года 20% начисляются банком уже на новую, увеличенную сумму, и т.д. Подсчитаем, какая сумма при такой схеме начисления процентов окажется на счете через 10 лет?

Решение:

Т.к. 20% от 1000 руб. составляют 200 руб., то через год на счете окажется $1000 + 200 = 1200(\text{руб.})$. К концу второго года 20% нужно находить уже от суммы в 1200 руб. Т.к. $1200 \cdot 0{,}2 = 240(\text{руб.})$, то через два года на счете будет $1200 + 240 = 1440(\text{руб.})$, и т.д. Действуя таким образом, с помощью последовательных вычислений найдем, что через 10 лет сумма вклада составит 6191,73 руб.

Этот ответ на поставленный вопрос требует довольно длительных расчетов, поэтому рассматривается еще и другой способ рассуждения, который приведет к нужному результату значительно быстрее.

Через год начальная сумма вклада увеличится на 20%, значит, новая сумма составит от первоначальной 120%. Таким образом, через год вклад увеличится в 1,2 раза и составит $1000 \cdot 1{,}2(\text{руб.})$, еще через год образовавшаяся на счете сумма снова увеличится на 20%, то есть в 1,2 раза. Значит, через два года на счете будет $(1000 \cdot 1{,}2) \cdot 1{,}2 = 1000 \cdot 1{,}2^2(\text{руб.})$

Теперь видно, что вклад растет в геометрической прогрессии. Понятно, что через 10 лет сумма на счете составит $1000 \cdot 1{,}2^{10}(\text{руб.})$.

Итак, если при вычислении процентов на каждом следующем шаге исходят из величины, полученной на предыдущем шаге, как это было во 2 примере, то говорят о начислении сложных процентов («процентов на проценты»). Ели же при вычислении процентов все время исходят из начального значения величины (как в примере 1), то речь идет о простых процентах.

В ходе решения подобных задач учащиеся видят, что геометрическая прогрессия – это конкретное математическое знание, необходимое в жизни.

На этом изучение процентов в курсе математики (под редакцией Дорофеева) заканчивается.

Итак, проанализировав учебники по математике, можно сделать выводы и выделить основные отличия их друг от друга.

И.В. Виленкин начинает изучение процентов в пятом классе. Внимание ребят обращается на то, как правильно употреблять в своей речи понятие «процент», что в свою очередь развивает культуру речи учащихся. Для проверки того, как ученики усвоили изученную тему, в каждом параграфе после теории предлагаются контрольные вопросы. Заметим что, в этих учебниках очень мало образцов решения задач, почти не используется наглядный материал.

Учебники Дорофеева Г.В. отличаются тем, что в них нет по данной теме ни одной устной задачи. Тема «Проценты» в этих учебниках изучается с шестого по девятый класс включительно. При каждом подходе учащиеся возвращаются к процентам на новом уровне, их знания пополняются, добавляются новые типы задач и приемы решения. Такое частое обращение к понятию приводит к тому, что постепенно оно усваивается прочно и осознанно. С самого начала освоения понятия учащиеся выполняют много заданий, в которых требуется заштриховать, закрасить, начертить, вырезать часть фигуры. Широко используются рисунки и чертежи, помогающие разобраться в задаче и увидеть путь решения.

§ 2. Материалы ЕГЭ 2017 года по теме «Проценты»

При проведении Единого государственного экзамена на всей территории России применяются однотипные задания и единые методы оценки качества выполнения работ. После сдачи экзамена всем участникам выдаются свидетельства о результатах ЕГЭ, где указаны полученные баллы по предметам.

Задание на тему «Проценты» нередко вызывают трудности у школьников, т.к. количество часов, отведенное на проценты в школьной программе, недостаточно для полного усвоения знаний по этой теме.

Рассмотрим задачи из сборника «Типовые тестовые задания ЕГЭ 2017» под редакцией И.В. Ященко, которые можно будет использовать при подготовке к ЕГЭ. [9]

В первой части представлены задания следующего типа:

1. Задачи в ЕГЭ на простые проценты;
2. Задачи в ЕГЭ на вероятность;
3. Задачи в ЕГЭ на сплавы, смеси и на процент содержания;

Задание 1 (Вариант 3) [9]

Одна таблетка лекарства весит 30 мг и содержит 14% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,4 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте четырёх месяцев и весом 6 кг в течение суток?

Решение.

Вычислим вес активного вещества в одной таблетке. Он составляет 14% от 30 мг, т.е. $30 \cdot 0{,}14 = 8{,}4$ мг.

Для ребёнка весом в 6 кг в сутки необходимо $1{,}4 \cdot 6 = 8{,}4$ мг. активного вещества. Значит, ему нужно давать $8{,}4 : 4{,}2 = 2$ таблетки в сутки.

Ответ: 2.

При решении заданий этого типа необходимо обратить внимание: во-первых в таблетке 30 мг активного вещества всего 14%, во-вторых ребенку до 6 месяцев 1,4 мг активного вещества на каждый кг веса в сутки.

Задание 4 (Вариант 5) [9]

Два завода выпускают одинаковые автомобильные предохранители. Первый завод выпускает 40% предохранителей, второй – 60%. Первый завод выпускает 4% бракованных предохранителей, а второй -3%. Найдите вероятность того, что случайно выбранный в магазине предохранитель окажется бракованным.

Решение.

Выбранный бракованный предохранитель может быть выпущен или первым, или вторым заводом. Процент брака от первого завода. Его доля в продукции составляет 40% и среди них 4% брака, следовательно, процент брака от первого завода во всей продукции составляет

$$40\% \cdot 0{,}04 = 1{,}6\%$$

Для второго соответственно получаем

$$60\% \cdot 0{,}03 = 1{,}8\%$$

В сумме брака в продукции $1{,}6\% + 1{,}8\% = 3{,}4\%$. Тогда вероятность выбора бракованного изделия будет равна

$$\frac{3{,}4\%}{100\%} = 0{,}034$$

Ответ: $0{,}034$.

При решении этого задания следует обратить внимание на то, что:

1. выбранный бракованный предохранитель может быть выпущен или первым или же вторым заводом.
2. процент брака от первого завода.

Задание 11 (Вариант 6) [9]

Пять рубашек дешевле куртки на 5%. На сколько процентов шесть рубашек дороже куртки?

Решение.

Пять рубашек дешевле куртки на 5% означает, что 5 рубашек составляют 95% от стоимости куртки. Следовательно, одна рубашка – это $95{:}\,5 = 19\%$ от стоимости куртки. Таким образом, 6 рубашек будут составлять $19 \cdot 6 = 114\%$ от стоимости куртки, т.е. будут на 14% дороже.

Ответ: 14.

Обратить внимание на то, что пять рубашек дешевле куртки на 5%.

Задание 11 (Вариант 7) [9]

Семья состоит из мужа, жены и их дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 65%. Если бы стипендия дочери уменьшилась вдвое, общий доход семьи сократился бы на 1%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Решение.

Доход семьи определяется суммой доходов мужа, жены и дочери. Обозначим их доходы как a, b, c соответственно. Тогда общий доход есть $a + b + c$, что составляет 100%, то есть можно записать уравнение

$$a + b + c = 1.$$

В задаче сказано, что при увеличении a в 2 раза общий доход увеличивается на 65%, т.е. имеем

$$2a + b + c = 1{,}65\,.$$

А если величина c уменьшается в 2 раза, то доход семьи сокращается на 1%:

$$a + b + 0{,}5c = 0{,}99.$$

Таким образом, получаем систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} 2a + b + c = 1{,}65 \\ a + b + 0{,}5c = 0{,}99 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

Значение b можно найти, если из второго уравнения, умноженное на 2, вычесть первое, получим:

$2b - b = 1{,}98 - 1{,}65$

$b = 0{,}33$

То есть зарплата жены составляет 33% от общего дохода семьи.

Ответ: 33.

При решении заданий этого типа необходимо обратить внимание на то, что общий доход семьи определяется суммой доходов мужа, жены и дочери.

Во второй части ЕГЭ по математике представлены задачи на тему «Сложные проценты»

При решении заданий этого типа необходимо обратить внимание на условия возврата.

Задание 17 (Вариант 1) [9]

15 января планируется взять кредит в банке на 25 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 13 % больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

Решение.

Обозначим через x сумму кредита. В следующий месяц долг увеличивается на r процентов, т.е. $x \cdot \frac{100+r}{100}$ и выплачивается часть долга, который должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца, т.е. в первой выплате равен $\frac{x}{25} + \frac{r}{100} \cdot x$. Получаем сумму долга во втором месяце

$$x + \frac{r}{100} \cdot x - \frac{x}{25} - \frac{r}{100} \cdot x = \frac{24}{25} \cdot x$$

В следующем месяце производятся те же операции, только с суммой $\frac{24}{25}x$, имеем сумму долга

$$\frac{24}{25}x + \frac{24}{25}x \cdot \frac{r}{100} - \frac{x}{25} - \frac{r}{100} \cdot \frac{24}{25}x = \frac{23}{25}x$$

Через 25 месяцев получаем объем выплат, равный

$$\underbrace{\left(\frac{x}{25} + \frac{r}{100}x\right) + \left(\frac{x}{25} + \frac{r}{100} \cdot \frac{24}{25}x\right) + \ldots + \left(\frac{x}{25} + \frac{r}{100} \cdot \frac{1}{25}x\right)}_{25\ \text{раз}}$$

или в виде

$$x + \frac{r}{100} \cdot \frac{x}{25} \cdot (25 + 24 + \ldots + 1) = x + \frac{r \cdot x}{2500} \cdot \frac{(25+1) \cdot 25}{2} = x + \frac{325 \cdot r \cdot x}{2500}$$

По условию задачи сказано, что объем выплат превысил первоначальный кредит на 13%, получаем уравнение:

$$x \cdot \left(1 + \frac{325 \cdot r}{2500}\right) = 1{,}13x\,,$$

отсюда находим

$$1 + \frac{325 \cdot r}{2500} = 1{,}13$$

$$\frac{325 \cdot r}{2500} = 0{,}13$$

$$325 \cdot r = 325$$

$$r = 1$$

Ответ: 1.

Задание 17 (Вариант 2) [9]

15-го января планируется взять кредит в банке на 8 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

Решение.

Обозначим через x сумму кредита, взятого в банке. В первый месяц она увеличивается на 2% и становится равной $1{,}02x$. После этого делается платеж такой, чтобы долг был равен $\frac{7}{8}x$ (равномерно уменьшался), получаем сумму платежа:

$$1{,}02x - \frac{7}{8}x = \frac{1}{8}x + 0{,}02x$$

В следующий месяц сумма $\frac{7}{8}x$ увеличивается до $1{,}02 \cdot \frac{7}{8}x$ и сумма платежа составляет (чтобы осталось $\frac{6}{8}x$):

$$1{,}02 \cdot \frac{7}{8}x - \frac{6}{8}x = \frac{1}{8}x + 0{,}02 \cdot \frac{7}{8}x$$

Таким образом, за все 8 месяцев сумма выплат составит

$$\left(\frac{x}{8} + 0{,}02x\right) + \left(\frac{x}{8} + 0{,}02 \cdot \frac{7}{8}x\right) + \ldots + \left(\frac{x}{8} + 0{,}02 \cdot \frac{1}{8}x\right) = x + \frac{2x}{8 \cdot 100} \cdot (8 + 7 + \ldots + 1) =$$

$$= x + \frac{2x}{8 \cdot 100} \cdot \frac{(8+1) \cdot 8}{2} = x + \frac{9x}{100} = \frac{100x + 9x}{100} = \frac{109}{100}x = 1{,}09x$$

То есть сумма выплат составляет 109% от исходного размера кредита.

Ответ: 109.

Задание 17(Вариант 9) [9]

15-го января планируется взять кредит в банке на сумму $1{,}1$ млн рублей. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 30-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга.

На какое минимальное количество месяцев возможно взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более $137{,}5$ тыс. рублей?

Решение.

Минимум месяцев будет достигнуто, если каждый месяц выплачивать максимальную сумму в $137{,}5$ тыс. рублей. В начале каждого месяца кредит в 1100 тыс. рублей увеличивается на 1%, т.е. становится $1{,}01 \cdot 1100$, затем следует выплата в $137{,}5$ тыс. руб.:

$$1{,}01 \cdot 1100 - 137{,}5.$$

На следующий месяц ситуация повторяется, имеем:

$$(1{,}01 \cdot 1100 - 137{,}5) \cdot 1{,}01 = 1{,}01^2 \cdot 1100 - 137{,}5 \cdot 1{,}01$$

Таким образом, через n месяцев получим сумму долга:

$$1{,}01^n \cdot 1100 - 137{,}5 \cdot 1{,}01^{n-1} - 137{,}5 \cdot 1{,}01^{n-2} - \cdots - 137{,}5 =$$

$$= 1{,}01^n \cdot 1100 - 137{,}5 \cdot \frac{1{,}01 \cdot (1 - 1{,}01^{n-1})}{1 - 1{,}01} - 137{,}5 =$$

$$= 1{,}01^n \cdot 1100 - 137{,}5 \cdot \frac{1{,}01 - 1{,}01^n}{-0{,}01} - 137{,}5 =$$

$$= 1{,}01^n \cdot 1100 + 13887{,}5 - 13750 \cdot 1{,}01^n - 137{,}5 =$$

$$= 13750 - 1{,}01^n \cdot 12650$$

и минимальное число n, при котором сумма долга меньше или равна 0, составляет (при $n = 9$)

$13750 - 1{,}01^9 \cdot 12650 \approx -85{,}11$ тыс. рублей,

то есть в последний 9-й месяц выплата равна

$137{,}5 - 85{,}11 = 52{,}39$ тыс. рублей.

Ответ: 9.

Задание 17 (10 вариант) [9]

15-го января 2012 года банк выдал кредит на сумму 1 млн рублей. Условия его возврата были таковы:

– 1-го января каждого года долг возрастает на $a\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– выплата части долга происходит в январе каждого года после начисления процентов.

Кредит был погашен за два года, и при этом в первый год была переведена сумма в 600 тыс. рублей, а во второй раз — 550 тыс. рублей.

Найдите а.

Решение.

Кредит в 1000 тыс. рублей был взят под a процентов годовых и погашен за два года. В первый год сумма кредита выросла до $\frac{100+a}{100} \cdot 1000$, затем, последовали выплаты в размере 600 тыс. рублей, т.е. сумма долга составила

$$\frac{100 + a}{100} \cdot 1000 - 600.$$

На второй год, сумма долга вновь увеличилась на a процентов и составила

$$\frac{100+a}{100}\cdot\left(\frac{100+a}{100}\cdot 1000-600\right)=\left(\frac{100+a}{100}\right)^2\cdot 1000-\frac{100+a}{100}\cdot 600.$$

затем, были сделан платёж в размере 550 тыс. рублей, и сумма долга стала равной 0, получаем уравнение:

$$\left(1+\frac{a}{100}\right)^2\cdot 1000-\left(1+\frac{a}{100}\right)\cdot 600-550=0$$

упрощаем, имеем:

$$\left(1+\frac{2a}{100}+\frac{a^2}{10000}\right)\cdot 1000-600-\frac{600a}{100}-550=0$$

$$1000+20a+0{,}1a^2-600-6a-550=0$$

$$a^2+140a-1500=0.$$

Решаем квадратное уравнение, получаем два корня:

$$D=19600+4\cdot 1500=25600$$

$$\sqrt{D}=160$$

$$x_1=\frac{-140+160}{2}=10$$

$$x_2=\frac{-140-160}{2}<0$$

Так как процентная ставка должна быть больше 0, то получаем ответ 10%.

Ответ: 10.

В материалах Единого государственного экзамена за 2017 г. задания на проценты есть и в первой и во второй части. Задания первой части отвечают минимуму содержания основной и средней (полной) школы. При их выполнении требуется применить в несколько измененной ситуации знание конкретных математических методов, известных ученикам из школьного курса. Потому с задачей под номером один практически все справляются, а вот задание повышенной сложности под номером семнадцать вызывает затруднения у учащихся. Решение задач на проценты предусмотрено в основном в 5–6 классах, в последующих классах теме

«Проценты» отводится незначительная часть учебного времени. Из-за этого старшеклассники испытывают трудности при решении задач по этой теме.

В вариантах ЕГЭ присутствуют как минимум 3 задания на проценты. В задании № 17, оцениваемом на 3 балла, нужно рассчитать процент по кредиту.

Чтобы сдать ЕГЭ по математике на максимально допустимый балл необходимо за счет дополнительных занятий, факультативных и элективных курсов, повышать уровень умений решать задачи на проценты.

Заключение

Тема «Проценты» является одной из самых сложных тем математической науки, поэтому большая часть школьников затрудняется или не умеет решать задания с процентами. Адекватная расшифровка данного явления и умение производить необходимые расчеты – составляющая базовых знаний, которые нужны каждому человеку, невзирая на его профессию, основной род занятий и отношения с математикой. Проценты окружают нас в повседневной жизни, с ними мы сталкиваемся на каждом шагу. Безусловно, тема «проценты» не потеряет своей актуальности в любые времена, и сейчас знакомство с нею на уровне уверенного владения представляется весьма целесообразным. Исходя из этого, тема, представленная в нашей работе, является актуальной.

В первой главе исследования систематизировались по типам существующие задачи на проценты, рассматривалась методическая база решения подобных задач, осуществлялся анализ учебников школьного курса, в которых излагалась тема «Проценты». Во второй главе анализировались материалы для подготовке к ЕГЭ, выпущенные в 2017, чтобы выявить самые часто встречающиеся типы задний с процентами. Итогом проведенной работы стали прорешенные задачи на проценты из всех вариантов.

В нашем исследовании были прорешаны типы основных видов задачи на проценты протипированы по своей содержательной части и по проведению различных операций над ними. Мы также рассматривали методику осуществления решения заданий, связанных с выяснением концентрации веществ, их процентное содержание и сложные проценты.

Во второй главе мы анализировали различия в изложении темы «Проценты» по учебникам Г.В. Дорофеева и Н.Я. Виленкина [1], [9]. Результатом проведенной работы стала выявленная закономерность: основная доля решения задач на проценты предусматривается большинством в пятом и шестом классах средней школы, в то время как в старших классах тема «Проценты» лишь повторяется, и то в незначительном объеме. Именно поэтому выпускники школ не обладают в необходимой степени освоенными умениями и навыками справляться с задачами по данной тематике. Дополнительным результатом стал показатель анализа материалов ЕГЭ, где встречаются задачи на проценты в обязательном порядке. Необходимость подготовки обучающихся, таким образом, не требует дополнительного подтверждения. В связи с этим были прорешаны все варианты из сборника типовых тестовых заданий ЕГЭ 2017 года.

Гипотеза, сформулированная во введении к работе, получила свое подтверждение результатами исследования. Знакомство с темой «Проценты» протекает тем более эффективно, чем лучше усвоено было понятие в пятом-шестом классах средней школы. Если у ученика сформировалось формальное понимание, бороться с последствиями приходится усиленными стараниями. Чтобы результативное понимание в средней школе не сошло на нет, необходимо на протяжении всего школьного курса продолжать вспоминать и решать содержательные задачи с процентами в седьмых-девятых классах. Для наибольшей эффективности следует также проводить элективный курс в старших классах, таким образом, подготовка учащихся приобретет системный характер, что в свою очередь позволит хорошо подготовиться к заданиям по данному разделу, что включаются в тесты ЕГЭ.

Наработки и результаты исследования могут быть применены учителями для более полного и глубокого освоения темы «Проценты» в рамках учебной программы, а также для проведения элективных курсов для старшеклассников перед выпускными экзаменами.

Как и всякая актуальная проблема науки, тема «Проценты» не может считаться изученной полностью, освещенной со всех сторон, окончательно закрытой для прочих изысканий. Работа по систематизации и анализу представленных на современном этапе учебных программ, материалов, вариантов ЕГЭ, может быть продолжена в перспективе. Комплекс задач, связанных с применением в их решении процентов, более широк, чем охваченный нами в этой работе: перспективой исследования являются задачи на работу, задачи на движение. Цель, заявленная во введении была достигнута, наше исследование по обозначенной теме можно считать завершенным.

Литература

1. Учебник: Математика, 5 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Н.Я.Виленкин и др. – М.: Мнемозина, 2014.
2. Учебник: Математика, 6 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Н.Я.Виленкин и др. – М.: Мнемозина, 2013.
3. Учебник: Математика, 6 класс Г.В. Дорофеев, И.Ф. Шарыгин, С.Б. Суворова, 2010.
4. Балаян Э.Н. Новые олимпиадные задачи по математике для подготовки к ГИА и ЕГЭ: 5-11 классы - Ростов н/Д: Феникс, 2013. 316 с.
5. Березанская Е.С. Методика арифметики: для педагогических институтов и учителей.
6. Волович М.П, Обыкновенные дроби. Проценты.
7. Депман И.Л. История арифметики.
8. Математика 7–8 (под редакцией Дорофеева Г.В.) – М., 2010.
9. Типовые тестовые задания ЕГЭ, 2017, под редакцией И.В. Ященко.
10. Контрольно-измерительные материалы. - М.-2017.
11. ЕГЭ. Контрольно-измерительные материалы. - М.-2017.
12. Кочагин В.В. ЕГЭ 2011 Математика сборник заданий. Москва 2010.
13. Арифметика 6 (под редакцией Никольского С.М.), М, 2007.
14. Водинар М.И., Лайкова Г.А., Рябова Ю.К. Решение задач на смеси, растворы и сплавы методом уравнений. // Математика в школе.- 2001.- №4.
15. Математика. Дидактические материалы. А.Г. Мерзляк – «Вентана - Граф», 2016
16. Web – сайт www.festival.ru «Сложные проценты. Решение задач»
17. Web – сайт www. onlinemschool.com «Сложные проценты»
18. Web – сайт http://www.depcalc.ru «Простые и сложные проценты»