МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

МЕТОДИКА РАБОТЫ С ОШИБКАМИ УЧАЩИХСЯ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05 Педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513/086-5-1
Сюмкина Кристина Олеговна

Научный руководитель:
Суховиенко Елена Альбертовна,
доктор пед. наук, доцент

Проверка на объем заимствований:
51,35 % авторского текста

Работа рекомендована к защите
рекомендована/не рекомендована

« 22 » марта 2018 г.
зав. кафедрой математики и методики обучения математике,
Суховиенко Елена Альбертовна

Челябинск
2018

Оглавление

Введение

В настоящее время в связи с переходом школьного образования на стандарты второго поколения особенно актуальным становится развитие личности обучающегося на основе освоения универсальных учебных действий.

Развитие личностных качеств и способностей школьника опирается на накапливание ими опыта различной деятельности: учебно-познавательной, практической, социальной. Поэтому особое место отводится деятельностному, практическому содержанию образования, конкретным приемам деятельности, применению приобретённых знаний и умений в реальных жизненных ситуациях.

Овладение учащимися универсальными учебными действиями формирует возможность самостоятельного успешного усвоения новых знаний, умений и компетентностей, включая организацию усвоения, т.е. умение учиться.

Работа над ошибками – одна из основных форм преодоления пробелов в знаниях и умениях учеников. Эта работа приносит пользу только тогда, когда она находится постоянно в центре внимания учителя.

Разбор ошибок полезен ещё потому, что, ознакомившись с какой-нибудь ошибкой и проанализировав её, ученик в некоторой степени застраховывает себя от повторения таких ошибок в будущем. Помимо этого, работа над ошибками может служить хорошим средством для достижения точности определений и формулировок теорем. Разбирая ошибки, которые появляются в процессе учёбы, учащиеся учатся обрабатывать каждое слово в своём ответе. Это способствует формированию коммуникативных универсальных действий: вырабатывается умение с полнотой и точностью выражать свои мысли в соответствии с задачами и условиями коммуникации. Ученики учатся высказывать суждения с использованием математических терминов и понятий, формулировать вопросы и ответы в ходе выполнения задания.

Большинство ошибок напрямую не связаны с наличием или отсутствием знаний, хотя доведение некоторых вычислительных операций до автоматизма несколько снижает вероятность их появления.

Надо осуществлять процесс обучения правилам с помощью специальной модели с использованием приема, активизирующего рефлексивную деятельность учеников по предупреждению и исправлению ошибок, которые возникают в результате формального усвоения правил. Использование рефлексии учебной деятельности ведет к формированию регулятивных УУД у учащихся.

Для исправления и предупреждения многих ошибок важно сформировать у школьников навыки самоконтроля. Самостоятельная работа обучающихся над ошибками обеспечивает более осознанный их анализ и анализ собственных действий по решению конкретной задачи, что оказывает благоприятное влияние на качество получаемых знаний и стимулирует развитие логического мышления.

Каждый учитель знает, что планомерное и систематическое повторение и есть главный помощник в ликвидации пробелов, а, следовательно, и ошибок.

О значении своевременного реагирования на ошибки известный чешский педагог Ян Амос Коменский писал: «Любая ошибка превращается из маленького «снежка» в большой «снежный ком» неуспеваемости, если на эту ошибку сразу же не реагировал учитель при непременном привлечении самого учащегося к её осознанию и последующему труду, направленному на её полное преодоление».

На каждом уроке учитель сталкивается с различными видами ошибок, с необходимостью их исправления. Учитель поступает правильно, если не торопится сам исправить ошибку, а привлекает для этого учащихся. Нужно дать понять ученику, к чему может привести его ошибка.

Проблема моего исследования заключается в том, что в приемах работы над ошибками отсутствует диагностика причин ошибок, не уделяется должного внимания работе по формированию рефлексивной деятельности учащихся и ее использованию в работе по предупреждению и исправлению математических ошибок.

Объект исследования: процесс обучения математике в основной общеобразовательной школе.

Предмет исследования: методика работы с ошибками учащихся как средство формирования универсальных учебных действий.

Гипотеза исследования: если в процессе обучения математике провести анализ материала на предмет возникновения ошибок, обучить учащихся поиску ошибок, организовывать работу учащихся над типичными ошибками, то это будет способствовать повышению качества математической подготовки учащихся, а также формированию универсальных учебных действий у обучающихся.

Цель исследования: теоретическое обоснование и разработка такой методики обучения математике, которая создавала бы условия для развития рефлексивной деятельности учащихся, способствующей предупреждению и устранению типичных ошибок, а также формированию универсальных учебных действий.

В соответствии с целью исследования определены следующие задачи данной работы:

1. Выяснить причины возникновения ошибок учащихся при обучении.
2. Рассмотреть процесс работы над ошибками учащихся и формирование универсальных учебных действий.
3. Изучить способы устранения ошибок учащихся при обучении математике.
4. Проанализировать тему: «Дробные числа» с учетом возможных ошибок и формирования универсальных учебных действий учащихся.
5. Представить методику работы с ошибками учащихся при изучении темы: «Дробные числа».

В данной работе использовались следующие методы: изучение литературы, анализ, синтез, методы теоретического обобщения.

В соответствии с целью и задачами данного исследования определена структура дипломной работы, которая состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

Глава 1. Ошибки учащихся, возникающие в процессе обучения математике, и формирование универсальных учебных действий

1.1. Природа возникновения ошибок учащихся, их типизация

Деятельность, направленная на работу над ошибками требует их систематизации. При этом главную роль должны сыграть группы ошибок, которые объединены общими причинами их появления, общей методикой работы над ними. Такая систематизация ошибок позволяет наметить пути их исправления и предупреждения этих ошибок в дальнейшем.

В качестве основания для систематизации ошибок в традиционной методике обучения выбирались разнообразные принципы: предметный (сущность ошибки), причинный (причина возникновения ошибки), тематический (тема, при изучении которой появляется ошибка), деятельностный (вид учебной деятельности, при выполнении которой допускаются ошибки), количественный (число учащихся, допустивших ошибку).

При методической работе с ошибками выделяют два основных понятия:

1) сущность математической ошибки – правило, требование, прием решения, которые нарушены или не соблюдены;
2) причина появления ошибки – субъективное состояние интеллектуальной сферы человека или ситуации его деятельности.

Причину появления ошибки можно назвать побудителем, подталкивающим к выполнению ошибочных действий или выбору неправильного ответа. Суть математической ошибки нетрудно установить по внешнему выражению действия ученика: неправильно произносит или пишет, неверно выполняет какое-то действие и т. д.

Причина ошибки, чаще всего, внешне не проявляется. Задача учителя определить, что явилось побудителем ошибочных действий. Это позволит правильно организовать работу по предупреждению различного рода ошибок.

Причины возникновения ошибок у обучающихся в процессе обучения могут быть различны, так как они связаны с психологическими, педагогическими и методическими особенностями самого процесса обучения.

Психологический анализ математических ошибок обучающихся ставит своей целью вскрыть природу и объяснить причины появления ошибок.

Выяснить ошибку – обозначает, в первую очередь, довести до сознания школьников ее причину, а потом противопоставить возникшим у него неверным обобщениям, аналогиям то или другое правило. Собственно диагностика действительных причин ошибок у каждого из учеников предоставляет возможность осуществлять удачную адресную коррекцию как сложившихся у учеников умственных действий по решению предметных задач, так и знаний, на основе которых эти действия формируются [1].

Для формирования устойчивых умений и навыков обучающиеся должны решить достаточное количество задач одного и того же типа по изучаемой теме. Но в психологии установлено, что выполнение однотипных заданий приводит к ряду негативных явлений: учащиеся начинают решать задачи по аналогии с предыдущими, не вдумываясь в условие, опуская отдельные существенные рассуждения, из-за этого в решениях появляются ошибки. Подобные психологические причины ошибок следуют из следующих недостатков учебных пособий:

- в тексте учебников алгоритмы и правила вводятся без рассмотрения необходимого количества примеров;
- в учебниках превалирует однообразие форм предъявления задачи;
- в системе задач не выдержана оптимальная комбинация задач, для решения которых необходима репродуктивная и продуктивная деятельности;

- отсутствуют задачи, помогающие ученикам понять способ решения (рефлексивные задачи);
- система упражнений в учебнике не предоставляет нужной пропедевтической и закрепительной работы [2].

Возможны психологические причины математических ошибок, которые связаны:

- с психологическими факторами (ослабление психических функций: внимания, памяти, мышления);
- интерференцией навыков – тормозящее взаимодействие навыков, при котором уже сложившиеся навыки осложняют формирование новых навыков либо уменьшают их эффективность;
- доминированием ассоциативных связей над смысловыми.

Причины возникновения ошибок в процессе обучения могут быть связаны не только с учебной деятельностью школьника, но и с работой учителя с учеником. Потому что учебная деятельность ученика осуществляется во взаимодействии с учителем, организатором и руководителем этой деятельности является учитель. Именно учитель ставит цели и задачи предстоящей деятельности, дает учащимся для этой деятельности всю требующуюся информацию, задания для конкретных действий [1].

Причины возникновения ошибок, обусловленные несовершенством организации учебного процесса:

- отсутствие работы учителя по предупреждению у учеников стремления к автоматическому применению изучаемых фактов;
- у обучающихся не формируются навыки самоконтроля, требующиеся для развития рефлексивной деятельности;
- ведется недостаточная подготовительная работа для осознанного овладения материалом, не рассчитано его целесообразное закрепление и связь с будущим материалом;

- в учебном процессе применяются только готовые задачи;
- учащихся не учат составлять задачи;
- задачи главным образом задействуют для закрепления готовых знаний или для их повторения [2].

Также к причинам возникновения ошибок по математике у учащихся можно отнести следующее:

- пропуски уроков, приводящие к незнанию материала, пробелам в знаниях;
- поверхностное, невдумчивое восприятие нового материала, приводящее к непониманию его;
- неряшливый, неаккуратный почерк ученика;
- чрезмерная нагрузка и недостаточный сон, приводящие к снижению внимания, скорости мышления и, как следствие, к многочисленным ошибкам;
- кратковременное или полное переключение внимания с одной деятельности на другую (учебную или внеучебную), приводящее к утрате только что воспринятого материала;
- низкая скорость выполнения мыслительных операций;
- низкая мотивация изучения учебного материала.

Типичные математические ошибки учащихся есть свидетельство несовершенства используемой учителями методики. Быстрое устранение ошибок - лишь необходимое, но не достаточное условие педагогики гуманизма в обучении математике. Ведь гуманизация образования – это направленность через учебный предмет к личности конкретного ребенка. Реализация идей гуманизма предполагает включение в число исходных положений, определяющих функционирование методической системы обучения математике, структуры личности, закономерностей ее развития [3].

Польский математик Г. Штейнгауз, указывая значимость работы над математическими ошибками для оживления мыслительной деятельности учеников, писал, что если учащегося заверить, что в предложенном ему доказательстве есть ошибка, то можно быть уверенным даже без специальной проверки, что материал будет изучен полностью и очень тщательно. По этой причине формирование перечня математических ошибок и применение его в учебных целях оказывается одним из важных факторов улучшения качества эффективности обучения.

1.2. Процесс работы над ошибками учащихся и формирование универсальных учебных действий

Для определения сути допускаемых учениками ошибок нужно проконтролировать ход рассуждений, который приводит к ошибочному решению, определить этап, на котором возникают такие ошибки. Опыт показывает, что зачастую ученику непонятен не весь материал, а только некоторая его часть. Выявив, что именно непонятно ученику, можно сконцентрировать на этом материале всё внимание, не отвлекаясь на те моменты, которые уже усвоены.

При отсутствии должной части самостоятельности при работе над ошибками, осуществляемые учеником действия совершенно не контролируются, допущенные ошибки не замечаются, причины их происхождения остаются невыясненными, что влечет к их повторению. При самостоятельной работе учащихся у них постепенно развиваются стремление и умение разобраться в задаче, планировать ее решение, продумывать возможные варианты действий и прогнозировать их результаты, что является непременным условием для формирования регулятивных УУД: умение самостоятельно планировать пути достижения целей, в том числе альтернативные, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных задач, умение соотносить свои действия с планируемыми результатами, осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией [2].

Например, ученик многократно применяет к преобразованию алгебраических выражений формулы квадрата суммы и разности двух чисел, но получив задание: представить в виде многочлена выражение $(-x-5)^2$, теряется. Следует предложить учащемуся ответить на вопрос: что вызывает затруднение? И как преобразовать выражение, чтобы можно было применить одну из формул в том виде, в каком они предложены в учебнике? Благодаря такой организации деятельности учащегося у него формируются такие регулятивные УУД, как понимание причины своего неуспеха и нахождение способа выхода из сложившейся ситуации.

Другой пример неосознанного применения алгоритма: получив уравнение $\sin x=1{,}2$, ученик автоматически ищет его корни по хорошо известной формуле, не обращая внимания на недопустимые значения функции синуса. Полезно предложить ученику представить наглядное решение на тригонометрическом круге, что, в свою очередь, приведет к формированию следующих регулятивных УУД: использование различных приемов проверки правильности выполнения задания, внесение нужных дополнений и коррективов в способ действия в случае расхождения эталона и его продукта, обнаружение и устранение ошибок.

Навыки самоконтроля состоят из двух частей:

a) умения обнаружить ошибку;
b) умения её объяснить и исправить.

В процессе обучения применяются несколько приёмов самоконтроля, помогающие обнаружить допущенные ошибки и своевременно их исправить. К ним относятся:

- проверка вычисления и тождественного преобразования путём выполнения обратного действия или преобразования;
- проверка правильности решения задач путём составления и решения задач, обратных к данной;

- оценка результата решения задачи с точки зрения здравого смысла;
- проверка аналитического решения графическим способом.

Выработке навыков самоконтроля помогает и приём приближённой оценки ожидаемого результата. Установление возможных пределов ожидаемого ответа предупреждает недочёты описок, пропуска цифр. Каждый из этих приемов позволяет формировать у учащихся такие регулятивные УУД, как использование рефлексии учебной деятельности, понимание причин своего неуспеха и нахождение способов выхода из этой ситуации, обнаружение и устранение ошибок логического и арифметического характера, внесение необходимых дополнений и коррективов в план и способ действия в случае расхождения эталона и его продукта.

Например, задача: «За неделю завод выпустил 130 холодильников, выполнив месячный план на 25%. Сколько холодильников должен выпустить завод за месяц по плану?».

Пусть решение ученика выглядит так: $\frac{130 \cdot 100}{25} = 52.$ Ошибка становится очевидной, если перед решением ученик прикинет в уме: «За неделю завод выпустил 130 холодильников. Следовательно, за месяц он выпустит больше. Значит, ответ должен быть больше, чем 130». Такая прикидка в уме полезна при решении задач с дробными числами и процентами, а также способствует развитию у учащихся регулятивных УУД таких, как использование различных приемов проверки правильности выполнения задания, оценивание полученного результата, внесение необходимых дополнений и коррективов в план и способ действия в случае расхождения эталона и его продукта. Благодаря чему у учащихся формируется умение оценивать правильность выполнения учебной задачи, собственные возможности её решения, владение основами самоконтроля.

Сведению ошибок к минимуму способствуют следующие профилактические меры:

- тексты письменных заданий должны быть удобными для восприятия: грамотно сформулированными, хорошо читаемыми;
- активная устная отработка основных ЗУН, регулярный разбор типичных ошибок;
- при объяснении нового материала предугадать ошибку и подобрать систему заданий на отработку правильного усвоения понятия. Акцентировать внимание на каждом элементе формулы, выполнение разнотипных заданий позволит свести ошибочность к минимуму;
- подбирать задания, вызывающие интерес, формирующие устойчивое внимание;
- прочному усвоению (а значит, отсутствию ошибок) способствуют правила, удобные для запоминания, четкие алгоритмы, следуя которым заведомо придешь к намеченной цели.

В математике, как ни в какой другой науке, особенно сильна взаимосвязь материала. Изучение и понимание последующего невозможно без знания предыдущего, отсюда неизбежность повторения на каждом уроке. При объяснении нового материала следует использовать ряд определений и теорем, которые были изучены ранее.

Например, перед изучением темы «Теоремы сложения» следует повторить следующие теоретические вопросы:

1. Четные и нечетные функции.
2. Изменение тригонометрических функций при возрастании и убывании аргумента.
3. Знаки тригонометрических функций.
4. Таблицы значений тригонометрических функций.

А также выполнить задания:

1. Определите четность и нечетность тригонометрической функции:

a) $y = -cosx + x^2$;

b) $y = sin^2x$;

c) y= $\frac{tgx}{x}$.

2. Найдите область определения функции y= $x^2 - 6x + 10$.
3. При каких значениях x функции y= $sinx$ и y= $cosx$ принимают одинаковые значения?

Допускаемые учеником ошибки свидетельствуют не только о недостатках его знаний, но и о потенциальных возможностях. Ошибки служат также показателем проблем, которые могут быть поставлены перед учеником, а иногда они приводят к созданию проблемных ситуаций, которые необходимы в данный момент для развития действий.

Очень оживлённо воспринимаются учащимися «Задачи на выявление ошибки». Такие задания ведут к формированию у учащихся регулятивных УУД: умению соотносить свои действия с планируемыми результатами, осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией. Речь идёт не только о софизмах, но и об ошибках, которые допускают сами учащиеся. Не надо специально исправлять каждое ошибочное утверждение учащегося, лучшим образом будет поставить это утверждение на рассмотрение всего класса и добиться осознанного исправления ошибки, что также способствует развитию коммуникативных УУД у школьников. Если они и не допускают ошибок, то всё же нередко целесообразно проверить, насколько они «устойчивы» против типичных ошибок [4].

Например, найти ошибки:

a) $c^2 - 2cd + d^2 = (c - d)^2$;

b) $16a^6 + 32ab^2 + 16b^4 = (4a^3 + 4b^2)^2$;

c) $x^2 - 10xy + 100y^2 = (x - 10y)^2$;

d) $(x^2 - 5)^2 = x^4 - 25$.

Процесс отыскания и исправления ошибок самими школьниками под руководством учителя можно сделать поучительным для учеников. В результате этого изучение и анализ ошибок оказывается эффективным средством в развитии познавательного интереса к изучению математики.

Таким образом, значительную роль в предупреждении ошибок представляет продуманная организация изучения нового материала. Изучение нового материала необходимо организовывать таким образом, чтобы обучающийся был активным участником этого процесса. Не нужно бояться, если при первом изложении материала учеником будут допускаться ошибки, высказываться необоснованные выводы. Важно, чтобы те или иные ошибки в понимании материала исправлялись в зародыше и учащиеся воспринимали материал осознанно.

Такому подходу к изучению нового материала способствует возникновение проблемной ситуации и её решение учениками под руководством учителя. На таких уроках учащиеся проходят через следующие стадии: поиск нового, возможное появление ошибок в процессе поиска нового, обоснованное опровержение этих ошибок, снова поиски, в результате которых приходят к правильной догадке, и, наконец, доказательство составленного в поисках предложения. Всё это способствует развитию математического мышления.

1.3. Способы устранения и профилактика ошибок учащихся при обучении математике

В работе Я.И. Груденова [5] указано несколько способов устранения ошибок учащихся при обучении математике:

- однотипность упражнений;
- принцип непрерывного повторения;
- контрпримеры;
- принцип сравнения;
- принцип полноты.

1. Однотипность упражнений

Известно, что для формирования прочных навыков однотипные упражнения необходимы. В то же время они приводят к механическому, неосознанному решению, ошибкам и т.д. Вероятно, из-за этого наблюдаются противоположные методические подходы относительно реализации принципа однотипности упражнений. Авторы учебников и задачников придерживаются часто самых противоположных точек зрения относительно однотипности системы упражнений. Это можно объяснить отсутствием в методике математики единых теоретических установок.

При изучении каждой темы по математике учащиеся должны приобрести умения и навыки решения задач. При помощи ассоциаций это возможно лишь при неоднократном решении заданий данного типа. Количество однотипных задач можно уменьшить лишь постепенно, по мере развития учащихся и накопления ими знаний и навыков по данному предмету. Учителя по опыту знают, что при изучении новой темы слабоуспевающим учащимся требуется выполнить большее число тренировочных упражнений, чем хорошо успевающим. Но методика урока строится обычно так, что на дом всем учащимся задают одинаковое число упражнений, а на самом уроке сильные учащиеся успевают решить больше задач. Следовательно, слабоуспевающие учащиеся упражняются меньше, и это – одна из причин их отставания и замедленного развития. Такое расхождение между потребностью и действительностью должно приводить к ослаблению внимания.

Для обеспечения на уроках устойчивого внимания всех учеников и формирования у них прочных умений и навыков нужно сохранить однотипность системы упражнений, а для нейтрализации ее отрицательных последствий одновременно применять другие принципы.

2. Принцип непрерывного повторения

В однотипную систему упражнений по новой теме с первого момента ее изучения включаются задачи из предшествующих разделов.

Цель их включения – устранение отрицательного влияния ассоциаций и однотипных заданий. При этом одновременно осуществляется систематическое, непрерывное повторение изученного материала.

Условия применимости принципа непрерывного повторения:

I. Последовательность упражнений определяется не столько автором задачника, сколько учителем. Только он может, учитывая уровень знаний и развитие своих учеников, при подготовке и по ходу урока изменять количество задач одного типа, следующих друг за другом.

II. Основная цель урока – изучение новой темы, в связи с этим большая часть задач должна быть по новой теме.

III. Из пройденных тем предпочтительно подбирать такие упражнения, которые по отдельным внешним признакам сходны с упражнениями новой темы.

IV. При решении комбинированных задач, насыщенных различным материалом из предшествующих разделов, принцип непрерывного повторения осуществляется сам собой. Но когда удается решать последовательно много комбинированных задач, то необходимость чередования задач разных типов ощущается наиболее остро.

V. При применении принципа непрерывного повторения общее количество упражнений того или иного типа фактически не уменьшается в сравнении с однотипной системой. Только упражнения такого типа распределяются на более длительное время.

3. Контрпримеры

Контрпримером будем называть любую задачу, помогающую выявить, а следовательно, и устранить имеющиеся у обучающихся ошибочные ассоциации. В роли контрпримеров могут выступать задачи с неполными или противоречивыми условиями и любые другие упражнения, провоцирующие учеников на ошибку. Мы именно провоцируем, а учащиеся догадываются, что это своего рода игра. Они, наоборот, стараются не ошибиться, внимание их усиливается.

Следует учесть ряд существенных организационных приемов. Как правило, контрпримеры решаются в классе под наблюдением учителя и ошибки сразу анализируются. Тогда в памяти учащихся сохраняется не сама ошибка, а ее анализ. По этой причине нежелательно включать контрпримеры в домашнее задание. Если учитель соблюдает игровые правила и по его внешнему поведению учащиеся не могут догадаться, в какой момент дается контрпример, то они начинают ожидать контрпримеры какую-то часть урока. Такое ожидание усиливает внимание учащихся. При систематическом использовании контрпримеров напряженное внимание может перейти в привычку. Таким путем развивается внимание учащихся. Разумеется, контрпримеры используются не сами по себе. Они лишь изредка включаются в систему упражнений.

4. Принцип сравнения

Под принципом сравнения в психолого-педагогической литературе понимают чередование упражнений на прямые и обратные операции и любых других задач, когда желательно показать их взаимосвязь, сходство и различия. Некоторые авторы используют термин «перемежающееся противопоставление» для подчеркивания важности чередования упражнений.

В зависимости от содержания изучаемого материала, цели урока и других соображений учитель может выбирать любой из трех принципов: непрерывного повторения, сравнения, включения в систему упражнений контрпримеров. Каждый из этих принципов в сочетании с однотипной системой позволяет ослабить ее недостатки и сохранить ее положительное влияние.

Принцип сравнения удобно использовать при одновременном изучении некоторых тем: сложения и вычитания дробей, умножения и деления положительных и отрицательных чисел, решения задач на нахождение дроби от числа и числа по величине его дроби и т.д.

Систематическое включение контрпримеров в систему упражнений приводит к тому, что, ожидая их, учащиеся начинают все чаще и чаще контролировать свои результаты, получаемые при решении задач, все реже допускают ошибки по невнимательности. Таким образом, у них развиваются внимание, самоконтроль.

5. Принцип полноты

Система упражнений удовлетворяет принципу полноты, если совокупность её задач и способы их решения не способствуют формированию ошибочных ассоциаций и позволяют ученикам крепко усваивать все требующиеся вопросы изучаемой темы.

Часто принцип полноты нарушается учителями. Из-за медленного темпа работы на уроках, сокращения числа уроков и по другим причинам многие учителя не успевают рассмотреть с учащимися часть задач из школьных учебников. При этом далеко не каждый учитель умеет отобрать задачи, не нарушая определенной целостной системы, данной в учебнике.

Система упражнений должна удовлетворять дидактическим принципам:

I. Задачи должны подбираться с последовательным нарастанием трудности.

II. Многие авторы подчеркивают, что система упражнений должна содержать задачи, допускающие «изящные» решения. Обсуждение на уроках рациональных, «изящных» способов решения задач, предложенных отдельными учащимися, повышает интерес всего класса, усиливает внимание учащихся.

III. Особенно следует остановиться на дидактическом принципе доступности. Нарушение дидактического принципа доступности происходит в основном по двум причинам:

- иногда из-за недостатков самой программы, учебников, в которых сначала предлагают недоступные для многих учащихся задачи, а затем рекомендуют опускать их;
- часто из-за того, что учителя не учитывают возможностей учащихся своих классов [5].

С.Р. Мугаллимова советует для предупреждения ошибок, которые могут возникнуть у учащихся и закрепиться в дальнейшем:

1) необходимо ответственно и обдуманно подходить к методическим приёмам организации деятельности учеников на следующих этапах изучения нового материала:
- введение нового понятия;
- формирование операции;
- формирование алгоритма решения (типовой) задачи;
2) требуется продумать использовать в работе набор «провоцирующих заданий», в которых явно выражены типичные (правильные и неправильные) рассуждения;
3) время от времени включать задания на поиск ошибок в готовых решениях;
4) специально организовать и хорошо продумать работу над ошибками после проверки самостоятельной работы обучающихся;
5) включить наиболее проблемные задания, в которых возникают типичные ошибки, в устный счёт, математические диктанты и другие формы работы [6].

Также можно еще добавить несколько профилактических мер:

- тексты письменных заданий должны быть удобными для восприятия, грамотно сформулированными, хорошо читаемыми;
- регулярный разбор типичных ошибок;
- при объяснении нового материала предугадать ошибку и подобрать систему заданий на отработку правильного усвоения понятия;

- подбирать задания, вызывающие интерес, формирующие устойчивое внимание у учащихся;
- прочному усвоению (а значит, отсутствию ошибок) способствуют правила, удобные для запоминания, четкие алгоритмы, следуя которым заведомо придешь к намеченной цели [6].

Такие меры позволяют свести ошибки к минимуму. Также каждый учитель знает, что планомерное и систематическое повторение и есть главный помощник в ликвидации пробелов, а, следовательно, и ошибок. В математике, как ни в какой другой науке, более всего сильна взаимосвязь материала. Изучение и понимание последующего невозможно без знания предыдущего, отсюда неизбежность повторения на каждом уроке. При объяснении нового материала следует применять перечень определений и теорем, изученных ранее.

1.4. Контроль и самоконтроль учебной деятельности учащихся

Без сомнения, при проверке работ учитель обязан отмечать все ошибки учеников – математические, стилистические и грамматические. Многие учителя исправляют ошибки сами. Однако при исправлении ошибки учителем, на долю ученика остается «согласиться» с исправлением и успокоиться. Перестройка школы требует усиления самостоятельной работы учеников на всех этапах обучения. Важно, чтобы и при разборе ошибок учащийся сам установил, в чем его ошибка, умел найти источник появления ее и способы исправления. Вот почему достаточно того, что учитель указывает место ошибки. Практика такого подхода к исправлению ошибок в письменных работах достаточна широка и оправдала себя. Для указания места ошибки вводятся условные знаки: для грубых ошибок две черты, для негрубых и случайных – одна черта и для недочетов – волнистая линия.

При домашнем анализе работ учитель не может ограничиться только проверкой и сопоставлением ответов или беглым просмотром хода рассуждений или последовательности преобразований. Надо тщательно просматривать все преобразования, вычисления и рассуждения. Результаты поспешной проверки работ могут поставить учителя в неприятное положение. При анализе работ надо систематизировать ошибки и недочеты, выделить типичные и массовые ошибки, в первую очередь принципиальные, грубые, связанные с нарушением основных законов математики. На таких ошибках и должно быть сосредоточено внимание учащихся при разборе ошибок в классе. Этот разбор никак нельзя ограничивать сообщением каждому ученику его ошибок и проставленной за работу оценки. Ошибки надо разбирать, при этом к разбору ошибок и причин, породивших их, следует привлекать учеников, в первую очередь допустивших ошибки и пассивных в общей работе. Известно, что иногда достаточно перед учениками поставить вопрос, можно ли так делать, как допустивший ошибку «спохватывается» и сам указывает, в чем ошибка и как ее исправить. Таким образом, этап разбора ошибок становится обучающим и мобилизующим мысль ученика.

Вопросы и задачи, вызвавшие затруднения у многих учеников, необходимо особенно детально и тщательно разбирать в классе, иногда следует даже провести дополнительные упражнения. Если в классе проведен тщательный анализ ошибок (установлены источники их и намечены пути их и намечены пути их исправления), то учитель может предложить ученикам, допустившим ошибку, переделать задачу или внести нужные исправления, не сопровождая их указаниями на соответствующие теоремы, правила, законы. Если же ошибка не была массовой или явилась повторной, то рекомендуется предложить ученику дома произвести детальный разбор ее, то есть внести исправления и сделать нужные ссылки на соответствующие правила.

Анализ работ учитель должен провести к очередному уроку по предмету и на этом уроке разобрать с учениками ошибки. Отсрочка проверки и разбора работ в классе ведет к потере интереса учащихся к разбору.

Для исправления и предупреждения многих ошибок важно сформировать у школьников навыки самоконтроля. Эти навыки состоят из двух частей:

а) умения обнаружить ошибку;

б) умения её объяснить и исправить [8].

Выработке навыков самоконтроля помогает и приём приближённой оценки ожидаемого результата. Установление возможных пределов ожидаемого ответа предупреждает недочёты типа описок, пропуска цифр.

Правила самопроверки, необходимые учащемуся для уменьшения количества ошибок:

1) ошибки чаще всего возникают в простых ситуациях. Нужно тщательно проверять, верно ли списано условие задачи.
2) окончанию решения задачи обычно уделяется минимум внимания – все трудности позади. Но именно в конце чаще всего появляются ошибки, поэтому начинать поиск ошибки лучше с конца.
3) подставляя полученное значение корня последовательно от конца к началу в каждое из написанных соотношений, можно относительно быстро найти ошибочный переход.
4) после каждого перехода нужно «оглянуться назад», проверить полученный результат обратным преобразованием.
5) при работе с громоздким выражением полезно разбить его на небольшие «блоки» и упростить каждый из них. При решении системы уравнений следует сначала разобраться с каждым уравнением в отдельности.

Если учащийся проверит свою работу, используя эти правила, то шанс, что ошибка останется, намного снижается [9].

Глава 2. Методика работы по исправлению и предупреждению ошибок в обучении математике

2.1. Анализ темы «Дробные числа» с учетом возможных ошибок и формирования универсальных учебных действий

С целью выявления возможных ошибок учащихся и возможности использования этих ошибок при формировании универсальных учебных действий был проведен анализ главы: «Дробные числа» учебника «Математика, 5» (Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд), результаты которого предоставлены в таблице.

Тема урока	Требования к уровню подготовки обучающихся (результаты)		Возможные ошибки учащихся
	Предметные	Метапредметные	
Окружность и круг	Умеют изображать окружность и круг, указывать радиус и диаметр, моделировать разнообразные ситуации расположения объектов на плоскости. Знают, каким образом соотносить реальные предметы с моделями рассматриваемых фигур	Регулятивные (Р) - определяют последовательность промежуточных целей с учетом конечного результата, составляют план и последовательность действий, выполняют действие по заданному образцу, оценивают и в случае необходимости корректируют полученный результат, используют рефлексию учебной деятельности	Путают на чертеже радиус и диаметр. Неверное построение окружности заданного радиуса от данного центра
Доли. Обыкновенные дроби	Умеют описывать явления и события с использованием чисел, контролировать правильность и полноту выполнения алгоритма арифметического действия	(Р) - используют различные приёмы проверки правильности выполнения задания (опора на изученные правила, алгоритм выполнения арифметических действий)	В дроби то, что стоит над чертой называют знаменателем, то, что под чертой – числителем. Говорят, что числитель показывает на сколько долей делят, знаменатель показывает сколько таких долей взято.

			Неверно склоняют числительные при чтении обыкновенных дробей. При выделении части от фигуры путают, что писать в числитель, что – в знаменатель
Сравнение дробей	Умеют объяснять ход решения задачи, сравнивать разные способы вычислений, выбирая удобный, исследовать ситуации, требующие сравнения чисел, их упорядочения	(Р) - планируют деятельность, самостоятельно двигаются по заданному плану, оценивают и корректируют полученный результат, запоминают правило	Равные дроби отмечают на координатном луче в разных местах. Точку на координатном луче, имеющую большую координату, отмечают левее точки, имеющей меньшую координату
Правильные и неправильные дроби	Умеют указывать правильные и неправильные дроби; объяснять ход решения задачи, выделять целую часть из неправильной дроби и записывать смешанное число в виде неправильной дроби	(Р) - используют различные приёмы проверки правильности нахождения значения числового выражения	Дробь, числитель которой меньше знаменателя называют неправильной, дробь, числитель которой больше знаменателя называют правильной. Считают, что правильная дробь больше единицы, неправильная дробь – меньше
Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями	Умеют складывать и вычитать дроби с одинаковыми знаменателями	(Р) - обнаруживают и устраняют ошибки логического (в ходе решения) и арифметического (в вычислении) характера. Самостоятельно выбирают способ решения задания. В диалоге с учителем совершенствуют критерии оценки и пользуются ими в ходе оценки и самооценки, понимают причины своего неуспеха и находят способы выхода из этой ситуации	Складывают и вычитают числители и знаменатели дробей
Деление и дроби	Умеют записывать в виде дроби частное и дробь в виде частного.	(Р) - вносят необходимые дополнения и коррективы в план и способ действия в случае расхождения	Делимое записывают в знаменатель дроби, делитель – в числитель дроби

	Знают, как решать простейшие уравнения на основе зависимостей между компонентами и результатом арифметических действий	эталона, реального действия и его продукта, обнаруживают и устраняют ошибки логического (в ходе решения) и арифметического (в вычислении) характера, понимают причины своего неуспеха и находят способы выхода из этой ситуации	
Смешанные числа	Умеют представлять число в виде суммы целой и дробной части; записывать в виде смешанного числа частное	(Р) - вносят необходимые дополнения и коррективы в план и способ действия в случае расхождения эталона, реального действия и его продукта, обнаруживают и устраняют ошибки логического (в ходе решения) и арифметического (в вычислении) характера, понимают причины своего неуспеха и находят способы выхода из этой ситуации	При выделении целой части из неправильной дроби знаменатель делят на числитель, делитель записывают в числитель дробной части, а остаток – в знаменатель. При представлении смешанного числа в виде неправильной дроби целую часть умножают на числитель дробной части, к полученному произведению прибавляют знаменатель дробной части
Сложение и вычитание смешанных чисел	Умеют складывать и вычитать смешанные числа. Знают математическую терминологию при записи и выполнении арифметического действия (сложения и вычитания)	(Р) - используют различные приёмы проверки правильности нахождения значения числового выражения, понимают причины своего неуспеха и находят способы выхода из этой ситуации	Не приведя к общему знаменателю, целую часть прибавляют к числителю. Без приведения к общему знаменателю от целой части отнимают числитель. Если при вычитании смешанных чисел дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, то из дробной части вычитаемого отнимают дробную часть уменьшаемого. Не выделяя дробную часть целого числа,

			прибавляют его к числителю. Без выделения дробной части целого числа, от целой части отнимают числитель
Десятичная запись дробных чисел	Умеют читать и записывать десятичные дроби, контролировать правильность и полноту выполнения алгоритма арифметического действия	(Р) - используют различные приёмы проверки правильности выполнения задания (опора на изученные правила, алгоритм выполнения арифметических действий, прикидку результатов)	Числитель дробной части содержит иное количество цифр после запятой нежели нулей в знаменателе. Называют неправильные разряды после запятой при чтении дробей
Сравнение десятичных дробей	Умеют сравнивать числа по классам и разрядам. Знают, как исследовать ситуацию, требующую сравнения чисел, их упорядочения	(Р) - выполняют действие по заданному образцу, оценивают и в случае необходимости корректируют полученный результат, используют рефлексию учебной деятельности	Приписывают или отбрасывают нуль сразу после запятой в десятичной дроби. При сравнении десятичных дробей считают, что больше та дробь, у которой больше чисел после запятой. Отмечают на координатном луче меньшую десятичную дробь правее большей, и большую – левее меньшей
Сложение и вычитание десятичных дробей	Умеют складывать и вычитать десятичные дроби. Знают математическую терминологию при записи и выполнении арифметического действия (сложения и вычитания)	(Р) - используют различные приёмы проверки правильности нахождения значения числового выражения, в диалоге с учителем совершенствуют критерии оценки и пользуются ими в ходе оценки и самооценки	Неверно называют разряды чисел у десятичных дробей. При сложении и вычитании десятичных дробей не уравнивают количество знаков после запятой, целые части складывают (вычитают) с дробными. Неверно записывают переместительный и сочетательный законы сложения
Умножение десятичных дробей на	Умеют умножать десятичную дробь на натуральное число, пошагово	(Р) - обнаруживают и устраняют ошибки логического (в ходе решения) и	При умножении десятичной дроби на натуральное число умножают только

натуральные числа	контролировать правильность и полноту выполнения алгоритма арифметического действия	арифметического (в вычислении) характера. понимают причины своего неуспеха и находят способы выхода из этой ситуации	целую часть, дробную часть переписывают, в полученном произведении не ставят запятую. При умножении десятичной дроби на разрядную единицу запятую переносят влево от единицы
Деление десятичных дробей на натуральные числа	Умеют делить десятичную дробь на натуральное число, моделировать ситуации, иллюстрирующие арифметическое действие и ход его выполнения. Знают математическую терминологию при записи и выполнении арифметического действия	(Р) - используют различные приёмы проверки правильности нахождения значения числового выражения, вносят необходимые дополнения и коррективы в план и способ действия в случае расхождения эталона, реального действия и его продукта	При делении десятичной дроби на натуральное число делят только целую часть, в частном не ставят запятую
Умножение десятичных дробей	Умеют умножать десятичные дроби, решать задачи на умножение десятичных дробей, моделировать ситуации, иллюстрирующие арифметическое действие и ход его выполнения. Знают математическую терминологию при записи и выполнении арифметического действия	(Р) - обнаруживают и устраняют ошибки логического (в ходе решения) и арифметического (в вычислении) характера, вносят необходимые дополнения и коррективы в план и способ действия в случае расхождения эталона, реального действия и его продукта	При умножении десятичной дроби на 0,1; на 0,01; на 0,001 запятую переносят вправо на столько цифр, сколько нулей стоит перед единицей в множителе. При умножении десятичной дроби на 0,1; на 0,01; на 0,001 запятую переносят влево на неверное количество цифр, чем нулей стоит перед единицей в множителе. При умножении десятичных дробей в полученном произведении отделяют запятой столько цифр справа, сколько их стоит только в одном множителе.

			Если в произведении получается меньше цифр, чем надо отделить запятой, то впереди не приписывают нули
Деление на десятичную дробь	Умеют делить на десятичную дробь, решать задачи на деление на десятичную дробь, моделировать ситуации, иллюстрирующие арифметическое действие и ход его выполнения	(Р) - используют различные приёмы проверки правильности нахождения значения числового выражения, понимают причины своего неуспеха и находят способы выхода из этой ситуации	При делении на десятичную дробь не переносят запятые в делимом и делители вправо; переносят запятую на столько цифр, сколько их после запятой в делимом; после окончания деления целой части в частном не отделяют запятой целую часть. Не различают делимое и делитель. При делении десятичной дроби на 0.1; на 0,01; на 0,001 переносят запятую влево на столько цифр, сколько в делители стоит нулей перед единицей

Проведенный анализ показывает, что в каждой теме можно предусмотреть некоторые возможные ошибки учеников и запланировать работу над ними: предложить учащимся тексты для проверки, содержащие различные виды ошибок (графические, вычислительные и т. д.), работа с учебником (Интернет-ресурсами, справочниками), поиск информации в предложенных источниках, составление плана ответа по математике, парная взаимопроверка самостоятельной работы, проверка работы ученика, выполненной учителем без исправления и подчеркивания ошибок, при этом указывается задание, в котором сделана ошибка, на первом этапе указывается строка, в которой сделана ошибка, на втором — блок строк записи, на третьем — только задание, предложить ученикам самостоятельно проверить свою проверочную работу и оценить ее, согласно критериям, предложенным учителем, затем ученики меняются тетрадями и осуществляют взаимопроверку, с последующей проверкой учителем или с последующим обсуждением в паре допущенных ошибок, способствующую формированию универсальных учебных действий: определение последовательности промежуточных целей с учетом конечного результата, составление плана и последовательности действий, выполнение действий по заданному образцу, оценивание и в случае необходимости корректирование полученного результата, использование рефлексии учебной деятельности, использование различных приёмов проверки правильности выполнения задания (опора на изученные правила, алгоритм выполнения арифметических действий), обнаружение и устранение ошибок логического (в ходе решения) и арифметического (в вычислении) характера. Данный анализ показывает, что работа над выявленными ошибками учащихся позволяют сформировать следующие универсальные учебные действия: определять последовательность промежуточных целей с учетом конечного результата, составлять план и последовательность действий, выполнять действие по заданному образцу, оценивать и в случае необходимости корректировать полученный результат, использовать рефлексию учебной деятельности, использовать различные приёмы проверки правильности выполнения задания (опора на изученные правила, алгоритм выполнения арифметических действий), обнаруживать и устранять ошибки логического (в ходе решения) и арифметического (в вычислении) характера, самостоятельно выбирать способ решения задания.

2.2. Методика работы с ошибками учащихся при изучении темы «Дробные числа»

Курс математики 5 – 6 классов представляет собой органическую составную часть всей школьной математики, поэтому основным требованием к его построению является структурирование содержания на единой идейной основе, которая, с одной стороны, является продолжением и развитием идей, реализованных при обучении математике в начальной школе, и, с другой стороны, служит последующему изучению математики в старших классах.

Первым расширением понятия числа является введение дробных чисел в курсе математики 5 класса.

Изучение в 5 классе десятичных дробей опирается на имеющиеся у учащихся сведения о натуральных числах, об обыкновенных дробях и некоторых их преобразованиях, а также на знакомство учащихся с метрической системой мер.

С формирования понятия обыкновенной дроби начинается работа с десятичными дробями. Это обусловлено тем, что изучение десятичных дробей без предварительного ознакомления с обыкновенными дробями вызывает различного рода трудности у школьников. Например, не зная, что такое половина числа, учащиеся не могут представить десятую, сотую доли числа; десятичная дробь не воспринимается учащимися как результат деления целого на равные части и взятие нескольких таких частей.

В практике преподавания основным методом изучения новых чисел, в частности дробных, являются пояснения, которые опираются на знания, жизненный опыт учащихся.

Поясняющие описания не заменяют определений, понятий, а лишь показывают целесообразность их введения.

Согласно программе и учебнику по математике формирование понятия дроби начинается с умения получать доли при делении какой-либо величины на несколько равных частей. Учащиеся должны уметь называть и показывать доли отрезка, круга, прямоугольника и других предметов.

На базе целесообразно подобранных упражнений, на основе жизненного опыта учащихся, что является мотивировкой введения понятия дроби, способствующей формированию личностных УУД у учеников, дается описание нового числа. Далее приводятся примеры обыкновенных дробей, и дается форма записи обыкновенной дроби.

Большое значение в изучении дробей имеет использование графического метода, в частности координатного луча. Ученики выполняют ряд упражнений, с помощью которых формируются умения отмечать на луче точку, соответствующую данной дроби, и, наоборот, называть дробь соответствующую отмеченной на луче точке. Координатный луч широко используется также для сравнения дробей и для изучения основного свойства дроби. Подобного рода задания формируют умения сопоставлять числа и точки на координатном луче.

В методической литературе по традиции к дробным числам относят обыкновенные и десятичные дроби, а также смешанные числа (иногда их называют смешанные дроби).

При любом способе реализации учения о дробных числах учителю необходимо добиваться сознательного усвоения материала учащимися, выработки прочных навыков в выполнении действий. Теоретические факты должны вытекать из рассмотрения конкретных задач с широким привлечением наглядности и жизненного опыта учащихся. Программа не требует использования дробей с очень большими знаменателями, чтобы не вносить дополнительные вычислительные трудности. Следует предлагать учащимся упражнения для устных вычислений с дробными числами.

Основными причинами низкого качества усвоения понятия дроби (а также и последующих затруднений, с которыми сталкиваются учащиеся при его изучении) заключаются в механическом заучивании, в недостаточном внимании к осознанному восприятию понятия, установлению взаимосвязи между множествами изученных и вновь введенных чисел, выявлению общих и особенных характеристик этих множеств [10].

Каждый метод обучения реализуется с помощью учебных задач, которые получаются в результате перевода целей учебной деятельности в задания для учащихся текстового типа и служат для достижения этих целей в процессе обучения. При этом можно выделить обобщённые типы учебных задач, обеспечивающих исправление ошибочных знаний у учащихся и достижение обучающих целей при изучении темы: «Дробные числа».

Выделяют следующие типы учебных задач, направленных:

I. на формирование знания теоретического материала:

1. Вставить пропущенные слова в формулировке определения, свойства, правила действий, алгоритма или приёма, доказательства и т.д. так, чтобы оно было верным.
2. Среди данных предложений (формул, ответов и т.п.) выбрать правильное.
3. Определить, верно ли данное утверждение (выражение, схема, формула и т.п.).
4. Сформулировать основные определения, правила, алгоритмы или приёмы.
5. Пересказать устно воспринятую информацию, выделить главное.
6. Прочитать текст по учебнику и воспроизвести содержание его основных положений.
7. Поставить вопросы к тексту с возможными вариантами ответов.
8. Составить собственный текст по теме, проверить его правильность.

II. на формирование понимания изучаемого материала:

1. Привести примеры и контрпримеры к понятию, свойству, правилу.
2. Прокомментировать самостоятельное письменное выполнение какого-либо задания.
3. Вставить вместо выделенных в данном предложении слов (выражений, рисунков и т.п.) противоположное по смыслу.
4. Составить план доказательства теоремы (свойства).
5. Установить какие-либо связи нового с раннее изученным (сравнить, обобщить, классифицировать, систематизировать их).
6. Выбрать среди предложенных задачи, для решения которых можно использовать данное свойство, правило.

7. Ответить на вопросы, отражающие причинно-следственные связи: «Зачем…», «Почему…».

III. на формирование умений и навыков:

1. Выполнить практическую работу тренировочного характера.
2. Выполнить действия по данному образцу, алгоритму, приёму, правилу, схеме.
3. Решить типовую задачу, используя известный приём.
4. По условию данной математической задачи определить, какие определения, правила, приёмы необходимо использовать для её решения.
5. Расчленить данную задачу на подзадачи.
6. Найти задачи аналогичные, противоположные данной и сравнить их.
7. На основе определения составить приём решения данной задачи и применить его.
8. Найти ошибку в решении данной задачи, выявить её сущность.
9. Найти ошибку в применении приёма к решению задачи, выявить её сущность.
10. Исправить ошибки, допущенные в решении задачи.
11. Сделать проверку и дать оценку результатам решения задачи.
12. Ответить на вопросы, связанные с условием выполнения действий [11].

Н.А. Менчинская провела исследование с учениками пятого класса с целью выяснения, какие ступени проходят учащиеся при усвоении понятия дроби. Психолог выделила три этапа формирования понятия дробь:

1. Дробление предметов даже без названия результата;

2. Отражение процесса дробления в представлении и речи;

3. Решение задач с помощью отвлеченных дробных чисел.

При этом автор подчеркивает, что при обучении детей операциям с дробями, необходимо переводить их через эти три последовательные ступени. Так, при введении понятия дробь еще в начальной школе нужно обеспечить совмещение двух аспектов изучения понятия дроби: умение видеть равные доли на рисунке (чертеже) и умение самостоятельно образовывать доли, расчленяя целое на части. Только после того, как у детей будет накоплен достаточный опыт в делении на равные доли реальных предметов, можно переводить их на более высокие ступени, то есть вначале устранять момент «личного» действия при образовании дроби, сохраняя зрительное восприятие равных долей, а затем исключать и этот момент восприятия, заставляя учащихся мысленно представлять процесс образования дроби.

Одной из причин формального усвоения операций с дробями Н.А. Менчинская называет несвоевременно раннее сообщение учащимся названий дробей (когда учащиеся еще не знают, как образуется та или иная дробь). Название дроби должно вводиться в неразрывной связи с процессом ясного осознания детьми, как образовалась дробь. При таком подходе, полагает автор, удастся избежать смешения названия дроби. Обосновывается это тем, что для большинства детей младшего школьного возраста любая доля, любая часть целого – это половина. Для ребенка не является существенным факт неравенства этих самых «половин», например при разламывании шоколада.

Трудности при освоении учащимися операций с дробями объясняются также тем, что целый ряд понятий, правил и способов действий, с которыми знакомятся учащиеся при изучении дробей, вступают в известное противоречие с теми понятиями, правилами и способами действия, которые ими были прочно усвоены при изучении целых чисел. Большое внимание этому моменту уделено в методическом руководстве А.С. Пчелко.

«Значительную трудность для понимания дроби, – говорит А.С. Пчелко, – представляет неодинаковый характер изменения дробного числа при изменении числителя и знаменателя. При увеличении числителя дробь увеличивается – это аналогично целым числам и это сравнительно легко воспринимается учащимися. Но при увеличении знаменателя дробное число уменьшается – это непривычно для ребят. Это находится даже в некотором противоречии с опытом детей в области целых чисел».

Н.А. Менчинская также выделяет понятие «знаменатель» как понятие, представляющее особую трудность для усвоения учащимися. «Фактически в знаменателе раскрывается своеобразие дробного числа в отличие от целого» –справедливо указывает автор Менчинская.

Так, учащиеся с легкостью сравнивают дроби с равными знаменателями, перенося навыки сравнения из области целых чисел, они с легкостью поясняют свои действия, нередко указывая, во сколько раз одна дробь превосходит другую. В то же время дети испытывают трудности при сравнении дробей с разными знаменателями, путаются в пояснении своих действий. Случается, что при сложении и вычитании дробей школьники складывают и вычитают знаменатели. Ошибки подобного рода не возникают, если школьники с самого начала осмыслили своеобразие понятия «знаменатель».

Камнем преткновения в изучении дробей являются операции умножения и деления. «Ученику приходится делать весьма значительные усилия мысли, чтобы постигнуть, что умножение называется иногда делением; что не всегда от умножения число увеличивается; что умножить число – это не всегда значит «взять его слагаемым несколько раз», – писал методист С.И. Шохор-Троцкий.

Школьники допускают многочисленные ошибки при сложении и вычитании обыкновенных дробей, которые можно избежать, если анализировать компоненты действия, сопоставлять компоненты действия с полученным результатом, выполнять проверку обратным действием, что позволяет формировать познавательные УУД у школьников [12].

Л.И. Дранова указывает на то, что школьники не смогут правильно проанализировать предложенные арифметические примеры на сложение и вычитание дробей, если в «сознании учеников не утвердить главное: дробь

– это не то число, которое обозначает количество предметов, это число – отношение». Для того, чтобы школьники могли избежать ошибки при выполнении действий с обыкновенными дробями, она рекомендует активно использовать речевую регуляцию деятельности, т.е. «начинать сложение дробей без математической записи, устно проговаривая названия дробей, участвующих в сложении», что способствует развитию коммуникативных УУД у учащихся [13].

В действиях с обыкновенными дробями самые типичные ошибки учащихся:

1. При сложении (вычитании) дробей складывают (вычитают) числители и знаменатели: $\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=\frac{4}{9}, \frac{4}{7}-\frac{1}{2}=\frac{3}{5}$.
2. Учащиеся, складывая (вычитая) дроби, могут забыть умножить их числители на дополнительные множители: $\frac{3}{7}+\frac{4}{5}=\frac{7}{35}, \frac{7}{9}-\frac{4}{5}=\frac{3}{45}$.
3. Не приведя к общему знаменателю, целую часть прибавляют к числителю: $3+\frac{4}{5}=\frac{7}{5}$.
4. Без приведения к общему знаменателю от целой части отнимают числитель: $5-\frac{3}{4}=\frac{5-3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Учащимся, которые допускают такого рода ошибки, можно предложить индивидуальные задания на карточках, побуждающие к установлению неверных результатов и поиску ошибок.

Карточка №1. Свойства чисел:

- при сложении сумма чисел не может быть равна одному из слагаемых;
- не может быть сумма чисел меньше какого-либо слагаемого.

Задания:

1) в следующих действиях объясните ошибку, учитывая вышеперечисленные свойства чисел:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$;

b) $5+\frac{3}{4}=\frac{5+3}{4}=\frac{8}{4}=2$.

2) из данных примеров найдите верные и подчеркните их, а неверные исправьте:

a) $\frac{5}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$;

b) $\frac{8}{9}+1\frac{1}{9}=2$;

c) $\frac{1}{7}+\frac{3}{21}=\frac{4}{21}$.

Карточка №2. Правила:

- вычитание проверяется сложением;
- разность двух чисел не может быть больше уменьшаемого.

Задания:

1) установите, верно ли выполнены вычитания:

a) $5-\frac{5}{8}=\frac{5-5}{8}=\frac{0}{8}=0$;

b) $\frac{7}{8}-\frac{3}{4}=\frac{7-3}{4}=\frac{4}{4}=1$.

2) поставьте вместо квадратиков такие числа, чтобы равенства стали верными:

a) $\frac{1}{5}+\square=\frac{14}{15}$;

b) $\frac{3}{5}-\square=\frac{2}{5}$;

c) $7\frac{2}{5}-4\frac{1}{3}=\square$.

В выработке основных навыков при коррекционной работе можно использовать задания с применением классификации.

Задание: выписать неправильные дроби и выделить целую часть:

1) $\frac{21}{7}$; 2) $\frac{51}{4}$; 3) $\frac{10}{17}$; 4) $\frac{12}{15}$; 5) $\frac{61}{17}$; 6) $\frac{29}{21}$.

При умножении и делении смешанных чисел учащимися допускаются ошибки, связанные с неумением трансформировать их в неправильную дробь.

Например, могут умножить отдельно целые и отдельно дробные части:

$5\frac{1}{4} \cdot 2\frac{3}{7} = 10\frac{3}{28}$.

Учащиеся делят целые части чисел, дробную же часть первого числа переписывают: $8\frac{3}{4} \div 4\frac{1}{7} = 2\frac{3}{4}$.

Могут умножить или разделить только дробные части чисел:
$7\frac{1}{3} \cdot 1\frac{5}{8} = \frac{5}{24}$, $7\frac{4}{9} \div 6\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

При изучении темы: «Дробные числа» в 5 классе у учащихся нередко возникают трудности. Так учащиеся часто не могут самостоятельно обнаружить то общее, что свойственно десятичным дробям, и другим числам, поскольку не владеют логическим приёмом сравнения. Именно длительное обучение сравнению является одной из особенностей коррекционной работы.

Так при переходе к десятичным дробям учитель должен быть готов к тому, что учащиеся долго будут искать привычные им, внешние признаки дроби, когда в записи присутствует одновременно числитель и знаменатель, причём последний стоит под первым.

Учитель должен задержаться на сравнении, например, таких двух дробей $\frac{5}{7}$ и 0,71, выделив их сходства и различия.

1. Сходства:

а) в обоих числах нет целых единиц;

б) обе дроби имеют числители: 5 и 71;

в) обе дроби имеют знаменатели: 7 и 100.

2. Различия:

а) в записи $\frac{5}{7}$ нет запятой, есть знаменатель;

б) в записи 0,71 нет горизонтальной черты, знаменателя нет, но он подразумевается.

Позже Н.А. Менчинская высказывает мнение о том, что никак нельзя считать правильным то положение, когда у детей при изучении целых чисел формируются представления об умножении как об увеличении, а о делении как об уменьшении. В дальнейшем это приводит к неверному переносу ассоциаций в область дробей. При этом Н.А. Менчинская указывает, что при изучении целых чисел учитель должен придавать особое значение случаям умножения и деления на 0 и 1, которые не приводят к привычному увеличению и уменьшению [12].

При обучении учащихся арифметическим действиям, в том числе и действиям с дробями, важно последовательно формировать процесс получения результата, что формирует у учеников познавательные УУД.

Например, получив задание разделить 3 полоски на 4 равные части, ученик сначала рассуждает так: «В одной полоске _, в трех полосках их всего _, 12 разделить на 4 будет 3, значит _». Затем прибегает к более короткому пути рассуждения: «Делил на 4 – это был знаменатель, и было 3 полоски, всего будет _». И, наконец, рассуждение сокращается до одного звена: «3 на 4 нацело не делится, будет _».

Так постепенно происходит сокращение промежуточных звеньев процесса, между условием примера и ответом образуется прямая связь. Но даже когда рассуждение выключено полностью, оно продолжает лежать в основе выполнения операции, что способствует развитию умений учащихся в сфере познавательных УУД.

К сожалению, в школьной практике нередко имеют место такие случаи, когда арифметическая операция с самого начала строится по типу простейшей ассоциативной связи, промежуточное звено – рассуждение – вообще отсутствует. В этом случае учащийся выполняет действия механически, не понимая того, что он делает и зачем. Классическим примером является неумение школьников решать задачи на нахождение части целого и неизвестного целого по его части.

Эти ошибки свидетельствуют о том, что учащиеся не осознают нахождение части от числа и умножение как одну и ту же операцию, они в равной мере не осознают как одну и ту же операцию нахождение числа по его дроби и деление. Различные термины скрывают от них тождественность содержания понятий, обозначаемых этими терминами. Это обусловлено тем, что и умножение дробей и решение задач на нахождение части целого вводится, как правило, с помощью алгоритма. Учащиеся не проходят все ступени по формированию ассоциаций, знают четкий алгоритм, следовательно, не могут обобщить эти две операции.

Центральным понятием в учении о дробных числах является понятие обыкновенной дроби (или просто дроби). В качестве мотивировки введения понятия могут последовательно выступать три основных источника в получении дробных чисел:

1) разделение целого на равные части (доли): при этом дробь выступает в качестве математического способа выражения долей как равных частей взятого за единицу предмета (дробь как часть от целого);

2) измерение величин, когда единица меры не укладывается целое число раз (дробь как результат измерения более крупной единицей);

3) деление одного натурального числа на другое (дробь как результат деления, как частное двух натуральных чисел).

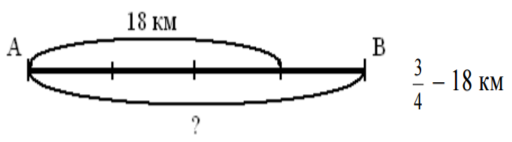
Не следует торопиться сразу рассмотреть все названные источники получения дробей. Вначале каждый ученик должен прочно усвоить те операции, которые надо выполнить, чтобы получить ту или иную дробь предмета (пирога, арбуза, полоски бумаги), геометрической фигуры (отрезка, круга, прямоугольника) – разделить (разрезать) на какое-то число долей (равных частей) и взять (отделить, заштриховать) одну или несколько таких долей. Учащиеся должны сами создавать наглядные образы с помощью моделей, рисунков, чертежей, схем, что позволяет формировать у них познавательные УУД. В результате они будут отчетливо представлять себе дробь как одну или несколько долей целого, принимаемого за единицу. Необходимо сообщить учащимся, что дроби связываются с долями предметов, а натуральные числа с самими предметами. Одинаковые доли тоже можно пересчитывать. После этого можно ввести запись дробей с помощью пары натуральных чисел (следует помнить, что числитель может быть и нулем), разделенных горизонтальной чертой («двухэтажная запись»), сообщить термины «обыкновенная дробь», «числитель дроби», «знаменатель дроби», дать содержательную характеристику дроби (что показывают знаменатель и числитель). При введении перечисленных понятий необходимо учителю выяснить, было ли пропедевтическое ознакомление с ними в начальных классах (стандартом изучения темы «Доли и дроби» не предусмотрено). Если материал знаком ученикам на уровне конкретного образного представления о дробных числах, то важно спланировать его использование.

Уяснению смысла дроби очень способствует решение трех основных задач (нахождение части (дроби) от целого (числа), числа по его дроби, отношения двух чисел). Это первый этап в решении таких задач, и никаких правил здесь формулировать не следует. Основу решения составляет понимание смысла дроби как части соответствующего целого, а ключом к решению двух задач – нахождение одной доли. Осознанию учащимися способа рассуждений будет способствовать изображение условия задачи в виде схематического рисунка, что формирует у них познавательные УУД. Формулировка этих задач в отвлеченной форме (найти $\frac{3}{4}$ от 24) пока затруднительна для учащихся, и поэтому они решаются позже с помощью соответствующих правил (формальный подход) [14].

Рассмотрим примерный способ рассуждения на примере одной из задач.

Турист прошел 18 км, что составляет $\frac{3}{4}$ *маршрута. Какой путь должен пройти турист?*

Изобразим схематически путь туриста:



Дробь $\frac{3}{4}$ означает, что весь путь разделен на 4 части, из них пройдено 3 части, которые составляют 18 км. Поэтому $\frac{1}{4}$ часть пути равна $18 \div 3 = 6$ (км). Весь путь состоит из 4 таких частей, следовательно, он равен $6 \cdot 4 = 24$ (км).

Учащиеся, нуждающиеся в коррекции знаний, имеют пробелы в знаниях программного материала. Искажают содержание теорем в применении их к решению задач, самостоятельно могут решить задачи в один-два шага, решение более сложных задач начинают со слепых проб. Не умеют вести целенаправленный поиск решения, не могут найти связь между данными и искомыми величинами, часто пропускают обоснования гипотез, сформулированных в ходе попыток решения и не понимают необходимости их проведения, не видят существенных зависимостей и ключевых моментов в решении задач. Для того, чтобы устранить эти недостатки в знаниях учащихся, можно вспомнить необходимый теоретический материал, прорешать подзадачи, к которым сводится исходная задача, как самостоятельные (часть из них может быть решена устно), решать аналогичную, более простую задачу с целью выявления метода решения. Учащиеся могут предварительно решить ключевую подзадачу в процессе подготовки к решению основной задачи. Затем учитель с помощью продуманной системы вопросов поможет ученикам свести исходную задачу к уже решенной [15].

Н.А. Менчинская занималась исследованием ошибок, которые допускают учащиеся при обучении. В ее трудах много практических советов, направленных не только на преодоление уже полученных ошибок, но и их предотвращения. Оказывается, числа, подобранные в примерах, нередко провоцируют возникновение так называемых описок. Некоторые комбинации чисел провоцируют на выполнение определенной операции, в этом случае происходит ослабление остроты сознания и «настоящий» знак действия остается не замеченным [12].

При делении одной десятичной дроби на другую десятичную дробь ученики допускают самую распространенную ошибку, когда не обращают внимания на запятые: $4{,}875 \div 6{,}5 = 7{,}5$.

В некоторых случаях, зная правила деления, учащиеся все равно затрудняются различить делимое и делитель. С целью устранения подобного рода ошибок можно воспользоваться заданиями на карточках. Каждый пример сопровождается правилами, которые могут быть сформулированным полностью, либо с пропусками.

Карточка №1. Восстановите правило: чтобы сложить две десятичные дроби надо:

1) уравнять …;
2) записать слагаемые друг …;
3) сложить получившиеся числа, как …;
4) в полученной сумме поставить запятую под …

Задания:

1. Уравняйте число знаков после запятой в следующих числах: 3,6; 0,36; 43,125; 72,51.
2. Сложите дроби 12,7 и 3,243; 0,237 и 15,23.

Карточка №2. Восстановите правило: чтобы умножить одну десятичную дробь на другую, необходимо … не обращая …, а в результате …, сколько их … после запятой…

Задания:

1. В записи числа 357498 отделите запятой справа: а) одну цифру, б) три цифры, в) пять цифр, г) шесть цифр. В каких случаях в результате получается число, которое больше 1, но меньше 4? Больше 0, но меньше 1?

2. Перемножьте числа 7,8 и 2,34.

Карточка №3. Восстановите правило: чтобы разделить десятичную дробь на десятичную дробь, надо в делимом и в делителе перенести… вправо на столько цифр, сколько их после… в …, а потом выполнить … на

…число.

Задания:

1. В записи 2,88 ÷ 0,8 укажите делимое и делитель.

2. В числах 1; 0,05; 3,25 перенесите запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в числе 0,5.

3. Разделите 2,576 на 1,12.

Заполняя пропуски, ученик вынужден прочитывать текст и проговаривать его, хотя и негромко про себя. И это не только поможет перейти к самоконтролю, но и даёт образцы правильной речи, образцы оснований.

А.Я. Цукарь видит причину трудностей в недостаточной практической деятельности учащихся с материальными и материализованными объектами и предлагает ряд заданий, где школьники моделируют получение дробей, сложение и вычитание дробей с одинаковыми и разными знаменателями, умножение и деление дробей на целое число и дробь, преобразование смешанного числа в неправильную дробь, что помогает в работе учителя по формированию умений учащихся в сфере познавательных УУД [13].

Таким образом, при изучении дробей необходимо учитывать психологические особенности восприятия материала. Уверенное представление о дроби возникает только тогда, когда учащийся самостоятельно проходит все ступени по формированию этого понятия. Сознательное оперирование осуществляется при верно построенной системе ассоциаций и полной связи между условием задачи и ее ответом. Система упражнений должна отвечать как методическим задачам, так и учитывать психологические основы слухового восприятия формулировок и зрительного восприятия комбинаций чисел. Важно сформировать у учащихся умение выделять существенные и несущественные признаки объектов и действий над ними.

2.3. Работа с ошибками учащихся в теме «Дробные числа», направленная на формирование универсальных учебных действий

Приведем пример работы с ошибками учащихся 5 класса по теме «Сложение и вычитание смешанных чисел» на уроке систематизации и обобщении знаний и умений.

Среди целей урока выделено закрепление навыков решения примеров на сложение и вычитание смешанных чисел, осуществление контроля учениками своей деятельности в процессе достижения результата, умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией, умение оценивать правильность выполнения учебной задачи, владение основами самоконтроля.

На этапе контроля усвоения, обсуждения допущенных ошибок и их коррекции учитель предлагает приступить к решению упражнения 1136.

Запись на доске:

№ 1136

е) $7\frac{5}{9} - 2\frac{8}{9} = (7 + \frac{5}{9}) - \left(2 + \frac{8}{9}\right) = (7 - 5) + \left(\frac{8}{9} - \frac{5}{9}\right) = 2 + \frac{3}{9} = 2\frac{3}{9}$

Ученик, решая пример, проговаривает: чтобы из одной смешанной дроби вычесть другую, надо из целой части вычесть целую, из дробной – дробную. Чтобы из одной дроби вычесть другую с одинаковыми знаменателями, надо из числителя одной дроби вычесть числитель другой, а знаменатель оставить тот же. Ответ $2\frac{3}{9}$.

При этом формируется следующее универсальное учебное действие (УУД) – способность выполнять действие по заданному правилу.

Для формирования умения оценивать правильность выполнения учебной задачи учитель обращается к учащимся: верно ли выполнено данное вычитание? Чтобы это выяснить, сделаем проверку. Вспомним правило нахождения уменьшаемого.

Ученик, стоящий у доски, отвечает: чтобы найти уменьшаемое, надо к разности прибавить вычитаемое, будем складывать $2\frac{3}{9}$ и $2\frac{8}{9}$.

Учитель: если все расчеты выполнены верно, то у нас должно получиться $7\frac{5}{9}$.

Запись на доске:

$$2\frac{3}{9}+2\frac{8}{9}=(2+2)+\left(\frac{3}{9}+\frac{8}{9}\right)=4+\frac{11}{9}=4+1\frac{2}{9}=4+1+\frac{2}{9}=5\frac{2}{9}$$

Ученик, выполняя проверку, проговаривает: при сложении смешанных чисел целые части складывают с целыми, а дробные – с дробными. Чтобы сложить дроби одинаковыми знаменателями, надо сложить числители, а знаменатель оставить тот же. При сложении $2\frac{3}{9}$ и $2\frac{8}{9}$ получили $5\frac{2}{9}$.

При этом формируются следующие УУД – способность осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, владение основами самоконтроля, умение оценивать правильность выполнения учебной задачи.

Учитель, делая вывод, говорит: вычитание выполнено неверно.

Для разбора решения и выяснения ошибки, приведшей к неверному ответу, учитель вызывает к доске другого ученика.

Запись на доске:

$$7\frac{5}{9}-2\frac{8}{9}=(7+\frac{5}{9})—\left(2+\frac{8}{9}\right)=(6+1+\frac{5}{9})-\left(2+\frac{8}{9}\right)=\left(6+1\frac{5}{9}\right)-\left(2+\frac{8}{9}\right)=$$

$$=\left(6+\frac{14}{9}\right)-\left(2+\frac{8}{9}\right)=(6-2)+\left(\frac{14}{9}-\frac{8}{9}\right)=4+\frac{6}{9}=4\frac{6}{9}$$

Ученик, решая пример, проговаривает: чтобы из одной смешанной дроби вычесть другую, надо из целой части вычесть целую, из дробной – дробную. Но у нас дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, поэтому из дроби $\frac{5}{9}$ нельзя вычесть $\frac{8}{9}$. Число 7 представляем в виде суммы 6 и 1, смешанное число $1\frac{5}{9}$ представим в виде неправильной дроби. Чтобы из одной дроби вычесть другую с одинаковыми знаменателями, надо из числителя одной дроби вычесть числитель другой, а знаменатель оставить тот же. Ответ $4\frac{6}{9}$.

При этом формируется следующее УУД – способность выполнять действие по заданному правилу.

Учитель, обобщая ответ ученика, говорит: надо из дробной части уменьшаемого вычесть дробную часть вычитаемого, переставлять местами дробные части уменьшаемого и вычитаемого нельзя.

Теперь каждый у себя в тетради самостоятельно в течение трех минут выполняет следующие задания, представленные на слайде.

Восстановите правило: при сложении (и вычитании) чисел в смешанной записи … части складывают (вычитают) …, а дробные - … Задания:

1. В записи

$5\frac{4}{7} - 1\frac{2}{7}$ укажите уменьшаемое и вычитаемое.

2. Восстановите запись: если при вычитании смешанных чисел … часть … меньше … части …, поступают так:

$$4\frac{2}{5} - 2\frac{4}{5} = (4 + \frac{2}{5}) - 2\frac{4}{5} = \left(3 + \boxdot + \frac{2}{5}\right) - 2\frac{4}{5} = \left(3 + \boxdot\,\text{—}\right) - 2\frac{4}{5} = \left(3 + \text{—}\right) - 2\frac{4}{5} =$$

$$= 3\text{—} - 2\frac{4}{5} = (3 - 2) + \left(\text{—} - \frac{4}{5}\right) = 1\text{—}$$

3. Выполните вычитание

$8\frac{5}{11} - 4\frac{9}{11}$

После выполнения заданий, учащиеся меняются тетрадями с соседями по парте для взаимной проверки работ друг друга, в случае необходимости обмениваются мнениями по решению, затем происходит взаимное обсуждение решения заданий с учителем.

При формулировании правила сложения и вычитания смешанных чисел ученик отвечает: при сложении и вычитании чисел в смешанной записи целые части складывают (вычитают) отдельно, а дробные – отдельно.

Отвечая на первое задание, ученик проговаривает: $5\frac{4}{7}$ – уменьшаемое, $1\frac{2}{7}$ – вычитаемое.

При ответе на второе задание ученик проговаривает и записывает на доске: при вычитании смешанных чисел целые части вычитают отдельно, а дробные – отдельно. Но у нас дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, поэтому 4 надо представить в виде суммы 3 и 1. Смешанное число $1\frac{2}{5}$ надо представить в виде неправильной дроби. Получили ответ $1\frac{3}{5}$.

Запись на доске:

$$4\frac{2}{5}-2\frac{4}{5}=\left(4+\frac{2}{5}\right)-2\frac{4}{5}=\left(3+1+\frac{2}{5}\right)-2\frac{4}{5}=\left(3+1\frac{2}{5}\right)-2\frac{4}{5}=\left(3+\frac{7}{5}\right)-2\frac{4}{5}=$$

$$=3\frac{7}{5}-2\frac{4}{5}=(3-2)+\left(\frac{7}{5}-\frac{4}{5}\right)=1\frac{3}{5}$$

При ответе на третье задание ученик проговаривает и записывает на доске: при вычитании смешанных чисел целые части вычитают отдельно, а дробные – отдельно. Но у нас дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, поэтому 8 надо представить в виде суммы 7 и 1. Смешанное число $1\frac{5}{11}$ представим в виде неправильной дроби. Получили ответ $3\frac{7}{11}$.

Запись на доске:

$$8\frac{5}{11}-4\frac{9}{11}=\left(8+\frac{5}{11}\right)-4\frac{9}{11}=\left(7+1+\frac{5}{11}\right)-4\frac{9}{11}=\left(7+1\frac{5}{11}\right)-4\frac{9}{11}=$$

$$=\left(7+\frac{16}{11}\right)-4\frac{9}{11}=7\frac{16}{11}-4\frac{9}{11}=(7-4)+\left(\frac{16}{11}-\frac{9}{11}\right)=3\frac{7}{11}$$

При этом формируется следующее УУД – способность выполнять действие по заданному правилу.

Рассмотрим работу с ошибками учащихся 5 класса по теме «Сложение и вычитание десятичных дробей» на уроке систематизации и обобщении знаний и умений.

Среди целей урока выделено закрепление навыков решения примеров на сложение и вычитание десятичных дробей, осуществление контроля учениками своей деятельности в процессе достижения результата, умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией, умение оценивать правильность выполнения учебной задачи, владение основами самоконтроля.

На этапе контроля усвоения, обсуждения допущенных ошибок и их коррекции учитель предлагает решить упражнение 1219.

Запись на доске:

№ 1219

д) $24{,}2 + 0{,}867 = 24{,}869$

$$\begin{array}{r} +\,0{,}867 \\ 24{,}2 \\ \hline 24{,}869 \end{array}$$

Ученик, решая пример, проговаривает: чтобы сложить две десятичные дроби, надо сложить целую часть одной дроби с целой частью другой, а дробную часть одной дроби – с дробной частью другой. Получили 24,869.

Для формирования умения оценивать правильность выполнения учебной задачи учитель обращается к учащимся: верно ли выполнено данное сложение? Чтобы это выяснить, сделаем проверку. Вспомним правило нахождения слагаемого.

Ученик, стоящий у доски, отвечает: чтобы найти одно из слагаемых, надо из суммы вычесть другое слагаемое, будем из дроби 24,869 вычитать дробь 0,867.

Учитель: если расчет выполнен верно, то у нас должно получиться 24,2.

Запись на доске:

$$\begin{array}{r} -\,24{,}869 \\ 0{,}867 \\ \hline 24{,}002 \end{array}$$

Ученик, выполняя проверку, отвечает: чтобы из одной десятичной дроби вычесть другую, надо из целой части одной дроби вычесть целую часть другой дроби, а из дробной части – дробную. При вычитании получили 24,002.

При этом формируются следующие УУД – способность осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, владение основами самоконтроля, умение оценивать правильность выполнения учебной задачи.

Учитель, делая вывод, говорит: сложение выполнено неверно.

Для разбора решения и выяснения ошибки, приведшей к неверному ответу, учитель вызывает к доске другого ученика.

Запись на доске:

$$\begin{array}{r} +\,24{,}200 \\ 0{,}867 \\ \hline 25{,}067 \end{array}$$

Ученик, решая пример, произносит: чтобы сложить десятичные дроби, надо уравнять количество знаков после запятой. Т.к. у дроби 0,867 отделено запятой три знака, то у дроби 24,2 надо справа приписать два нуля. Затем записываем эти дроби друг под другом так, чтобы запятая была под запятой. Складываем, не обращая внимания на запятую, т.е. 24200 и 867. В ответе ставим запятую под запятой. Получили 25,067.

При этом формируется следующее УУД – способность выполнять действие по заданному правилу.

Учитель обобщает ответ ученика: при сложении десятичных дробей мы сначала уравниваем количество знаков после запятой.

Теперь каждый у себя в тетради самостоятельно в течение трех минут выполняет следующие задания, представленные на слайде.

Восстановите правило: чтобы сложить (вычесть) десятичные дроби, нужно:

1)… в этих дробях … знаков … запятой;

2) записать их … под … так, чтобы … была записана под …;

3) выполнить сложение (вычитание), … обращая … на …;

4) … в ответе … под … в данных дробях.

Задания:

1.Уравняйте число знаков после запятой в следующих числах: 3,6; 0,36; 43,125; 72,51.

2.Правильно ли выполнено сложение? Если неправильно, то объясните, в чем ошибка.

А) $\begin{array}{r} +3{,}26 \\ 2{,}5 \\ \hline 3{,}51 \end{array}$

Б) $\begin{array}{l} +3{,}26 \\ \;\;2{,}\;\;5 \\ \hline \;\;5{,}31 \end{array}$

В) $\begin{array}{l} +3{,}26 \\ \;\;2{,}5 \\ \hline \;\;5{,}76 \end{array}$

3. Сложите дроби 12,7 и 3,243.

После выполнения заданий, учащиеся меняются тетрадями с соседями по парте для взаимной проверки работ друг друга, в случае необходимости обмениваются мнениями по решению, затем происходит взаимное обсуждение решения заданий с учителем.

При формулировании правила сложения и вычитания десятичных дробей ученик отвечает: чтобы сложить и вычесть десятичные дроби, нужно:

1)уравнять в этих дробях количество знаков после запятой;

2) записать их друг под другом так, чтобы запятая была записана под запятой;

3) выполнить сложение или вычитание, не обращая внимания на запятую;

4) поставить в ответе запятую под запятой в данных дробях.

Отвечая на первое задание, ученик проговаривает: так как у дроби 43,125 больше всего знаков после запятой, то к другим дробям справа после запятой надо приписывать столько нулей, чтобы всего знаков после запятой было три.

Запись на доске:

3,600; 0,360; 43,125; 72,510

При ответе на второе задание ученик говорит: под А сложение выполнено неправильно. Ошибка в том, что при сложении десятичных дробей сначала надо уравнять количество знаков после запятой, т.е. у дроби 2,5 надо приписать справа один нуль. Затем записать в столбик так, чтобы запятая была под запятой и сложить дроби, не обращая внимания на запятые, сложить 326 и 250. Под Б сложение выполнено неправильно. Ошибка в том, что при сложении десятичных дробей сначала надо уравнять количество знаков после запятой, т.е. у дроби 2,5 надо приписать справа один нуль. Под В сложение выполнено правильно.

При ответе на третье задание ученик произносит: чтобы сложить десятичные дроби, надо уравнять количество знаков после запятой. Т.к. у дроби 3,243 отделено запятой три знака, то у дроби 12,7 надо справа приписать два нуля. Затем записываем эти дроби друг под другом так, чтобы запятая была под запятой. Складываем, не обращая внимания на запятую, т.е. 12700 и 3243. В ответе ставим запятую под запятой. Получили 15,943.

Запись на доске:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 12{,}700 \\ 3{,}243 \end{array} \\ \hline 15{,}943 \end{array}$$

При этом формируется следующее УУД – способность выполнять действие по заданному правилу.

Рассмотрим работу с ошибками учащихся 5 класса по теме «Деление десятичных дробей на натуральные числа» на уроке актуализации знаний и умений.

Среди целей урока выделено закрепление навыков решения примеров, связанных с делением десятичных дробей на натуральные числа, осуществление контроля учениками своей деятельности в процессе достижения результата, умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией, умение оценивать правильность выполнения учебной задачи, владение основами самоконтроля.

На этапе контроля усвоения, обсуждения допущенных ошибок и их коррекции учитель предлагает решить упражнение 1379.

Запись на доске:

№ 1379

$2t + 5t + 3{,}18 = 25{,}3$
$7t + 3{,}18 = 25{,}3$
$7t = 25{,}3 - 3{,}18$

$$\begin{array}{r} _{-}25{,}30 \\ \underline{3{,}18} \\ 22{,}12 \end{array}$$

$7t = 22{,}12$

$$\begin{array}{l|l} _{-}22{,}12 & 7 \\ \underline{21} & 316 \\ \;_{-}11 & \\ \;\;\underline{7} & \\ \;\;_{-}42 & \\ \;\;\;\underline{42} & \\ \;\;\;\;0 & \end{array}$$

Ученик, решая пример, проговаривает: сначала сложим $2t$ и $5t$. Будет $7t$. Чтобы найти одно из слагаемых, надо из суммы вычесть другое слагаемое. Чтобы из дроби 25,3 вычесть дробь 3,18, надо уравнять количество цифр после запятой, т.е. к дроби 25,3 приписать один нуль справа. Записываем столбиком запятая под запятой. Вычитаем, не обращая внимания на запятые, т.е. из 2530 отнимаем 318. В ответе ставим запятую под запятой. Получили 22,12. Чтобы найти один из множителей, надо произведение разделить на другой множитель. Будем 22,12 делить на 7. Получили 316.

При этом формируются следующие УУД – способность определять способы действий в рамках предложенных условий, выполнять действие по заданному правилу.

Для формирования умения оценивать правильность выполнения учебной задачи учитель обращается к учащимся: верно ли выполнено деление 22,12 на 7? Чтобы это выяснить, сделаем прикидку. Будем сначала рассматривать целую часть дроби 22,12. Сколько раз число 7 помещается в 22?

Ученик, стоящий у доски, отвечает: число 7 помещается в число 22 три раза.

Учитель: при делении получается только три целых части. Если мы 316 приблизительно умножим на 7, то сколько будет?

Ученик, стоящий у доски, отвечает: будет больше двух тысяч.

Учитель: при делении 22,12 на 7 должно получиться число, меньшее четырех. Таким образом, при делении 22,12 на 7 допущена ошибка, сделаем проверку умножением числа 316 на 7, если все расчеты выполнены верно, то у нас должно получиться 22,12.

Запись на доске:

$$\begin{array}{r} \times\,316 \\ 7 \\ \hline 2212 \end{array}$$

Ученик, выполняя проверку, произносит: при умножении числа 316 на 7 получилось 2212.

Учитель, делая вывод, говорит: деление выполнено неверно.

При этом формируются следующие УУД – способность осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, владение основами самоконтроля, умение оценивать правильность выполнения учебной задачи.

Для разбора решения и выяснения ошибки, приведшей к неверному ответу, учитель вызывает к доске другого ученика.

Запись на доске:

$$\begin{array}{r|l} -22{,}12 & 7 \\ \cline{2-2} \underline{21} & 3{,}16 \\ -11 & \\ \underline{7} & \\ -42 & \\ \underline{42} & \\ 0 & \end{array}$$

Ученик, решая пример, отвечает: надо 22,12 разделить на 7. Будем делить, не обращая внимания на запятую. Когда деление целой части закончится, то в частном надо поставить запятую. Получили 3,16.

При этом формируется следующее УУД – способность выполнять действие по заданному правилу.

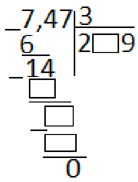
Учитель после верного ответа ученика предлагает перейти к самостоятельному выполнению заданий, представленных на слайде, в течение трех минут.

Восстановите правило: чтобы разделить десятичную дробь на натуральное число, надо:

1)… дробь на это …, … обращая внимания на …;

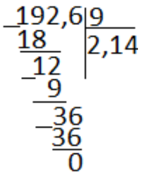
2) … в частном …, когда … деление … части. Задания:

1. Восстановите деление

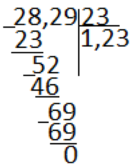


2. Правильно ли выполнено деление? Если неправильно, то объясните, в чем ошибка.

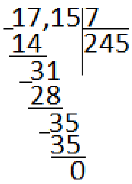
А)



Б)



В)



3. Выполните деление 336,6 на 11

После выполнения заданий, учащиеся меняются тетрадями с соседями по парте для взаимной проверки работ друг друга, в случае необходимости обмениваются мнениями по решению, затем происходит взаимное обсуждение решения заданий с учителем.

При формулировании правила деления десятичных дробей на натуральные числа ученик отвечает: чтобы разделить десятичную дробь на натуральное число, надо разделить дробь на это число, не обращая внимания на запятую, поставить в частном запятую, когда закончится деление целой части.

Отвечая на первое задание, ученик проговаривает: 7,47 надо разделить на 3. Делим, не обращая внимания на запятую. Когда деление целой части, т.е. семи, закончится, в частном пишем запятую. Получили 2,49.

Запись на доске:

```
_7,47|3
 6   |2,49
_14
 12
 _27
  27
   0
```

При ответе на второе задание ученик произносит: под А деление выполнено неправильно. Ошибка в том, что целая часть в частном неверно отделена. При делении десятичной дроби на натуральное число, когда деление целой части, т.е. 192, закончится, то в частном ставим запятую, будет 21 целая. При делении 192,6 на 9 получится 21,4. Под Б деление выполнено правильно. Под В деление выполнено неправильно. Ошибка в том, что при десятичной дроби на натуральное число надо поставить в частном запятую, когда закончится деление целой части, т.е. 17.
Правильный ответ 2,45.

При ответе на третье задание ученик говорит: надо 336,6 разделить на 11. Будем делить, не обращая внимания на запятую. Когда деление целой части, т.е. 336 закончится, то в частном надо поставить запятую. Получили 30,6.

Запись на доске:

```
_336,6|11
 33   |30,6
 _66
  66
   0
```

При этом формируется следующее УУД – способность выполнять действие по заданному правилу.

Рассмотрим работу с ошибками учащихся 5 класса по теме «Деление на десятичную дробь» на уроке комплексного применения знаний, умений.

Среди целей урока выделено закрепление навыков решения примеров на различные действия с десятичными дробями, осуществление контроля учениками своей деятельности в процессе достижения результата, умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией, умение оценивать правильность выполнения учебной задачи, владение основами самоконтроля.

На этапе первичного закрепления учитель предлагает приступить к решению упражнения 1464.

Запись на доске:

№ 1464

б) $8{,}16 : (1{,}32 + 3{,}48) - 0{,}345 = 1{,}355$

1. $1{,}32 + 3{,}48 = 4{,}80 = 4{,}8$

$$+\begin{array}{r} 1{,}32 \\ \underline{3{,}48} \\ 4{,}80 \end{array}$$

2. $8{,}16 : 4{,}8 = 816 : 480 = 0{,}17$

$$\begin{array}{r|l} -816 & \underline{480} \\ \underline{480} & 17 \\ -3360 & \\ \underline{3360} & \\ 0 & \end{array}$$

Ученик, решая пример, проговаривает: первое действие – то, что в скобках – сложение, второе действие – деление, третье действие – вычитание.

Чтобы сложить две десятичные дроби, надо записать их друг под другом так, чтобы запятая была под запятой, сложить, не обращая внимания на запятую, в ответе поставить запятую под запятой. Справа после запятой нуль можем отбросить.

Чтобы разделить две десятичные дроби, надо в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе, мы переносим на две цифры и теперь надо 816 разделить на 480. Получили 17, но мы делили десятичные дроби, поэтому в частном отделяем запятой справа столько цифр, сколько их стоит в делителе, то есть две цифры.

При этом формируются следующие УУД – способность определять способы действий в рамках предложенных условий, выполнять действие по заданному правилу.

Для формирования умения оценивать правильность выполнения учебной задачи учитель обращается к учащимся: верно ли выполнено деление 816 на 480? Чтобы это выяснить, сделаем прикидку. Сколько раз число 480 помещается в число 816?

Ученик, стоящий у доски, отвечает: число 480 помещается в число 816 один раз.

Учитель: при делении получается только одна целая часть. Если мы 480 приблизительно умножим на два, то сколько будет?

Ученик, стоящий у доски, отвечает: будет больше девятисот.

Учитель: при делении 816 на 480 должно получиться число, меньшее двух. Таким образом, при делении 816 на 480 допущена ошибка, сделаем проверку умножением числа 17 на 480, если все расчеты выполнены верно, то у нас должно получиться 816.

Запись на доске:

$$\begin{array}{l} \times\,480 \\ \quad 17 \\ \hline +\,336 \\ \quad 48 \\ \hline 8160 \end{array}$$

Ученик, выполняя проверку, произносит: при умножении числа 17 на 480 получилось 8160.

При этом формируются следующие УУД – способность осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, владение основами самоконтроля, умение оценивать правильность выполнения учебной задачи.

Учитель, делая вывод, говорит: деление выполнено неверно. Надо 816 разделить на 480. В частном пишем 1, остаток 336. Остаток меньше делителя, поэтому в частном ставим запятую. К остатку 336 приписываем нуль, 3360 делим на 480, в частном пишем семь, получаем 3360, остаток нуль, деление закончилось. Значит, при делении 816 на 480 получается 1,7.

Запись на доске:

$$\begin{array}{r|l} -816 & 480 \\ \underline{480} & \overline{1{,}7} \\ -3360 & \\ \underline{3360} & \\ 0 & \end{array}$$

Для разбора решения деления десятичных дробей и выяснения ошибки, приведшей к неверному ответу, учитель вызывает к доске другого ученика.

Запись на доске:

8,16 : 4,8 = 81,6 : 48 = 1,7

$$\begin{array}{r|l} -81{,}6 & 48 \\ \underline{48} & \overline{1{,}7} \\ -336 & \\ \underline{336} & \\ 0 & \end{array}$$

3. $1{,}7 - 0{,}345 = 1{,}355$

$$\begin{array}{r} 1{,}700 \\ -\,\underline{0{,}345} \\ 4{,}80 \end{array}$$

Ученик, решая пример, проговаривает: делитель – это число 4,8, у него одна цифра после запятой, поэтому и у делимого и у делителя переносим запятую вправо на одну цифру. Надо 81,6 разделить на 48. Когда деление целой части закончится, то в частном надо поставить запятую. Получили 1,7.

Чтобы вычесть две десятичные дроби, надо уравнять в этих дробях количество знаков после запятой, то есть к дроби 1,7 приписать справа два нуля, записать эти дроби друг под другом так, чтобы запятая была под запятой, вычесть, не обращая внимания на запятую, в ответе поставить запятую под запятой. Получили 1,355.

При этом формируется следующее УУД – способность выполнять действие по заданному правилу.

Учитель после верного ответа ученика предлагает перейти к самостоятельному выполнению заданий, представленных на слайде, в течение трех минут.

Восстановите правило: чтобы разделить десятичную дробь на десятичную дробь, надо в делимом и в делителе перенести… вправо на столько цифр, сколько их после… в …, а потом выполнить … на … число.
Задания:
1. В записи 2,88 : 0,8 укажите делимое и делитель.
2. В числах 1; 0,05; 3,25 перенесите запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в числе 0,5.
3. Разделите 2,576 на 1,12.

После выполнения заданий, учащиеся меняются тетрадями с соседями по парте для взаимной проверки работ друг друга, в случае необходимости обмениваются мнениями по решению, затем происходит взаимное обсуждение решения заданий с учителем.

При формулировании правила ученик отвечает: чтобы разделить десятичную дробь на десятичную дробь, надо в делимом и в делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе, а потом выполнить деление на натуральное число.

Отвечая на первое задание, ученик говорит: 2,88 – делимое и 0,8 – делитель.

При ответе на второе задание ученик произносит: В числе 0,5 одна цифра после запятой, значит, во всех числах запятую переносим на одну цифру вправо.

Запись на доске:

$1 = 1{,}0$

$0{,}05 = 0{,}5$

$3{,}25 = 32{,}5$

При ответе на третье задание ученик проговаривает: Чтобы разделить десятичную дробь на десятичную дробь, надо в делимом и в делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе. Делитель – это число 1,12, у него две цифры после запятой, поэтому и у делимого и у делителя переносим запятую вправо на две цифры. Надо 257,6 разделить на 112. Когда деление целой части закончится, то в частном надо поставить запятую. Получили 2,3.

Запись на доске:

$$2{,}576 : 1{,}12 = 257{,}6 : 112 = 2{,}3$$

$$\begin{array}{r|l} 257{,}6 & 112 \\ \cline{2-2} \underline{224} & 2{,}3 \\ 33\,6 & \\ \underline{33\,6} & \\ 0 & \end{array}$$

При этом формируется следующее УУД – способность выполнять действие по заданному правилу.

2.4. Формирование приемов поиска ошибок во внеклассной работе

Практика преподавания математики в школе убедительно подтверждает, что возможности целесообразного применения математических софизмов возрастают по мере продвижения учеников по ступеням классной лестницы, по мере роста их интереса к логической структуре науки.

Математические софизмы вынуждают особо внимательно, с большой настороженностью прочитывать их тексты, старательно следить за наличием должной точности в формулировках и записях, за соблюдением всех условий применимости теорем, за отсутствием незаконных обобщений, запрещенных действий, ссылок на кажущиеся свойства фигур и вспомогательных построений. Все эти моменты ценны в методическом отношении, так как они направлены на содержательное усвоение предмета, противопоставляемое формальному.

Упражнения в раскрытии софизмов не гарантируют от возникновения подобных же ошибок в самостоятельных рассуждениях учеников, но предоставляют шанс в случае появления ошибки быстрее ее обнаружить и в ней разобраться.

Педагогически оправданное применение математических софизмов не исключает, а, напротив, зачастую предполагает как предварительную стадию работы постановку вопросов в отвлеченной форме на мотивы поучительных ошибок. На такие вопросы учащийся не находит готовых ответов в тексте учебника. Здесь от него необходимо понимание сути пройденного теоретического материала, самостоятельное размышление и сознательное оперирование с известным запасом математических фактов.

Приведем пример урока с учащимися 5 класса.

Среди целей урока выделено критическое осмысливание каждого этапа рассуждений в соответствии с усвоенными принципами математического мышления и вычислительной практики.

Софизм – слово греческого происхождения, в переводе означающее хитроумную выдумку, ухищрение или головоломку.

Раскрыть софизм – это значит указать ошибку в рассуждении, с помощью которой была создана внешняя видимость доказательства. Осознание ошибки обычно достигается противопоставлением ложному рассуждению истинного.

В основном математические софизмы строятся на неверном словоупотреблении, на неточности формулировок, на скрытом выполнении невозможных действий, на незаконных обобщениях, особенно при переходе от конечного числа объектов к бесконечному, и на маскировке ошибочных рассуждений или предположений с помощью геометрической «очевидности».

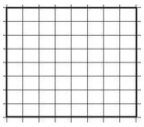
Существует несколько видов математических софизмов: геометрические, логические и алгебраические.

Геометрические софизмы

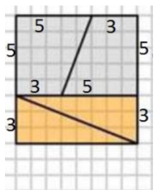
Геометрические софизмы построены на ошибках, связанных с геометрическими фигурами и действиями над ними.

1. *«Шахматная доска»*

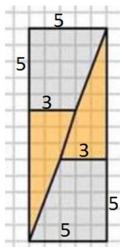
Рассмотрим квадрат со стороной 8 см.



Разрежем квадрат на четыре части как показано на рисунке.



После этого из полученных частей составим прямоугольник.



Получившийся прямоугольник имеет длину 5 см и ширину 13 см.

Квадрат и прямоугольник составлены из одинаковых частей, поэтому площади данных фигур должны быть равны.

Теперь посчитаем площади рассматриваемых нами фигур.

$S_{\text{квад.}} = \text{a}^2 = 8^2 = 64\ \text{см}^2$

$S_{\text{прямоуг.}} = a \cdot b = 5 \cdot 13 = 65\text{см}^2$

$S_{\text{квад.}} = S_{\text{прямоуг.}} \Rightarrow 64 = 65$

Полученное нами равенство является неверным.

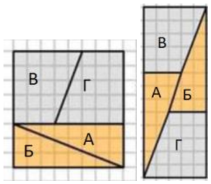
При этом формируются следующие универсальные учебные действия (УУД) – умение оценивать правильность выполнения учебной задачи, умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией, умение строить логическое рассуждение.

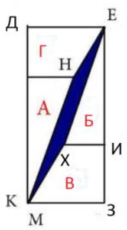
В чем ошибка?

Разбирая софизм, выясняем, что в задании не было указано, что части не сходятся по диагональной линии. На самом деле, вместо общей диагонали есть две ломаные линии, и внутри прямоугольника образуется пустое пространство. Площадь этого пустого пространства как раз и равна площади одного маленького квадратика, т.е. единице.

Ошибка заключается в том, что при составлении прямоугольника не получаются сплошные линии, обязательно должны получится щели, которые незаметны для глаза.

При сложении части А квадрата с частью В и частей Б и Г, получили прямоугольник.



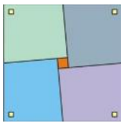


Но у этого прямоугольника нет точного слияния линий ЕХК и ЕНК в одну диагональ ЕК прямоугольника, так как линии ЕХК и ЕНК не прямые, а ломаные с маленьким изломом в точках Х и Н.

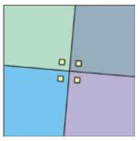
При этом формируется следующее УУД – способность осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата,

2. *«Исчезающий квадрат»*

Рассмотрим большой квадрат, который составлен из четырёх одинаковых четырёхугольников и маленького квадрата.



Развернем все четырехугольники маленькими клетками к центру большого квадрата, при этом маленький квадрат «исчезает».



Четырехугольники заполняют площадь, занимаемую маленьким квадратом, при этом у нас одна из частей большого квадрата «исчезла».

В чем ошибка?

Одинаковая ли площадь у обоих квадратов? Чтобы найти площади квадратов надо знать, чему равна сторона каждого из них.

Сторона первого квадрата имеет длину ________________ .

Сторона второго квадрата имеет длину ________________ .

Получаем, что сторона и площадь нового квадрата меньше стороны и площади того, который был вначале.

Ошибка заключается в том, что центры вращения составляющих четырехугольников находятся не там, где это представляется при визуальном осмотре картинки (не в точках пересечения их диагоналей). Они находятся в вершинах квадрата, повёрнутого относительно первого квадрата, хотя его стороны параллельны сторонам второго.

При этом формируются следующие УУД – умение оценивать правильность выполнения учебной задачи, умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией, владение основами самоконтроля, строить логическое рассуждение.

Логические софизмы

1. *«Три равно двум»*

Рассмотрим тождество: $9 + 6 - 15 = 6 + 4 - 10$.

$$3 \times 3 + 3 \times 2 - 3 \times 5 = 2 \times 3 + 2 \times 2 - 2 \times 5$$

$$3 \times (3 + 2 - 5) = 2 \times (3 + 2 - 5) \,|\div (3 + 2 - 5)$$

$$3 = 2$$

В чем ошибка?

Ошибка допущена при делении верного равенства

$3 \times (3 + 2 - 5) = 2 \times (3 + 2 - 5)$ на число $(3 + 2 - 5)$, равное нулю. На нуль делить нельзя.

При этом формируются следующие УУД – способность осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.

2. *«Пять равно шести»*

Рассмотрим тождество: $35 + 10 - 45 = 42 + 12 - 54$.

$$5 \times 7 + 5 \times 2 - 5 \times 9 = 6 \times 7 + 6 \times 2 - 6 \times 9$$

$$5 \times (7 + 2 - 9) = 6 \times (7 + 2 - 9) \,|\div (7 + 2 - 9)$$

$$5 = 6$$

В чем ошибка?

Ошибка допущена при делении верного равенства

$5 \times (7 + 2 - 9) = 6 \times (7 + 2 - 9)$ на число $(7 + 2 - 9)$, равное нулю. На нуль делить нельзя.

При этом формируются следующие УУД – способность осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией, умение делать выводы.

Алгебраические софизмы

Алгебра возникла под влиянием нужд общественной практики, в результате поисков общих приёмов для решения однотипных арифметических задач. Приёмы эти заключаются обычно в составлении и решении уравнений. Т.е. алгебраические софизмы – намеренно скрытые ошибки в уравнениях и числовых выражениях.

1. *«Все числа равны между собой»*

Рассмотрим два разных числа, такие что: $x < y$.

Существует такое число $z > 0$, что: $x + z = y \,|\times (x - y)$

$$(x+z)(x-y) = y(x-y)$$

$$x^2 + zx - xy - zy = yx - y^2$$

$$x^2 + zx - xy = yx - y^2 + zy$$

$$x(x+z-y) = y(x-y+z)$$

$$x(x-y+z) = y(x-y+z) \mid \div (x-y+z)$$

$$x = y$$

Но по условию задачи $x < y$.

В чем ошибка?

В начале решения было установлено, что $x + z = y$

$$x + z - y = 0$$

Следующее равенство:

$$x(x+z-y) = y(x-y+z)$$

Ошибка допущена при делении верного равенства

$x(x-y+z) = y(x-y+z)$ на выражение $(x+z-y)$, равное нулю. На нуль делить нельзя.

При этом формируются следующие УУД – способность осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией, владение основами самоконтроля, умение делать выводы.

2. *«Уравнение $x - a$ =0 не имеет корней»*

Рассмотрим уравнение: $x - a = 0$

$$x - a = 0 \mid \div (x-a)$$

$$1 = 0$$

Получили неверное равенство.

В чем ошибка?

Поскольку $x = a$ – корень уравнения, то, разделив на выражение $x - a$ обе его части, мы потеряли этот корень и поэтому получили неверное равенство 1=0.

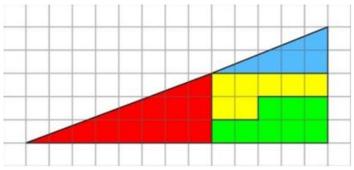
При этом формируются следующие УУД – способность осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией, владение основами самоконтроля, умение делать выводы.

4. Постановка домашнего задания

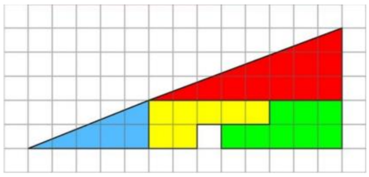
Пример 1. *«Загадочный треугольник»*

Найти ошибку в рассуждении.

Дан прямоугольный треугольник 13*5 клеток, составленный из четырёх фигур.



После перестановки фигур при визуальном сохранении изначальных пропорций появляется дополнительная, не занятая ни одной частью, клетка. Но такого быть не может.



Пример 2. *«Четыре равно пяти»*

Найти ошибку в рассуждении.

$$20 + 8 - 28 = 25 + 10 - 35.$$

$$4 \times 5 + 4 \times 2 - 4 \times 7 = 5 \times 5 + 5 \times 2 - 5 \times 7$$

$$4 \times (5 + 2 - 7) = 5 \times (5 + 2 - 7)\ |\div (5 + 2 - 7)$$

$$4 = 5$$

Пример 3. *«Всякое число равно своему удвоенному значению»*

Найти ошибку в рассуждении.

$$x^2 - x^2 = x^2 - x^2$$

$$x(x - x) = (x + x)(x - x)\ |\div (x - x)$$

$$x = x + x$$

$$x = 2x$$

При выполнении этих упражнений формируются следующие УУД – способность осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией, владение основами самоконтроля, умение оценивать правильность выполнения учебной задачи, строить логическое рассуждение и делать вывод.

Заключение

Вопрос о том, как преодолевать математические трудности учащихся при изучении материала постоянно находится в зоне повышенного внимания педагогической общественности.

Федеральный государственный образовательный стандарт второго поколения строится на системно-деятельностном подходе. Значит, в нынешнее время предстоит отойти от традиционной передачи готового знания от учителя ученику. Задачей учителя становится не только наглядно и доступно преподнести материал учащимся, но и включить самого ученика в учебную деятельность, организовать процесс самостоятельного овладения детьми нового знания, применения полученных знаний в решении познавательных, учебно-практических и жизненных проблем, что способствует формированию универсальных учебных действий.

В качестве цели исследования было выдвинуто теоретическое обоснование и разработка такой методики обучения математике, которая создавала бы условия для развития рефлексивной деятельности учащихся, способствующей предупреждению и устранению типичных ошибок, а также формированию универсальных учебных действий.

В ходе проведенного анализа цель исследования была достигнута, посредством решения следующих задач:

1. Выяснение причин возникновения ошибок учащихся при обучении.
2. Рассмотрение процесса работы над ошибками учащихся и формирования универсальных учебных действий.
3. Изучение способов устранения ошибок учащихся при обучении математике.
4. Анализирование темы: «Дробные числа» с учетом возможных ошибок и формирования универсальных учебных действий учащихся.
5. Разработка методики работы с ошибками учащихся при изучении темы: «Дробные числа».

В ходе работы были выяснены возможные причины возникновения ошибок учащихся, рассмотрен процесс работы над ошибками учащихся и формирования универсальных учебных действий, изучены способы устранения ошибок учащихся, а также проанализирована тема: «Дробные числа» на предмет возможных ошибок и формирования универсальных учебных действий учащихся и разработана методика работы с ошибками учащихся при изучении данной темы.

Теоретически была доказана гипотеза исследования о том, что при грамотно организованной работе с ошибками возможно улучшить качество математической подготовки учащихся и сформировать у них универсальные учебные действия.

Хорошо организованная учителем работа учащихся над типичными ошибками посредством исследовательского приема приводит к улучшению результата обучения математике и развитию ряда показателей логического мышления, что помогает педагогу формировать универсальные учебные действия у учащихся. В процессе работы, направленной на отыскание и исправление ошибок, учащиеся учатся самостоятельно определять цель своей деятельности, планировать ее, самостоятельно двигаться по заданному плану, оценивать и корректировать полученный результат, что приводит к формированию следующих умений у учащихся:

- находить контроль способа решения;
- оценивать правильность выполнения действия по заданным внешним и сформированным внутренним критериям;
- вносить необходимые коррективы в действие после его завершения на основе его оценки и учета характера сделанных ошибок;
- осуществлять контроль по результату и по способу действия; осуществлять актуальный контроль на уровне произвольного внимания;
- самостоятельно оценивать правильность выполнения действия и вносить необходимые коррективы в исполнение, как в конце действия, так и по ходу его реализации.

Для осуществления целенаправленных мер по исправлению и предупреждению ошибок учителю необходимо систематически изучать ошибки учащихся, выявлять наиболее устойчивые и типичные из них, вести учёт распространённых и индивидуальных ошибок учащихся. Знание учителем типичных ученических ошибок, а также причин их возникновения и форм проявления даёт ему возможность предвидеть и предупреждать их появление. Достичь этого можно путём подбора таких упражнений, которые препятствуют образованию односторонних ассоциаций и неправильных обобщений.

Ошибки учащихся, которые регистрирует и учитывает учитель, помогают ему установить, что не понимают учащиеся, что ими плохо усвоено; это даёт возможность учителю своевременно ликвидировать пробелы в знаниях учащихся и внести соответствующие коррективы в дальнейшее преподавание с целью предупреждения повторения аналогичных ошибок.

Список использованной литературы

1. Майкова Н. С. Виды ошибок учащихся при обучении решению геометрических задач, их причины и способы предупреждения//Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. – 2008. – № 73-2. – 118 с.
2. Тарасова О. А. Предупреждение типичных ошибок учащихся в процессе обучения алгебре посредством формирования и использования рефлексивной деятельности – Новосибирск, 2004. – 189 с.
3. Колосова В. А. Совершенствование системы методической работы с математическими ошибками школьников – Арзамас, 1997. – 192 с.
4. Марковская Н.В. Выявление и устранение пробелов в знаниях, умениях и навыках обучающихся – одно из основных условий повышения качества обучения – с.п. Покур, 2016. – 23 с.
5. Груденов Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики: Кн. Для учителя. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.
6. Мугаллимова С.Р. О типичных ошибках обучающихся по математике. Сургутский институт экономики, управления и права ФГБОУ ВПО Тюменский государственный университет г. Сургут. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://abiturient.surgpu.ru

7. Адлер А. Практика и теория индивидуальной психологии. – М.: Академический проект, 2011. – 240 с.
8. Зеленский А. С. Формирование навыков самоконтроля у старшеклассников // Математика в школе. – 2014. – №9. – с.26-30.
9. Лында А. С. Самостоятельная работа и самоконтроль учебной деятельности старших школьников. – М.: Изд-во МОПИ, 1972. – 198 с.
10. Мышева И.В. Реализация требований ФГОС ООО при обучении учащихся 5 класса теме: «Умножение и деление десятичных дробей на натуральные числа» – Ступино, 2012. – 38 с.
11. Ахромеева Н. И. Технология обучения математике на основе деятельностного подхода (от ученика), – Кондауровка, 2016. – 12 с.
12. Менчинская Н.А. Вопросы методики и психологии обучения арифметике в начальных классах [Текст] / Н.А. Менчинская, М.И. Моро. – М.: Просвещение, 1965. – 224 с.
13. Калинченко А.В. Методика обучения обыкновенным дробям детей с нарушениями в развитии: методика преподавания, планирование, конспекты уроков: пособие для учителя / А.В. Калинченко. – М.: Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2013. – 236 с. – (Коррекционная педагогика).
14. Покровский В.П. Методика обучения математике: числовая содержательно-методическая линия: учеб.-метод. Пособие / В.П. Покровский; Владим. гос. ун-т им. А.Г. и Н.Г. Столетовых. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2015. – 111 с.
15. Современные гуманитарные и социально-экономические исследования: материалы первой междунар. науч.-практ. конф. (26–28 мая 2013 г.): в 2 т. – Т.1: История, музейное дело; педагогика; математическое моделирование в социальных науках / науч. ред. К.В. Патырбаева, А.В. Попов, Е.Ю Мазур; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2013. – 146 с.