МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

Физико-математический факультет
Кафедра математики и методики обучения математике

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ В ПРОЦЕССЕ ПОДГОТОВКИ К ОГЭ

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05 Педагогическое образование
Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»

Проверка на объем заимствований:
58,59 % авторского текста

Работа рекомендована к защите
« 22 » мая 2018 г.
зав. кафедрой МиМОМ
Суховиенко Е.А.

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513/086-5-1
Уфимцева Мария Витальевна

Научный руководитель:
доктор пед. наук, доцент, зав. кафедрой
Суховиенко Е.А.

Челябинск
2018 год

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Обучение решению текстовых задач – ключевой вопрос методики преподавания математики, который требует особого внимания.

Трудно переоценить значение текстовых задач в формировании основных умственных и логических навыков, а также в развитии межпредметных связей и мыслительной деятельности. К тому же, решение текстовых задач – это творческий процесс, оказывающий влияние на становление критического мышления ученика и его изобретательности.

Однако, насколько текстовые задачи важны для ребенка, настолько они и сложны в освоении. Можно выделить несколько основных проблем, с которыми сталкиваются ученики в ходе обучения решению текстовых задач:

- анализ и перевод условий текстовой задачи на язык математики посредством математических символов и арифметических операций, либо наглядных представлений с помощью геометрических построений, к которым относятся всевозможные графики, диаграммы, схемы и таблицы;
- выражение зависимостей переменных величин от постоянных, путем составления уравнений или неравенств;
- работа с алгебраическими и арифметическими выражениями, вычислительные трудности, а также поиск ответа на вопрос задачи.

Помимо всего прочего, значимость проблемы обучения решению текстовых задач высока, ввиду наличия такого типа заданий в обязательном для всех выпускников девятых классов экзамене по математике.

Актуальность данной проблемы подчеркивается ее степенью научной разработанности: многие математики-методисты, такие как Л.М. Фридман, Д. Пойа, Ю.М. Колягин, И.К. Андронов и т.д., посвятили теме «Решение текстовых задач» большое количество трудов.

Главная проблема, которая возникает в процессе подготовки к решению текстовых задач основного государственного экзамена – замена понятий «обучение решению задач» на «натаскивание». Суть в том, что сейчас, в современной школе, в математических дисциплинах главенствующие позиции заняли алгоритмизация и систематизация. Ребенок умеет классифицировать тип задачи, применять необходимый алгоритм и в соответствии с ним находить ответ. Однако, если ученик сталкивается с задачей нестандартного характера, например, из олимпиадных сборников, то возникает ступор, потому что нет возможности ее отнести к одному из типов задач и решить.

Отметим, что невозможно полностью отойти от «натаскивания». Безусловно, это одно из важных средств, которое необходимо использовать для достижения хороших результатов. Но нельзя сводить всю подготовку только к «натаскиванию».

Целью данной работы является разработка методики обучения решению текстовых задач в процессе подготовки к основному государственному экзамену.

Объектом исследования данной работы является процесс обучения алгебре.

Предметом исследования является методика обучения решению текстовых задач в курсе математики основной школы.

Гипотеза: если в процессе обучения решению текстовых задач больше внимания уделять анализу текста, выделению основных элементов задачи и развитию логического аппарата школьников, то повысится уровень качества подготовки к решению текстовых задач в основном государственном экзамене.

В соответствии с гипотезой и целью были выделены следующие задачи:

- разобрать понятия «задача», «текстовая задача», выделить структуру задачи и рассмотреть их классификацию;

- определить основные методы решения текстовых задач;

- проанализировать этапы решения текстовых задач;

- выявить основные проблемы, возникающие в процессе обучения решению текстовых задач и предложить пути их ликвидации;

- проанализировать сборники заданий для подготовки к ОГЭ на предмет текстовых задач;
- разобрать решения наиболее сложных текстовых задач в сборниках для подготовки к ОГЭ.

Работа состоит из двух частей. В первой части рассматриваются психолого-педагогические основы формирования умения решать текстовые задачи, типология текстовых задач и методика их решения. Во второй части выделены основные проблемы, возникающие в процессе обучения текстовых задач, разработаны пути их решений, приведен анализ сборников для подготовки к ОГЭ и разобраны решения наиболее сложных текстовых задач.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

1.1. Понятие «задача», «текстовая задача». Структура задачи. Классификация

Понятие задачи вызывает многообразное количество проблем, рассматриваемых в психологии, философии и других науках. Понятие задачи непосредственно связано с понятиями проблемной ситуации, проблемы вопроса, задания, упражнения. Несмотря на то, что проблема решения задач как практических, так и математических изучается в течение долгого времени, к настоящему моменту нет единого подхода в трактовке основных понятий, связанных с задачей. В каждой из наук исследователи по-разному определяют возникновение каждого из этих понятий, их иерархию. Кроме того, психолога, философа, математика, педагога и др. интересуют специфические для каждой науки стороны этого понятия [8].

В-первую очередь, разберем, что же такое задача.

В психолого-педагогической литературе можно найти различные подходы к понятию «задача». В основном эти подходы цельны по происхождению проблемной ситуации как источника задачи и различаются по характеристике места и роли субъекта в рассматриваемой ситуации.

Представления об объекте, в данном случае о задаче определяются и уточняются в процессе исследования условий его возникновения и функционирования.

Как же возникает задача?

Исследование, проведенное Л.М. Фридманом, натолкнуло на вывод о том, что «…проблемные ситуации образуются из следующих компонентов: действующего субъекта – С, объекта его деятельности О, преграды (затруднения) на пути осуществления его деятельности – П. Субъект начинает анализировать проблемные обстоятельства. В процессе этого анализа выявляются все элементы проблемной ситуации, их взаимосвязи, вид преграды и ее особенности. Результаты проведенного анализа субъект выражает на каком-то языке. Возникновение и развитие задачи можно рассматривать как моделирование проблемных обстоятельств, в которые попадает субъект в процессе своей работы, а саму задачу - как знаковую модель проблемных обстоятельств, выраженных с помощью знаков естественного или искусственного языков» [19].

Понятие проблемной ситуации намного значительнее, чем понятие задачи. Задача как модель проблемной ситуации отражает лишь некоторые ее стороны. Кроме этого, проблемная ситуация и задача имеют специфические качества, свойства. Проблемная ситуация неразрывно связана с определенным субъектом (по определению), ведь она неотделима от данного субъекта. Задача же может быть передана от одного к другому, она может быть изменена, дополнена, переделана и т.п.

Задача может появиться в ходе не только практической, но и познавательной деятельности, тогда ее можно рассматривать как требование найти, доказать, установить, выявить некие характеристики некоторого объекта по его известным характеристикам. Отметим, что эта трактовка задачи совпадает с данной ранее, если рассматривать проблемную ситуацию, зарожденную в процессе познания, изучения, исследования субъектом рассматриваемого объекта и возникшее на этом пути препятствие.

В ходе обучения математике ученики прорешивают большое количество задач, представленных в сборниках или составленных учителем. На первый взгляд, может показаться, что данные задачи существуют отдельно от школьников. Теперь понятно, что каждая задача становится задачей по существу лишь в ситуации, когда ученик «принял» ее и начал искать ее решение [17].

Математические задачи, где есть хотя бы один объект, который является реальным предметом, принято называть текстовыми (сюжетными, практическими, арифметическими и т.д.). Перечисленные названия берут начало от способа записи (задача представлена в виде текста), сюжета (описываются реальные объекты, явления, события), характера математических выкладок (устанавливаются количественные отношения между значениями некоторых величин, связанные чаще всего с вычислениями). Ученики довольно часто встречаются с понятием «текстовая задача».

Текстовой задачей будем называть описание некоторой ситуации (явления, процесса) на естественном и (или) математическом языке с требованием либо дать количественную характеристику какого-то компонента этой ситуации (определить числовое значение некоторой величины по известным числовым значениям других величин и зависимостям между ними), либо установить наличие или отсутствие некоторого отношения между ее компонентами или определить вид этого отношения, либо найти последовательность требуемых действий [16].

В каждой задаче можно выделить:

а) числовые значения величин, которые называются данными, или известными (их должно быть не меньше двух);

б) некоторую систему функциональных зависимостей в неявной форме, взаимно связывающих искомое с данными и данные между собой (словесный материал, указывающий на характер связей между данными и искомыми);

в) требование или вопрос, на который надо найти ответ.

Числовые значения величин и существующие между ними зависимости, т.е. количественные и качественные характеристики объектов задачи и отношений между ними, называют условием (или условиями) задачи. В задаче обычно не одно, а несколько условий, которые называют элементарными.

Требования могут быть изложены как в вопросительной, так и в повествовательной форме. Величину, значения которой требуется найти, называют искомой величиной, а числовые значения искомых величин — искомыми, или неизвестными.

Систему взаимосвязанных условий и требований называют высказывательной моделью задачи. Для того чтобы уяснить структуру задачи, надо выявить ее условия и требования, т.е. построить высказывательную модель задачи.

Пример 1. Выделим условия и требования в задаче «Волк гонится за зайцем, который находится от него на расстоянии 15 м. Прыжок волка 3 м, скачок зайца 2 м. В то время, как заяц совершает три прыжка, волк делает только два прыжка. Сколько прыжков должен сделать волк, чтобы догнать зайца? Какое расстояние пробежит волк?»

Условия задачи:

1. Волк бежит следом за зайцем.

2. Первичное расстояние между волком и зайцем 15 м.

3. Прыжок волка равен 3 м.

4. Прыжок зайца равен 2 м.

5. За то время, как заяц делает три прыжка, волк делает только два прыжка.

6. Волк догнал зайца.

Требования задачи:

1. Сколько прыжков должен сделать волк, чтобы догнать зайца?

2. Какое расстояние пробежит волк?

Ответ на требование задачи получается в результате ее решения.

Решить задачу в широком смысле этого слова — это значит раскрыть связи между данными, заданными условием задачи, и искомыми величинами, определить последовательность применения общих положений математики (правил, законов, формул и т.п.), выполнить действия над данными задачи, используя общие положения, и получить ответ на требование задачи или доказать невозможность его выполнения. Понятие «решение задачи» довольно часто встречается в математике. Этим понятием обозначают связанные между собой, но все же неодинаковые термины:

1) решением задачи называют результат, т.е. ответ на требование задачи;

2) решением задачи называют процесс нахождения этого результата, т. е. вся деятельность человека, решающего задачу, с момента начала чтения задачи до окончания решения;

3) решением задачи называют лишь те действия, которые производят над условиями и их следствиями на основе общих положений математики для получения ответа задачи [10].

В дальнейшем мы не будем акцентировать внимание на каком-то определенном значении термина «решение задачи». Для каждого конкретного случая, будет понятно, какое из данных толкований термина нам подходит.

В рамках школьного обучения трудно израсходовать все многообразие задач, с которыми учащиеся могут встретиться. Поэтому важно обращать внимание в школе на такие методы и способы решения задач, которые являются общим для многих из них, и преподносить их так, чтобы у каждого школьника достигался высокий уровень умственного развития. Что будет способствовать принятию самостоятельного решения новых задач. Постановка перед учащимися задач может осуществляться на различных этапах обучения (и дидактические функции задач известны), это является необходимым условием стимулирования мышления учащихся. Помимо задач, приводящих к образованию навыка, существуют также задачи, предполагающие развернутый, творческий процесс решения [7].

Проблеме классификации задач уделено немало научных исследований. Вопрос о классификации задач имеет огромную значимость в процессе обучения математике. Рассматривая задачи на движение в противоположных направлениях, навстречу друг другу или на удаление друг от друга учитель в соответствии с уровнем учеников может по-разному организовать процесс обучения их решению. Он может из урока в урок предлагать школьникам такие задачи, не проводя при этом анализа заданной ситуации, решения задачи. В результате учитель потеряет много времени, добившись при этом незначительных успехов. Также нет никаких гарантий, что школьники смогут справиться с определенной задачей того же вида или нет. Зная классификацию рассматриваемых задач, учитель целенаправленно организует процесс обучения их решению, предлагая школьникам сначала анализировать задачную ситуацию по определенной схеме, выделяя тем самым основные существенные различия между задачами, т.е. ориентируя учеников на известные ему классы задач и постепенно подводя учеников к общим приемам решения задач всех четырех классов задач на движение рассматриваемого вида:

1 - задачи на движение в противоположных направлениях:

1.1. -навстречу друг другу,

1.2. - на удаление друг от друга;

2 - задачи на движение в одном направлении:

2.1. - вдогонку,

2.2. - на отставание.

При решении задач, учитель может провести анализ всех заданных ситуаций в общем виде, определить с учениками возможные типы задач и найти для каждого одинаковый способ решения. В ходе работы над конкретной задачей школьники выявляют ее тип и, используя общий метод решения, предоставляют подробное изложение данной задачи.

Анализируя школьные учебники, можно заметить, что классификация школьных задач достаточно разнообразна. Так многие годы в методике преподавания математики была распространена классификация, основу которой составлял характер требования задачи: 1) задачи на построение; 2) задачи на доказательство; 3) задачи на вычисление [4].

В соответствии с выбранной классификацией получают те или иные группы текстовых задач, которые объединяет либо метод решения, либо количество действий, необходимых для решения задачи (либо схожий сюжет):

- по числу действий, которые необходимо выполнить для решения задачи;

- по соответствию числа данных и искомых;

- по фабуле задачи;

- по способам решения и др.

Выбрав в качестве основания классификации число действий, необходимых для решения задачи, выделяют простые и составные задачи. Задачу, для решения которой достаточно выполнить только одно арифметическое действие, называют простой. Задачу, для решения которой нужно выполнить два или большее число действий, называют составной [1].

Пример 1. У Маши 5 конфет, что на 3 меньше чем у Вани. Сколько конфет у Вани?

Данная задача является простой.

Пример 2. У Насти было 20 карандашей. За первую четверть она потеряла 5 карандашей. Сколько карандашей она потеряла за вторую четверть, если к концу первой и второй четверти у нее осталось 8 карандашей?

Данная задача является составной.

Выбрав в качестве основания классификации соответствие числа данных и искомых задачи, выделяют задачи определённые, задачи с альтернативным условием, неопределенные и переопределённые задачи. Чаще всего в задачах число условий (зависимостей между величинами) соответствует числу данных и искомых. Но встречаются задачи, в которых этого соответствия нет.

Определенные задачи — это задачи, в которых условий столько, сколько необходимо и достаточно для получения результата.

Пример 3. Две медсестры должны напечатать 180 рецептов для больных. Одна из них печатает по 5 рецептов в день, и уже напечатала 75 рецептов. Сколько рецептов в день должна напечатать другая медсестра, чтобы закончить работу в один день с первой?

В данной задаче число условий соответствует числу данных и искомых. Поэтому она имеет решение и является определенной.

Задачи с альтернативным условием — это задачи, в ходе решения которых необходимо рассматривать несколько возможных вариантов условия, а ответ находится после того, как все эти возможности будут рассмотрены.

Пример 4. От одного островка по реке одновременно отправляются два гидроцикла. Один движется со скоростью 18 км/ч, а второй — со скоростью 20 км/ч. На каком расстоянии друг от друга они будут находиться через 2 ч, если скорость течения реки равна 2 км/ч?

В задаче не сказано, в одном ли направлении отправляются гидроциклы. Если считать, что они отправились в одном направлении, получим один ответ, если в противоположных направлениях — другой.

Неопределенные задачи — задачи, в которых условий недостаточно для получения ответа.

Пример 5. В магазине стояло 392 бутылки с соком грушевого, яблочного и апельсинового вкуса. Бутылок с грушевым вкусом было в 3 раза больше, чем с яблочным. Сколько весит бутылка с грушевым вкусом, если в каждой бутылке по 500 мл?

В задаче недостаточное число данных (в ней нет данных о количестве бутылок с апельсиновым вкусом). Для того чтобы ее решить, необходимо дополнить условие.

Переопределенные задачи — задачи, имеющие условия, которые не используются при их решении выбранным способом. Такие условия называют лишними. Следует иметь в виду, что при решении задачи другим способом лишними могут оказаться уже другие условия. Если в переопределенной задаче лишние условия не противоречат остальным условиям, то она имеет решение.

Пример 6. В одной печи обжигают 48000 глиняных горшков за шесть дней, а в другой столько же горшков можно обжечь за пять дней. За сколько дней можно обжечь 176 000 глиняных горшков, используя обе печи одновременно, если в первой печи за один день обжигают на 1 600 горшков меньше, чем во второй?

Задача имеет одно решение: используя обе печи одновременно, можно обжечь 176 000 глиняных горшков за 10 дней. Здесь условия «в одной печи можно обжечь 48 000 горшков за шесть дней, а в другой столько же горшков можно обжечь за пять дней» и «в первой печи за один день обжигают на 1 600 горшков меньше, чем во второй» не противоречат друг другу.

Иногда лишние условия задачи противоречивы [18].

Пример 7. Из города В в город С вышла электричка со скоростью 50 км/ч. Спустя 2 ч. из города С ему навстречу вышла другая электричка, скорость которой на 20 км/ч больше, чем у первой. Расстояние между пунктами 340 км. Сколько часов до встречи была в пути вторая электричка, если ее скорость в 1,5 раза больше скорости первой?

В задаче одно условие лишнее. Причем условия «скорость второй электрички на 20 км/ч больше, чем у первой» и «скорость второй электрички в 1,5 раза больше скорости первой электрички» противоречат друг другу. Эта задача может иметь решение, если исключить одно из условий. Если исключить кратное отношение, то получим ответ: вторая электричка была в пути 2 ч. Если же исключить разностное отношение, то получим другой ответ: вторая электричка была в пути 3,2 ч.

Иногда лишние условия при решении задачи не используются и не влияют на ответ.

Пример 8. В аэропорту за пять дней было продано 520 билетов второго и третьего классов. Билетов второго класса было продано в 4 раза меньше, чем третьего. Сколько денег получил кассир за все проданные билеты, если билет второго класса стоил 1500 р., а третьего — на 500 р. дешевле?

В задаче имеется лишнее условие (пять дней).

В курсе математики неопределенные задачи называют задачами с недостающими данными, а переопределенные — задачами с избыточными данными.

Положив в основание классификации фабулу задачи, чаще всего отмечают такие задачи как: «на движение», «на работу», «на смеси и сплавы», «на смешение и концентрацию», «на проценты», «на части», «на время», «на покупку и продажу» и т.п. Подразделять задачи, исходя из фабулы условия, достаточно трудно, так как тематика условий задач бывает порой очень разнообразной [6].

Большинство задач, в которых содержится идентичная зависимость между величинами, входящими в эти задачи, при возможном различии их числовых данных и фабул образуют определенный вид задач. Задачи одного вида имеют одну и ту же алгебраическую модель.

При решении задач различными методами используют, как правило, «свою» классификацию задач. Так, при алгебраическом методе решения чаще всего в качестве основания классификации в учебниках алгебры выбирают вид математической модели. Однако следует отметить, что такое разбиение задач на группы, строго говоря, не является классификацией, так как существуют задачи, которые могут быть отнесены к нескольким указанным группам. Это относится к задачам, математическая модель которых может быть представлена как в виде системы уравнений, так и в виде квадратного уравнения.

1.2. Основные методы решения текстовых задач

Выделяют следующие методы решения текстовых задач: арифметический, алгебраический, геометрический, логический, практический и др. Каждый из методов содержит в себе различные методы математических моделей. К примеру, при алгебраическом методе решения задачи составляются уравнения или неравенства, при геометрическом — строятся диаграммы или графики. Решение задачи логическим методом начинается с составления алгоритма.

Необходимо учитывать, что каждая задача в рамках выбранного метода допускает решение с помощью различных моделей. Так, используя алгебраический метод, ответ на требование одной и той же задачи можно получить, составив и решив совершенно разные уравнения, используя логический метод — построив разные алгоритмы. В таких случаях, также применимы разные методы решения задачи, которые (с целью избежать разночтения и неоднозначность трактовки термина «метод решения») принято называть способами решения.

Периодически для краткости изложения, вместо того чтобы говорить, что задача решена определенным способом в рамках, например, арифметического метода, будем говорить, что «задача решена арифметическим способом» или «задача решена арифметическим методом», а то и просто — «задача решена арифметически» [3].

Арифметический метод. Решить задачу арифметическим методом — значит найти ответ на вопрос задачи, с помощью выполнения арифметических действий над числами. Одну и ту же задачу, чаще всего, можно решить различными арифметическими способами. Задача решена различными способами, если ее решения отличаются связями между данными и искомыми, положенными в основу решений, или последовательностью использования этих связей.

Пример 1. Поют в хоре и занимаются танцами 82 студента, занимаются танцами и художественной гимнастикой 32 студента, а поют в хоре и занимаются художественной гимнастикой 78 студентов. Сколько студентов поют в хоре, занимаются танцами и художественной гимнастикой отдельно, если известно, что каждый студент занимается только чем-то одним?

Читают книги и занимаются научной деятельностью 62 школьника, занимаются научной деятельностью и баскетболом 12 школьников, а читают книги и увлекаются баскетболом 58 школьников. Сколько школьников читают книги, занимаются научной деятельностью и баскетболом отдельно, если известно, что каждый школьник занимается чем-то одним?

Решение.

1-й способ.

1) 62 + 12 + 58 = 132 (чел.) — удвоенное число школьников, читающих книги, занимающихся научной деятельностью и баскетболом;

2) 132 : 2 = 66 (чел.) — читают книги, занимаются научной деятельностью и баскетболом;

3) 66 -12 = 54 (чел.) — читают книги;

4) 66 - 58 = 8(чел.) — занимаются научной деятельностью;

5) 66 - 62 = 4 (чел.) — увлекаются баскетболом.

2-й способ.

1) 62 - 12 = 50 (чел.) — на столько больше школьников читают книги, чем увлекаются баскетболом;

2) 50 + 58 = 108 (чел.) — удвоенное число школьников, читающих книги;

3) 108 : 2 = 54 (чел.) — читают книги;

4) 58 - 54 = 4 (чел.) — увлекаются баскетболом;

5) 62 - 54 =8 (чел.) — занимаются научной деятельностью.

Ответ: 54 школьника читают книги, 4 школьника увлекаются баскетболом, 8 школьников занимаются научной деятельностью.

Алгебраический метод. Решить задачу алгебраическим методом — это значит найти ответ на требование задачи, составив и решив уравнение или систему уравнений (или неравенств). Одну и ту же задачу можно также решить различными алгебраическими способами. Задача считается решенной различными способами, если для ее решения составлены различные уравнения или системы уравнений (неравенств), в основе составления которых лежат различные соотношения между данными и искомыми [11].

Пример 2. Слесарь может выточить определенное количество металлических болванок за 5 дней. Если он в день будет делать на 20 болванок больше, то справится с заданием за три дня. Какова первоначальная производительность рабочего и сколько металлических болванок он должен выточить?

Решение.

1-й способ. Пусть x б./день — первоначальная производительность слесаря. Тогда (x + 20) б./день — новая производительность, 5x - д. — число болванок, которые он должен сделать. По условию получаем уравнение

$5x = 3(x + 20)$, решив которое найдем $x = 30$. Первоначальная производительность рабочего 30 болванок в день, он должен сделать 150 металлических болванок.

2-й способ. Пусть x д. — число металлических болванок, которые должен сделать слесарь. Тогда x/3 б./день — новая производительность, (x/3 - 20) б./день — первоначальная производительность слесаря. По условию получаем уравнение $x = 5(x/3 - 20)$, решив которое найдем $x = 150$. Слесарь должен сделать 150 металлических болванок, его первоначальная производительность 30 болванок в день.

Ответ: 30 металлических болванок в день; 150 болванок.

Аналитико-геометрический метод. Решить задачу аналитико-геометрическим методом — значит найти ответ на требование задачи, используя как алгебраические выражения, уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств так и геометрические построения или свойства геометрических фигур. Одну и ту же задачу можно также решить разными геометрическими способами. Задача считается решенной разными способами, если для ее решения используются разные построения или свойства фигур.

Пример 3. Из двух поселков C и D, расстояние между которыми 500 км, навстречу друг другу выехали два друга. Скорость движения первого равна — 40 км/ч, второго — 60 км/ч. Через сколько часов друзья встретятся?

Решение.

1-й способ. Математическую модель можно представить в виде диаграммы. Пусть длина одного отрезка по вертикали — 20 км, а длина одного отрезка по горизонтали — 1 ч. Отложим на вертикальной прямой отрезок CD равный 500 км., который изображает расстояние между поселками. Для удобства проведем еще одну ось времени через точку D. Затем на вертикальных прямых станем откладывать отрезки пути, пройденные каждым другом за 1 ч, 2ч, 3ч. и т. д. Тогда можно увидеть, что спустя 5 ч они встретятся. (рис 1.1).

2-й способ. В прямоугольной системе координат по горизонтали отложим время движения (в часах), по вертикали — расстояние (в километрах).

Пусть длина одного отрезка по вертикали — 20 км, а длина одного отрезка по горизонтали — 1 ч. Построим графики, характеризующие движение каждого друга. Движение первого определяется функцией у = 40х, второго — у = 500 – 60х. Абсцисса точки их пересечения (точки О) указывает, через сколько часов друзья встретятся. Тогда можно увидеть, что ее значение равно 5. Ордината указывает, на каком расстоянии от пункта С произойдет встреча. Ее значение равно 200. (рис 1.2).

3-й способ. Пусть время движения друзей до встречи изображается отрезком OD, а скорость сближения—отрезком OE. Тогда площадь S прямоугольника OEO_1D (она равна OE · OD) соответствует расстоянию между поселками O и D (пройденный путь есть произведение скорости движения на время движения). Учитывая, что друзья сближаются каждый час на 40 + 60 = 100 (км), расстояние между городами равно 500 км, имеем уравнение 500 = 100 · OD, решив которое находим OD = 5 (ч). Итак, друзья встретятся через 5 ч. (рис 1.3).

<u>Ответ:</u> через 5 ч.

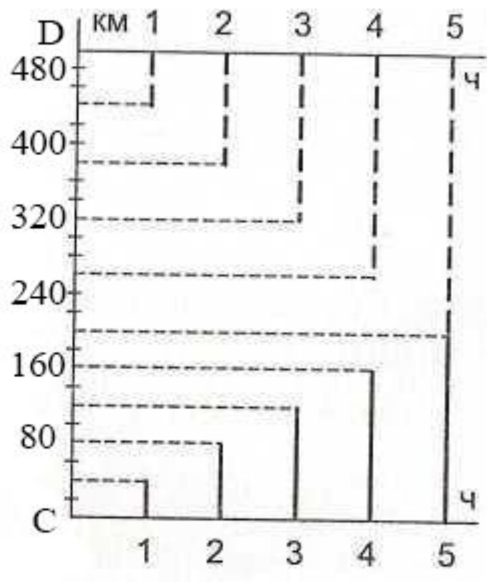

Рисунок 1.1 – Диаграмма

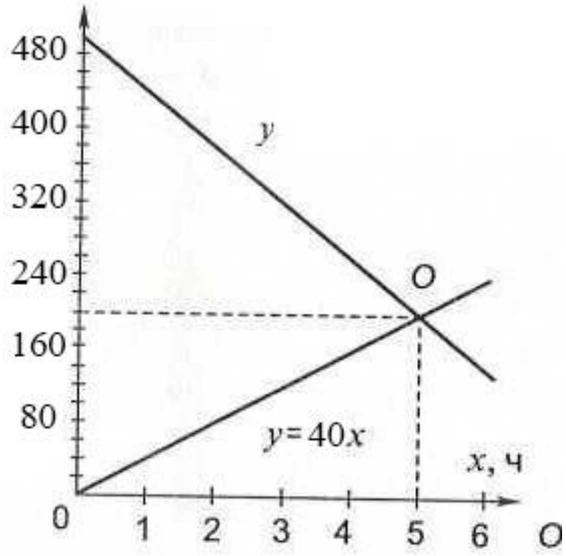

Рисунок 1.2 – Прямоугольная система координат

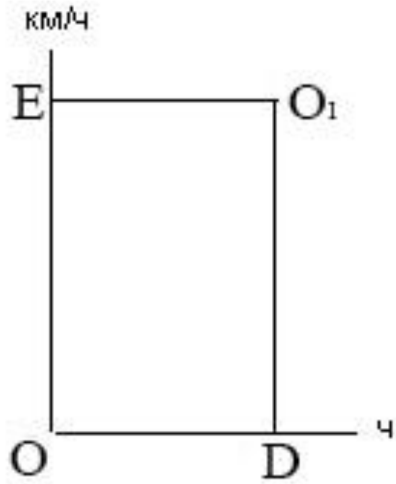

Рисунок 1.3 – Геометрическая модель

Практический метод. Решить задачу практическим методом — значит найти ответ на требование задачи, выполнив практические действия с предметами или их копиями (моделями, макетами и т.п.).

Пример 4. Андрей вложил 300 монет, после чего удвоил оставшиеся монеты. Затем он вложил 600 монет, после чего опять удвоил оставшиеся монеты. После того, как он еще вложил 900 монет, у него осталось 700 монет. Сколько монет было у Андрея первоначально?

Решение. Чтобы определить, сколько монет было первоначально, возьмем оставшееся количество монет и выполним обратные операции в обратном порядке. Берем оставшиеся 700 монет, добавляем к ним вложенные 900 монет (1600 монет), затем делим эту сумму пополам и узнаем, сколько монет было до того, как второй раз удвоили оставшиеся монеты (800 монет). После этого добавляем 600 монет и находим, сколько монет было до того, как вложили 600 монет (1400 монет). Делим эту сумму пополам и узнаем, сколько монет было до того, как первый раз удвоили оставшиеся монеты (700 монет), прибавляем вложенные в первый раз 300 монет и находим первоначальное количество монет (1000 монет).

Ответ: первоначально было 100 монет.

Периодически, в ходе решения задачи используются несколько методов: алгебраический и арифметический; геометрический, алгебраический и арифметический; арифметический и практический и т. п. В таком случае говорят, что задача решается комбинированным (смешанным) методом [15].

Пример 5. Четыре подруги совершили покупку. Маша заплатила половину суммы, вносимой остальными, Настя — треть того, что внесли все ее подруги, Катя — четверть того, что все ее подруги, Даша — оставшиеся 1300 р. Сколько было потрачено на покупку?

Решение. Пусть Маша потратила x р., Настя — y р., Катя — z р. Применяя алгебраический метод для решения задачи, по условию получим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

Комбинированный метод позволяет получить ответ на требование задачи более простым путем.

Решение начнем алгебраическим методом.

Пусть Маша потратила x р., тогда все остальные заплатили 2x р. Отсюда находим стоимость покупки: x + 2x =3x (р.). Значит, Маша заплатила 1/3 стоимости покупки.

Пусть Настя потратила y р., тогда все остальные заплатили 3y р. Отсюда находим стоимость покупки: y + 3y =4y (р.). Значит, Настя заплатила 1/4 стоимости покупки.

Пусть Катя потратила z. р., тогда все остальные заплатили 4z р. Отсюда находим стоимость покупки: $z + 4z = 5z$ (р.). Значит, Катя заплатила 1/5 стоимости покупки.

Продолжим решение арифметическим методом.

Маша, Настя и Катя внесли $1/3 + 1/4 + 1/5 = 47/60$ стоимости покупки. Значит, Даша заплатила остальные $1 - 47/60 = 13/60$ стоимости. По условию это составляет 1300 р., следовательно, покупка стоит $1300 \cdot 60/13 = 6000$ р.

Ответ: 6000 р.

1.3. Этапы решения текстовых задач

Будем понимать процесс решения задач как процесс, начинающийся с момента получения задачи до момента полного завершения ее решения. Тогда можем утверждать, что процесс состоит не только из изложений уже найденного решения, а из ряда этапов, одним из которых и является изложение решения [1].

Выделим этапы процесса при решении задач.

Получив задачу, сразу же необходимо ее проанализировать, понять, что это за задача, каковы ее условия и требования. Этот анализ и составляет первый этап процесса решения задачи.

В ходе решения необходимо корректно относиться к оформлению анализа, а именно правильно отображать схематические записи задач, построение которых составляет второй этап процесса решения.

Анализ задачи и построение ее схематической записи необходимы для того, чтобы найти способ решения данной задачи. Поиск этого способа составляет третий этап процесса решения.

После нахождения нужного способа решения задачи, его нужно осуществить, - это будет четвертый этап процесса решения – этап осуществления (изложения) решения.

После осуществления и изложения данного решения задачи (письменно или устно), необходимо убедиться, что это решение корректно, что оно удовлетворяет всем требованиям задачи. Для этого производят проверку решения, что составляет пятый этап процесса решения.

При решении задач, необходимо провести исследование задачи, а именно найти те условия, при которых задача имеет решение и притом, сколько их в каждом отдельном случае; при каких условиях задача их не имеет. Все это составляет шестой этап процесса решения.

Убедившись в правильности решения и, если нужно, произведя исследование задачи, необходимо четко сформулировать ответ задачи, - это будет седьмой этап процесса решения.

Наконец, в учебных и познавательных целях полезно также произвести анализ выполненного решения, в частности установить, нет ли другого, более рационального способа решения, нельзя ли задачу обобщить, какие выводы можно сделать из этого решения и т.д. Все это составляет последний, конечно не обязательный, восьмой этап решения [5].

Итак, весь процесс решения задачи можно разделить на восемь этапов:

1 этап – анализ задачи;

2 этап – схематическая запись задачи;

3 этап – поиск способа решения задачи;

4 этап – осуществление решения задачи;

5 этап – проверка решения задачи;

6 этап – формулирование ответа задачи;

7 этап – анализ решения задачи.

Для некоторых задач методисты выделяют этап исследования задачи.

Приведенная схема дает лишь общее представление о процессе решения задачи, поэтому приведем пример решения задачи.

Задача. Катер проплыл по течению реки расстояние между двумя островами за 12 часов, а обратный путь - за 16 часов. Сколько времени понадобится бревну, движущемуся по течению реки, проплыть расстояние между двумя островами?

1. Анализ задачи. В задаче говориться о двух объектах: катер и бревно. Катер обладает собственной скоростью, а река, по которой плывут и катер, и бревно, имеет определенную скорость течения. Соответственно, катер совершает путь между островами по течению реки за наименьшее время (12ч), чем против течения (16ч). Но эти скорости (собственная скорость катера и скорость течения реки) в задаче неизвестны, так же как неизвестно расстояние между островами. Тем не менее требуется найти не эти неизвестные скорости и расстояние, а время, за которое бревно проплывет неизвестное расстояние между островами.

2. Схематическая запись задачи.

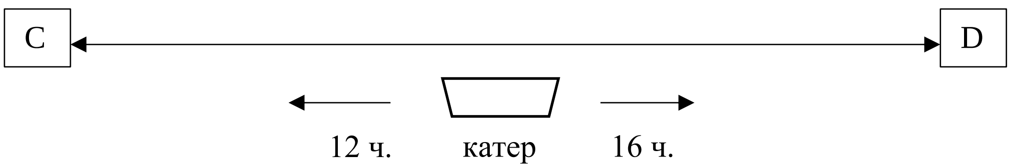

Рисунок 1.4 – Схема движения катера

3. Поиск способа решения задачи. Нужно найти время, за которое бревно проплывет расстояние между островами C и D. Для того чтобы найти это время, надо знать расстояние CD и скорость течения реки. Оба они неизвестны, поэтому обозначим расстояние CD буквой sкм, а скорость течения реки примем равной b км/ч. Чтобы связать эти неизвестные с данными задачи (время движения катера по и против течения реки), нужно знать собственную скорость катера. Она тоже неизвестна, предположим, что она равна vкм/ч. Отсюда вырисовывается план решения, заключающийся в том, чтобы составить систему уравнений относительно введенных неизвестных.

4. Осуществление решения задачи. Итак, пусть расстояние CD равно s км, скорость течения реки b км/ч, собственная скорость катера vкм/ч, а искомое время движения бревна на пути в s км равно x часов.

Тогда скорость катера по течению реки равна $(v+b)$ км/ч. За 12 ч катер, идя с этой скоростью, прошел путь CD в s км. Следовательно,

$12(v+b)=s$ (1)

Против течения катер идет со скоростью $(v-b)$ км/ч и путь CD в s км он проходит за 16 ч, поэтому

$16(v-b)=s$ (2)

Наконец, бревно, двигаясь со скоростью b км/ч, покрыло расстояние s км за x ч, следовательно,

$bx=s$ (3)

Уравнения (1), (2) и (3) образуют систему уравнений относительно неизвестных s, b, v, x. Так как требуется найти лишь x, то остальные неизвестные постараемся исключить.

Для этого из уравнений (1) и (2) найдем

$$v+b=\frac{s}{12}, \qquad v-b=\frac{s}{16}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим:

$$2b=\frac{s}{12}-\frac{s}{16}, \qquad \text{отсюда } b=\frac{s}{96}$$

Поставим найденное выражение для b в уравнение (3)

$$\frac{s}{96}x=s$$

Так как, очевидно, s не равно нулю, то можно обе части полученного уравнения разделить на s. Тогда найдем: $x=96$.

5. Проверка решения. Итак, мы нашли, что бревно проплывает расстояние между островами за 96 ч., следовательно, его скорость, равная скорости течения реки, равна $\frac{s}{96}$ км/ч. Скорость же катера по течению равна $\frac{s}{12}$ км/ч, а против течения $\frac{s}{16}$ км/ч. Для того чтобы убедиться в правильности

решения, достаточно проверить, будут ли равны собственные скорости катера, найденные двумя способами:

1) от скорости катера по течению отнять скорость течения реки, т.е.$\frac{s}{12} - \frac{s}{96}$,

2) к скорости катера против течения реки прибавить скорость течения реки, т.е. $\frac{s}{16} + \frac{s}{96}$.

Произведя вычисления, получаем верное равенство: $\frac{7s}{96} = \frac{7s}{96}$.

Значит, задача решена правильно.

6. Ответ: бревно проплывет расстояние между пристанями за 96 ч.

7. Анализ решения. Мы свели решение этой задачи к решению системы трех уравнений с четырьмя неизвестными. Однако найти-то надо было нам лишь одно из этих неизвестных. Поэтому, естественно, возникает мысль, что проведенное решение не самое удачное, хотя и достаточно простое. Можно предложить другое решение.

Зная, что катер проплыла расстояние CD по течению реки за 12 ч, а против – за 16 ч, найдем, что в 1 ч лодка, идя по течению, проходит $\frac{1}{12}$ часть этого расстояния, а против течения $\frac{1}{16}$. Тогда разность между ними ($\frac{1}{12} - \frac{1}{16} = \frac{1}{48}$) есть удвоенная часть расстояния CD, проплываемая бревном за 1 ч. Значит, бревно за 1 ч проплывет $\frac{1}{96}$ часть расстояния CD, следовательно, все расстояние CD он проплывет за 96 ч.

Как видим, при таком решении нам не понадобилось составлять систему уравнений. Однако, это решение сложнее приведенного выше, хотя бы потому, что не всякий догадается найти разность скоростей катера по течению и против течения реки. Часто также эту разность принимают не за удвоенную часть расстояния CD, проплываемую бревном за 1 ч, а за скорость бревна, что, конечно, приводит к ошибочному результату.

ГЛАВА 2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

2.1. Основные проблемы, возникающие в процессе обучения решению текстовых задач, и пути их ликвидации

В инструментарии хорошего педагога должен быть целый набор средств, которые могут:

Во-первых, заинтересовать ребенка в подготовке к экзамену, так как мотивационная составляющая очень важна;

Во-вторых, не сводить подготовку к «рутине», иметь в запасе множество вариаций заданий, использовать широкий набор методов, разнообразить процесс обучения;

В-третьих, давать ребенку некоторую свободу в творческом процессе, не навязывать свои варианты и способы решения;

В-четвертых, иногда разбирать решение действительно интересных и сложных заданий [13].

Данные рекомендации, пусть и несут общий характер, однако, действительно могут повлиять в лучшую сторону на ход подготовки к ОГЭ и решение текстовых задач.

1. Дифференциация текстовых задач.

Дифференциация текстовых задач имеет большое значение в теоретической составляющей решения сюжетных задач, однако, как показывает опыт педагогов, на практике ученикам сложно классифицировать задачу, либо, даже при успешной ее классификации возникают проблемы в дальнейшем решении [14].

Для того, чтобы ликвидировать данную проблему необходимо: дать полную классификацию типов текстовых задач с основными формулами, проводить типовые задания, связанные с анализом текста и умением определять тип задачи по условиям.

2. Наглядность в записи условий.

Данная проблема возникает на этапе составления математической модели по тексту задачи. Ученик испытывает трудности в наглядном изображении условия задачи для дальнейшего ее решения.

Для того, чтобы устранить проблему необходимо: правильно оформлять решение задачи, с подробным описанием условий, повышать наглядность составления математической модели, с помощью схем, таблиц, график.

3. Проверка полученного решения на соблюдение логики.

Проверка правильности решения задачи обычно применяется только в математическом подтексте, то есть ученик проверяет арифметические действия на предмет ошибок, если задача решается арифметическим методом, либо же выполняет проверку уравнения, если задача решена алгебраическим методом. Главное в решении текстовых задач – соблюдение логической составляющей.

Для решения данной проблемы необходимо: всегда выполнять проверку после решения уравнений, либо арифметических действий, проговаривать устно и записывать, удовлетворяет ли полученный ответ смысловому содержанию задачи.

4. Нарушение очередности действий.

Математики-методисты выделяют два основных подхода в решении текстовой задачи: частный и общий.

К частному подходу относят решение текстовой задачи по определенной инструкции в зависимости от типа данной задачи. Общий же подход заключён в логическом понимании смысла задачи и составления пути решения наиболее рациональным способом.

Для того, что ликвидировать данную проблемы, необходимо: четко оформлять и структурировать ход решения задачи, проговаривать этапы решения задачи.

Во время прохождения педагогической практики в 9-ых классах в МАОУ "Лицей № 97 г. Челябинска" были применены рекомендации для повышения уровня подготовки к ОГЭ, изложенные выше. При разработке конспектов уроков особое внимание уделялось работе с текстовыми задачами, были учтены основные возможные проблемы и предложены их комплексные решения. Результаты учеников 9М2 класса в выполнении заданий №7 и №22 (текстовые задачи) основного государственного экзамена по математике представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – результаты выполнения заданий №7 и №22 учениками 9М2 класса

№ ученика	Задание №7	Задание №22
1	Решено верно	Получено 1 балл
2	Решено верно	Получено 2 балла
3	Решено верно	Получено 2 балла
4	Решено верно	Получено 1 балл
5	Решено верно	Получено 0 баллов
6	Решено верно	Получено 2 балла
7	Решено верно	Получено 1 балл
8	Решено верно	Получено 2 балла
9	Решено верно	Получено 1 балл
10	Решено верно	Получено 2 балла
11	Решено верно	Получено 2 балла
12	Решено верно	Получено 1 балл
13	Решено верно	Получено 0 баллов
14	Решено верно	Получено 2 балла
15	Решено верно	Получено 2 балла
16	Решено верно	Получено 1 балл
17	Решено верно	Получено 2 балла
18	Решено верно	Получено 1 балл
19	Решено верно	Получено 2 балла
20	Решено верно	Получено 0 баллов

Таким образом, из 20 учеников 9М2 класса:

1) справились с заданием №7 – 20 из 20 (100%);
2) справились с заданием №22:
    a. Получили 2 балла – 10 из 20 (50%);
    b. Получили 1 балл – 7 из 20 (35%);
    c. Получили 0 баллов – 3 из 20 (15%).

Подводя итоги, отметим, что анализ эффективности методики обучения решению текстовых задач подтверждает сформулированную гипотезу работы.

2.2. Анализ сборников для подготовки к ОГЭ на предмет текстовых задач

Основной государственный экзамен (ОГЭ) по математике представляет собой экзаменационную работу, состоящую из 26 заданий, которые разбиты на две части. Первая часть состоит из двух модулей – модуль «Алгебра» (14 заданий) и модуль «Геометрия» (6 заданий). Вторая часть состоит также из двух модулей – модуль «Алгебра» (3 задания) и модуль «Геометрия» (3 задания). Умение решать текстовые задачи необходимо для выполнения задания №7 (первая часть) и задания №22 (вторая часть).

Рассмотрим самые популярные сборники заданий для подготовки к основному государственному экзамену:

- Рязановский А.Р., Мухин Д.Г. ОГЭ 2018. Математика. Сборник экзаменационных тестов, М.: Экзамен, 2018. — 96 с.
- Ященко И.В. (ред.). ОГЭ 2018. Математика. Типовые тестовые задания. 14 вариантов заданий, М.: Экзамен, 2018. — 128 с.
- Мальцев Д.А. и др. ОГЭ 2018. Математика. 9 класс. 60 тестов с учётом всех изменений Демоверсии ОГЭ-2018, Ростов н/Д; М.: Народное образование, 2018. — 343 с.

Проведем анализ данных сборников на предмет изучения текстовых задач. Будем рассматривать текстовые задачи только из второй части (задание 22). В процессе анализа выделим:

-краткие сведения о сборнике;

-разнообразие типов текстовых задач;

-уровень сложности;

-уникальность (редкие, интересные, сложные задачи).

1) Рязановский А.Р., Мухин Д.Г. ОГЭ 2018. Математика. Сборник экзаменационных тестов, М.: Экзамен, 2018. — 96 с.

Сборник содержит 15 тестов, соответственно 15 заданий № 22. Представлены текстовые задачи следующих типов:

1) «на движение» (задачи на движение в одном направлении) - 7 задач,
2) «на работу» - 6 задач,
3) «на смеси» - 2 задачи.

Задачи, представленные в сборнике, не отличаются разнообразием, как правило, в них изменены только числовые значения. Уровень сложности можно оценить, как средний и ниже среднего.

Решение данных задач не может гарантировать высокий уровень подготовки и итоговый балл при сдаче ОГЭ.

2) Ященко И.В. (ред.). ОГЭ 2018. Математика. Типовые тестовые задания. 14 вариантов заданий, М.: Экзамен, 2018. — 128 с.

Авторы пособия - ведущие специалисты, принимающие непосредственное участие в разработке методических материалов для подготовки к выполнению контрольных измерительных материалов ОГЭ.

Сборник содержит 14 тестов, соответственно 14 заданий № 22. Представлены текстовые задачи следующих типов:

- «на движение» (задачи на движение в одном направлении) - 5 задач,
- «на работу» - 2 задачи,
- ««на смешение и концентрацию» - 4 задачи,
- «на нахождение средней скорости» - 3 задачи.

Задачи, представленные в сборнике, не отличаются разнообразием, как правило, в них изменены только числовые значения. Уровень сложности можно оценить, как средний.

Решение данных задач не может гарантировать высокий уровень подготовки и итоговый балл при сдаче ОГЭ.

3) Мальцев Д.А. и др. ОГЭ 2018. Математика. 9 класс. 60 тестов с учётом всех изменений Демоверсии ОГЭ-2018, Ростов н/Д; М.: Народное образование, 2018. — 343 с.

Тесты данного пособия составлены на основе официальных документов, определяющих структуру и содержание контрольных измерительных материалов ОГЭ 2018 — демоверсий, спецификаций и кодификаторов. Отмстим, что все тесты попарно подобны — тест №2 подобен тесту №1, тест №4 подобен тесту №3 и т.д. Также внутри каждой проверочной работы задания первой пары тестов схожи с заданиями второй пары тестов этой работы. Задания каждого типа расположены в пособии таким образом, что уровень их сложности постепенно повышается, как внутри отдельно взятой проверочной работы, так и при переходе от первой работы к последней. При этом уровень сложности каждого отдельно взятого задания лишь немного превышает уровень сложности соответствующего задания демоверсии. Это в точности соответствует общему принципу подготовки к экзаменам — при тренировках задания должны быть немного сложнее, чем на реальном экзамене.

Одновременно с данным пособием выходит «Решебник», содержащий решения заданий с развёрнутым ответом для нечетных тестов и решения задач по теории вероятности.

Сборник содержит 60 тестов, соответственно 60 заданий № 22. Представлены текстовые задачи следующих типов:

- «на движение» (задачи на движение в противоположных направлениях, навстречу друг другу, на удаление друг от друга;

задачи на движение в одном направлении, вдогонку, на отставание и т.д.) - 23 задач,

- «на работу» - 10 задач,
- ««на смешение и концентрацию» - 8 задач,
- «на проценты»»» - 4 задачи,
- «на смеси и сплавы» - 8 задачи,
- «на нахождение средней скорости» - 7 задач.

Задачи, представленные в сборнике, отличаются разнообразием, своей уникальностью. Среди них, встречаются уровня сложности выше среднего и высокого.

Решение данных задач может гарантировать высокий уровень подготовки и итоговый балл при сдаче ОГЭ.

Текстовые задачи как вид математического задания очень важен для развития логики и мышления учащихся. Решение текстовых задач – это творческий процесс. Помимо основных методов, существуют такие, которые используются лишь для ограниченного количества задач. Трудность решения задачи, которая не является стандартной (задачей с известным ходом решения), состоит в обнаружении последовательности действий. В процессе решения нужно искать ответ разными путями, а также помнить, что важен не результат решения задачи, то есть ответ, а важен сам процесс решения, его творческая составляющая [2].

2.3. Разбор решения текстовых задач повышенного уровня сложности в сборниках для подготовки к ОГЭ

В качестве сборников для разбора решения текстовых задач повышенного уровня сложности будем использовать: сборник «Математика 9 класс. ОГЭ 2018: учебно-методическое пособие/ Под ред. Д.А. Мальцева» и интернет-портал «alexlarin.net».

Задание №7 (Тест №27) [12]. В состав лекарственного сбора входят цветы ромашки аптечной, трава фиалки трехцветной и корни солодки, массы которых относятся как $8 : 6 : 5$ соответственно. Какой процент в этом сборе составляют цветы ромашки аптечной? Ответ дайте с точностью до целых (т.е. отбросив дробную часть полученного числа).

Решение:

1. Проанализировав текст задачи (задача на проценты и доли), устно выделяем условие и вопрос.

   Условие задачи: *масса цветов ромашки аптечной относится к массе травы фиалки трехцветной относится к массе корням солодки также как* $8 : 6 : 5$ *соответственно.*

   Вопрос задачи: *какой процент в этом сборе составляют цветы ромашки аптечной? Ответ дайте с точностью до целых (т.е. отбросив дробную часть полученного числа).*

2. Представим данную задачу в виде круговой диаграммы.

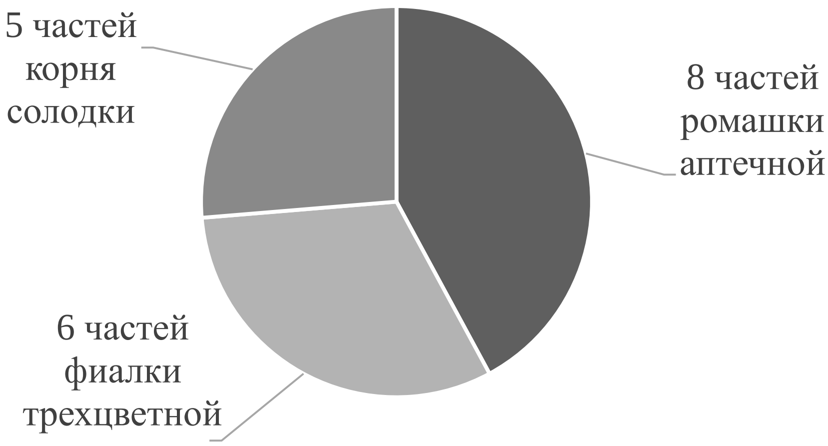

Рисунок 2.1 – Состав лекарственного сбора

3. Выберем арифметический метод решения задачи.
4. Приступим к выполнению решения задачи.

   Найдем общее количество частей в лекарственном сборе:

$$8 + 6 + 5 = 19.$$

Количество частей, приходящееся на массу цветов ромашек:

$$8.$$

Для того, чтобы найти какой процент в этом сборе составляют цветы ромашки, необходимо найти какую часть они составляют от общей массы сбора и умножить на $100\ \%$:

$$\frac{8}{19} \cdot 100\ \% = \frac{800}{19}\ \% = 42\frac{2}{19}\ \%\,.$$

Полученное значение не противоречит условию задачи. С учетом округления (с точностью до целых), получим:

$$42\ \%\,.$$

5. Для проверки правильности решения данной задачи, необходимо найти какой процент в этом сборе составляют фиалки и корень солодки.

   Найдем сколько всего частей без ромашки:

   $$6 + 5 = 11;$$

   для того, чтобы найти какой процент в этом сборе составляют фиалки и корень солодки, необходимо найти какую часть они составляют от общей массы сбора и умножить на $100\ \%$:

   $$\frac{11}{19} \cdot 100\ \% = \frac{1100}{19}\ \% = 57\frac{17}{19}\ \%\,;$$

   в результате получим, что

   $$57\frac{17}{19}\ \% + 42\frac{2}{19}\ \% = 100\%;$$

   следовательно, задача решена верно.

6. Ответ: процент ромашки в лекарственном сборе составляет 42%.
7. Анализ решения. Данную задачу можно решить, составив следующую пропорцию:

   $$8 - x\%$$

   $$19 - 100\%;$$

   откуда, $x = (8 \cdot 100) : 19 = 42\frac{2}{19}\%$.

Данный вариант решение задачи не является принципиально иным: в решении, представленном выше, используется определение процента, в данном решении – пропорция.

Пояснение: данная задача относится к первой части ОГЭ, в которой необходимо записать лишь ответ в экзаменационный бланк, поэтому все решение проводится на черновике, а рассуждения - устно.

Задание №7 (Тест №176) [9]. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшалась на одно и тоже количество процентов. Определите на сколько процентов уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу по цене 8000 рублей, он через два года был продан за 6480 рублей.

Решение:

1. Проанализировав текст задачи (задача на проценты), устно выделяем условие и вопрос.

   Условие задачи: *цена холодильника в магазине ежегодно уменьшалась на одно и тоже количество процентов (выставленный на продажу по цене 8000 рублей, он через два года был продан за 6480 рублей).*

   Вопрос задачи: *определите на сколько процентов уменьшалась цена холодильника?*

2. Представим данную задачу в виде схемы.

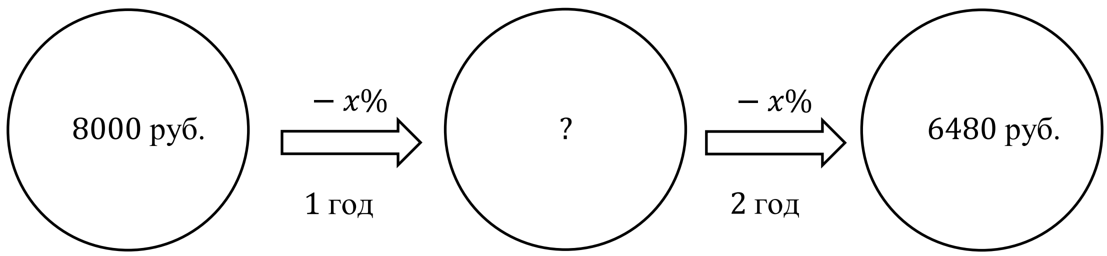

Рисунок 2.2 – Цена холодильника

3. Выберем алгебраический метод решения задачи.
4. Приступим к выполнению решения задачи.

   Пусть x – процент, переведенный в десятичную дробь, на который уменьшалась цена телевизора ежегодно.

Тогда, по окончании первого года, цена телевизора составила:

$$8000 - 8000x.$$

Тогда, по окончании второго года, цена телевизора составила:

$$(8000 - 8000x) - (8000 - 8000x)x.$$

А по условию, цена телевизора через два года составила 6480.

Получаем уравнение:

$$(8000 - 8000x) - (8000 - 8000x)x = 6480.$$

Решаем уравнение:

$$8000 - 8000x - 8000x + 8000x^2 - 6480 = 0;$$

$$8000x^2 - 16000x + 1520 = 0;$$

$$100x^2 - 200x + 19 = 0;$$

$$D = 40000 - 7600 = 32400 = 180^2;$$

$$x_1 = \frac{200 - 180}{200} = 0{,}1;$$

$$x_2 = \frac{200 + 180}{200} = 1{,}9;$$

Получили 2 корня, однако, за x мы принимали процент, представленный в виде десятичной дроби ($0 \le x \le 1$), следовательно, нам подойдет только первый корень.

$x = 0{,}1$, значит цена ежегодно уменьшалась на 10%.

5. Чтобы проверить правильность решения, составим 2 пропорции:
   1) После первого года:

$$8000 - 100\%$$

$$x - 90\%$$

   Отсюда $x = \frac{8000 \cdot 90}{100} = 7200;$

   2) После второго года:

$$7200 - 100\%$$

$$x - 90\%$$

Отсюда $x = \frac{7200 \cdot 90}{100} = 6480$.

Получили, что через 2 года снижения цены на 10% ежегодно, мы имеем 6480 рублей, как в условии задачи. Следовательно, задача решена верно.

6. Ответ: ежегодно цена телевизора снижается на 10%.
7. Анализ решения. Данную задачу можно решить другим способом.

   Пусть x – процент, представленный в виде десятичной дроби, на который ежегодно снижается цена телевизора. Тогда за 2 года цена снизилась на $(1-x)^2$ процентов. Составим уравнение:

$$8000(1-x)^2 = 6480;$$

$$8000(1-2x+x^2) = 6480;$$

$$8000 - 16000x + 8000x^2 - 6480 = 0;$$

   Получили то же самое уравнение, которое решали выше.

   Данный способ решения практически не отличается от того, что представлено выше.

Пояснение: данная задача относится к первой части ОГЭ, в которой необходимо записать лишь ответ в экзаменационный бланк, поэтому все решение проводится на черновике, а рассуждения - устно.

Задание №22 (Тест №176) [9]. На строительстве стены первый каменщик работал 5 дней один. Затем к нему присоединился второй, и они вместе закончили работу через 4 дня. Известно, что первому каменщику потребовалось бы на выполнение этой работы на 5 дней больше, чем второму. За сколько дней может выстроить эту стену первый каменщик, работая отдельно?

<u>Решение:</u>

1. Проанализировав текст задачи (задача на совместную работу), устно выделяем условие и вопрос.

   Условие задачи: *На строительстве стены первый каменщик работал 5 дней один. Затем к нему присоединился второй, и они вместе закончили* *работу через 4 дня. Известно, что первому каменщику потребовалось бы на выполнение этой работы на 5 дней больше, чем второму.*

Вопрос задачи: *За сколько дней может выстроить эту стену первый каменщик, работая отдельно?*

2. Представим данную задачу в виде таблицы.

Пусть x – количество дней, которые необходимы первому каменщику для постройки стены. Пусть весь объем работы $A = 1$.

	A	p	t
I каменщик	1	$\frac{1}{x}$	x
II каменщик	1	$\frac{1}{x-5}$	$x-5$
Вместе	$1-\frac{5}{x}$	$\frac{1-\frac{5}{x}}{4}$	4

Рисунок 2.3 – Совместная работа каменщиков

3. Выберем алгебраический метод решения задачи.
4. Приступим к выполнению решения задачи:

Пусть x – количество дней, которые необходимы первому каменщику для постройки стены, тогда второй каменщик справится за $x-5$ дней.

Пусть весь объем работы А=1.

Тогда, $p_I = \frac{1}{x}$, $p_{II} = \frac{1}{x-5}$.

Поскольку первый каменщик работал один 5 дней, то за 5 дней он построил $5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x}$ стены, следовательно, в момент времени, когда к нему присоединился второй каменщик, им оставалось $1 - \frac{5}{x}$ стены.

Известно, что, работая вместе, каменщики выполнили работу за 4 дня, следовательно, $p_{\text{совместная}} = \frac{1-\frac{5}{x}}{4}$.

Совместная производительность есть сумма производительностей каждого каменщика, таким образом, составляем уравнение и решаем его:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-5}=\frac{1-\frac{5}{x}}{4};$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-5}=\frac{x-5}{4x};$$

$$\frac{4(x-5)+4x-(x-5)^2}{4x(x-5)}=0;$$

ОДЗ: $x \neq 5, x \neq 0$;

$$4(x-5)+4x-(x-5)^2=0;$$

$$4x-20+4x-(x^2-10x+25)=0;$$

$$4x-20+4x-x^2+10x-25=0;$$

$$-x^2+18x-45=0;$$

$$x^2-18x+45=0;$$

$$D=324-180=144=12^2;$$

$$x_1=\frac{18-12}{2}=3;$$

$$x_2=\frac{18+12}{2}=15.$$

Получили 2 корня, однако, $x_1 = 3$ – не удовлетворяет условию задачи, поскольку, если первый каменщик выполняет всю работу за 3 дня, тогда второй за $3-5=-2$ дня, чего быть не может.

Получаем, что первый каменщик выполняет всю работу один за 15 дней.

5. Чтобы проверить правильность решения данной задачи, необходимо посчитать, действительно ли, работая вместе, каменщики закончат за 4 дня.

$$p_1=\frac{1}{15};$$

$$p_2=\frac{1}{10};$$

$$p_{\text{совместная}} = \frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{1}{6};$$

Первый каменщик работал 5 дней один и за это время он выполнил

$$5 \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{3}.$$

Тогда, работая совместно, им необходимо выполнить еще $\frac{2}{3}$ всего заказа.

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = 4.$$

Следовательно, работая вместе они достроят стена за 4 дня, что соответствует условию задачи.

6. Ответ: за 15 дней может выстроить стену первый каменщик, работая отдельно.
7. Анализ решения. Разберем другой вариант решения данной задачи.

Пусть $p_2 = \frac{1}{x}$, тогда $p_1 = \frac{1}{x+5}$.

5 дней работал первый каменщик и выполнил за это время $5\left(\frac{1}{x+5}\right)$ работы. Вместе со вторым каменщиком они выполнили $4\left(\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x}\right)$ работы. $A = 1$.

Тогда составим и решим уравнение:

$$5\frac{1}{x+5} + 4\left(\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x}\right) = 1;$$

$$\frac{5x + 4x + 4(x+5) - x(x+5)}{x(x+5)} = 0;$$

ОДЗ: $x \neq 0; x \neq -5$.

$$9x + 4x + 20 - x^2 - 5x = 0;$$

$$x^2 - 8x - 20 = 0;$$

$$D = 64 + 80 = 144 = 12^2;$$

$$x_1 = \frac{12+8}{2} = 10;$$

$$x_2 = \frac{12-8}{2} = 2;$$

Получили 2 корня, однако, $x_2 = 2$ – не удовлетворяет условию задачи, поскольку, если второй каменщик выполняет всю работу за 2 дня, тогда остаток работы они не могут выполнить за 4 дня.

Тогда первый каменщик выполнит весь заказ за $10 + 5 = 15$ дней.

Задание №22 (Тест №41) [12]. Два автобуса одновременно выехали навстречу друг другу из пунктов M и N, расстояние между которыми 70 км, и через 40 минут одновременно прибыли в промежуточный пункт P. Найдите расстояние (км) между пунктами M и P, если известно, что средняя скорость автобуса, выехавшего из пункта M оказалась на 15 км/ч больше средней скорости автобуса, выехавшего из пункта N.

Решение:

1. Проанализировав текст задачи (задача на движение по прямой), устно выделяем условие и вопрос.

   Условие задачи: *два автобуса одновременно выехали навстречу друг другу из пунктов M и N, расстояние между которыми 70 км, и через 40 минут одновременно прибыли в промежуточный пункт P, средняя скорость автобуса, выехавшего из пункта M оказалась на 15 км/ч больше средней скорости автобуса, выехавшего из пункта N.*

   Вопрос задачи: *найдите расстояние (км) между пунктами M и P.*

2. Представим данную задачу в виде схемы.

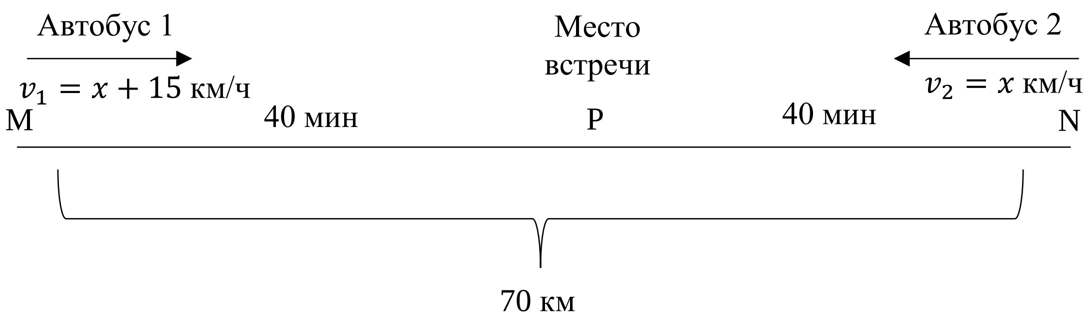

Рисунок 2.4 – Схема движения автобусов

3. Выберем алгебраический метод решения задачи.
4. Приступим к выполнению решения задачи:

Пусть x – средняя скорость автобуса, который выехал из пункта N, то есть $v_2 = x$ км/ч, тогда скорость автобуса, который выехал из пункта M, то есть $v_1 = x + 15$ км/ч.

$v_{\text{сближение}} = v_1 + v_2 = x + 15 + x = 2x + 15$ км/ч.

40 мин $= \frac{2}{3}$ часа.

Так как через $\frac{2}{3}$ часа они встретились, то можно составить следующее уравнение:

$$\frac{70}{2x+15} = \frac{2}{3};$$

$$210 = 2(2x + 15);$$

$$210 = 4x + 30;$$

$$4x = 210 - 30;$$

$$4x = 180;$$

$$x = 45;$$

$v_2 = 45$ км/ч, следовательно, $v_1 = 45 + 15 = 60$ км/ч.

Так как автобус, который выехал из пункта M, двигается со скоростью 60 км/ч, и до пункта P доезжает за $\frac{2}{3}$ часа, то расстояние $MP = 60 \cdot \frac{2}{3} = 40$ км.

Ответ: $MP = 40$ км.

5. Чтобы проверить правильность решения данной задачи, найдем расстояние PN и докажем, что $MP + PN = 70$ км.

   Скорость автобуса, который выехал из пункта N равна 45 км/ч. До пункта P он добирался 40 минут иди $\frac{2}{3}$ часа, то есть расстояние

   $PN = 45 \cdot \frac{2}{3} = 30$ км.

   Тогда $MP + PN = 40 + 30 = 70$ км. Следовательно, задача решена верно.

6. Ответ: расстояние между пунктами M и P равно 40 км.

7. Анализ решения. Данная задача могла быть решена другим способом, если за переменную x примем искомое расстояние между пунктами M и P, тогда $70 - x$ км – расстояние между пунктами P и N. Время до встречи двух автобусов в пункте P составляет 40 мин $= \frac{2}{3}$ часа.

   Тогда, $v_1 = x : \frac{2}{3} = \frac{3x}{2}$ км/ч – средняя скорость автобуса, выехавшего из пункта M, а $v_2 = (70 - x) : \frac{2}{3} = \frac{3(70-x)}{2}$ км/ч – средняя скорость автобуса, выехавшего из пункта N. Известно, что средняя скорость автобуса, выехавшего из пункта M, на 15 км/ч больше средней скорости автобуса, выехавшего из пункта N. Тогда можно составить следующее уравнение и решить его:

$$\frac{3x}{2} - \frac{3(70 - x)}{2} = 15;$$

$$\frac{3x - 210 + 3x}{2} = 15;$$

$$6x - 210 = 30;$$

$$6x = 210 + 30;$$

$$6x = 240;$$

$$x = 40.$$

   Таким образом, имеем, что расстояние между пунктами M и N равно 40 км.

Задание №22 (Тест №168) [9]. Имеются два сплава меди и цинка. В первом сплаве меди в 2 раза больше, чем цинка, а во втором в 5 раз меньше, чем цинка. Во сколько раз больше надо взять второго сплава, чем первого, чтобы получить новый сплав, в котором цинка было бы в 2 раза больше, чем меди?

Решение:

1. Проанализировав текст задачи (задача на сплавы), устно выделяем условие и вопрос.

Условие задачи: *имеются два сплава меди и цинка. В первом сплаве меди в* 2 *раза больше, чем цинка, а во втором в* 5 *раз меньше, чем цинка.*

Вопрос задачи: *во сколько раз больше надо взять второго сплава, чем первого, чтобы получить новый сплав, в котором цинка было бы в* 2 *раза больше, чем меди?*

2. Представим данную задачу в виде схемы.

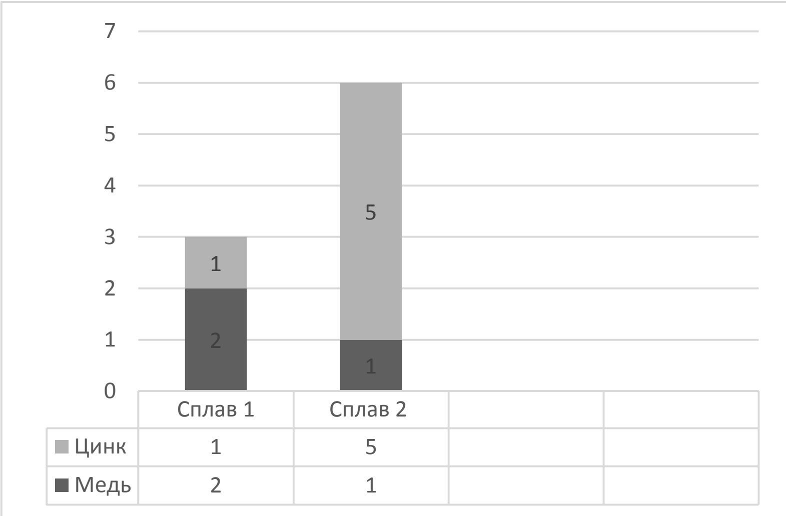

Рисунок 2.5 – Состав сплавов

3. Выберем алгебраический метод решения задачи.
4. Приступим к выполнению решения задачи:

Пусть x кг – масса первого сплава.

Пусть y кг – масса второго сплава.

Так как в первом сплаве соотношение массы меди к массе цинка равно $2:1$ (меди в 2 раза больше, чем цинка), то всего получается 3 части, тогда меди в этом сплаве $\frac{2}{3}x$ кг.

Так как во втором сплаве соотношение массы цинка к массе меди равно $5:1$ (цинка в 5 раз больше, чем меди), то всего получается 6 частей, тогда меди в этом сплаве $\frac{1}{6}y$ кг.

Так как в третьем сплаве соотношение массы цинка к массе меди равно $2:1$ (цинка в 2 раза больше, чем меди), то всего получается 3 части, тогда меди получается $\frac{1}{3}(x+y)$ кг.

Получим уравнение и решим его:

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y = \frac{1}{3}(x + y);$$

$$4x + y = 2(x + y);$$

$$4x - 2x = 2y - y;$$

$$2x = y;$$

$$\frac{y}{x} = 2;$$

Таким образом, получаем, что соотношения массы второго сплава к массе первого сплава равно 2. Следовательно, второго сплава надо взять в 2 раза больше.

5. Чтобы проверить правильность решения данной задачи, предположим, что у нас есть 6 кг первого сплава и 12 кг второго сплава. Тогда, по условию задачи, в первом сплаве 4 кг меди и 2 кг цинка, а во втором сплаве 2 кг меди и 10 кг цинка. Чтобы получить сплав, в котором цинка будет ровно в два раза больше, чем меди, мы возьмем одну часть первого сплава, то есть 4 кг меди и 2 кг цинка и одну часть второго сплава, где 2 кг меди и 10 кг цинка. Итого, у нас получится, что третий сплав состоит из $4 + 2 = 6$ кг меди и $10 + 2 = 12$ кг цинка – цинка ровно в 2 раза больше, чем меди. Действительно, чтобы цинка было в 2 раза больше, чем меди, необходимо второго сплава брать в 2 раза больше, чем первого.
6. Ответ: второго сплава надо взять в 2 раза больше, для того, чтобы масса цинка в полученном сплаве была в 2 раза больше массы меди.
7. Анализ решения. Рассмотрим другой способ решения данной задачи.

   Пусть x кг – масса меди в первом сплаве, тогда масса цинка в первом сплаве $\frac{x}{2}$ кг.

   Пусть y кг – масса меди во втором сплаве, тогда масса цинка во втором сплаве $5y$ кг.

Пусть z кг – масса меди в третьем сплаве, тогда масса цинка в третьем сплаве $2z$ кг.

Масса первого сплава $m_1 = x + \frac{x}{2} = \frac{3x}{2}$ кг.

Масса второго сплава $m_2 = y + 5y = 6y$ кг.

Масса меди в третьем сплаве, есть сумма масс меди первого и второго сплавов: $z = x + y$ (1).

Масса цинка в третьем сплаве, есть сумма масс цинка первого и второго сплавов: $2z = \frac{x}{2} + 5y$ (2).

Подставим значение z из (1) в (2):

$$2(x + y) = \frac{x}{2} + 5y;$$

$$2x + 2y = \frac{x}{2} + 5y;$$

$$2x - \frac{x}{2} = 5y - 2y;$$

$$\frac{3x}{2} = 3y;$$

$$3x = 6y;$$

$$x = 2y.$$

Таким образом, получаем, что масса перового сплава равна:

$$m_1 = \frac{3x}{2} = 3 \cdot \frac{2y}{2} = 3y.$$

А масса второго сплава равна $m_2 = 6y$.

Тогда, $\frac{m_2}{m_1} = \frac{6y}{3y} = 2$.

Ответ второго сплава надо взять в 2 раза больше, чем первого.

Данный вариант решения задачи является более сложным и запутанным, может вызвать ряд вопросов у детей.

Задание №22 (Тест №27) [12]. Смесь сухофруктов состоит из чернослива, инжира и манго. Чернослива в этой смеси на 80% больше, чем инжира, а манго в 1,5 раза меньше, чем чернослива. Сколько процентов инжира содержит данная смесь сухофруктов?

Решение:

1. Проанализировав текст задачи (задача на смеси), устно выделяем условие и вопрос.

   Условие задачи: *смесь сухофруктов состоит из чернослива, инжира и манго. Чернослива в этой смеси на 80% больше, чем инжира, а манго в 1,5 раза меньше, чем чернослива.*

   Вопрос задачи: *сколько процентов инжира содержит данная смесь сухофруктов?*

2. Представим данную задачу в виде схемы.

Рисунок 2.6 – Состав смеси

3. Выберем алгебраический метод решения задачи.
4. Приступим к выполнению решения задачи:

   Пусть x – часть инжира в смеси;

   Тогда $x + 0{,}8x$ – часть чернослива в смеси, а $\frac{x+0{,}8x}{1{,}5}$ – часть манго в смеси.

   Поскольку сумма всех частей равна 1, то составим следующее уравнение:

$$x + x + 0{,}8x + \frac{x + 0{,}8x}{1{,}5} = 1;$$

$$2{,}8x + \frac{1{,}8x}{1{,}5} = 1;$$

$$2{,}8x + 1{,}2x = 1;$$

$$4x = 1;$$

$$x = 0{,}25.$$

Так как x – часть инжира в смеси, то, чтобы ответить на вопрос задачи, переведем данное значение в проценты, для этого умножим его на 100%:

$$0{,}25 \cdot 100\% = 25\%;$$

5. Чтобы проверить правильность решения данной задачи, посчитаем, в процентном соотношении суммы всех частей (она должна быть равна 100%):

   25% - часть инжира, тогда чернослива на 80% больше, чем инжира, то есть:

   $$25 + 25 \cdot \frac{80}{100} = 45\%;$$

   Количество инжира составляет 45% от всей смеси. Манго в 1,5 раза меньше чем чернослива, то есть:

   $$\frac{45}{1{,}5} = 30\%;$$

   Количество манго составляет 30% от всей смеси.

   Тогда сумма процентных соотношений всех фруктов равна:

   $$25\% + 45\% + 30\% = 100\%;$$

   Следовательно, задача решена верно.

6. Ответ: 25% инжира содержит данная смесь сухофруктов.
7. Анализ решения. Рассмотрим другой способ решения данной задачи.

   Принцип задачи тот же, что и представлен выше, за исключением выбора переменной – теперь за x примем часть смеси, которую составляет манго.

   Тогда чернослива – $1{,}5x$. Вся смесь составляет 1, а часть смеси, на которую приходится чернослив и манго вместе – $1{,}5x + x = 2{,}5x$.

   Следовательно, чтобы найти какую часть составляет инжир, необходимо из всего вычесть часть, которую составляет чернослив и манго вместе:

   $$1 - 2{,}5x.$$

В условии задачи сказано, что чернослива в этой смеси на 80% больше, чем инжира, следовательно, имеем:

$$1{,}5x = 1 - 2{,}5x + 0{,}8(1 - 2{,}5x);$$

$$1{,}5x + 2{,}5x = 1 + 0{,}8 - 2x;$$

$$4x + 2x = 1{,}8;$$

$$6x = 1{,}8;$$

$$x = \frac{1{,}8}{6};$$

$$x = \frac{18}{60};$$

$$x = 0{,}3.$$

То есть манго составляет $0{,}3$ от всей смеси или 30%, тогда чернослива в $1{,}5$ раза больше $- 0{,}3 \cdot 1{,}5 = 0{,}45$ или 45%. Таким образом, процентное соотношение инжира составляет: $100\% - (45\% + 30\%) = 25\%$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе проведенной исследовательской работы были реализованы все поставленные задачи.

Во-первых, были разобраны понятия «задача», «текстовая задача», выделена структура задачи и рассмотрена их классификация. Изучена психолого-педагогическая литература по данной теме, а также приведены примеры, в которых показаны способы анализа текста на предмет выделения условия и требования задачи.

Во-вторых, изучена учебно-методическая литература, направленная на обучение решению текстовых задач. Определены основные методы решения текстовых задач, выделены их отличия друг от друга. Приведены примеры использования методов решения текстовых задач.

В-третьих, дано разъяснение процессу решения текстовых задач и выделены основные 7 этапов решения задачи. А также приведена подробная характеристика каждого этапа решения на конкретном примере. Определена важность анализа задачи и ее схематического представление в процессе нахождения дальнейшего пути решения.

В-четвертых, обозначены основные проблемы, возникающие в процессе обучения решению текстовых задач, к которым относятся: дифференциация текстовых задач, наглядность в записи условий, проверка полученного решения на соблюдение логики, нарушение очередности действий. Помимо выделения и подробного описания каждой из проблем в работе приведены способы и пути их ликвидации.

В-пятых, проведен анализ самых популярных сборников заданий для подготовки к ОГЭ на предмет текстовых задач.

В-шестых, были разобраны решения наиболее сложных текстовых задач, с подробным выделением всех 7 этапов решения, из актуальных сборников для подготовки к ОГЭ.

Подводя итоги проделанной работы, можно утверждать, что цели достигнуты. Проведенный анализ эффективности методики обучения решению текстовых задач подтвердил выдвинутую гипотезу.

Таким образом, если в процессе обучения решению текстовых задач больше внимания уделять анализу текста, выделению основных элементов задачи и развитию логического аппарата школьников, то повысится уровень качества подготовки к решению текстовых задач в основном государственном экзамене.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Балл, Г.А. О психологическом содержании понятия «задача» / Г.А. Балл // Вопросы психологии. – 1970. – № 5. – С. 81–87.

2. Гусев, В. А. Психолого - педагогические основы обучения математике [Текст]. - М.: ООО Изд. «Вербум М», ООО Изд. центр «Академия», 2003. – 432с.

3. Демидова, Т. Е. Теория и практика решения текстовых задач [Текст]. - М.: «Академия», 2002. – 288с.

4. Колягин, Ю. М. Задачи в обучении математике: Кн. для учителей [Текст]. - М.: Просвещение,1977. – 104 с.

5. Колягин, Ю. М., Оганесян, В. А. Учись решать задачи: Кн. для учащихся [Текст]. - М.: Просвещение, 1980. – 96 с.

6. Колягин, Ю. М. Задачи в обучении математике. Часть 11. Обучение математике через задачи и обучение решению задач [Текст]. – М.: Просвещение, 1977. – 204 с.

7. Крутецкий, В.А. Психология математических способностей школьников / В.А. Крутецкий. – М.: Просвещение, 1968. – 432 с.

8. Кулагина, И.Ю. Возрастная психология: Учебное пособие / И.Ю. Кулагина. – 3-е изд.– М.: УРАО, 1997. – 176 с.

9. Ларин А.А. [личный сайт]. – URL: http://alexlarin.net (дата обращения: 23.05.2018).

10. Лебедев, В. С. Анализ и решение текстовых задач. Алгоритмизация [Текст] // Математика. – 2000. – №41. – С. 8 – 10.

11. Левитас, Г. Г. Об алгебраическом решении текстовых задач [Текст] // Математика в школе. – 2000. – № 8. – С. 13 – 14.

12. Математика 9 класс. ОГЭ 2018: учебно-методическое пособие / Под ред. Д.А. Мальцева. – Ростов н/Д: Издатель Мальцев Д.А.; Народное образование, 2018. – 343[1] с.

13. Мухина, В. С. Возрастная психология: феноменология развития, детство, отрочество: Учеб. для студ. вузов [Текст]. - 4 - е изд. стереотип. - М.: Изд. центр «Академия», 1999. – 456 с.

14. Нешков, К. И., Семушин, А. Д. Функции задач в обучении [Текст]. - 5-е изд.- М.: Просвещение, 1971. – 285 с.

15. Никифоров, Н. И. К изучению, темы «Решение задач с помощью уравнений» [Текст] // Математика в школе. - 1994. - № 2 - С. 12 – 14.

16. Пойа Д. Как решать задачу: Пособие для учителей [Текст]. - 2-е изд.- М.: Государств. учеб. - педагогич. изд. министерства просвещения РСФСР, 1961. – 205 с.

17. Психология. Словарь [Текст] /Под общ. ред А. В. Петровского, М. Г.- 2 - е изд., испр. и доп. М.: Политиздат, 1990. - 490. – 490 с.

18. Старинные занимательные задачи [Текст] / Под ред. С. Н. Олехник. - М.: Изд. отдел УНЦ ДО МГУ, 1996. - 152 с.

19. Фридман, Л.М. Как научиться решать задачи [Текст]: Кн. для учащихся ст. кл. средн. шк. / Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий. – 3-е изд., дораб. – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.