МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

Физико-математический факультет

Кафедра математики и методики обучения математике

«МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ В СВЕТЕ РЕАЛИЗАЦИИ ФГОС ООО»

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05 Педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»

Проверка на объем заимствований:
60,81 % авторского текста

Работа рекомендована к защите
«29» марта 2019 г.
зав. кафедрой МиМОМ
_________ Шумакова Е.О.

Выполнил:
Студент группы ОФ-513/086-5-1
Мурзагалеев Арсен Николаевич

Научный руководитель:
Доцент, кандидат пед. наук
Винтиш Татьяна Юрьевна

Челябинск
2019 год

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Образование на современном этапе характеризуется усилением внимания к ученику, к его саморазвитию и самопознанию, вниманием обучающихся к окружающему миру и к себе, к воспитанию умения искать и находить своё место в жизни. Целью современного образования является полное достижение развития тех способностей личности, которые нужны ей и обществу. Цели обучения математике в общеобразовательной школе определяются её ролью в развитии общества в целом и формировании личности каждого отдельного человека. Образовательные и воспитательные задачи обучения математике должны решаться комплексно с учётом возрастных особенностей учащихся, специфики математики как науки и учебного предмета, определяющей её роль и место в общей системе школьного обучения и воспитания. Преподавателю предоставляется право самостоятельного выбора методических путей и приёмов решения этих задач.

Среди различных разделов математики, изучаемых в школе, особое место занимает и играет особую роль - геометрия. Возрастание значимости геометрии на всех ступенях образовательной лестницы, в самых разных областях науки, техники, искусства - заметная тенденция сегодняшнего времени. Геометрия развивает логическое мышление, которое является одним из важнейших элементов воспитания личности, а также нравственное воспитание, независимость суждений и поведения. Её методы и выводы проникли во многие области человеческой деятельности. Целью изучения курса геометрии в основной школе является систематическое изучение свойств геометрических фигур на плоскости, развитие логического мышления и подготовки аппарата, необходимого для изучения смежных дисциплин (физика, черчение и т.д.).

Треугольник является важнейшей фигурой планиметрии, и потому в первую очередь изучают свойства этой фигуры. С ним связаны многие методы, используемые при решении различных геометрических задач. Любой многоугольник может быть разделён на треугольники, а изучение свойств этого многоугольника, сводится к изучению составляющих его треугольников. В каком-то смысле изучаемая в школьном курсе геометрия - это геометрия треугольника. Поэтому очень важно представлять себе методику изложения этой темы в различных учебных пособиях для правильного построения курса и избежания методических ошибок.

Так как тема изучения треугольника является начальной стадией геометрической науки, она должна быть представлена полностью, раскрыта и преподнесена доступно для учеников, дабы развить у учащихся изучать предмет геометрии. В процессе изучения дальнейших материалов геометрии приходится неоднократно возвращаться к истокам начала науки, где находится материал, непосредственно связанный с треугольником; кроме того, учитель вынужден внедрять новые методы, разрабатывать эффективную методику обучения, так что представленная работа полностью освещает актуальность выбранной темы.

Гипотеза исследовательской работы заключена в следующем: процесс обучения решению геометрических задач по теме «Треугольники» будет эффективнее если помимо уроков в процесс обучения включить курсы внеурочной деятельности.

Объектом исследования данной работы является процесс изучения треугольников в свете реализации ФГОС ООО.

Предмет исследования – изучение учащихся треугольников в курсе геометрии 7-9 классах.

Цель данного исследования – разработка курсов внеурочной деятельности для подготовки к решению задач второй части ОГЭ изучения треугольников в курсе геометрии 7-9 классах.

Соответствии с поставленной целью были выявлены следующие задачи:

1) Проанализировать подходы и особенности изложения данной темы.

2) Дать понятие треугольников, рассмотреть свойства и показать применение этих свойств к решению задач.

3) Выявить основные проблемы, связанные с решением геометрических задач в ОГЭ.

4) Проанализировать школьные учебники геометрии 7-9 классы.

5) Показать практическую значимость темы; разработать курс внеурочной деятельности по решению геометрических задач в ОГЭ.

Цели и задачи определили структуру выпускной квалификационной работы, которая состоит из введения двух глав, заключения и списка использованных источников.

В первой главе квалификационной работы внимание обращается на те или иные вопросы теоретического характера, представлена сущность изучения треугольников. Перечислен ряд проблем, возникающих при изучении треугольников, а также пути их решения. ФГОС ООО применительно к школьному курсу математики.

Во второй главе квалификационной работы на основе проведенного анализа учебников разработан курс внеурочной деятельности для подготовки к решению задач второй части ОГЭ изучения треугольников в свете реализации ФГОС ООО.

Методы исследования: анализ научной литературы, анализ школьных учебников, анализ образовательных программ

Глава 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ ПО ФГОС ООО У УЧАЩИХСЯ 7-9 КЛАССОВ

1.1. ФГОС ООО применительно к школьному курсу математики.

Цель Российского школьного образования – повышение качества образования, достижение новых образовательных результатов, соответствующих современным запросам личности, общества и государства.

ФГОС ориентирует образование на достижение нового качества, адекватного современным (и даже прогнозируемым) запросам личности, общества и государства. Особенность нового стандарта в том, что он вводится как общественный договор. Если раньше главным ответчиком за результаты образования был ребенок, то теперь заключается трехсторонний договор между родителями, образовательным учреждением и руководителем муниципального уровня, где прописаны права и обязанности каждой стороны. Главная задача школы предоставить обучающимся качественное образование. Введение стандарта второго поколения во многом изменит школьную жизнь ребенка. Здесь речь о новых формах организации обучения, новых образовательных технологиях и открытой информационно-образовательной среде, далеко выходящей за границы школы. Поэтому в стандарт введена программа формирования универсальных учебных действий, а учебные программы ориентированы на развитие самостоятельной учебной деятельности ученика (на такие виды учебной и внеурочной деятельности, как учебное проектирование, моделирование, исследовательская деятельность, ролевые игры и др.) Отличием особенностью нового стандарта является его деятельностный характер, ставящий главной целью развитие личности ребенка. На уроках сейчас основное внимание будет уделяться развитию видов деятельности школьника, выполнению различных проектных и исследовательских работ. Важное также не просто передать знания школьнику, а научить его овладевать новыми знаниями, видами деятельности.

Следствием внешних и внутренних тенденций в развитии общества и образования явилась разработка стандартов второго поколения. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (ФГОС ООО, Стандарт)[1] представляет собой совокупность требований, обязательных при реализации основной образовательной программы основного общего образования образовательными учреждениями, имеющими государственную аккредитацию.

Стандарт устанавливает требования к результатам освоения обучающимися основной образовательной программы основного общего образования: личностным, метапредметным, предметным.

Изучение математики в основной школе дает возможность обучающимся достичь следующих результатов развития:

- в личностном направлении:1) умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры; 2) критичность мышления, умение распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта; 3) представление о математической науке как сфере человеческой деятельности, об этапах ее развития и значимости для развития цивилизации; 4) креативность мышления, инициатива, находчивость, активность при решении математических задач; 5) умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности;

6) способность к эмоциональному восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений;

в метапредметном направлении:1) первоначальные представления об мыслях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники, о способе моделирования явлений и процессов; 2) умение видеть математическую задачу в контексте сложной ситуации в других дисциплинах, в окружающей жизни; 3) умение находить в различных источниках информацию, необходимую для нахождения математических проблем, и представлять ее в понятной форме; принимать решение в условиях неполной и избыточной, точной и вероятностной информации; 4) понимание и использование математических средств наглядности (графики, диаграммы, таблицы, схемы и др.) для иллюстрации, интерпретации, аргументации; 5) умение выдвигать предположиения при решении учебных задач и понимать необходимость их проверки; 6) умение применять индуктивные и дедуктивные способы мышления, видеть различные стратегии разрешения задач; 7) понимание сущности алгоритмических предписаний и умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом; 8) умение самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных геометрических проблем; 9) умение планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера; в предметном направлении:1) овладение базовым понятийным аппаратом по основным разделам содержания; представление об основных изучаемых понятиях (число, геометрическая фигура, пример, функция, вероятность) как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать реальные процессы и явления; 2) умение работать с математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию), точно и грамотно выражать свои мысли в устной и письменной речи с применением математической терминологии и символики, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений; 3) развитие представлений о числе и числовых системах от натуральных до действительных чисел; овладение навыками устных, письменных, инструментальных вычислений; 4) овладение символьным языком математики, приемами выполнения тождественных преобразований рациональных выражений, решения систем уравнений, неравенств и систем неравенств; умение использовать идею координат на плоскости для интерпретации уравнений, неравенств, систем; умение применять алгебраические преобразования, аппарат уравнений и неравенств для решения задач из различных разделов курса; 5) овладение системой функциональных понятий, функциональным языком и символикой; умение использовать функционально-графические представления для описания и анализа реальных зависимостей; 6) овладение основными способами представления и анализа статистических данных; наличие представлений о статистических закономерностях в реальном мире и о различных способах их изучения, о вероятностных моделях; 7) овладение геометрическим языком, умение использовать его для описания предметов окружающего мира; развитие пространственных представлений и изобразительных умений, приобретение навыков геометрических построений; 8) усвоение систематических знаний о плоских фигурах и их свойствах, а также на наглядном уровне — о простейших пространственных телах, умение применять систематические знания о них для решения геометрических и практических задач; 9) умение измерять длины отрезков, величины углов, использовать формулы для нахождения периметров, площадей и объемов геометрических фигур; 10) умение применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов, калькулятора, компьютера.

Требования к предметным результатам по математике сформулированы в примерных программах. В программе конкретизированы на уровне учебного предмета все три вида результатов: 1) формирование представления о математике как о части общечеловеческой культуры, форме описания и особого метода познания действительности; формирование представления об основных изучаемых понятиях (число, геометрическая фигура, уравнение, функция, вероятность) как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать реальные процессы и явления; 2) развитие умений работать с учебным математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию), точно и грамотно выражать свои мысли в устной и письменной речи с применением математической терминологии и символики, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать логически некорректные рассуждения; 3) развитие представлений о числе и числовых системах от натуральных до действительных чисел; овладение навыками устных, письменных, инструментальных вычислений; 4) овладение символьным языком алгебры, приемами выполнения тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств; развитие умений использовать идею координат на плоскости для интерпретации уравнений, неравенств, систем уравнений и систем неравенств, моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; 5) овладение системой функциональных понятий, функциональным языком и символикой; развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей; 6) овладение геометрическим языком; развитие умения использовать его для описания предметов окружающего мира; развитие пространственных представлений, изобразительных умений, навыков геометрических построений; 7) формирование систематических знаний о плоских фигурах и их свойствах, представлений о простейших пространственных телах; развитие умений применять их для решения геометрических задач, моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры, решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин; 8) овладение основными способами представления и анализа статистических данных; формирование представлений о статистических закономерностях в реальном мире и о различных способах их ать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, описывать и анализировать массивы числовых данных с помощью подходящих статистических характеристик, использовать понимание вероятности изучения, о простейших вероятностных моделях; развитие умений извечных свойств окружающих явлений при принятии решений; 9) развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов, калькулятора, компьютера, пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах; 10) создание основы для формирования интереса к дальнейшему расширению и углублению знаний и выбора математики и информатики как профильных предметов на ступени среднего полного образования; 11) понимание роли информационных процессов как фундаментальной реальности окружающего мира и определяющего компонента современной цивилизации; формирование способности выделять основные информационные процессы в реальных ситуациях; 12) формирование умений использовать методы и средства информатики: моделирование, формализация и структурирование информации; 13) формирование умений записывать различные виды информации на естественном, формализованном и формальном языках, преобразовывать одну форму записи информации в другую, выбирать язык представления информации в соответствии с поставленной целью, определять формы представления информации, отвечающие данной задаче диалоговой или автоматической обработки информации (таблицы, схемы, графы, диаграммы; массивы, списки, деревья и др.).

Цели обучения математике в соответствии с требованиями ФГОС ООО

Цель современного образования – создание условий для обеспечения качества знаний обучающихся, развития познавательных способностей, формирования опыта самостоятельной деятельности, самопознания и самоопределения личности. При овладении учащимися УУД формируется способность самостоятельно успешно усваивать новые знания, формировать умения и компетентности, включая самостоятельную организацию этого процесса. УУД состоят из четырех блоков: 1) личностные; 2) регулятивные; 3) коммуникативные действия; 4) познавательные, которые выполняют определенные функции в процессе обучения.[2]

В личностные универсальные учебные действия входят: жизненное, личностное, профессиональное самоопределение; действия смыслообразования и нравственно-этического оценивания, реализуемые на основе ценностно-смысловой ориентации учащихся (готовность к жизненному и личностному самоопределению; знание моральных норм; умение выделить нравственных аспект поведения и соотносить поступки и события с принятыми этическими принципами);ориентации в социальных ролях и межличностных отношениях.

Эта группа УУД направлена на установление учащимся связи между целью учебной деятельности и ее мотивом, другими словами, между результатом учения, и тем, что побуждает деятельность, ради чего она осуществляется.

Регулятивные УУД включают:

- целеполагание как постановка учебной задачи на основе соотнесения того, что уже известно и освоено учащимся, и того, что еще неизвестно;

- прогнозирование - предвосхищение результата и уровня усвоения знаний, его временных характеристик;

- планирование - определение последовательности промежуточных целей с учетом конечного результата; составление плана и последовательности дей-ствий;

- контроль в форме сличения способа действия и его результата с заданным эталоном с целью обнаружения отклонений и отличий от эталона;

- коррекция - внесение необходимых дополнений и корректив в план и способ действия в случае расхождения эталона, реального действия и его продукта;

- оценка - выделение и осознание учащимся того, что уже усвоено и что еще подлежит усвоению, осознание качества и уровня усвоения; (насколько усвоили полученную информацию);

- волевая саморегуляция как способность к мобилизации сил и энергии; спо-собность к волевому усилию - к выбору и преодолению препятствий.

Основная функция регулятивных учебных действий заключается в обеспечении возможностей учащихся самостоятельно осуществлять деятельность учения, ставить учебные цели, искать и использовать необходимые средства и способы их достижения, контролировать и оценивать процесс и результаты де-ятельности.

В познавательных УУД различают общеучебные, логические действия и действия постановки и решения проблем.

Предполагается, что результатом формирования познавательных универсальных учебных действий будут являться умения:произвольно и осознанно владеть общим приемом решения задач; осуществлять поиск необходимой информации для выполнения учебных заданий; использовать знаково-символические средства, в том числе модели и схемы для решения учебных задач; ориентироваться на разнообразие способов решения задач; учиться основам смыслового чтения художественных и познавательных текстов; уметь выделять существенную информацию из текстов разных видов; уметь осуществлять анализ объектов с выделением существенных и несущественных признаков уметь осуществлять синтез как составление целого из частей; уметь осуществлять сравнение, классификацию по заданным критериям; уметь устанавливать причинно-следственные связи; уметь строить рассуждения в форме связи простых суждений об объекте, его строении, свойствах и связях; уметь устанавливать аналогии; владеть общим приемом решения учебных задач; осуществлять расширенный поиск информации с использованием ресурсов библиотеки, образовательного пространства родного края (малой родины); создавать и преобразовывать модели и схемы для решения задач;

К общеучебным действиям относятся: 1) самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели; 2) поиск и выделение необходимой информации; применение методов информационного поиска, в том числе с помощью компьютерных средств; 3) структурирование знаний; 4) осознанное и произвольное построение речевого высказывания в устной и письменной форме; 5) выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий; 6) рефлексия способов и условий действия, контроль и оценка процесса и результатов деятельности; 7) смысловое чтение как осмысление цели чтения и выбор вида чтения в зависимости от цели; извлечение необходимой информации из прослушанных текстов различных жанров; определение основной и второстепенной информации; свободная ориентация и восприятие текстов художественного, научного, публицистического и официально-делового стилей; понимание и адекватная оценка языка средств массовой информации; 8) постановка и формулирование проблемы, самостоятельное создание алгоритмов деятельности при решении проблем творческого и поискового характера.

Общеучебные действия отвечают за умение адекватно, осознанно и произвольно строить речевое высказывание в устной и письменной речи.

Логические действия включают: 1) анализ объектов с целью выделения признаков (существенных, и несущественных); 2) синтез — составление целого из частей, в том числе самостоятельное достраивание с восполнением недостающих компонентов; выбор оснований и критериев для сравнения, классификации объектов; 3) подведение под понятие, выведение следствий; 4) установление причинно-следственных связей; 5)построение логической цепи рассуждений; 6) доказательство; 7) выдвижение гипотез и их обоснование.

В коммуникативные УУД входят: 1) планирование учебного сотрудничества с учителем и сверстниками — определение цели, функций участников, способов взаимодействия; 2) постановка вопросов — инициативное сотрудничество в поиске и сборе информации; 3) разрешение конфликтов — выявление, идентификация проблемы, поиск и оценка альтернативных способов разрешения конфликта, принятие решения и его реализация; 4) управление поведением партнёра — контроль, коррекция, оценка его действий; 5) умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли в соответствии с задачами и условиями коммуникации.

Эта группа УУД обеспечивают социальную компетентность и учет позиции других людей, партнеров по общению или деятельности; умение слушать и вступать в диалог.

На основе этого установлена взаимосвязь целей и УУД . На ее основе учителем составляется таблица целей обучения теме «Площади» и вывешивается в классе перед началом изучения данной темы. Данная таблица показывает ученику, чему он должен научиться при изучении данной темы. Таблица целей позволяет сделать процесс обучения более конкретным и доступным. В результате данной деятельности происходит формирование личностных, регулятивных, познавательных и коммуникативных УУД.

1.2. Основные понятия, признаки равенства и подобия треугольников.

Понятие треугольника

Если три точки, не лежащие на одной прямой, соединить отрезками, получим треугольник. Одну из сторон треугольника часто называют его основанием.

Теорема. Сумма углов треугольника равна 180 градусам.

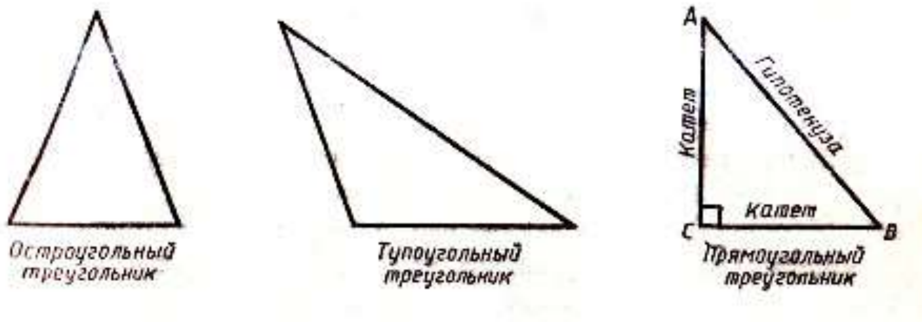
Доказательство.

Пусть Δ ABC— произвольный треугольник. Проведём через вершину B прямую, параллельную прямой AC. Отметим на ней точку D так, чтобы точки A и D лежали по разные стороны от прямой BC. Углы DBC и ACB равны как внутренние накрест лежащие, образованные секущей BC с параллельными прямыми AC и BD. Поэтому сумма углов треугольника при вершинах B и C равна углу ABD. Сумма всех трёх углов треугольника равна сумме углов ABD и BAC. Так как эти углы внутренние односторонние для параллельных AC и BD при секущей AB, то их сумма равна 180°. Ч.т.д.[9]

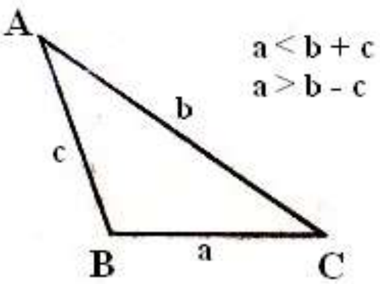
Если все три угла треугольника острые, то треугольник называется остроугольным.

Если один из углов треугольника тупой, то треугольник называется тупоугольным.

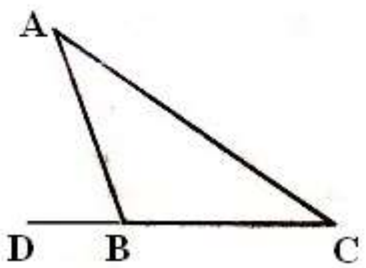
Если один из углов треугольника прямой, то треугольник называется прямоугольным. Сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла, называется гипотенузой, а две другие стороны - катетами.



В любом треугольнике против большей стороны лежит больший угол; против равных сторон - равные углы, и обратно. Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, а также больше разности двух других сторон.

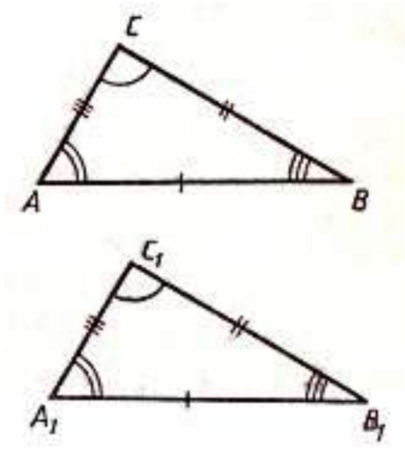


Продолжив одну из сторон треугольника, получим внешний угол. Угол ABD - внешний.



Признаки равенства треугольников

Если два треугольника равны, то элементы (стороны и углы) одного треугольника соответственно равны элементам другого треугольника.



$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

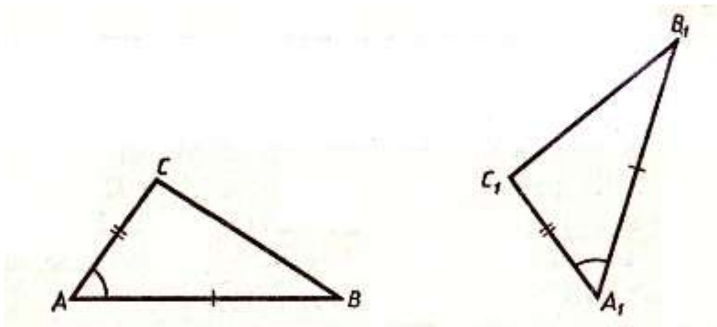
Теорема. Два треугольника равны, если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого.

Доказательство.

Рассмотрим треугольники ABC и AlBlC1 у которых AB=A1B1 AC=A1C1 углы A и A1 равны. Докажем, что треугольники

ABC=AlBlC1.

Так как углы A=A1 то треугольник ABC можно наложить на треугольник A1B1C1 так, что вершина A совместится с вершиной A1 а стороны AB и AC наложатся соответственно на лучи A1B1 и A1C1. Поскольку AB =A1B1 AC =A1C1 то сторона AB совместится со стороной A1B1 а сторона AC — со стороной A1C1; в частности, совместятся точки B и B1 C и C1 Следовательно, совместятся стороны BC и B1C1 Итак, треугольники ABC и A1B1C1 полностью совместятся, значит, они равны. Теорема доказана.

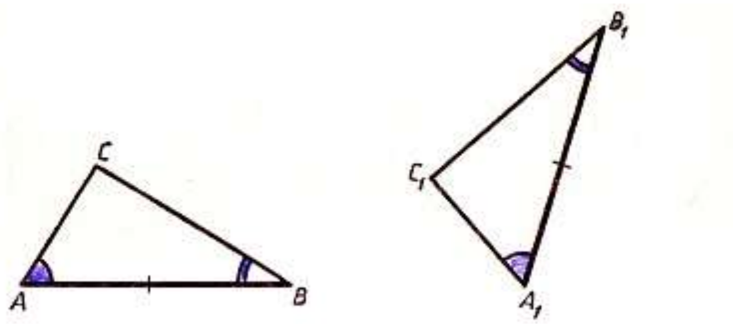


Теорема. Два треугольника равны, если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим углам другого.

Доказательство.

Рассмотрим треугольники ABC и A1B1C1, у которых AB=AlBl, углы A= A1, B = B1. Докажем, что треугольники ABC =A1 B1C1.

Наложим треугольник ABC на треугольник A1B1C1 так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A1 сторона AB — с равной ей стороной A1B1, а вершины C и C1 оказались по одну сторону от прямой A1B1 Так как углы A =A1 и B =B1 то сторона AC наложится на луч A1C1 а сторона BC — на луч B1C1 Поэтому вершина C — общая точка сторон AC и BC — окажется лежащей как на луче A1C1 так и на луче B1C1 и, следовательно, совместится с общей точкой этих лучей — вершиной C1 Значит, совместятся стороны AC и A1C1, BC и B1C1. Итак, треугольники ABC и A1B1C1 полностью совместятся, поэтому они равны.Теорема доказана.[9]



Теорема. Два треугольника равны, если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого.

Доказательство.

Рассмотрим треугольники ABC и A1B1C1, у которых AB=A1B1, BC=B1C1,

CA=C1A1. Докажем, что треугольники ABC =

=A1B1C1. Приложим треугольник ABC к треугольнику A1B1C1 так, чтобы вершина А совместилась с вершиной А1 вершина В — с вершиной В1, а вершины С и С1 оказались по разные стороны от прямой А1В1.

Возможны три случая: луч С1С проходит внутри угла А1С1В1 (а); луч С1С совпадает с одной из сторон этого угла (б); луч С1С проходит вне угла А1С1В1 (в).

а) Так как по условию теоремы стороны АС и AlC1, ВС и В1С1 равны, то треугольники A1C1C и B1C1C — равнобедренные (а). По теореме о свойстве углов равнобедренного треугольника углы 1=2, 3=4, поэтому углы A1CB1 = =A1C1B1. Итак, АС=А1С1, ВС=В1С1, углы С=С1

Следовательно, треугольники ABC и A1B1C1 равны по первому признаку равенства треугольников. Теорема доказана.

б)По условию BC=B1C1, поэтому треугольник ACC1 — равнобедренный с основанием CC1.

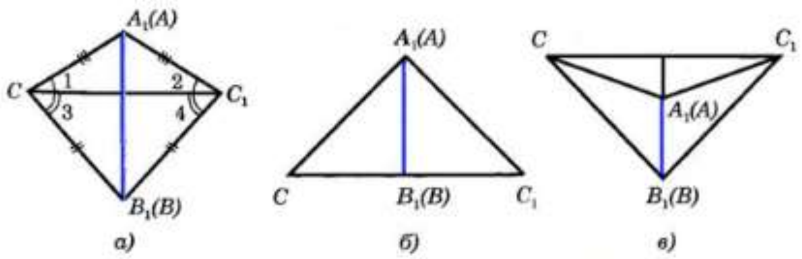
Отсюда ∠C1=∠C (как углы при основании) и ΔABC= ΔA1B1C1 (по 1 признаку равенства треугольников).

в)Так как AC=A1C1 и BC=B1C1, треугольники ACC1 и BCC1 — равнобедренные с основанием CC1 и ∠ACC1=∠AC1C и ∠BCC1=∠BC1C (как углы при основании).

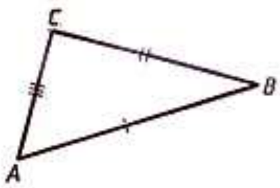
Если из равных углов вычесть равные углы, то получим равные углы:

$$\begin{array}{ccccc} \angle ACB & = & \angle BCC_1 & - & \angle ACC_1 \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \angle AC_1B & = & \angle BC_1C & - & \angle AC_1C \end{array}$$

Таким образом, ∠ACB=∠AC1B и ΔABC= ΔA1B1C1 (по 1 признаку равенства треугольников).

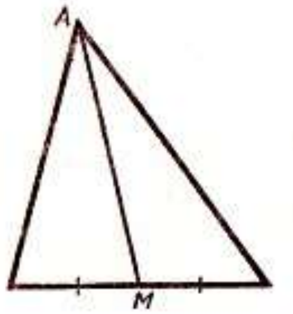


а) б) в)

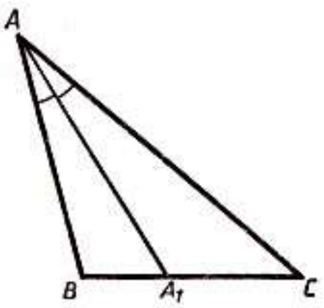


Медиана, биссектриса и высота треугольника

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется медианой треугольника.

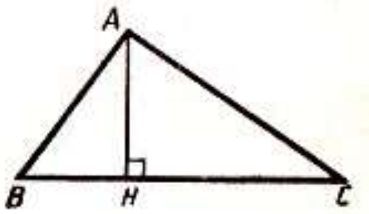


Луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла, называется биссектрисой. Биссектриса делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим к ней сторонам.[11]

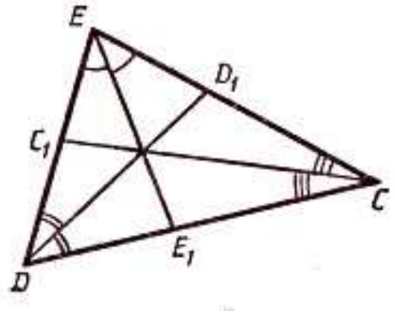


$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB}{AC}$$

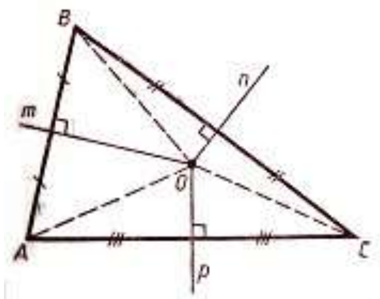
Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется высотой треугольника.



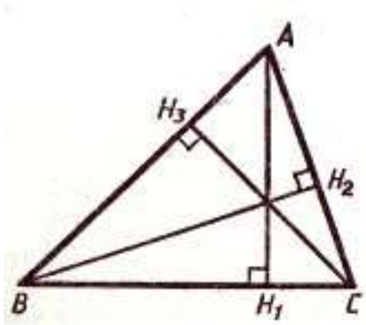
Замечательные точки треугольника. 1) Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.



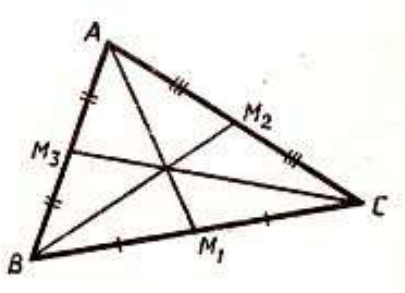
2) Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.



3) Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

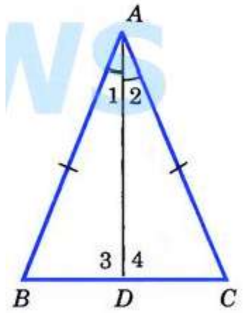


4) Медианы треугольника пересекаются в одной точке.



Равнобедренный треугольник

Треугольник называется равнобедренным, если две его стороны равны. Равные стороны называются боковыми сторонами, а третья сторона - основанием равнобедренного треугольника.



Треугольник, у которого все стороны равны, называется равносторонним.

Теорема. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Доказательство.

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием BC и докажем, что углы B=C. Пусть AD — биссектриса треугольника ABC . Треугольники ABD и ACD равны по первому признаку равенства треугольников (стороны AB=AC по условию, AD — общая сторона, углы 1=2, так как AD — биссектриса). В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, поэтому углы E=C. Теорема доказана.

Теорема. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой.

Доказательство.

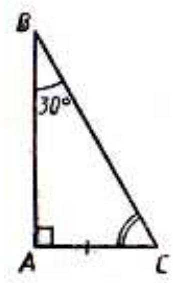
ABC — равнобедренный треугольник с основанием BC, AD — его биссектриса.Из равенства треугольников ABD и ACD следует, что стороны

BD=DC и углы 3=4. Равенство BD=DC означает, что точка D— середина стороны BC и поэтому AD — медиана треугольника ABC. Так как углы 3 и 4 — смежные и равны друг другу, то они прямые. Следовательно, отрезок AD является также высотой треугольника ABC. Теорема доказана.

Прямоугольный треугольник

Свойство. Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90 0

Свойство. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 300, равен половине гипотенузы.



$AC = \frac{1}{2} BC$

Признаки равенства:

Так как в прямоугольном треугольнике угол между двумя катетами прямой, а любые два прямых угла равны, то из первого признака равенства треугольников следует

Теорема. Два прямоугольных треугольника равны, если катеты одного равны катетам другого.

Далее, из второго признака равенства треугольников следует

Теорема. Два прямоугольных треугольника равны, если острый угол и сторона одного равны острому углу и стороне другого.

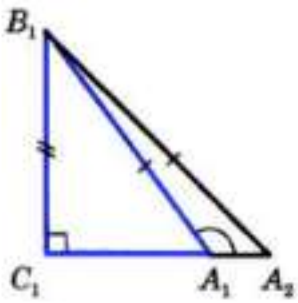
Теорема. Два прямоугольных треугольника равны, если гипотенуза и катет одного равны гипотенузе и катету другого.

Доказательство.

Рассмотрим треугольники ABC и A1B1C1, у которых углы C и C1 — прямые,

AB=A1B1, BC=B1C1. Докажем, что AABC=AA1B1C1.

Так как углы C=C1, то треугольник ABC можно наложить на треугольник A1B1C1 так, что вершина C совместится с вершиной C1, а стороны CA и CB наложатся соответственно на лучи C1A1 и C1B1. Поскольку CB=C1B1, то вершина B совместится с вершиной B1. Но тогда вершины A и A1 также совместятся. В самом деле, если предположить, что точка A совместится с некоторой другой точкой A2 луча C1A1, то получим равнобедренный треугольник A1B1A2, в котором углы при основании A1A2 не равны (на рисунке угол A2 — острый, а угол A1 — тупой как смежный с острым углом B1A1C1). Но это невозможно, поэтому вершины A и A1 совместятся. Следовательно, полностью совместятся треугольники ABC и A1B1C1 , т. е. они равны. Теорема доказана.



Теорема Пифагора

Теорема. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

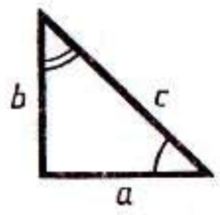
Доказательство.

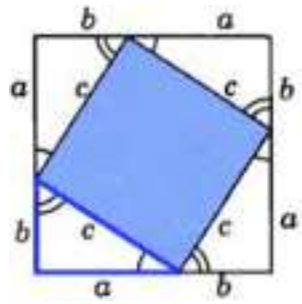
Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c. Докажем, что $c^2 = a^2 + b^2$.

Достроим треугольник до квадрата со стороной a + b так, как показано на рисунке. Площадь S этого квадрата равна $(a+b)^2$. С другой стороны, этот квадрат составлен из четырех равных прямоугольных треугольников, площадь каждого из которых равна $1/2ab$, и квадрата со стороной c, поэтому

$S = 4 * 1/2ab + c^2 = 2ab + c^2$ Таким образом, $(a+b)^2 = 2ab + c^2$, откуда $c^2 = a^2 + b^2$

Теорема доказана.





$$c^2 = a^2 + b^2$$

Теорема, обратная теореме Пифагора. Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

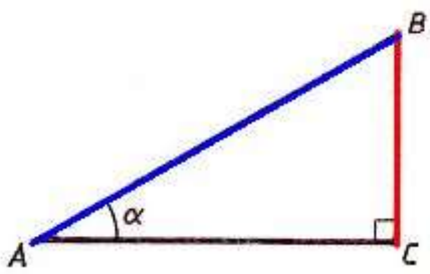
Доказательство

Пусть в треугольнике ABC $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Докажем, что угол C прямой. Рассмотрим прямоугольный треугольник A1B1C1 с прямым углом C1, у которого A1C1=AC и B1C1=BC. По теореме Пифагора $A1B1^2 = A1C1^2 + B1C1^2$, и, значит, $A1B1^2 = AC^2 + BC^2$. Но $AB^2 = AC^2 + BC^2$ по условию теоремы. Следовательно, $A1B1^2 = AB^2$, откуда A1B1=AB.

Треугольники ABC и A1B1C1 равны по трем сторонам, поэтому углы C=C1, т. е. треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C. Теорема доказана

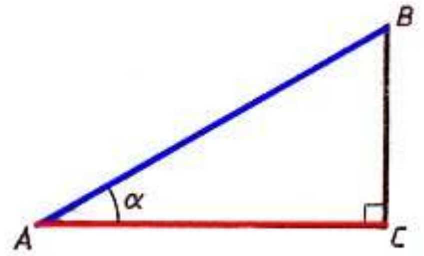
Соотношение углов и сторон прямоугольного треугольника

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.



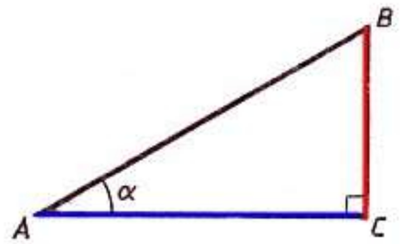
$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$$

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.



$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$$

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему.

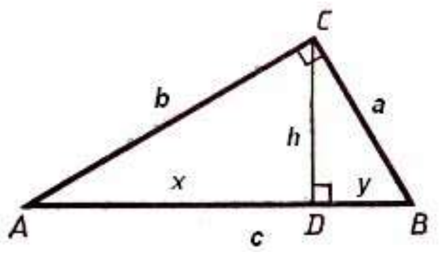


$$tg\alpha = \frac{BC}{AC}$$

Важные значения!

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Высота прямоугольного треугольника, проведенного из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится гипотенуза этой высотой.



$$CD = \sqrt{AD \cdot DB}$$ $$h = \sqrt{xy}$$

Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и отрезком гипотенузы, заключенным между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла.

$$b = \sqrt{cx}$$ $$h = \frac{bc}{a}$$

Определение

Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.

Теорема. Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

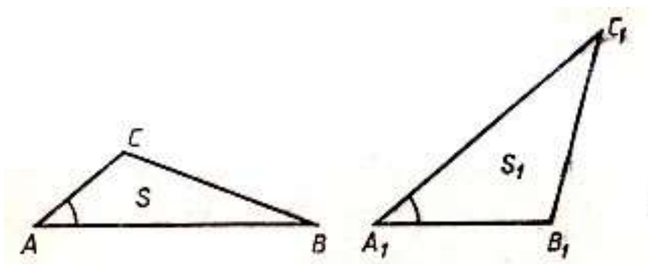
Пусть треугольники ABC и A1B1C1 подобны, причем коэффициент подобия равен k. Обозначим буквами S и S1 площади этих треугольников. Так как углы A=A1 ,

$$\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$$

(по теореме оо отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу). По формулам имеем:

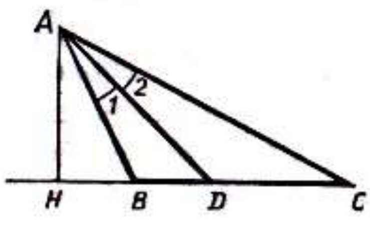
$$\frac{AB}{A_1B_1} = k, \quad \frac{AC}{A_1C_1} = k, \quad \text{поэтому} \quad \frac{S}{S_1} = k^2.$$

Теорема доказана.



$$\frac{S_1}{S} = K^2$$

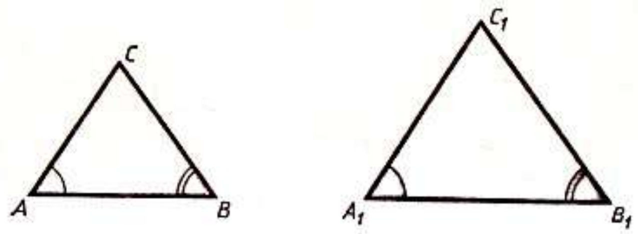
Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}, \quad \text{или} \quad \frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$$

Признаки подобия треугольников

Теорема. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.



Доказательство

Пусть треугольники ABC и A1B1C1 — два треугольника, у которых углы A=A1, B=B1. Докажем, что треугольники ABC и A1B1C1 подобны.

По теореме о сумме углов треугольника угол C=180°-A-B, угол C= 180°-A1-B1, и, значит, угол C=C1. Таким образом, углы треугольника ABC соответственно равны углам треугольника A1B1C1.

Докажем, что стороны треугольника ABC пропорциональны сходственным сторонам треугольника A1B1C1. Так как углы A = A1 и C=C1, то

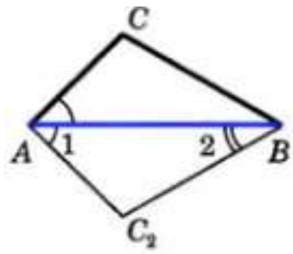
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1} \text{ и } \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{CA\cdot CB}{C_1A_1\cdot C_1B_1}$$

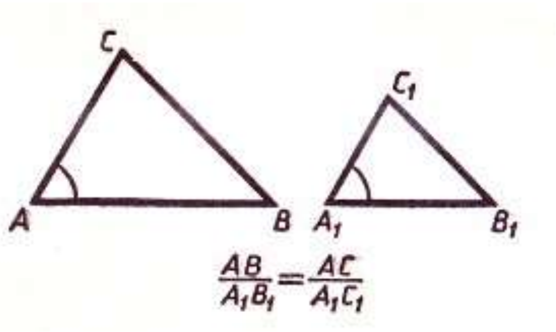
Из этих равенств следует, что AB/A1B1=BC/B1C1.

Аналогично, используя равенства углы A=A1, углы B=B1, получаем BC/B1C1=CA/C1A1.

Итак, стороны треугольника ABC пропорциональны сходственным сторонам треугольника A1B1C1. Теорема доказана.

Теорема. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.





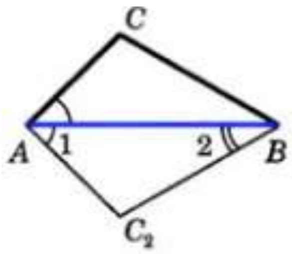
Доказательство

Рассмотрим два треугольника ABC и A1B1C1, у которых AB/A1B1=AC/A1C1 и углы A=A1. Докажем, что треугольники ABC и A1B1C1 подобны. Для этого, учитывая первый признак подобия треугольников, достаточно доказать, что углы B=B1.

Рассмотрим треугольник ABC2, у которого углы l = A1, а угол 2 = B1. Треугольники ABC2 и A1B1C1 подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому AB/A1B1=AC2/A1C1. С другой стороны, по условию AB/A1B1=AC/A1C1. Из этих двух равенств получаем AC=AC2.

Треугольники ABC и ABC2 равны по двум сторонам и углу между ними (AB — общая сторона, AC=AC2 и углы A=l, поскольку углы A=A1 и l = A1). Отсюда следует, что углы B=2, а так как углы 2 = B1, то углы B=B1. Теорема доказана.

Теорема. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.



Доказательство

Пусть стороны треугольников ABC и A1B1C1 пропорциональны:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}. \quad (1)$$

Докажем, что треугольники ABC и A1B1C1 подобны. Для этого, учитывая второй признак подобия треугольников, достаточно доказать, что углы A=A1. Рассмотрим треугольник ABC2, у которого углы l = A1, 2 = B1. Треугольники ABC2 и A1B1C1 подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC_2}{B_1C_1}=\frac{C_2A}{C_1A_1}.$$

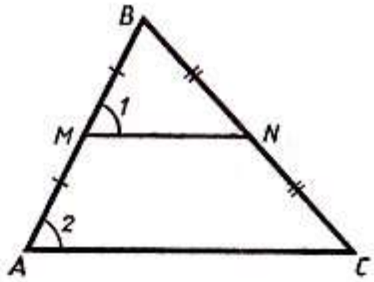
Сравнивая эти равенства с равенствами (1), получаем: BC=BC2, CA=C2A.

Треугольники ABC и ABC2 равны по трем сторонам. Отсюда следует, что углы A=l, а так как углы 1 = A1, то и углы A=A1. Теорема доказана.

Средняя линия треугольника

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Теорема. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.



$AC = 2MN$

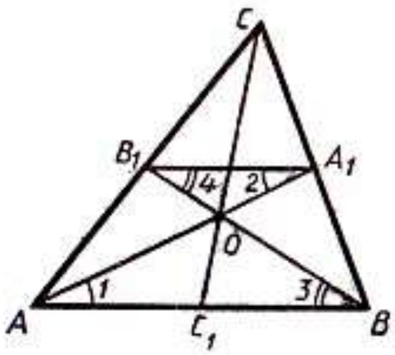
Доказательство

Пусть MN — средняя линия треугольника ABC. Докажем, что

MN||AC и MN=1/2AC. Треугольники BMN и BAC подобны по второму признаку подобия треугольников (угол B—общий, BM/BA=BN/BC=1/2), поэтому углы

1=2 и MN/AC=1/2. Из равенства углов l=2 следует, что MN||AC, а из второго равенства, — что MN=1/2AC. Теорема доказана.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.



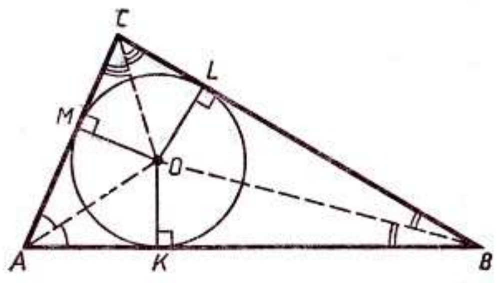
$$\frac{AO}{A_1O} = \frac{BO}{B_1O} = \frac{CO}{C_1O} = \frac{2}{1}$$

Вписанная окружность

Если все стороны треугольника касаются окружности, то окружность называется вписанной в треугольник, а треугольник - описанным около этой окружности.

Теорема. В любой треугольник можно вписать окружность и при этом только одну.

Центр вписанной в треугольник окружности находится в точке пересечения его биссектрис.



Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и обозначим буквой O точку пересечения его биссектрис. Проведем из точки O перпендикуляры OK, OL и OM соответственно к сторонам AB, BC и CA. Так как точка O равноудалена от сторон треугольника ABC, то OK=OL=OM. Поэтому окружность с центром O радиуса OK проходит через точки К, L и M. Стороны треугольника ABC касаются этой окружности в точках К, L, M, так как они перпендикулярны к радиусам OK, OL и OM. Значит, окружность с центром O радиуса OK является вписанной в треугольник ABC. Теорема доказана.

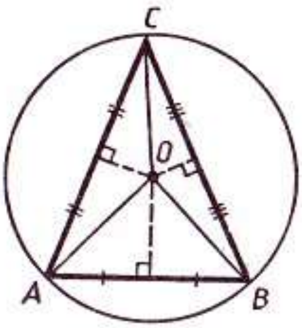
Отметим, что в треугольник можно вписать только одну окружность. В самом деле, допустим, что в треугольник можно вписать две окружности. Тогда центр каждой окружности равноудален от сторон треугольника и, значит, совпадает с точкой O пересечения биссектрис треугольника, а радиус равен расстоянию от точки O до сторон треугольника. Следовательно, эти окружности совпадают.[9]

Описанная окружность

Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется описанной около треугольника, а треугольник - вписанным в эту окружность.

Теорема. Около любого треугольника можно описать окружность и при этом только одну.

Центр описанной около треугольника окружности находится в точке пересечения серединных перпендикуляров.



Доказательство

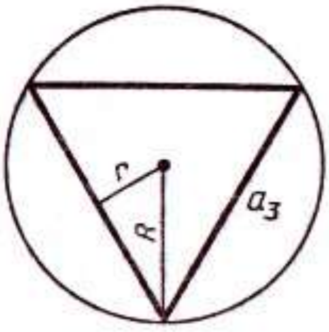
Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Обозначим буквой О точку пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам и проведем отрезки ОА, ОВ и ОС. Так как точка О равноудалена от вершин треугольника ABC, то ОА=ОВ=ОС. Поэтому окружность с центром О радиуса ОА проходит через все три вершины треугольника и, значит, является описанной около треугольника ABC.Теорема доказана.

Отметим, что около треугольника можно описать только одну окружность.

В самом деле, допустим, что около треугольника можно описать две окружности. Тогда центр каждой из них равноудален от его вершин и поэтому совпадает с точкой О пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, а радиус равен расстоянию от точки О до вершин треугольника. Следовательно, эти окружности совпадают

Равносторонний треугольник

Радиус описанной около равностороннего треугольника окружности определяется по формуле:



$$\boxed{R = \frac{a}{\sqrt{3}}}$$

Радиус вписанной в равносторонний треугольник окружности определяется по формуле:

$$\boxed{r = \frac{a}{2\sqrt{3}}}$$

Прямоугольный треугольник

Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине его гипотенузы.

Радиус описанной около прямоугольного треугольника окружности равен длине медианы, проведенной к гипотенузе.

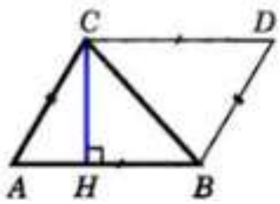
$$\boxed{R = m_a = \frac{a}{2}}$$

Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности определяется по формуле:

$$\boxed{r = \frac{b + c - a}{2}}$$

Площадь треугольника

Теорема. Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту, проведенную к основанию.



$$\boxed{S = \frac{1}{2}ah}$$

Доказательство

Пусть S — площадь треугольника ABC. Примем сторону AB за основание треугольника и проведем высоту CH. Докажем, что S = 1/2AB • CH.

Достроим треугольник ABC до параллелограмма ABDC. Треугольники ABC и DCB равны по трем сторонам (BC — их общая сторона, AB=CD и AC=BD как противоположные стороны параллелограмма ABDC), поэтому их площади равны. Следовательно, площадь S треугольника ABC равна половине площади параллелограмма ABDC, т. е. S = 1/2AB • CH. Теорема доказана

Следствие. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Следствие. Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.

Теорема. Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.

Доказательство

Пусть S и S1 — площади треугольников ABC и A1B1C1, у которых <A=<A1. Докажем, что

$$\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}.$$

Наложим треугольник A1B1C1 на треугольник ABC так, чтобы вершина A1 совместилась с вершиной A, а стороны A1B1 и A1C1 наложились соответственно на лучи AB и AC. Треугольники ABC и

AB1C имеют общую высоту CH, поэтому $\frac{S}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AB}{AB_1}.$

Треугольники AB1C и AB1C1 также имеют общую высоту — B1H1, поэтому

$$\frac{S_{AB_1C}}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AC}{AC_1}.$$

$$\frac{S}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{AB_1 \cdot AC_1} \text{ или } \frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}.$$

Перемножая полученные равенства, находим:

Теорема доказана.

Теорема. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

$$\boxed{S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\gamma}$$

Площадь треугольника равна половине произведения его периметра P на радиус r вписанной в него окружности:

$$\boxed{S = \frac{1}{2} P \cdot r}$$

Площадь треугольника равна произведению длин его сторон, деленному на учетверенный радиус R описанной около него окружности:

$$\boxed{S = \frac{abc}{4R}}$$

Формула Герона: если a, b, c - длины сторон треугольника, а p - его полупериметр, то площадь треугольника:

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Площадь равностороннего треугольника

Площадь определяется по формуле:

$$\boxed{S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$$

Соотношения между сторонами и углами

Теорема. В треугольнике: 1) против большей стороны лежит больший угол; 2) обратно, против большего угла лежит большая сторона.

Следствие. В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

Признак равнобедренного треугольника (следствие). Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

Теорема. Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R}$$

где R - радиус описанной окружности.

Доказательство

Пусть в треугольнике ABC AB=c,BC=a, CA=Ь.

Докажем, что a/sinA=b/sinB= c/sinC.

По теореме о площади треугольника S = 1/2absinC, S = 1/2bcsinA, S = 1/2 casinB.

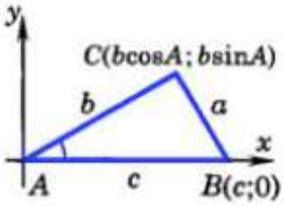
Из первых двух равенств получаем 1/2ab sinC =1/2bc sinA, откуда a/sinA= c/sinC. Точно так же из второго и третьего равенств следует a/sinA=b/sinB Итак, a/sinA=b/sinB= c/sinC. Теорема доказана.

Замечание. Можно также доказать, что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности. Следовательно, для любого треугольника ABC со сторонами AB=c, BC=a и CA=b имеют место равенства $\boxed{\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R}$,где R — радиус описанной окружности.

Теорема косинусов

Теорема. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

$$\boxed{a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha}$$



Доказательство

Пусть в треугольнике ABC AB = c,

BC=a, CA=b. Докажем, например, что

$a^2=b^2+c^2-2bccosA.$ (1)

Введем систему координат с началом в точке A. Тогда точка B имеет координаты (c; 0), а точка C имеет координаты (bcosA; bsinA). По формуле расстояния между двумя точками получаем:

$BC^2 = a^2 = (bcosA - c)^2 + b^2sin^2A = b^2cos^2A + b^2sin^2A - 2bccosA + c^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$

Теорема доказана.

Решить треугольник - значит найти все его шесть элементов: три стороны и три угла.

Длина высоты, медианы, биссектрисы

Длина высоты треугольника ABC, проведенной из вершины A определяется по формуле:

$$\boxed{h_a = \frac{2S}{a}}$$

Длина медианы треугольника ABC, проведенной из вершины A определяется по формуле:

$$\boxed{m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}$$

Длина биссектрисы треугольника ABC, проведенной из вершины A определяется по формуле:

$$\boxed{l_a = \frac{2bc \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}}$$

Если a1, a2 являются длинами отрезков, на которые биссектриса угла A делит сторону BC, то

$$\boxed{l_a = \sqrt{bc - a_1a_2}}$$

1.3. Проблемы, возникающие при решении геометрических задач в ОГЭ, и пути их решения.

Цель содержания раздела «Геометрия» — развить у учащихся пространственное воображение и логическое мышление путем систематического изучения свойств геометрических фигур на плоскости и в пространстве и применения этих свойств при решении задач вычислительного и конструктивного характера. Существенная роль при этом отводится развитию геометрической интуиции. Сочетание наглядности со строгостью является неотъемлемой частью геометрических знаний.

Итак, традиционно в ОГЭ по математике наибольший процент нерешенных заданий приходится на модуль «Геометрия». Этому явлению можно найти несколько причин.

Во-первых, на изучение геометрии в школе отводится в среднем в три раза меньше времени, чем на уроки алгебры. А материал, по сути, воспринимается и усваивается сложнее и дольше, чем алгебраический.

Во-вторых, навыки построения и чтения чертежей у многих ребят сформированы плохо и требуют дополнительной работы дома, чего большинство учащихся, конечно же, не делают.

В итоге задания по геометрии зачастую просто игнорируются учащимися. Иными словами, они даже не приступают к их выполнению. Совет здесь единственный: уделять больше времени задачам по геометрии в течение всего времени подготовки. Не ленится: посмотреть решение аналогичных задач в интернете или спросить у учителя, и больше практических упражнений, тогда со временем нужный навык решения сформируется и на экзамене будет легче справится с ними.

Модуль геометрии в ОГЭ вызывает наибольшее количество трудностей у учащихся. Включает в себя 5 заданий на различные темы курса геометрии 7-9 классов: признаки равенства треугольников, признаки подобия, вписанная и описанная окружности, трапеции, параллелограмм и другие виды многоугольников. Одно из заданий представляет из себя тест на проверку теоретических знаний учащихся по геометрии, остальные 4 – это решение задач.

Стоит сказать, что действительно сложных заданий в ОГЭ по математике просто нет, исключением являются, пожалуй, только задачи 24, 25, 26 и то не всегда. Эти номера также можно научиться решать: несколько выученных приемов по выполнению дополнительных построений и алгоритмов решения позволят справиться с подобными заданиями.

Основные проблемы при изучении геометрии

При изучении геометрии очень большое значение придается теории. Знать одну только теорию недостаточно. Часто учащиеся, не задумываясь, заучивают формулировку теоремы и ее доказательство, но при этом не имеют ни малейшего представления о ее применении. Не делайте так — разберитесь во всем до конца!

Неумение построить чертеж. А ведь именно грамотно построенный чертеж залог успеха при решении задачи, как минимум на 1/3.

Школьники пытаются по своему чертежу делать предположения о каких-либо свойствах фигуры, не указанных в задании. Например, строят равнобедренный треугольник и начинают решение, отталкиваясь от свойств одного, хотя в задании такого условия нет.

Школьники не способны построить цепь логических рассуждений, которая приведет к решению задания.

Геометрия — это предмет, не похожий ни на один из ранее изученных. В нем все основано на логических рассуждениях. Ознакомление с новыми понятиями, терминами, символикой. У учеников часто нет пространственного мышления. Отсутствует способность к обобщению.

Чтобы преодолеть эти проблемы необходимо:

Обучать предмету, используя наглядность и логику.

Четкая подача темы. Все объяснения должны быть логичны, без разрывов от основного материала.

Объяснение связать с реальными предметами.

Необходимо представить практическое применение геометрии в жизни.

Данный предмет развивает у школьников пространственное и логическое мышление, практическое понимание, поэтому надо сделать упор на воображение, реальность и логику.

При выполнении решения школьником задачи у доски, нужно приучать проговаривать решение задачи.

Решение задачи самостоятельно должно сопровождаться полным описанием действий.

Для лучшего усвоения предмета давать задания на доказательства, используя метод от противного.

В геометрии нет ничего, что было бы хоть малозначительным. При изучении предмета также необходим дополнительный материал, который заинтересует школьников.Многое зависит от учителя геометрии. От правильной подачи материала, от умения заинтересовать предметом. А также дополнительные факультативные курсы по решению геометрических задач в ОГЭ, которые помогут показать более высокие балы и эффективно справляться с трудностями на экзамене.

ГЛАВА 2. МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ ПО ФГОС ООО

2.1. Анализ школьных учебников и задачников по геометрии для 7-9 классов.

Известно, что успехи обучающихся во многом зависят от содержания и структуры учебника, по которому они занимаются. По одним учебникам школьники работают с удовольствием (читают, рассматривают рисунки, активно выполняют предлагаемые задания). Другие учебные тексты воспринимаются иначе; видно, что большинство учеников с неохотой открывают учебник, находят нужный текст и равнодушно начинают работать с ним.

Попытаемся сравнить известные школьные учебники с позиций легкости восприятия и доступности усвоения учебного материала и решения геометрических задач.

В современной школе наибольшее распространение получили учебники следующих авторов: Погорелов А.В., Киселев А.П., Шарыгин И.Ф., Александров А.Д. и др., Атанасян Л.С. и др., причем отмечается неоднозначное отношение учителей к этим учебникам. В методической литературе имеются и положительные и отрицательные отзывы о них; авторы одних статей считают, что некоторые учебники непригодны для современной школы, другие же, наоборот, восхищаются тем или иным подходом автора к изложению школьного курса геометрии [9,11,21,22,23]. Одних привлекает строгий аксиоматический подход, других большие возможности для организации мыслительной деятельности учащихся.

Чтобы сравнивать содержание разных учебников геометрии необходимо обратить внимание на то, какие цели обучения геометрии выбирались в качестве ведущих в последнее время. Сегодня основная цель обучения геометрии не связывается с развитием только логического мышления школьников [16]. Выделяют общекультурные, научные (собственно геометрические) и прикладные цели обучения геометрии [16,17,18]. Считается, что при обучении геометрии нужно стремиться к развитию у учащихся интуиции, образного (пространственного) и логического мышления, к формированию у них конструктивно-геометрических умений и навыков [16, 18].

Существуют два подхода к определению треугольника:

1 подход. Понятие треугольника вводится конструктивно: как фигура, состоящая из трёх точек и трёх отрезков соединяющих эти точки. Такой подход реализован в учебнике Атанасяна и в учебнике Погорелова. При этом ничего не говорится о плоскости треугольника. Это делается с целью отступления от теоретико-множественной концепции и от определения равных геометрических фигур с помощью отображений, сохраняющих расстояния (перемещений и движений). Но и здесь есть существенные различия.

В книге Погорелова даётся следующее определение треугольника: "Треугольником называется фигура, которая состоит из трёх точек не лежащих на одной прямой, и из трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки". Смысл выражения "отрезок соединяет точки" нигде не объяснён. Хотя об этом и легко догадаться; но смысл слова "попарно" совсем не очевиден для семиклассника. Кроме того, определение существенно зависит от обозначений, чего явно в формулировке не указано. В целом, формулировка воспринимается как тяжеловесная и трудная для понимания. У Атанасяна определение чисто конструктивное, оно наглядно и легче воспринимается школьниками.

2 подход. Понятие треугольника даётся как частный случай многоугольника, но в этом понятии говорится не только о фигуре образованной замкнутой линией, но и о части плоскости ограниченной этой замкнутой линией. Этот подход реализован в учебниках Киселёва и Шарыгина. Здесь определение треугольника отдельно не рассматривается. Впоследствии Атанасян и Погорелов всё же обращаются ко второму подходу

в теме "Многоугольники" т.к это понятие им потребуется для определения понятия площади.

Определение равенства треугольников во всех четырёх учебниках даётся через совмещение равных фигур путём наложения. Но в учебниках со вторым подходом подразумевается, что и плоскости треугольников также совмещаются наложением.

Определение равнобедренного и равностороннего треугольника одинаковое во всех учебниках. Такое определение является общепринятым в математике.

В учебниках Киселёва и Шарыгина свойства равнобедренного треугольника рассматриваются в одной теореме. Доказательства проводятся аналогично, с использованием осевой симметрии относительно биссектрисы треугольника и определения равных треугольников. В силу того, что ни Атанасян, ни Погорелов не используют движения плоскости в 7 классе, основой для доказательства свойств равнобедренных треугольников являются признаки равенства треугольников.

Атанасян в доказательстве свойств равнобедренного треугольника пользуется первым признаком равенства треугольников. В книге Погорелова свойства равнобедренного треугольника доказываются с использованием определения треугольника как упорядоченной тройки точек, но ни где не поясняется, что ΔCAB и ΔCBA это разные треугольники, а не один и тот же по-разному обозначенный. Такое доказательство учениками 7 класса понимается довольно трудно. Автор, уклонившись от явной формулировки определения треугольника как ориентированного пути, ставит ученика лицом к лицу с рассуждениями, которые может понять только тот, кто совершенно чётко представляет себе треугольник как ориентированный путь (это хоть и не явное, но обращение к теоретико-множественному подходу, который так тщательно избегается). Поэтому такие доказательства воспринимаются учениками как цирковой фокус.

Признаки равнобедренного треугольника в учебнике Атанасяна не рассматриваются, хотя эти теоремы очень полезные. В учебнике Погорелова приводится один признак (через равенство углов при основании). Полностью все признаки рассмотрены только у Шарыгина.

Во всех четырёх учебниках применяется один и тот же подход , признаков равенства треугольников, с использованием аксиомы существования треугольника равного данному. Но нигде ссылок на эту аксиому нет. Доказательства проводятся на основе наглядности с помощью наложения и приложения. В учебнике Погорелова эта аксиома формулируется, но непосредственно при доказательстве на неё ссылки не делаются. Лишь после доказательства первого признака равенства треугольников проводится подробный разбор его с указанием используемых в доказательстве аксиом. Это введено с целью, сделать доказательство более строгим, чем, например доказательство, приведённое у Киселёва. Как нам кажется, именно для этого автор вводит такое нетрадиционное определение треугольника.

Доказательства, приведённые в учебниках Атанасяна и Киселёва аналогичны. Но в учебнике Киселёва, исходя из введенного им определения треугольника, следовало бы ещё доказать, что плоскости треугольников так же совпадут при наложении (о чём в доказательствах даже не упомянуто). В учебнике Атанасяна аксиомы не являются основой, на которой строится школьный курс геометрии (вместе с тем, в приложении в конце учебника подробно изложен вопрос о системе аксиом в курсе геометрии). По моему мнению, большое преимущество по сравнению с учебным пособием Киселёва, имеет использование в учебнике Атанасяна в качестве основного рабочего аппарата признаки равенства треугольников, а не свойства геометрических преобразований. Такой подход позволяет отработать общие приёмы доказательства теорем. Эти доказательства строятся по схеме: поиск равных треугольников → доказательство предполагаемого равенства → обоснование новых утверждений. Благодаря использованию признаков равенства треугольников легче усваиваются основные теоремы планиметрии (свойства и признаки серединного перпендикуляра, свойства равнобедренного треугольника, теорема о внешнем угле треугольника, свойства и признаки параллельных прямых и параллелограмма, теорема Фалеса, признаки подобия треугольников и т.п.). В учебнике Атанасяна первый признак рассматривается в отрыве от двух других. Это обосновано тем, что он является основой для доказательства свойств равнобедренного треугольника, облегчающих доказательство третьего признака равенства треугольников.

Лишь в учебниках Киселёва и Шарыгина все три признака изучаются последовательно т.к. там не требуется разбивать их для доказательства свойств равнобедренных треугольников.

В учебнике Шарыгина кроме наложения используются ещё и симметрия, что усложняет доказательства. Доказательство третьего признака проводится с использованием элементов построения. Кроме того, применяется движение называемое переносом, но нигде не указано как оно осуществляется и действительно ли переводит одну точку в другую. Кроме трёх традиционных признаков равенства треугольников приводится ещё один для тупого угла и двух не образующих его сторон. Доказательство вытекает из задачи о не существовании треугольника равного данному, если равны две стороны и не содержащийся между ними угол.

Признаки подобия треугольников

Определение подобных треугольников даётся как треугольники, у которых соответственные углы равны, а соответственные стороны пропорциональны. Атанасян вводит понятие пропорциональных сходственных сторон. Аналогичное определение приведено в учебнике Киселёва. В учебнике Шарыгина понятие аналогично определению, приведённому у Погорелова, но оно ни как не связано с обозначениями.

Доказательство признаков подобия треугольников в учебнике геометрии А.В. Погорелова основывается на свойствах гомотетии, вывод которых использует формулу расстояния между точками на координатной плоскости и тем самым теорему Пифагора. А теорема Пифагора, в свою очередь, доказывается на основе тригонометрических функций угла, корректность определений которых проверяется с помощью обобщённой теоремы Фалеса, утверждающей, что параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от них пропорциональные отрезки. Ясно, что теорема Фалеса является частью признаков подобия, здесь наблюдается нежелательный в методическом отношении отход от поступательного развития курса. Кроме того, при доказательстве теоремы Фалеса процесс измерения отрезков, и в случае, когда отрезки не соизмеримы, осознавание процесса их измерения происходит у учащихся со значительными трудностями. Этот материал занимает время всего курса геометрии в 8 классе. Теорема Фалеса рассматривается в самом начале 8 класса, а признаки подобия в самом конце 8 класса. В этом плане предпочтительнее расположение материала в учебном пособии Киселёва. Но и у него доказательство признаков подобия основано на такой лемме: прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному. При доказательстве этой леммы рассматриваются отдельно случаи, когда отношение сторон треугольников является либо рациональным, либо иррациональным числом, доказательство усложняется также использованием общей меры и аксиом. А у Атанасяна площади фигур, в отличие от трёх других учебников, рассматриваются раньше, и поэтому удаётся обойти указанную трудность. Фактически она преодолевается один раз при доказательстве свойств пропорциональных отрезков в прямоугольном треугольнике. В этом и состоит одно из преимуществ раннего введения понятия площади.

Как уже видно метод доказательства признаков подобия треугольников в учебнике Атанасяна является существенно другим. Так доказательство первого признака подобия треугольников в этом учебнике основывается на теореме об отношении площадей треугольников, утверждающей, что если в треугольниках ABC и A1B1C1 углы A и A1 равны, то $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{A_1B_1 \times A_1C_1}{AB \times AC}$. Эта теорема не является традиционной для школьного курса и скорее всего носит вспомогательный характер. С другой стороны на основе этой теоремы весьма просто доказывается, что отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. По сути дела всё доказательство в одну строчку. Эта же теорема позволяет дать простое доказательство признаков подобия треугольников. В то же время её удалённость от места применения накладывает определённые трудности на усвоение учащимися доказательства признаков подобия треугольников. Здесь лучше модифицировать её, с тем, чтобы её можно было применить непосредственно в теме "Признаки подобия треугольников". У Погорелова такой теоремы нет, что делает невозможным решение его методами задач такого плана:

Треугольники ABC и A1B1C1 подобны, их соответствующие стороны относятся как 6: 5. Площадь Δ ABC больше площади Δ A1B1C1 на 77 см2. Найдите площади треугольников.

В учебнике Шарыгина доказывается теорема о пропорциональных отрезках и свойства параллельных прямых. Все три признака подобия формулируются друг за другом, и для всех приводится одно доказательство с некоторыми пояснениями для каждого из признаков. Применяются дополнительные построения для каждого, а дальше используется предыдущая теорема с некоторыми вариациями и признаки равенства треугольников.

Известно, что наличие разнообразных задач в учебниках, как варьирующихся по уровню сложности, так и творческих дает ученику свободу выбора и активизирует его стремление к знаниям. В качестве примеров рассмотрим учебник геометрии А.В. Погорелова, учебники авторских коллективов Л.С. Атанасян и др.

Можно сказать, что в учебнике А.Д. Александрова и др. существует градация задач: в начале отмечается группа основных задач, а затем группы более простых и сложных задач. Это деление находит отражение в использовании специальных значков для обозначения. В учебнике Л.С. Атанасяна и др. судить о сложности задачи можно лишь прочитав ее.

Аналогичная ситуация и в учебнике А.В. Погорелова. Отличие заключается лишь в том, что к некоторым задачам есть подсказки - подписан либо пункт параграфа, к которому она относится, либо задача, сходная с ней, решенная в учебнике. Авторы каждого учебника уделяют большое внимание образцам решения опорных задач, сообщающих полезный факт, либо иллюстрирующих метод или прием.[23]

Эффективность обучения геометрии во многом определяется тем, каким образом кодируется информация, используются ли при этом рисунки, чертежи, схемы. Это объясняется тем, что геометрический метод и состоит в том, что само логическое доказательство или решение задачи направляется наглядным представлением; лучше всего, когда доказательство или решение видно из наглядной картины [5]. В последнее время специалисты все чаще говорят о необходимости визуализации геометрических связей в процессе формирования знаний школьников, и по-разному используют принцип наглядности при обучении геометрии.

Авторский коллектив профессора Л.С. Атанасяна и др. – акцентирует свое внимание на развитии умений и навыков учащихся, на доступности изложения, считая, что каждый элемент курса геометрии должен опираться на возможно более простое и ясное наглядное представление [19].

2.2. Курсы внеурочной деятельности по решению геометрических задач в ОГЭ

Письменный экзамен по математике за курс основной школы является обязательным для выпускников 9-х классов. С учетом целей обучения в основной школе контрольно-измерительные материалы ОГЭ проверяют сформированность комплекса знаний, умений, навыков, по предмету, с получением, анализом, применением эмпирических знаний. В успешной сдаче ОГЭ заинтересованы не только выпускники, их родители, школа, но и общество. Так как насколько будут компетентны в математике выпускники сегодня, такое и будет развитие общества завтра. Тема курса внеурочной деятельности «Решение геометрических задач в ОГЭ» актуальна, так как способствует не только ликвидации пробелов знаний по геометрии, но и структурированному повторению по теме «Треугольники» и, соответственно, успешному прохождению части ОГЭ. Структура экзаменационной работы и организация проведения экзамена предполагают, что подготовка к сдаче экзамена должна быть другой: учащийся должен не только знать и уметь, но и быть готовым психологически.

Проблема успешной сдачи ОГЭ в том, что по математике реализуется через формы и методы, содержание курса внеурочной деятельности «Решение геометрических задач в ОГЭ». Программа направлена на структурирование и систематизацию знаний по разделу школьной программы: геометрия.

Геометрия – необходима для развития пространственного мышления и воображения, интуиции, конкретных знаний о фигурах в пространстве и на плоскости, их свойствах и характеристиках, применении в жизни. Она формирует язык описания объектов окружающего мира, логическое мышление путем рассуждений и доказательств. В программе курса представлена модулем: «Треугольники»

Программа курса внеурочной деятельности «Подготовка к ОГЭ по геометрии» ориентирована на приобретение определенного опыта решения задач различных типов заданий 24-26, позволяет ученику проанализировать и систематизировать свои знания для сдачи экзамена по математике за курс основной школы. А также на то, чтобы ликвидируя пробелы в знаниях школьников по теме «Треугольники» по предмету, познакомить их с новыми идеями и методами, расширить представление о способах решения. Каждое занятие, а также все они в целом направлены на мотивацию успешного прохождения ОГЭ. Особенность принятого подхода состоит в том, что для занятий по математике предлагаются небольшие фрагменты, рассчитанные на 1-2 урока, относящиеся к различным разделам.

Экзаменационная работа по математике (ОГЭ) состоит из двух частей. Первая часть

(двадцать заданий: четырнадцать по модулю «Алгебра», девять по модулю «Геометрия»). Вторая часть имеет вид контрольной работы (с объяснением и доказательством) и состоит из шести заданий: три по модулю «Алгебра» и три по модулю «Геометрия». Эта часть работы направлена на дифференцированную проверку повышенного уровня математической подготовки обучающихся: владение формально-оперативным аппаратом, метапредметных умений и знаний из различных тем математики и предметов школьного курса. Со второй частью ОГЭ по математике мы и будет заниматься, в частности, по теме «Треугольники», задания 24-26.

Курс внеурочной деятельности рассчитан на 2 часа. Занятия проводятся один раз в неделю. Цель данного курса: программа направлена на решение геометрических задач в форме ОГЭ.

Курс предусматривает повторное рассмотрение теоретического материала по теме «Треугольники», так как направлен в первую очередь на систематизацию знаний и на устранение «пробелов».

Каждое занятие, а также все они в целом направлены на то, чтобы развить учебный навык действий школьников к геомтерии. Уровень обязательной(базовой) подготовки обучающихся – это владение понятиями, знание свойств и алгоритмов, решение стандартных задач по теме «Треугольники». Уровень повышенной подготовки обучающихся – это использование умений и знаний в решениях нестандартных задач.[8]

Задачи:

- дать ученику возможность проанализировать свои способности;
- повторить базовые знания по геометрии за курс основной общеобразовательной школы на материалах КИМ открытого банка заданий ФИПИ;

- способствовать улучшению качества решения задач различного уровня сложности учащимися;
- выработать умение пользоваться справочными и контрольно-измерительными материалами.

Функции:

- ориентация на совершенствование навыков учебной, познавательной, организационной деятельности;
- формировать творческое мышление;
- помочь учащимся овладевать способами исследовательской деятельности;
- компенсация недостатков в обучении геометрии .

Методы и формы обучения

Методы и формы обучения определяются требованиями ОГЭ, с учетом индивидуальных и возрастных особенностей учащихся. В связи с этим основные приоритетные методики:

- мотивация на сотрудничество и успех;
- обучение через опыт и сотрудничество;
- учет индивидуальных особенностей и потребностей учащихся;
- интеграция разных тем;
- опора на развитие ассоциативного мышления;
- системно-деятельностный подход (большее внимание к личности учащегося, равноправное взаимодействие).[20]

Формы работы: первое занятие по теме – теоретическое с примерами решений стандартных задач. Второе –практическое занятие с последующим контролем по теме или разделу, проведением мониторинга успешности по данной теме. Домашнее задание предполагается из сборников к подготовке ОГЭ.

Каждое занятие, а также все они в целом направлены на мотивацию успешного прохождения ОГЭ. Особенность принятого подхода состоит в том, что для занятий по геометрии предлагаются небольшие фрагменты, рассчитанные на 2-3 урока.

Эффективность обучения отслеживается следующими формами контроля: тест, самостоятельная работа, устная работа, диагностическая работа, мониторинги усвоения материала и успешности. Перед практической частью или в течение этого занятия провести контроль(тест, самостоятельная работа) и мониторинг усвоения материала или устранения «пробелов»..

Основное содержание обучения

Тематическое планирование по теме треугольники

1 Геометрия(2ч) (задания 15-20,24-26)

- Треугольники.(2ч.)Высота, медиана, средняя линия треугольника. Равнобедренный и равносторонний треугольники. Признаки равенства и подобия треугольников. Решение треугольников. Сумма углов треугольника. Свойства прямоугольных треугольников. Теорема Пифагора. Теорема синусов и косинусов. Неравенство треугольников. Площадь треугольника. Вписанные и описанные треугольники. Четыре замечательные точки треугольника.

1 Решение тренировочных вариантов указанных сборников [9,11] и заданий из открытого банка заданий ОГЭ-9 или on-line тестирование в указанных ресурсах Интернет[24,25].

2 Итоговое занятие. Анализ работы из сборников(10,11), анализ творческих работ, нестандартных задач, мониторинга успешности.

Умения и навыки учащихся, формируемые курсом внеурочной деятельности:

учащийся должен

знать/понимать:

- понятие треугольника, признаки, теоремы ;

- решать задания, по типу приближенных к заданиям основного государственного экзамена (15-20),
- применять основные знания по геометрии для успешного решения заданий повышенной сложности(24-26).

Методические рекомендации по реализации программы.

Для более эффективной работы учащихся целесообразно в качестве дидактических средств использовать:

- ИКТ-технологии: презентации с опорными конспектами и тестами;
- открытый анализ ошибок учащихся и комментированное их исправление;
- обратить внимание на «оречевление»(комментирование) всех своих действий учащимся в процессе решения любой задачи.

Особенности программы:

- практическая значимость для учащегося;
- развитие общеучебных навыков;
- предельно сжатое определение понятий;
- интенсификация повторений;
- занятие 1 – теоретический материал ;

занятие 2 –практическое занятие с последующим контролем по заданной теме;

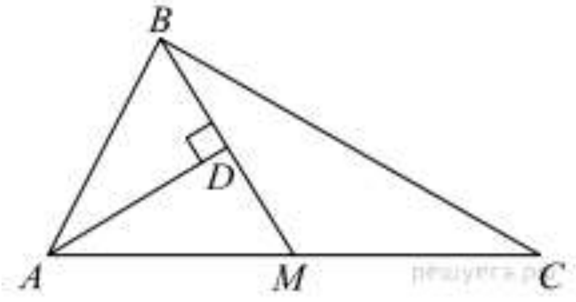
- ведение мониторинга успешности по теме «Треугольники» (решение геометрических задач, самостоятельное решение задач из открытого банка заданий ФИПИ.

Предлагается на данных занятиях рассмотреть задания 24-26 из ОГЭ.

Для начала рассмотрим задачи задания 24

Пример 1

Прямая AD, перпендикулярная медиане BM треугольника ABC, делит её пополам. Найдите сторону AC, если сторона AB равна 4.



Решение.

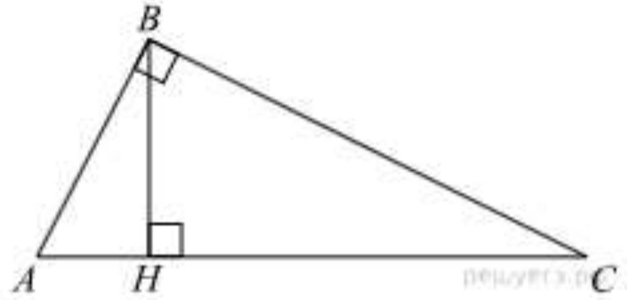
Так как высота AD, проведенная к медиане BM делит ее пополам, то треугольник ABM является равнобедренным, поэтому AB=AM=4. Так как BM- медиана, то AM=MC, таким образом, AC=2AM=8.

Ответ: AC=8.

Пример 2

Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если AH = 5, AC = 20.

Решение.



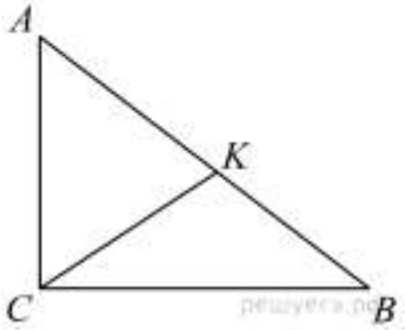
Поскольку BH — высота треугольника ABC, прямоугольные треугольники ABC и AHB подобны.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB},$$

$$AB = \sqrt{AC \cdot AH} = 10.$$

Следовательно, откуда,

Ответ: 10.



Пример 3

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны катеты:AC=6 ,BC=8 . Найдите медиану CK этого треугольника.

Решение.

Медиана, проведенная к гипотенузе, равна её половине:

$$CK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36+64} = 5.$$

Ответ: 5.

Пример 4

Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны 18 и 30. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.

Решение.

По теореме Пифагора второй катет равен $\sqrt{30^2 - 18^2} = 24$.

С одной стороны, площадь треугольника равна половине произведения катетов, а с другой стороны, она равна половине произведения гипотенузы на высоту, проведённую к ней.

Следовательно, искомая высота равна $\frac{18 \cdot 24}{30} = 14,4$

Ответ: 14,4.

Также примеры задания 24 для самостоятельного изучения.

Пример 5

Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если AB = 16, DC = 24, AC = 25

Пример 6

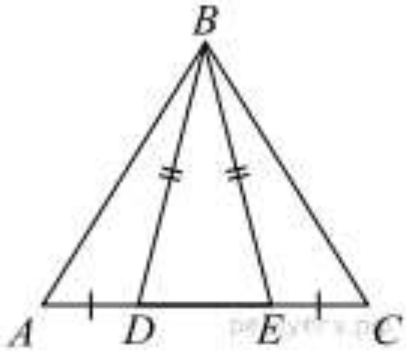
Прямая AD, перпендикулярная медиане BM треугольника ABC, делит её пополам. Найдите сторону AC, если сторона AB равна 4.

Задания 25

Пример 1

На стороне AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что отрезки AD и CE равны (см. рисунок). Оказалось, что отрезки BD и BE тоже равны. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

Решение.

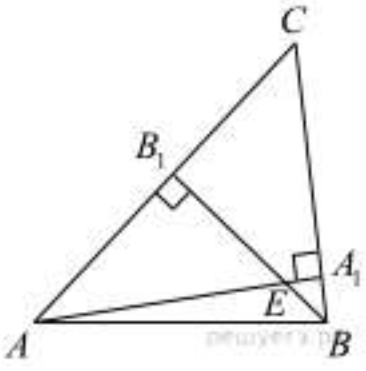


Так как по условию BD=BE, то треугольник BDE является равнобедренным. Пусть угол при основании этого треугольника равен x, тогда <BEC=<BDA=180°-x. Треугольники BEC и BDA равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому AB=BC и треугольник ABC—равнобедренный.

Пример 2

Высоты AA1 и BB1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E. Докажите, что углы AA1B1 и ABB1 равны.

Решение.



Рассмотрим треугольники AEB1 и BEA1 они прямоугольные, углы AEB1 и BEA1 равны как вертикальные, следовательно, треугольники подобны, откуда $\frac{EB_1}{EA_1}=\frac{AE}{EB}.$

Рассмотрим треугольники EB1A1 и AEB углы AEB и B1EA1 равны как вертикальные, из $\frac{EB_1}{AE} = \frac{EA_1}{EB}$, предыдущей пропорции

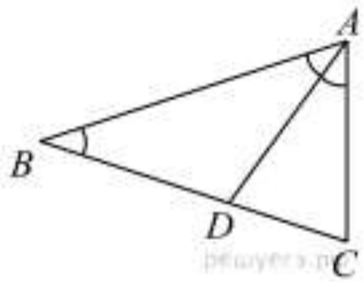
,следовательно, эти треугольники подобны, $\angle AA_1B_1 = \angle ABB_1$.

откуда

Пример 3

В треугольнике ABC угол B равен 36°, AB=BC, AD — биссектриса. Докажите, что треугольник ABD — равнобедренный.

Решение.

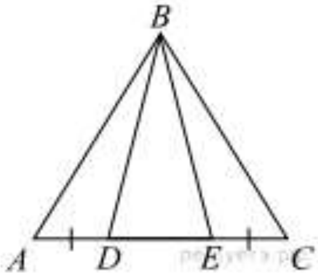


Треугольник ABC равнобедренный, поэтому <ACB = <BAC = 72°. Значит, <BAD=<BAC/2 = 36°. Таким образом, углы ABD и BAD равны, поэтому треугольник ABD — равнобедренный.

Пример 4

На стороне AC треугольника ABC отмечены точки D и E так, что AD=CE. Докажите, что если BD=BE, то AB=BC .

Решение.

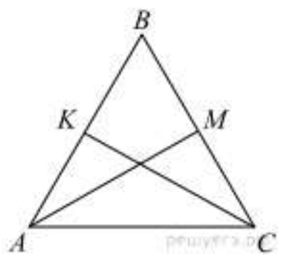


Треугольник BDE — равнобедренный, поэтому углы BDE=BED. Значит, углы BDA=BEC и треугольники BDA и BEC равны по первому признаку равенства треугольников. Значит, AB=BC.

Пример 5

Докажите, что биссектрисы углов при основании равнобедренного треугольника равны.

Решение



Имеем: треугольник ABC, AB=BC, углы ACK=KCB=MAC=BAM

Докажем, что AM=CK.

1) Треугольники ACK=CAM по стороне и двум прилежащим к ней углам:

а) AC — общая;

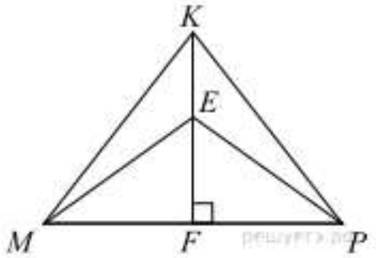
б) углы KAC=MCA по свойству углов равнобедренного треугольника;

в) углы ACK=MAC по определению биссектрисы и равенству углов при основании равнобедренного треугольника.

2) KC=MA как соответствующие элементы равных треугольников.

Задания типа 25 для самостоятельного изучения.

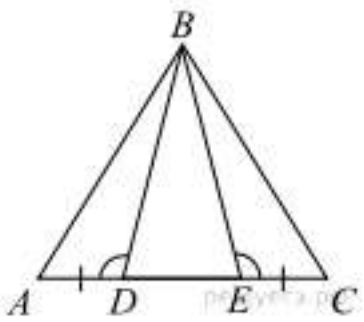
Пример 6



На медиане KF треугольника MKP отмечена точка E. Докажите, что если EM=EP, то KM=KP.

Пример 7

На стороне AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что отрезки AD и CE равны. Оказалось, что углы ADB и BEC тоже равны. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

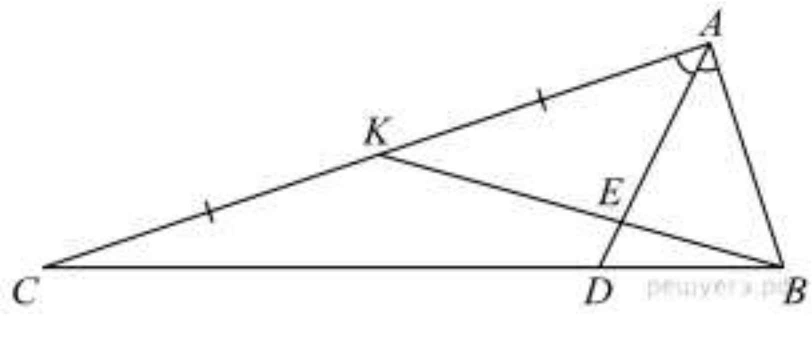


Задания 26

Пример 1

Площадь треугольника ABC равна 80. Биссектриса AD пересекает медиану BK в точке E, при этом BD : CD = 1 : 3. Найдите площадь четырехугольника EDCK.

Решение.



Пусть AK=KC=3x, тогда AB=2x, так как AB/AC=BD/CD=1/3 по свойству биссектрисы. Значит, BE/KE=2/3

Пусть S - площадь треугольника ABC, тогда

S(ACD)=CD/CB*S=3/4S;

S(AKE)=KE/BK*S(ABK)=KE/BK*AK/AC*S=3S/10.

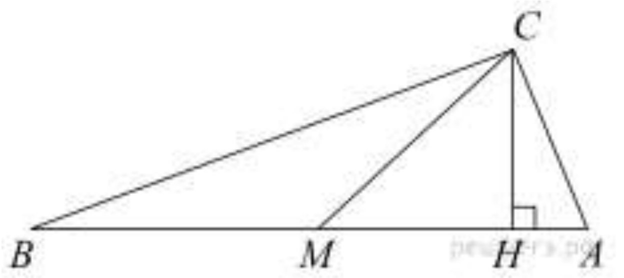
Таким образом, S(EDCK)=S(ACD)-S(AKE)=3/4S-3S/10=9/20S=36

Ответ: 36.

Пример 2

Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 12, а площадь равна 18.

Решение.



Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведём медиану CM и высоту CH. Тогда

$$CM = \frac{1}{2}AB = 6$$

$$CH = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB} = \frac{2 \cdot 18}{12} = 3$$

В прямоугольном треугольнике CHM катет CH равен половине гипотенузы CM, поэтому <CMH=30°

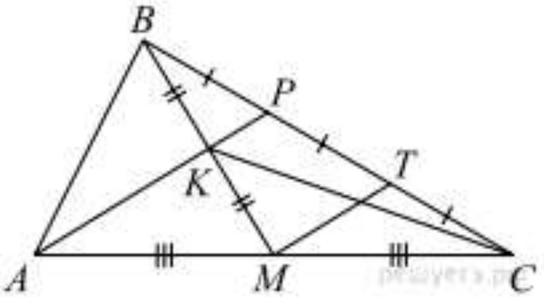
Следовательно, <BAC = 75°

Ответ: 15°, 75° .

Пример 3

Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырёхугольника KPCM.

Решение.



Проведём отрезок MT, параллельный AP. Тогда MT — средняя линия треугольника APC и CT = TP, а KP — средняя линия треугольника BMT и TP = BP. Обозначим площадь треугольника BKP через S. Тогда площадь треугольника KPC, имеющего ту же высоту и вдвое больше основание, равна 2S. Значит площадь треугольника CKB равна 3S и равна площади треугольника CMK (треугольники имеют одну высоту, проведённую из вершины C, и равные основания), которая в свою очередь равна площади треугольника AMK. Площадь треугольника ABK равна площади

тре- $S_{BKP} = S$, $S_{KPC} = 2S$, $S_{CMK} = 3S = S_{AMK} = S_{ABK}$, $S_{KPCM} = 5S$.

угольника AMK.

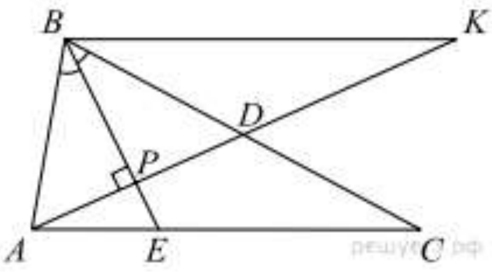
Итак,

$S_{ABK} : S_{KPCM} = 3 : 5 = 0,6$. Значит,

Ответ: 0,6

Пример 4

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 96. Найдите стороны треугольника ABC .



Решение.

Пусть P — точка пересечения отрезков BE и AD . Треугольник ABD — равнобедренный, так как его биссектриса BP является высотой. Поэтому AP=PD=48; BC=2BD=2AB.

По свойству биссектрисы треугольника CE/AE=BC/AB<->CE/AE=2<->AC=3AE

Проведём через вершину B прямую, параллельную AC. Пусть K — точка пересечения этой прямой с продолжением медианы AD. Тогда BK=AC=3AE.

Из подобия треугольников APE и KPB следует, что PE/BP=AE/BK=1/3.

Поэтому PE=24 и PB=72

Следовательно

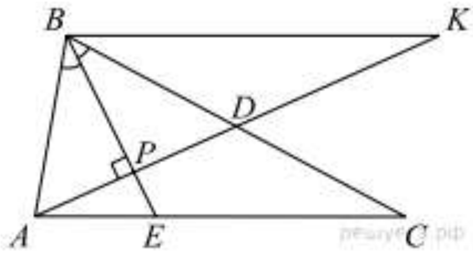
$$AB=\sqrt{AP^2+BP^2}=24\sqrt{13};\ \ BC=2AB=48\sqrt{13};$$
$$AE=\sqrt{AP^2+EP^2}=24\sqrt{5};\ \ AC=3AE=72\sqrt{5}.$$

Ответ: $24\sqrt{13};\ 48\sqrt{13};\ 72\sqrt{5}.$

Для самостоятельной работы.

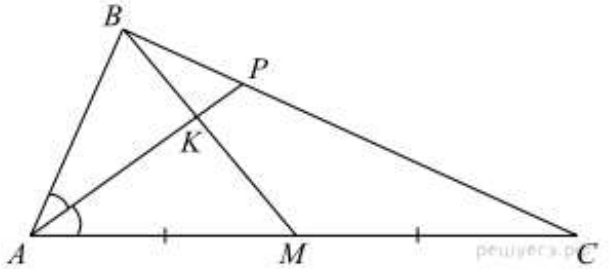
Пример 5

В треугольнике *ABC* биссектриса *BE* и медиана *AD* перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 84. Найдите стороны треугольника *ABC*.



Пример 6

Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K, длина стороны AC относится к длине стороны AB как 9:7. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырёхугольника KPCM.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе проведенной исследовательской работы были реализованы все поставленные задачи.

Процесс формирования понятий — это постепенный процесс, состоящий из нескольких последовательных этапов, на каждом из которых необходимо учитывать методические особенности обучения детей данного возраста. Целью данной квалификационной работы ставились изучение темы «Треугольники» определения условия формирования математических понятий и разработка курса внеурочной деятельности для подготовки к ОГЭ в 7-9 классах.

В первой главе на основе учебников для основной школы по геометрии для 7-9 классов и учебных пособий по методике рассматривались основы методики изучения понятий треугольников. В частности, разобраны такие вопросы, как , их классификация; основные теоремы, признаки, и их доказательства. Рассмотрен и разобран ФГОС ООО (Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования).

Во второй главе рассмотрели самые популярные учебники геометрии за 7-9 класс: Погорелов А.В., Киселев А.П., Шарыгин И.Ф., Александров А.Д., Атанасян Л.С.; в которых проанализировали подачу теоретического материала и системы упражнений. Благодаря этому анализу пособий и учебников, а также исследованных проблем в изучении темы «Треугольники», был разработан и проведён курс внеурочной деятельности «Решение геометрических задач в ОГЭ». В этом курсе сформулированы наиболее эффективные пути ликвидации трудностей, связанных с решением геометрических задач второй части, а т.е. заданий 24-26. А также примеры с подробным решением этих заданий из открытого бланка ФИПИ.

Подводя итоги проделанной работы, можно утверждать, что цели достигнуты. Проведеный курс внеурочной деятельности по теме «Решение геометрических задач в ОГЭ» подтвердил выдвинутую гипотезу.

Таким образом, процесс обучения решению геометрических задач по теме «Треугольники» будет эффективнее если помимо уроков в процесс обучения включить курсы внеурочной деятельности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Федеральный государственный образовательный стандарт общего основного образования / М-во образования и науки Рос. Федерации. – М.: Просвещение, 2011. – 48 с.

2. Асмолов А.Г. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли. Система заданий: пособие для учителя/под ред. А.Г. Асмолова. – М.: Просвещение, 2010. – 159 с.

3. Данилюк А.Я., Кондаков А.М., Тишков В.А.. Концепция духовно-нравственного развития и воспитания личности гражданина России. – М.: Просвещение, 2009. – 24 с.

4. Московский Педагогический Государственный Университет. Кафедра теории и методики обучения математике. Алгебра. Типовые задания для формирования УУД. Учебно-методическое пособие. - М., Калуга: ФГБОУ ВПО МПГУ,КГУ им. К.Э. Циолковского, 2014.-76с. Л.И. Боженкова и др.

5. Примерные программы по математике. – М.: Просвещение, 2010. – 67 с.

6. Примерные программы по учебным предметам. Математика 5-9 классы: проект. – М.: Просвещение, 2011. – 64с. – (Стандарты второго поколения).

7. Фундаментальное ядро содержания общего образования / под ред. В. В. Козлова, А. М. Кондакова. – М.: Просвещение, 2011. – 59 с. – (Стандарты второго поколения).

8. Виноградова Л.В. Методика преподавания математики в средней школе: учебное пособие / Л.В.Виноградова. Ростов н/Д.: Феникс, 2005.252 с.

9. Геометрия: Учеб. для 7—9 классы: учеб. для общеобразовательных учреждений/ [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. — М.: Просвещение, 2010. — 384 с.

10. Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7-9 классы. 3 изд., испр. М: МЦНМО, 2006. 416 с.

11. Шарыгин И.Ф. Геометрия. 7—9 кл.: Учеб. для общеобразоват. учеб. завед. — М.: Дрофа, 2002. — 368 с..

12. Гусев В.А. Каким должен быть курс школьной геометрии //Математика в школе. — 2002. — No 3. —4-8 с.

13. Геометрия: Учебное пособие для студентов физ-мат. спец. пед.ин-тов и учителей / В. А. Гусев, Н. В. Литвиненко, А. Г. Мордкович. — М.: Просвещение, 1992. — 352 с.

14. Михеева М.А. http://imap.bestreferat.ru/referat-376541.html

15. Саранцев Г.И “Методология методики обучения математики”

http://www.twirpx.com/file/583820.

16. Глейзер Г.Д. Каким быть школьному курсу геометрии //Математика. Приложение к газете «Первое сентября». 1990. №7. С.68-71.

17. Шарыгин И.Ф. Нужна ли школе 21 века геометрия?. //Математика. Приложение к газете «Первое сентября». 2004. №12. С.2-4.

18. Школьная геометрия – реальность и перспектива//Математика в школе. 1999. №7. С.2-3.

19. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. Пособие для студентов пед. институтов по физ.-мат. спец./ А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; Сост. В.И. Мишин.-М.:Просвещение, 1987.-416 с.:ил. С. 387.

20. Захарова В.Т. Обучение обобщению и конкретизации при изучении геометрических понятий. Система задач и четыре требования к ней: http://festival.1september.ru/articles/211197.

21. Погорелов А.В.— - 9 издание, М. - Просвещение, 2001- 2008 год.

22. Издание 5-е. Киев: Издательство "Радянська школа", 1966. - 196 с.Книга состоит из последних трёх глав учебника А. П. Киселева, Геометрия, ч.1 и соответствующего сборника задач § 8–16 Н. Рыбкина, Сборник задач по геометрии, ч.1.

23. Учебник. — 3-е изд., дораб. — М.: Просвещение, 2003. — 272 с.: ил. — ISBN 5-09-012215-6. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия. 7-9 класс.

24.https://oge.sdamgia.ru/test?theme=26