МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

Физико-математический факультет
Кафедра математики и методики обучения математике

«Использование контрпримеров при изучении дифференциального исчисления»

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05 Педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»

Проверка на объем заимствований:
78,03 % авторского текста

Работа рекомендована к защите
«29» марта 2019 г.
И.о. зав. кафедрой МиМОМ
__________ Шумакова Е.О.

Выполнил:
Студент группы ОФ-513/086-5-1
Баукина Юлия Сергеевна

Научный руководитель:
канд. пед. наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике,
Коржакова С.В.

Челябинск
2019

Введение

Обучение математике развивает умственные способности, формирует навыки логического и алгоритмического мышления. Вследствие этого, математика является одним из важнейших предметов с позиции развития интеллекта обучающихся, а одной из главных целей изучения дисциплины математический анализ является обеспечение учащихся необходимым математическим аппаратом, помогающим анализировать, классифицировать информацию и уметь решать прикладные задачи.

В эпоху информационной среды необходимой способностью людей считается умение правильно анализировать информацию и принимать вывод о том, какой она является верной или ложной. Многие учащиеся в наше время не проявляют особого внимания к понятиям, формулировкам утверждений и их свойствам, это же касается и процесса обоснования рассуждений, которые они проводят. Однако, существует немало неверных утверждений, которые кажутся верными на первый взгляд. Чтобы опровергнуть утверждения такого типа необходимо построить соответствующий пример, который носит название контрпример. Контрпримеры не только в математике играют значимую роль, но и в других науках, они представляют собой сильное и эффективное орудие в руках многих ученных, практиков и исследователей, явно показывающих то, что предполагаемая гипотеза или же ее последующее исследование считается, на самом деле, ложным.

Отсюда следует актуальность выбранной темы исследования, которая подтверждается тем, что использование контрпримеров может показать учащимся, в чем именно они ошибаются при формулировании какого-либо определения или доказательстве истинности данного утверждения. Можно сказать, достаточно примитивно, о том, что математика состоит из двух частей, таких как доказательства и контрпримеры, а открытия в области математики представляют собой нахождение этих доказательств и построение соответствующих контрпримеров.

Построение контрпримеров напрямую связано с оспариванием доказательств, обоснованием, приведением аргументации, критическим мышлением, что является составной и неотъемлемой частью математического способа мышления. В повседневных занятиях человеку регулярно приходится сталкиваться с решением определенных задач, которые можно было бы, в полном объеме, описать с помощью функций на математическом языке, а тем временем производная есть мощное средство исследования функций. Производная является важным и одним из основополагающих разделов в изучении математического анализа. В методическом плане эта тема привлекает все больше методистов в настоящее время, что связано с недостаточно полной разработкой этой темы.

Построение контрпримеров к математическим утверждениям может поспособствовать как более углубленному изучению и осознанию математики, так и развитию математического мышления учащихся, что является трудно достигаемым при традиционной организации обучения математике в школе и вузе [3].

Объектом исследования является - раздел дифференциального исчисления.

Предметом исследования являются - контрпримеры в дифференциальном исчислении.

Цель исследования – выявление и исследование контрпримеров при изучении дифференциального исчисления.

Гипотеза исследования: Если в процессе изучения дифференциального исчисления использовать контрпримеры, то обучение будет более содержательным и глубоким. Работа учащихся с примерами и контрпримерами повышает уровень усвоения знаний по данной теме.

Для достижения поставленной цели и проверки выдвинутой гипотезы определены следующие *задачи:*

1) проанализировать вузовскую и школьную литературу по теме дифференциальное исчисление;

2) осуществить подбор контрпримеров к данному разделу математического анализа;

3) исследовать выявленные контрпримеры;

4) исследовать использование контрпримеров в школьном курсе дифференциального исчисления;

5) разработать факультативный курс для учащихся 10-11 классов по теме «Производная функции» и провести экспериментальное исследование.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения и приложения. В первой главе рассматриваются выявленные контрпримеры в дифференциальном исчислении, встречающиеся в ВУЗовской литературе. Вторая глава посвящена раскрытию полноты темы «Производная функции» в школьных учебниках, разработке, и апробации факультативного курса по данной теме. В приложении представлены конспекты занятий факультативного курса и разработка проводимых контрольных работ, в частности, их решение.

Теоретическая значимость. Использование контрпримеров в обучении дифференциальному исчислению имеет важное значение в методике преподавания математики и помогает учащимся развивать свои умственные способности и математическое мышление.

Практическая значимость. Данная квалификационная работа может быть использована в практике школьного учителя математики и преподавателя вуза, и будет востребована, и полезна при изучении учебного материала по данной теме.

Глава 1. Контрпримеры в дифференциальном исчислении

1.1. Дифференцируемые функции одной переменной

Производная

Определение производной. Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке X и $x_0 \epsilon X$. Рассмотрим в точке x_0 приращение Δx переменной x такое, что значение $x_0 + \Delta x \in X$. Тогда значение $y_0 = f(x_0)$ функции получит приращение $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Существование предела отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx, при стремлении Δx к нулю, т.е

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta \chi) - f(x_0)}{\Delta x}$$

называется производной функции $y = f(x)$ по переменной x в точке x_0.

Более глубокое выражение понятия производной в точке демонстрирует следующая функция, которая имеет производную только в одной точке

$$f(x) = x^2 \mathrm{D}(x), \tag{1}$$

где D(x) - функция Дирихле. Покажем существование производной при x=0. По определению $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(0+\Delta x)^2 D(0+\Delta x) - 0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x D(\Delta x)) = 0$, поскольку предел произведения бесконечно малой функции на функцию ограниченную равен нулю. В точке x=0 функция (1) непрерывна. Действительно, $\lim\limits_{\Delta \chi \to 0} (\Delta x D(\Delta x)) = 0$ как предел произведения бесконечно малой функции на функцию ограниченную, и $f(0) = 0$. В любой точке $x_0 \neq 0$ функция будет иметь разрыв, ведь в любой окрестности точки x_0 находятся два числа: x_1-рациональное и x_2-иррациональное, при которых $f(x_1) > x_0^2$, $f(x_2)$=0. Получаем, что у функции (1) производная существует только в точке x=0, в других точках она имеет разрывы, следовательно, производная в них не существует.

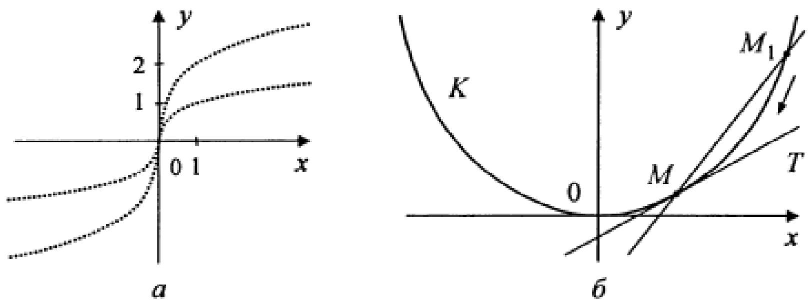


Рис.1.

Функция

$$f(x) = \sqrt[3]{x}(D(x) + 1)$$

определена во всех точках , имеет разрывы всюду, кроме x=0, в ней производная функции будет равна +∞ (рис.1а). Точки графика при рациональных значениях x лежат на кривой $y = 2\sqrt[3]{x},$ а при иррациональных значениях x - на кривой $y = \sqrt[3]{x}$. Функция будет непрерывна в точке x=0, так как предел функции при $x \to 0$ равен нулю. Действительно, $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{x}(D(x) + 1)\right) = 0$, как предел произведения бесконечно малой функции на функцию ограниченную. Функция будет иметь разрыв в любой другой точке $x_0 \neq 0$, поскольку в любой окрестности точки x_0 существуют два числа: x_1- рациональное и x_2 – иррациональное, такие, что $f(x_1) > 2\sqrt[3]{x_0}$, $f(x_2) < \sqrt[3]{x_0}$ при $x_0 > 0$, и $y(x_1) < 2\sqrt[3]{x_0}$, $f(x_2) > \sqrt[3]{x_0}$ при $x_0 < 0$. Докажем, что производная равная +∞ при $x = 0$ существует,

$$f(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{0+\Delta\chi}(D(0+\Delta\chi)+1)-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta\chi^{\frac{2}{3}}(D(\Delta\chi) + 1)\right) = +\infty,$$

как предел произведения бесконечно большой функции, стремящейся к +∞, на ограниченную положительную функцию.

Определение касательной. Пусть дана кривая К (рис. 1б) и на ней точка М. Возьмем на кривой К еще точку $М_1$ и проведем секущую $ММ_1$. Касательной к кривой К в точке М называется предельное положение МТ секущей $ММ_1$, когда точка $М_1$ стремится по кривой к точке М.

Необходим адекватный пример, чтобы понять смысл определения касательной и связь существования касательной к графику функции в его точке (x_0, y_0) с существованием производной функции в точке x_0**.** Рассмотрим касательную к графику функции в его отдельно взятой точке (x_0, y_0) и которая имеет производную только в точке x_0. Данный контрпример достаточно интересней обычных примеров: он демонстрирует особенности графика функции в точке (x_0, y_0), которые позволяют существовать касательной. Рассмотрим функцию

$$y = f(x) = x^2(D(x) - \tfrac{1}{2}). \qquad (2)$$

Функция (2) разрывна всюду, кроме точки x=0 (рис.2).

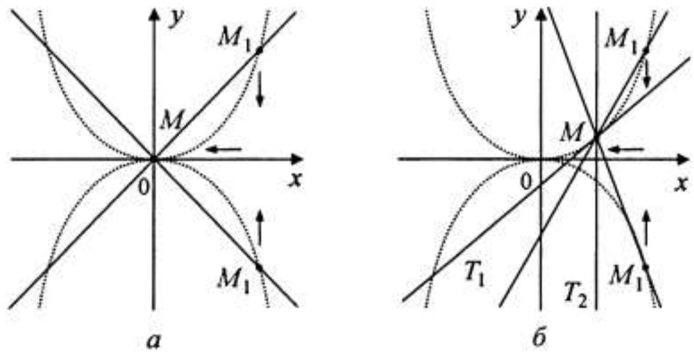


Рис.2

Действительно, рассмотрим точку $x_0 \neq 0$, в окрестности которой, даже сколь угодно маленькой, находятся рациональные точки, где функция больше $\frac{1}{2}x_0^2$, и иррациональные точки, где функция меньше $-\frac{1}{2}x_0^2$, то есть функция (2) является разрывной при любом $x_0 \neq 0$. Функция является непрерывной в нуле и ее предел $\lim_{x\to 0}\left(x^2\left(D(x) - \frac{1}{2}\right)\right) = 0$ как предел произведения бесконечно малой функции на функцию ограниченную, что соответствует нулевому значению функции в точке x = 0. К тому же, в нуле функция (2) имеет, равную нулю, производную. Рассмотрим предел, в точке x=0.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(0+\Delta x)^2\left(D(0+\Delta x)-\frac{1}{2}\right)-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta\chi(D(\Delta\chi)\text{-}\tfrac{1}{2})) = 0$$

как предел произведения бесконечно малой функции на функцию ограниченную. В обычных примерах построения касательной, например, к графику функции $y = x^2$, вдоль по гладкой кривой точка M_1 стремится к точке M и секущая MM_1 движется непрерывно и гладко. Наш пример показывает такой график функции, что нельзя сказать о таком стремлении точки M_1 к точке M. Рисунок показывает при сколь угодно близких значениях x (рациональном и иррациональном) два положения точки M_1. При $M_1 \to M$ не будет непрерывным движение секущей MM_1 и, тем более, гладким, как в обычном примере, а всюду будет разрывным, где точка M_1 бесконечно движется с одной параболы ($y = \frac{1}{2}x^2$) на другую (y=$-\frac{1}{2}x^2$), и обратно. Но существует предельное положение секущей и оно совпадает с положением оси абсцисс. Выбирая не точку (0,0) в качестве точки $M,$ а любую другую точку графика, мы не получим одного предельного положения секущей MM_1 (рис.2 б).

Теорема о производной обратной функции. Пусть функция f(x) удовлетворяет условиям теоремы о существовании обратной функции и в точке x=x_0 имеет конечную, отличную от нуля производную $\mathrm{f}'(\mathrm{x}_0)$. Тогда в точке $\mathrm{y}_0 = \mathrm{f}(\mathrm{x}_0)$ у обратной функции $\mathrm{x} = \mathrm{g}(\mathrm{y})$ существует производная и $\mathrm{g}'(\mathrm{y}_0) = \frac{1}{\mathrm{f}'(\mathrm{x}_0)}$.

Теорема формулирует лишь достаточные условия существования производной обратной функции.

Покажем контрпример, в котором нарушены условия теоремы о существовании обратной функции.

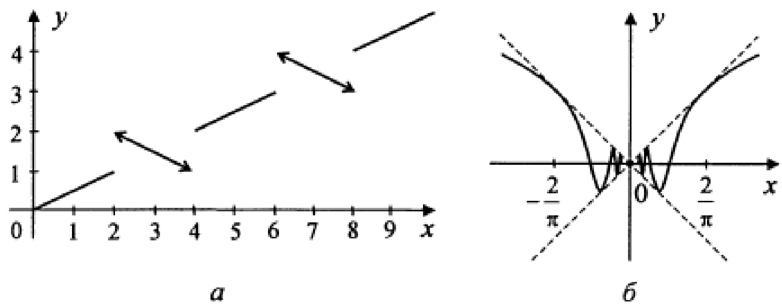


Рис.3

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ (рис. 3 а). Она определена в бесконечном полуинтервале X [0,+∞), не является монотонной и непрерывной, как того требует теорема о существовании обратной функции, но существует однозначная обратная ей функция $x = g(y)$ в бесконечном полуинтервале Y [0,+∞). Кроме четных натуральных значений x в любой точке x_0, функция

$y = f(x)$ имеет производную, равную $\frac{1}{2}$ или $-\frac{1}{2}$. Производная обратной функции $x = g(y)$ существует в соответствующих точках $y_0 = f(x_0)$ и равна 2 или -2 соответственно [20].

Необходимое условие существования производной. Если в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет конечную производную, то в этой точке функция непрерывна.

Контрпример.

Функция $f(x) = sgnx$, имеющая бесконечную производную в точке и разрыв в этой точке.

Формально, по определению, эта функция имеет в нуле бесконечную производную. Действительно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{sgn}(0+\Delta\chi) - \mathrm{sgn}(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{sgn}\Delta\chi}{\Delta x} = +\infty,$$

так как совпадают и равны $+\infty$ пределы справа и слева при $\Delta x \to 0$, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} = +\infty$ и $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{\Delta x} = +\infty$. Заметим, что в нуле функция $f(x) = sgnx$ разрывна.

Обратное утверждение будет неверно, таким образом из непрерывности функции в точке не будет следовать существование в этой точке производной.

Функция $f(x) = \begin{cases} x sin\,\frac{1}{x}, \text{если } x \neq 0 \\ 0, \text{если } x = 0 \end{cases}$, в точке x=0 является непрерывной, но не имеет в данной точке производной (рис.3б). $\lim_{x \to 0}\left(x sin\frac{1}{x}\right) = 0$ как предел произведения бесконечно малой функции на функцию ограниченную, что совпадает со значением функции в нуле, т.е. функция непрерывна в точке $x = 0$. Рассмотрим предел $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(0+\Delta\chi)\sin\frac{1}{0+\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} sin\frac{1}{\Delta x}$, он не существует, поскольку функция $sin\frac{1}{\Delta x}$ в любой сколь угодно малой окрестности нуля принимает значения -1 и 1.

Таким образом, в нуле производная не существует. При стремлении точки M_1вдоль графика функции $y = f(x)$ к точке этого графика M с координатами (0,0), секущая MM_1 будет перемещаться бесконечное число раз от прямой $y = x$ к прямой $y = -x$, и обратно. Значит касательной, как предельного положения секущей не существует в точке (0.0) [2].

Простейшие правила вычисления производных. Пусть в точке $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$ у функций $\mathrm{u} = \varphi(\mathrm{x})$ и $\mathrm{v} = \psi(\mathrm{x})$ существуют конечные производные u'и v'. Тогда в данной точке, $(\mathrm{u} \pm \mathrm{v})' = \mathrm{u}' \pm \mathrm{v}'$; $(\mathrm{uv})' = \mathrm{u}'\mathrm{v} + \mathrm{uv}'$; $\left(\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}}\right)' = \frac{\mathrm{u}'\mathrm{v}-\mathrm{uv}'}{\mathrm{v}^2}$, если $\mathrm{v} \neq 0$.

Данное утверждение формулирует лишь достаточные условия существования производной суммы, разности, произведения и частного двух функций.

Если отбросить в правилах требование о конечности производных, то получим усиленные правила, которые можно опровергнуть следующим контрпримером.

Функция $f(x) = x^2 sgnx$ дифференцируема, и всюду имеет производную $f'(x) = 2\ |x\ |$. Справа от нуля и в нуле (при $x\ \geq$0) $f(x) = x^2$, а значит $f'(x) = 2x$; слева от нуля и в нуле (при x≤0) имеем *f(x)*=$-x^2$ и $f'(x) = -2x$. Производные в нуле совпадают слева и справа, значит существует f'(0)=0. Производная одной формулой записывается в виде $f'(x)$= 2 $\left|\mathrm{x}\right|$. Применим в точке x=0 к $f(x) = x^2$ усиленное правило, видим, что в нуле второй множитель $sgnx$ имеет производную, которая равна +∞. Отсюда

$$f'(x) = (x^2 sgnx)' = 2xsgnx + x^2(sgnx)',$$

что в точке x = 0 дает слева 2 $\left|x\ \right|\Big|_{x=0}$(правильный результат), а справа во втором слагаемом неопределенность вида 0·∞.

Теорема о производной сложной функции. Пусть функция $\mathrm{u} = \varphi(\mathrm{x})$ имеет в точке x_0 производную $\mathrm{u}'_\mathrm{x} = \varphi'(\mathrm{x}_0)$, а функция $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{u})$ имеет производную $\mathrm{y}'_\mathrm{u} = \mathrm{f}'(\mathrm{u}_0)$ в точке $\mathrm{u}_0 = \varphi(\mathrm{x}_0)$. Тогда сложная функция $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\varphi(\mathrm{x}))$ также будет иметь производную в точке x_0, причем

$$\left(f\left(\varphi(x_0)\right)\right)' = f'_u\left(\varphi(x_0)\right)\varphi'(x_0), \text{или } y'_x = y'_u u'_x .$$

В данном утверждении формулируются достаточные условия, которые не являются необходимыми для существования производной сложной функции. Приведем соответствующий контрпример.

Функция $u = D(x)$ нигде не имеет производной, а $y = (2u-1)^2$. Однако сложная функция $y = (2D(x)-1)^2 = 1$ имеет производную в каждой точке..

*Определение дифференциала***.** Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале X и точка $x_0 \in X$. Тогда приращению аргумента Δx $(x_0 + \Delta x \in X)$ соответствует приращение $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ функции. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой при $x=x_0$, если ее приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \Delta x \to 0,$$

где A- некоторое число, которое не зависит от Δx, но, вообще говоря, различно для различных точек x_0. Линейная однородная функция $A\Delta x$ переменной Δx называется дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается символом dy или $df(x_0)$.

Рассмотрим функцию, которая имеет дифференциал только в одной точке.

$$y = f(x) = (x-1)^2 D(x-1) + 2x.$$

Она непрерывна только в точке $x = 1$. Действительно, $f(1)=2$ и $\lim\limits_{x\to 1}((x-1)^2 D(x-1) + 2x) = 2$. Предел первого слагаемого равен нулю, как предел произведения бесконечно малой функции на функцию ограниченную, а предел второго слагаемого равен двум. Функция будет дифференцируема в точке $x_0 = 1$ и иметь в этой точке дифференциал $dy=2\cdot\Delta x$, покажем это.

$$\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1) = \Delta x^2 D(\Delta x) + 2(1+\Delta x) - 2 = 2\Delta x + \Delta x^2 D(\Delta x),$$

где первое слагаемое $2\Delta x$ - линейная однородная функция переменной Δx, а второе слагаемое $\Delta x^2 D(\Delta x) = o(\Delta x)$, при $\Delta x \to 0$, так как множитель $D(\Delta x)$ ограничен. Следовательно, по определению дифференциала $dy =$

$2\Delta x$. В любой точке $x \neq 1$ функция разрывна, а это значит, что она в ней не дифференцируема.

Связь между дифференцируемостью и существованием производной. Для того чтобы функции $\mathrm{y} = f(\mathrm{x})$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную $\mathrm{y}' = \mathrm{f}'(\mathrm{x}_0)$. При этом равенство $\Delta\mathrm{y} = \mathrm{A}\Delta\mathrm{x} + \mathrm{o}(\Delta\mathrm{x})$, при $\Delta\mathrm{x} \to 0$, выполняется при значении постоянной А, равном производной функции в точке x_0, т.е. $\Delta\mathrm{y} = \mathrm{f}'(\mathrm{x}_0)\Delta\mathrm{x} + \mathrm{o}(\Delta\mathrm{x})$ при $\Delta\mathrm{x} \to 0$.

Попытаемся усилить данное утверждение, отбросим предположение о конечности производной и построим контрпример.

Функция $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ в точке $x_0 = 0$ имеет производную, равную $+\infty$. Выразим ее приращение в этой точке $\Delta y = \sqrt[3]{0 + \Delta x} - 0 = \sqrt[3]{\Delta x}$. Предположим, что Δy можно записать в виде $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, где A - некоторое число (конечное). Имеем $\sqrt[3]{\Delta x} = A\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, отсюда, возведя обе части в куб, получаем

$$\Delta x = A^3\Delta x^3 + 3A^2\Delta x^2 o(\Delta x) + 3A\Delta x(o(\Delta x))^2 + (o(\Delta x))^3.$$

С учетом, что А- постоянное число, вся правая часть это $\mathrm{o}(\Delta\mathrm{x}^2)$ при $\Delta\mathrm{x} \to 0$. Приходим к противоречию, следовательно, функция дифференциала в нуле не имеет [19].

1.2. Исследование функций с помощью производных

Изменения функции, экстремумы

Теорема об условии постоянства функции. Пусть функция $f(\mathrm{x})$ определена в промежутке X, замкнутом или нет, конечном или бесконечном, и имеет во всех его внутренних точках конечную производную $\mathrm{f}'(\mathrm{x})$, а на концах промежутка, если они принадлежат X, сохраняет непрерывность. Если, при этом $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = 0$ внутри X, то $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ постоянна в X.

Сделаем попытку усилить теорему, снимая отельные ее предположения. Приведем контрпримеры.

Рассмотрим не определенную во внутренней точке промежутка функцию $f(x)$, такую, что $f'(x) = 0$, но $f(x)$ не константа.

Функция $f(x) = \begin{cases} 1, \text{если } 0 \le x < 1 \\ 2, \text{если } 1 < x \le 2 \end{cases}$, определенная на отрезке [0,2], кроме точки $x = 1$. Во всех точках своего определения функция непрерывна и имеет производную, равную нулю. Эта функция не является постоянной на [0,2].

Имеющая разрыв на конце промежутка функция $f(x)$, такая, что внутри промежутка $f'(x)$= 0, но $f(x)$ не константа.

Функция $f(x) = \begin{cases} 1, \text{если } 0 \le x < 1, \\ 0, \text{если } x = 1 \end{cases}$ определена на отрезке [0,1], имеет внутри него конечную производную $f'(x) = 0$. В точке $x = 1$ функция имеет разрыв и не является постоянной на [0,1].

Следствие из теоремы об условии постоянства функции. Пусть функции f(x) и g(x) определены в промежутке X и во всех его внутренних точках имеют конечные производные $\mathrm{f}'(\mathrm{x})$ и $\mathrm{g}'(\mathrm{x})$, а на концах промежутка сохраняют непрерывность, если они принадлежат X. Если при этом $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \mathrm{g}'(\mathrm{x})$ внутри X, то эти функции во всем промежутке X отличаются лишь постоянным слагаемым: $f(x) = g(x) + C(C = const)$.

Постараемся усилить данное утверждение, снимая в нем отдельные предположения.

Контрпример. Рассмотрим функции *f(x)* и *g(x)*, которые во внутренней точке промежутка не имеют производных, для которых выполняется $f'(x) = g'(x)$, но не выполняется $f(x) = g(x) + C$.

$$f(x) = |x| \text{ и } g(x) = \begin{cases} -x - 1, \text{если } -1 \le x \le 0, \\ x + 1, \text{если } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

на отрезке [-1,1] (рис. 4). Обе функции определены на отрезке [-1.1] и имеют внутри него конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$,

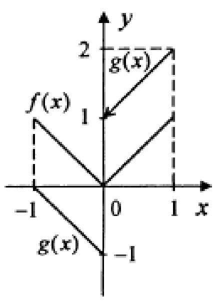


Рис. 4

кроме точки $x = 0$. На концах отрезка функции непрерывны. Производные $f'(x) = g'(x)$ всюду, где они существуют. Функции отличаются не постоянным слагаемым [5].

Теорема об условии монотонности функции. Пусть функции f(x) определена в промежутке X, замкнутом или нет, конечном или бесконечном, и имеет во всех его внутренних точках конечную производную $f'(x)$, а на концах промежутка, если они принадлежат X, сохраняет непрерывность. Для того чтобы f(x) была в X строго монотонно возрастающей (убывающей), достаточно выполнения условия: $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) внутри промежутка X.

Снимая отдельные предположения теоремы, последовательно, попытаемся ее усилить.

Контрпример. Рассмотрим функция *f(x)*, не определенную во внутренней точке промежутка, такую, что $f'(x) = 1$, но не монотонную.

Функция $f(x) = \begin{cases} x, \text{если } 0 \le x < 1, \\ x - 1, \text{если } 1 < x \le 2 \end{cases}$ определена на отрезке [0,2], кроме точки $x = 1$. Она имеет во всем множестве своего определения конечную положительную производную $f'(x) = 1 > 0$, а на концах отрезка сохраняет непрерывность. Функция *f(x)* не является монотонной на всем отрезке [0, 2].

Контрпример. Функция *f(x)*, которая разрывна на конце промежутка, такая, что $f'(x) = 1$ внутри промежутка, но не монотонная

$f(x) = \begin{cases} x, \text{если } 0 \le x < 1, \\ 0, \text{если } x = 1 \end{cases}$ определена на отрезке [0,1], имеет внутри него конечную производную $f'(x), f'(x) > 0$. На конце отрезка ($x = 1$) имеет разрыв. Функция *f(x)* не является монотонной на всем отрезке [0,1].

Предположения о положительности (отрицательности) и конечности производной, о ее существовании во всех внутренних точках промежутка являются только достаточными. Приведем пример.

Функция *f(x)*, график которой составлен из «четвертинок» окружности единичного радиуса. Функция задана в полуинтервале $[0, +\infty)$, в нем непрерывна и имеет производную. При этом производная $f'(x)$ в целых нечетных точках равна нулю, а в целых четных точках равна $+\infty$, а сама функция *f(x)* строго монотонно возрастает [6].

Определение максимума и минимума функции. Функция f(x), определенная в интервале X, имеет в точке $x_0 \in X$ максимум (минимум), если существует такое число δ>0, что δ-окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 целиком лежит в X, и для любого $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)(f(x) \geq f(x_0))$. При выполнении строгого неравенство $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$, $x \neq x_0$, функция имеет в точке x_0 строгий максимум (строгий минимум). Точка x_0 при этом называется точкой максимума (минимума), строгого максимума (строгого минимума). Существует общий термин для обозначения максимума и минимума– экстремум.

Понятие экстремума функции не использует предположения о существовании у нее производной и о ее непрерывности. Так функция Дирихле имеет в любой рациональной точке максимум, а в любой иррациональной точке - минимум (нестрогие). Приведем еще некоторые контрпримеры.

Контрпример. Функция $f(x) = \sin(xD(x))$ ограничена, но не имеет минимумов и максимумов, так как синус принимает свои минимальное и максимальное значения (-1 и 1 соответственно) при некоторых иррациональных значениях своего аргумента. Однако функция *xD(x)* не имеет иррациональных значений, но принимает все рациональные значения.

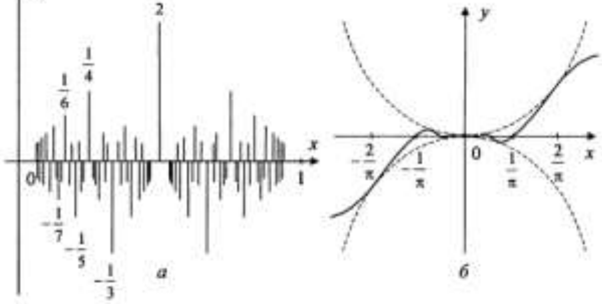


Рис.5

Контрпример. Функция Римана *R(x)* известна как пример функции, непрерывной в иррациональных и разрывной в рациональных точках. Но данная функция обладает еще одним замечательным свойством, она имеет в рациональных точках, которые, известно, находятся в любой окрестности любого числа на оси Ох, строгие максимумы. Действительно, если рассматривать произвольное рациональное число x_0 , которое представлено в виде несократимой дроби $\frac{m_0}{n_0}$, то в $\frac{1}{n_0}$ окрестности этого числа могут находиться, исключая x_0 рациональные числа, только представимые в виде несократимых дробей $\frac{m}{n}$, где $n > n_0$ и, следовательно, $\frac{1}{n_0} > \frac{1}{n}$. Учитывая, что при иррациональных значениях *x* функция равна нулю, получим в этой окрестности для всех $x \neq x_0$ $R(x_0) > R(x)$.

Если несколько модифицировать функцию Римана, определив

$$r(x): r(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n}, \text{если } x \text{ рационально число } \frac{m}{n}, \\ 0, \text{если } x \text{ иррациональное число,} \end{cases}$$

где $\frac{m}{n}$- несократимая дробь, m- целое число, n – натуральное число, то данная функция уже будет иметь в рациональных точках строгие максимумы (строгие минимумы) (рис. 5а). Видно, что на рисунке период функции один. Построение значений функции выполнено для иррациональных *x* (эти значения нулевые) и для рациональных *x*, кратных 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{16}$. В точках 0 и 1 значения функции равны -1. Как точки максимумов, так и точки минимумов (строгих), очевидно, будут находиться в любом, сколь угодно малом, интервале на оси *Ox* [5].

Необходимое условие экстремума. Пусть функция f(x) определена в некотором интервале (a, b) и точка $x_0 \in (a, b)$ является точкой экстремума функции f(x). Тогда или $f'(x_0)$ не существует, или $f'(x_0)=0$.

Если производная в некоторых точках равна нулю, то такие точки называются стационарными. Однако это говорит только о необходимом условие экстремума, достаточное условие можно опровергнуть контрпримерами.

Функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sin\frac{1}{x}, \text{если } x \neq 0, \\ 0, \quad \text{если } x = 0 \end{cases}$$

имеет в точке $x=0$ нулевую производную (рис.5б). Это следует напрямую из определения производной:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(0+\Delta x)^2 sin\frac{1}{0+\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\Delta x sin\frac{1}{\Delta x}\right) = 0$$

как предел произведения бесконечно малой функции на функцию ограниченную. В любой окрестности нуля существуют значения *x* как отрицательные, так и положительные, где функция *f(x)* как меньше, так и больше нуля. Так как *f(0)* = 0, экстремум не достигается в нуле. Вместе с тем в произвольной окрестности нуля (и слева от него, и справа) функция имеет бесконечное число строгих максимумов и минимумов, и не является ни возрастающей, ни убывающей.

Контрпример. Функция $f(x) = x^2\left(D(x) - \frac{1}{2}\right)$ непрерывна только в точке x = 0. В этой точке она имеет производную, которая равна нулю. Отметим, что *f*(0) = 0, но функция в любой окрестности нуля, и слева, и справа от него, не является не является ни возрастающей, ни убывающей, и принимает как отрицательные (в иррациональных точках), так и положительные (в рациональных точках) значения. Очевидно, что в нуле экстремум не достигается.

Рассмотрим три известных правила исследования функций на экстремум, выражающие достаточные признаки максимума и минимума.

Первое правило: Пусть в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 существует конечная производная $f'(x)$которая и слева от x_0, и справа от x_0 сохраняет определенный знак. Тогда возможны три случая: 1) если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то x_0 - точка строгого максимума; 2) если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то x_0- точка строгого минимума; 3) если же производная $f'(x)$ и при $x < x_0$, и при $x > x_0$, имеет одинаковый знак, тогда в точке x_0 экстремума нет.

Второе правило: Пусть в некоторой окрестности точки x_0 функция *f(x)* имеет первую производную$f'(x)$, и $f'(x_0) = 0$, т.е. точка x_0 – стационарная, а в самой точке x_0 имеет вторую производную $f''(x_0)$. Тогда в точке x_0 функция имеет: $f''(x_0) > 0 (f''(x_0) < 0)$ строгий минимум (строгий максимум).

Третье правило: Пусть в точке x_0 функция *f(x)* имеет n $(n \geq 1)$ последовательных производных. И пусть все они, до (n – 1)-й включительно, равны в этой точке нулю:
$f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$ но $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Если при этом число n нечетно, то функция экстремума в точке x_0не имеет. Если же n четно, то функция в точке x_0имеет строгий максимум (строгий минимум), если $f^{(n)}(x_0) < 0$ $\left(f^{(n)}(x_0) > 0\right)$[10].

Во всех этих правилах функция в точке, которая исследуется на экстремум, предполагается непрерывной. Приведем контрпример, в котором предполагается, что в первом правиле допускается разрыв в точке x_0.

Рассмотрим определенную на отрезке [-1,1] функцию

$$f(x) = \begin{cases} cosx, \text{если } -1 \leq x \leq 1, x \neq 0, \\ 0, \quad \text{если } x = 0, \end{cases}$$

которая имеет разрыв в нуле (рис. 6 а). Очевидно, что в нуле у неё строгий минимум. Применим к ней в точке $x = 0$ первое правило, не учитывая ее разрыва в данной точке. Производная функции при -1 < x < 0 существует и положительна, при 0 < x < 1 существует и отрицательна. Отсюда получаем ошибочный вывод, что в точке $x = 0$ функция имеет строгий максимум.

Рассмотрим примеры, которые показывают ограниченность действия (применимости) сформулированных правил.

Контрпример. Функция, которая всюду имеет конечную производную, строгий минимум у которой не устанавливается ни одним из трех правил исследования на экстремум

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 + sin\frac{1}{x}\right), \text{если } x \neq 0 \\ \quad 0, \text{ если } x = 0 \end{cases},$$

имеет в точке $x = 0$ минимум (строгий), так как $f(0) = 0$, а $f(x) > 0$ при любом $x \neq 0$ как произведение двух положительных чисел: x^2 и $sin\frac{1}{x}$ (рис. 6 б). Данная функция является всюду непрерывной.

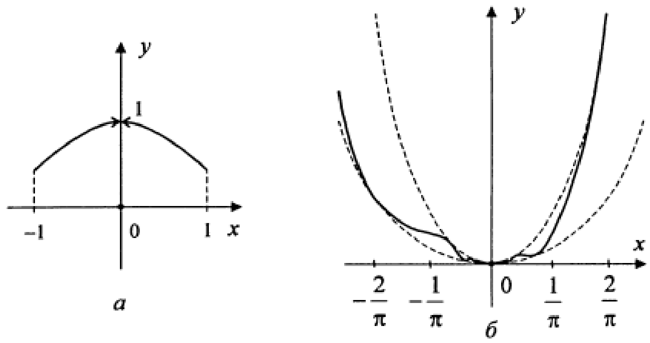


Рис.6

Очевидна непрерывность в точках $x \neq 0$, покажем непрерывность в нуле. Действительно, имеем

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x^2\left(2 + sin\frac{1}{x}\right)) = 0 = f(0).$$

Функция имеет конечную производную в любой точке. При $x \neq 0$ она равна

$$f'(x) = 4x + 2xsin\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x},$$

а в нуле $f'(0) = 0$. Покажем справедливость последнего равенства, рассмотрим по определению производной

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(0+\Delta x)^2\left(2 + sin\frac{1}{0+\Delta x}\right) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x\left(2 + sin\frac{1}{\Delta x}\right)\right) = 0.$$

В точке x=0 производная имеет разрыв, так как $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(4x + 2xsin\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x}\right) = -\lim_{x\to 0} cos\frac{1}{x}$ не существует. Значит, второй и последующих производных в точке $x = 0$ не существует, следовательно, второе и третье правила неприменимы. И первое правило будет неприменимо, так как и слева и справа от нуля производная в любой окрестности нуля меняет знак бесконечное число раз.

Контрпример. Рассмотрим функции, для которых применимо только первое правило исследования на экстремум. Непрерывные функции $f(x)=|x|$

и *f(x)* = $\left|\sqrt[3]{x}\ \right|$ имеют минимум в точке $x = 0$. Но в нуле у этих функций производной не существует, а значит, для них неприменимы второе и третье правила. У первой функции в нуле производные слева и справа равны -1 и 1, соответственно, к ней применимо первое правило, указывающее на минимум в точке x=0. У второй функции в нуле слева производная $-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} < 0$ при x<0, справа производная $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} > 0$ при x>0, что позволяет применить первое правило, указывающее на минимум функции в нуле.

Еще один пример на применимость только первого правила.

Функция $f(x) = \begin{cases} -x^{2n+1}, \text{если } x \le 0 \\ \ \ x^{2n+1}, \text{если } x > 0 \end{cases}$,

где n- натурально число, имеет строгий минимум в нуле. Если последовательно вычислять в нуле производные функции слева и справа, мы убедимся в том, что существует, непрерывны (в том числе в нуле) и равны нулю в точке x=0 производные до порядка $2n$ включительно: $f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(2n)}(0)=0$. Но производная $f^{(2n+1)}(x)$ в нуле не существует (как и все последующие). Это означает, что второе и третье правила не действуют. Однако первое правило применимо, так как выполняется $f'(x) < 0$ $(-(2n+1)x^{2n} < 0)$ при $x < 0, f'(x) > 0$ $\left((2n+1)x^{2n} > 0\right)$, при x>0 и указывает в нуле на строгий минимум.

Рассмотренные в примерах функции имеют минимум, для того, чтобы получить примеры с максимумами достаточно каждую из функций умножить на -1.

Наибольшее и наименьшее значения функции

*Правило отыскания наибольших и наименьших значений функции***.** Пусть функция f(x) определена и непрерывна на отрезке [a, b]. Для отыскания на отрезке наибольшего (наименьшего) значения функции необходимо между собой сравнить все максимумы (минимумы) функции f(x) и ее значения в концах отрезка f(a) и f(b). Наибольшее (наименьшее) из данных чисел и будет наибольшим (наименьшим) значением функции f(x) на [a, b].

Поскольку функция предусматривается определенной и непрерывной на отрезке, то по теореме Вейерштрасса наименьшее и наибольшее значения достигаются функцией в некоторых точках. Покажем, что сняв любое из предположений, мы можем привести к случаям несуществования наименьших и наибольших значений, вместе с тем применение правила не дает результата.

Контрпример. Функция *f(x) = x - sgn(1/x)* на отрезке [-1,1] не определена в точке

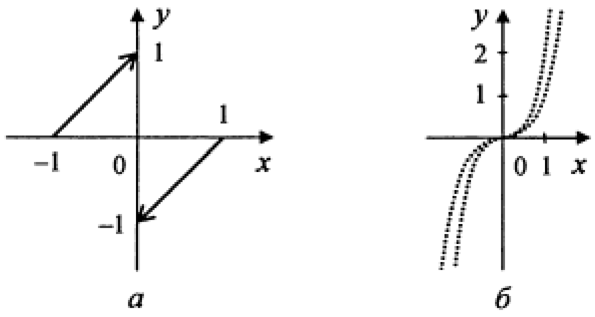


Рис.7

$x = 0$ (рис. 7, а). Она непрерывна во всех точках своего определения. Функцией не достигаются наибольшее и наименьшее значения.

Контрпример. Функция разрывная в каждой точке, не имеющая максимального значения ни на одном отрезке числовой оси (сколь угодно малом),

$$f(x) = \begin{cases} n, \text{если } x - \text{рациональное число} \frac{m}{n}, \\ 0, \text{если } x - \text{число иррациональное,} \end{cases}$$

где $\frac{m}{n}$ - несократимая дробь, m- целое число, n- натурально число. Пусть x_0- середина произвольного отрезка $[a,b]$. Рассмотрим любое, сколь угодно малое, число $\varepsilon > 0$, такое, что ε- окрестность точки x_0 целиком лежит в $[a,b]$. Зададимся произвольным, сколь угодно большим, натуральным числом N. В ε – окрестности точки x_0 находится лишь конечное, или пустое, множество рациональных точек вида $\frac{m}{n}$, где $n \leq N$. Следовательно, существует меньшая ненулевая окрестность точки x_0, не содержащая точек вида $\frac{m}{n}$, $n \leq N$ (разве что кроме самой точки x_0, которая может быть рациональной), и соответственно в этой окрестности в рациональных точках $x \neq x_0$ выполняется *f(x)>N*. Это доказывает то, что данная функция на произвольном отрезке $[a,b]$ не имеет максимального значения. Отметим, что функция имеет разрыв в любой точке $x = x_0$. Действительно, $f(x_0)$ некоторое число (конечное), а в любой окрестности точки x_0найдется точка x_1, такая, что выполнится $f(x_1) > f(x_0) + 1$ [7].

Некая модификация рассмотренной функции позволяет сделать ее неограниченной сверху и снизу на любом отрезке.

Выпуклость функции, точки перегиба

Определение выпуклой и вогнутой функций. Пусть в промежутке X замкнутом или нет, конечном или бесконечном, функция f(x) определена и непрерывна. Если для любых точек $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathrm{X}$ выполняется неравенство

$$\mathrm{f}(\mathrm{q}_1\mathrm{x}_1 + \mathrm{q}_2\mathrm{x}_2) \leq \mathrm{q}_1\mathrm{f}(\mathrm{x}_1) + \mathrm{q}_2\mathrm{f}(\mathrm{x}_2), \qquad (1)$$

для любых чисел $\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2 > 0, \mathrm{q}_1 + \mathrm{q}_2 = 1,$ то функция f(x) называется выпуклой. Функция называется вогнутой (выпуклой вверх), если вместо (1) выполняется

$$\mathrm{f}(\mathrm{q}_1\mathrm{x}_1 + \mathrm{q}_2\mathrm{x}_2) \geq \mathrm{q}_1\mathrm{f}(\mathrm{x}_1) + \mathrm{q}_2\mathrm{f}(\mathrm{x}_2). \qquad (2)$$

Если выполняются строгие неравенства в (1) и (2), то функция f(x) называется строго выпуклой (строго выпуклой вниз) и строго вогнутой (строго выпуклой вверх) соответственно [16].

Очевидно, что естественно предположение об определении функции во всех точках промежутка *X*, поскольку неравенство (1) или (2), может рассматриваться лишь на связных множествах. Объясняется это тем, что при произвольных положительных значениях q_1и q_2 $(q_1 + q_2 = 1)$ мы получаем в левой части неравенства все точки $x = q_1x_1 + q_2x_2$ из интервала с концами x_1 и x_2. При этом x_1 и x_2 могут совпадать с концами промежутка *X*, или же быть сколь угодно близки к этим концам. Вместе с тем, предположение о непрерывности функции *f(x)* во всем промежутке *X* обязательным для корректности определения не является.

Контрпример. Рассмотрим функцию, имеющую точки разрыва на концах отрезка

$$f(x) = \begin{cases} -1, \text{если } x = -1, \\ 0, \text{если } -1 < x < 1, \\ 1, \text{если } x = 1 \end{cases}$$

на отрезке [-1,1] (рис.8,а). Она не является непрерывной на этом отрезке, но для нее выполняется неравенство (1) для любых точек x_1 и x_2 из [-1,1], включая концы отрезка. Для случая определения вогнутой функции естественно рассмотреть функцию *g(x)=-f(x)*

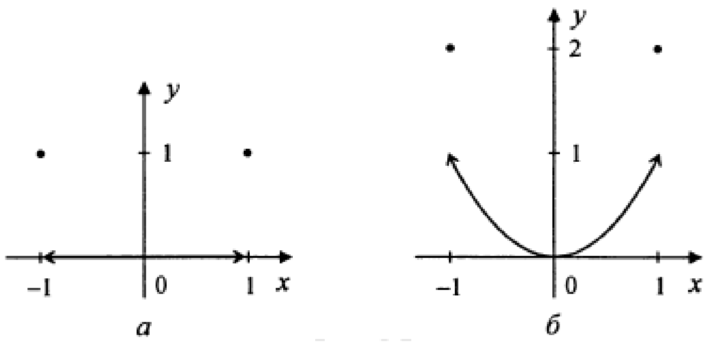


Рис.8

на отрезке [-1,1]. Эти функции вполне можно назвать выпуклой и вогнутой соответственно, если снять предположении о непрерывности функции.

Контрпример. Функции

$$f(x) = \begin{cases} 2, \text{если } x = -1, \\ x^2, \text{если } -1 < x < 1, \\ 2, \text{если } x = 1 \end{cases}$$

(рис.8,б), и *g(x)=-f(x)* на отрезке [-1,1] могут называться строго выпуклой и строго вогнутой соответственно при снятом предположении о непрерывности.

Теорема о критерии выпуклости функции. Пусть функция f(x) определена и непрерывна в промежутке X и имеет конечную производную f′(x) на нем. Для того чтобы f(x) была выпуклой в X, необходимо и достаточно, чтобы производная f′(x) возрастала (строго или нестрого).

Попытаемся усилить теорему, сняв отдельные ее предположения.

Контрпример. Рассмотрим функцию *f(x),* которая во внутренней точке промежутка не определенна и $f'(x)$возрастает, но не выпуклую

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{если } 0 \le x < 1, \\ x^2 - 1, \text{если } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

определена на отрезке [0, 2], кроме точки $x = 1$ (рис. 9); она непрерывна и имеет конечную производную во всех точках области

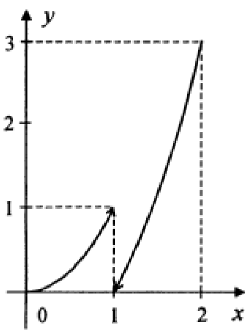


Рис.9

своего определения. Производная $f'(x)$ строго монотонно возрастает, т.е. для любых двух точек x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ ее области определения $f'(x_1) < f'(x_2)$. Функция $f(x)$ не является выпуклой.

Оказывается, при нарушении отдельных предположений теоремы, функция бывает выпуклой, покажем это.

Контрпример. Функция $f(x) = |tgx|$ в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ определена и непрерывна; имеет в нем конечную производную $f'(x)$, кроме точки x=0; ее производная $f'(x)$ строго монотонно возрастает. Если не выполняется даже одно из предложений теоремы, функция все равно является строго выпуклой в названном интервале.

Контрпример. Функция $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ на отрезке [-1,1]. Эта функция определена и непрерывна на отрезке [-1,1]; имеет производную $f'(x)$, конечную, кроме точек -1 и 1, где производная равна $f'(-1) = -\infty, f'(1) = +\infty$. Производная $f'(x)$ строго монотонно возрастает. Одно из предположений теоремы нарушается, однако функция $f(x)$ является строго выпуклой на отрезке [-1,1].

Теорема о критериях выпуклости и вогнутости функции. Пусть в промежутке X функция f(x) вместе со своей производной f′(x)определена и непрерывна, и имеет во всех внутренних точках X конечную вторую производную $f''(x)$. Для выпуклости (вогнутости) функции f(x) в X необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство внутри X $f''(x) \geq 0 (f''(x) \leq 0)$, а для строгой выпуклости (строгой вогнутости) - строгое неравенство $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$.

Приведем пример, когда функция может являться выпуклой и при нарушение отдельных предположений теоремы.

Контрпример. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{если } -1 \leq x \leq 0, \\ 2x^2, \text{если } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

определена и непрерывна вместе со своей производной

$f'(x) = \begin{cases} 2x, \text{если } -1 \leq x \leq 0, \\ 4x, \ 0 < x \leq 1 \end{cases}$ на отрезке [-1,1]. Функция имеет внутри этого отрезка, кроме точки $x = 0$, конечную вторую производную

$f''(x) = \begin{cases} 2, \text{если } -1 \leq x < 0, \\ 4, \text{если } 0 < x \leq 1 \end{cases}$ большую нуля. Нарушено одно из условий теоремы, но функция строго выпуклая. Интересно, что при этом функция удовлетворяет всем требованиям теоремы о критерии выпуклости функции. Ее производная строго монотонно возрастает на отрезке [-1,1].

Определение точки перегиба (первое). Точку $M(x_0, f(x_0))$ кривой называют точкой перегиба этой кривой, если существует такое число δ >0, что в интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ функция выпуклая (вогнутая), а в интервале $(x_0, x_0 + \delta)$ функция вогнутая (выпуклая).

Определение точки перегиба (второе). Пусть существует касательная в точке $M(x_0, f(x_0))$ кривой f(x). Точка M называется точкой перегиба кривой, если существует такое число δ> 0, при котором в интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ кривая лежит по одну сторону касательной (в одной полуплоскости), а в интервале $(x_0, x_0 + \delta)$ - по другую сторону касательной (в другой полуплоскости). Иначе говоря, кривая в этой точке переходит с одной стороны касательной на другую, то есть касательная и кривая пересекаются.

Два этих определения не являются эквивалентными. Приведем различные примеры.

Рассмотрим кривую, у которой точка перегиба существует по первому определению, но не по второму. Функция $f(x) = \left|e^x - 1\right|$ непрерывна всюду. Она дифференцируема всюду, кроме точки $x= 0$. Соответственно в точке (0,0) касательная к графику функции не существует. На бесконечном интервале $(-\infty, 0)$ функция *f(x)* вогнутая, на бесконечном интервале $(0, +\infty\ )$ -выпуклая. Точка (0,0) является точкой перегиба графика функции по первому определению, но по второму определению таковой не является.

Функция $f(x) = x^3(D(x) + 1)$, наоборот , имеет точку перегиба по второму определению. Она всюду разрывна, кроме точки $x = 0$, где существует равная нулю производная и, соответственно, в точке (0.0) графика существует касательная к нему (горизонтальная) (см. рис. 8, б). Все перечисленные свойства этой функции можно доказать аналогично случаю функции $x^2(D(x) + 1)$. Ни в одной, сколь угодно малой, левой или правой окрестности точки x = 0 функция f(x) не является ни выпуклой, ни вогнутой. Однако график функции f(x) в его точке (0,0) переходит с одной стороны касательной на другую ($f(x) < 0$ при $x < 0, f(x) > 0$ при $x > 0$). Это означает, что в этом случае первое определение применить нельзя, но действует второе определение.

Необходимое условие существования точки перегиба. Пусть в промежутке X функция f(x) определена и имеет конечную производную $f'(x)$, и в некоторой внутренней точке x_0 промежутка X существует конечная вторая производная $f''(x)$. Если точка $(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба, то $f''(x_0) = 0$.

Данное условие $f''(x_0)$ является лишь необходимым, но достаточным не будет.

Первое правило исследовании на точку перегиба. Пусть функция f(x) имеет конечную производную f'(x) и определена в промежутке X, в любой внутренней точке X существует конечная вторая производная f''(x) и во внутренней точке $x_0 \in X$ выполняется $f''(x_0)=0$. Если при переходе через точку $x = x_0$ значение $f''(x)$ поменяет знак, то x_0 - точка перегиба, если не изменит знака, то x_0 точкой перегиба не является.

Второе правило исследования на точку перегиба. Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке X и x_0 - некоторая внутренняя точка X. Пусть функция $f(x)$ имеет n последовательных производных в окрестности точки x_0 и n-я производная непрерывна в точке x_0. Пусть при этом $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$ но $f^{(n)}(x_0) \neq 0.$ Если число n четное, $n \geq 2$, то точка x_0 точкой перегиба не является, если n нечетное, $n \geq 3$, то точка x_0 будет точкой перегиба.

Контрпримеры. Рассмотрим функции, к которым неприменимы оба правила исследования на точку перегиба.

Функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ определена на всей числовой оси. Всюду, кроме нуля, имеет конечную производную, $f'(0) = +\infty$. В точке (0,0) ее график имеет вертикальную касательную и переходит с одной стороны касательной на другую. Отсюда следует, что точка (0,0) есть точка перегиба. Правила будут неприменимы, поскольку предполагают конечность производной в некоторой окрестности этой точки.

Функция $f(x) = x^2 sgnx$ всюду определена и имеет конечную производную $f'(x) = 2\ |x\ |$. Но вторая производная не существует в нуле. Поэтому исследовать точку (0,0) графика функции на наличие перегиба нельзя с помощью указанных правил. Точка (0,0) графика функции является точкой перегиба.

Контрпример. Функция, к которой применимо первое, но неприменимо второе правило исследования на точку перегиба.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 sgnx$. Она всюду определена и имеет первую производную $f'(x) = 3x^2 sgnx,$ и вторую производную $f''(x) = 6\ |x\ |$. Причем $f''(0) = 0$ и при переходе через значение x=0 производная $f''(x)$ знака не меняет, значит, точка (0,0) графика не является точкой перегиба. Работает первое правило. Отметим, что

$f'(0)=0,\ f''(0)=0$, однако данная функция не имеет в нуле третьей производной, следовательно, всех последующих, которые не отвечают предположениям второго правила. В данном случае оно применимо [17].

Раскрытие неопределенностей

Первая теорема о раскрытии неопределенностей. Пусть на отрезке [a,b] определены функции f(x) и g(x); $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to a+0} g(x)=0$; существуют конечные производные (правосторонние) $f'(a)$ и $g'(a)$, причем $g'(a)\neq 0$. Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Вторая теорема о раскрытии неопределенностей. Пусть на отрезке [a,b] определены функции f(x) и g(x); $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to a+0} g(x)=0$; существуют на отрезке [a,b] конечные производные (в концах отрезка- односторонние) $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x), g'(x), g''(x), \dots, g^{(n-1)}(x)$, которые равны нулю при x=a; существуют конечные производные (правосторонние) $f^{(n)}(a)$ и $g^{(n)}(a)$, причем $g^{(n)}(a)\neq 0$. Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$.

Третья теорема о раскрытии неопределенностей. Пусть на интервале (a,b) определены функции f(x) и g(x); $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to a+0} g(x)=0$; на интервале (a,b) имеют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x)\neq 0$ для всех $x\in(a,b)$; существует конечный, или равный +∞ или -∞ предел $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$. Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=K$.

Рассмотрим применимость приведенных теорем к различным случаям неопределенностей. Учитывая то, что из существования производной в точке следует существование односторонних производных, равных ей.

Существование производных только в одной точке предполагается в первой теореме. Построим пример, не расширяющий предположения данной теоремы.

Контрпример. Рассмотрим, имеющие производные только в точке $x=a$ функции *f(x)* и $g(x)$, для которых применима только первая теорема о раскрытии неопределенностей, вторая и третья не применяются.

Пусть $f(x) = x^2D(x) + sinx, g(x) = x^2D(x) + x, a = 0.$

Видим, что $\lim_{x\to 0} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 0} g(x) = 0.$ Существуют конечные производные $f'(0)$ и $g'(0),$ причем $g'(0) \neq 0.$ Действительно, получим, $f'(0) = 0 + cos0 = 1,\ g'(0) = 0 + 1 = 1.$ Найдем с использованием первого замечательно предела $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2D(x)+sinx}{x^2D(x)+x} = 1,$ что равно отношению $\frac{f\prime(0)}{g\prime(0)} = \frac{1}{1} = 1.$ Заметим, что функции *f(x)* и $g(x)$ всюду разрывны, кроме точки x=0, в которой они имеют производные. Теоремы 2 и 3 к этому случаю неприменимы, поскольку у функций не существует производных всюду, кроме точки x=0.

Контрпример.

Пусть $f(x) = x^2sin\frac{1}{x}, g(x) = sinx$ в интервале (0, 1), a=0. Видим, что $\lim_{x\to 0} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 0} g(x) = 0.$ В (0,1) существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x),$ причем $g'(x) \neq 0.$ В силу последнего теорема 2 неприменима. И теорема 3 неприменима, так как $\lim_{x\to 0+0} f'(x)$ не существует, а $\lim_{x\to 0+0} g'(x)$ существует. Теорема 1 также будет неприменима, так как *f(x)* не определена в точке x=0.

Четвертая теорема о раскрытии неопределенностей. Пусть на интервале (c, +∞) определены функции f(x) и g(x); $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$; существуют конечные производные на итервале (c, +∞) $f'(x)$ и $g'(x),$ причем $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (c, +\infty)$; существует предел $\lim_{x\to+\infty} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)} = K$ конечный, или равный +∞ или -∞ Тогда существует предел $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$

Контрпример.

Пусть $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = e^{-x} + e^{-2x}$, они определены всюду. Видим, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. На всей числовой оси существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x) \neq 0$. Но теорема 4 неприменима, так как

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}(-e^{-x}) = 0 \text{ и } \lim_{x\to+\infty} g'(x) = \lim_{x\to+\infty}(-e^{-x} - 2e^{-2x}) = 0.$$

Всякое многократное применение теоремы 4 не срабатывает, потому что производные всех порядков функций *f(x)* и *g(x)* имеют нулевой предел при $x\to +\infty$. Заметим, что предел отношения функций существует $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{e^{-x}+e^{-2x}} = 1$.

Пятая теорема о раскрытии неопределенностей. Пусть на интервале (a,b) определены функции f(x) и g(x); $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \infty$; существуют конечные производные на интервале (a,b) $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$; существует предел $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$ конечный, или равный $+\infty$ или $-\infty$. Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = K$.

Контрпример.

Пусть $f(x) = \frac{1}{x^2} + cos\frac{1}{x^2}, g(x) = \frac{1}{x^2}, a = 0$.

Функции всюду определены, кроме точки $x = 0$. Видим, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$. Всюду, кроме точки x=0, существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$. Однако теорема 5 неприменима, так как предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ не существует. Действительно, $f'(x) = -\frac{2}{x^3} + sin\frac{1}{x^2}\cdot\frac{2}{x^3} = \frac{2}{x^3}\left(sin\frac{1}{x^2} - 1\right), g'(x) = -\frac{2}{x^3} \neq 0$, $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 - sin\frac{1}{x^2}$. Данное отношение в любой, сколь угодно малой, окрестности нуля при стремлении $x \to 0$ будет бесконечное число раз принимать все значения от 0 до 2. Предел отношения функций *f(x)* и *g(x)* существует и равен 1 [18].

Глава 2. Применение контрпримеров в школьном курсе математики

2.1.Анализ школьных учебников по изложению темы «Производная функции» в школе

Начала математического анализа свое отражение нашли и в школьном курсе математики. Большой практической значимостью вызвано включение этих разделов в программу.

Нами был проведен сравнительный анализ нескольких учебников старшей общеобразовательной школы. Это учебники авторов:

1. Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В.Ткачева «Алгебра и начала анализа» 10-11, 2016.
2. Н.Я. Виленкин, О.С.Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд «Алгебра и начала математического анализа»10 кл. (углубл. уровень) 2014.
3. А.Г. Мордкович, И.М. Смирнова, Л.О. Денищева «Алгебра и начала математического анализа» 10-11, 2013.
4. Г.К Муравин, О.В. Муравина «Алгебра и начала анализа» 11 кл., 2013.
5. С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. «Алгебра и начала математического анализа» 11 кл.(базовый и профильный уровни), 2018.

Анализ данных учебников был проведен по самым, на наш взгляд, значимым моментам в этой теме и показал, что и на базовом и на профильном уровнях дается содержательная линия «Начала математического анализа».

Анализ учебника автора А.Г. Мордковича

Перед тем как ввести понятие производной вводятся вспомогательные понятия такие как: предел последовательности, предел функции, геометрическая прогрессия. Данные понятия достаточно основательно разобраны и представлено множество примеров необходимых для того, чтобы отработать навыки решения соответствующих задач.

Изучение данного раздела начинается с рассмотрения физической задачи, а именно с вычисления мгновенной скорости прямолинейного движения.

Выясняется, что такое касательная к произвольной плоской данной кривой. В ходе решения задач на скорость и на касательную приходят к неизвестному ранее понятию – пределу. Не вдаваясь в подробности в учебнике говорится о том, что существует много задач из иных областей знаний, которые приводят в ходе их решения к этой же модели.

Далее дается определение производной, говорят о том, что предел называют производной функции $y = f(x)$ в точке x и обозначают $f'(x)$. Таким образом, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Показан физический смысл производной и геометрический.

Дается алгоритм отыскания производной в пяти шагах. Затем разбирают примеры на использование алгоритма. Вводят понятие дифференцируемой функции в точке.

Обсуждается следующий вопрос: каким образом связаны между собой такие свойства функции, как дифференцируемость и непрерывность функции в точке. Устанавливают, как при помощи графика сделать вывод о дифференцируемости функции.

Находят по определению производной и дают следующие формулы дифференцирования: $C'=0$, $(x)'=1$, $(kx+m)'=k$, $(x^2)'=2x$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $(x \neq 0)$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (x>0), $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$.

После этого вводят правила дифференцирования: вынесения множителя за знак производной, производные суммы, произведения и частного, в результате чего выводятся формулы производных для тангенса и котангенса. Не углубляясь в особые подробности, формулы предстают как факты, однако правила дифференцирования разбиваются на отдельные части и достаточно подробно разобран пример на каждое из этих правил. Без доказательства представлены производные элементарных функций одновременно с другими производными.

Дается определение сложной функции. Формула композиции выводится на основании примера и для функции $y=f(kx+m)$ вычисляется производная.

Рассматривается вывод уравнение касательной к графику функции в точке и выделяют соответствующий алгоритм.

Показывается применения производной для исследования функции на экстремумы, монотонность, доказательства тождеств и неравенств, построения графиков функций. Приводятся соответствующие алгоритмы.

Также в учебнике дают понятия горизонтальной и вертикальной асимптот и рассматривают задачи на оптимизацию [11].

В учебнике можно увидеть лишь теоретический материал, все практические упражнения представлены в отдельном задачнике к данному учебнику. В нем приводят упражнения разного уровня сложности для самостоятельного решения. Упражнения устного типа не имеют никакого особого значка, для номеров средней трудности есть значок ○, номера повышенной сложности обозначены значком ●. Количество упражнений довольно объемно, но это можно считать только плюсом, поскольку для учителя не будет заметной необходимостью обращаться к тем или иным источникам [12].

Контрпримеры в школьной литературе не представлены в явном виде, но все же нам удалось найти некоторые из них. Многие учащиеся имеют ошибочное представление о том, что непрерывность является необходимым и достаточным условием существования производной. В учебнике Мордковича встречаются два примера, которые опровергают следующую теорему.

1) Если функция дифференцируема в точке x, то она непрерывна в этой точке. Однако обратное утверждение будет неверным, поскольку существуют непрерывные функции, которые в некоторых точках будут не дифференцируемы.

Так, непрерывная во всех точках, функция $f(x) = |x|$ не имеет в точке x=0 производной, поскольку в этой точке производная справа равна 1, а производная слева равна -1. Очевидно, что график такой функции не будет иметь касательной в точке (0,0).

Еще один пример. Функцию $y = \sqrt[3]{x}$ является непрерывной на всей числовой прямой, в том числе в точке $x=0$. И касательная к графику функции существует в любой точке, в том числе в точке $x=0$. Но в этой точке касательная совпадет с осью y, т.е. будет перпендикулярна оси абсцисс, отсюда ее уравнение имеет вид $x=0$. Углового коэффициента такая прямая не имеет, а значит, не существует и $f'(0)$.

Получаем вывод: если в какой-либо точке касательная к графику функции не существует или же перпендикулярна оси абсцисс, то функция не дифференцируема в этой точке.

2) Точки, в которых производная обращается в нуль, носят название стационарные точки. Можно опровергнуть предположение, в котором говорится, что любая стационарная точка является точкой экстремума. В данном учебнике приводится соответствующий контрпример, где рассматривают рисунок, на котором изображен график возрастающей функции, не имеющий точек экстремума, но имеющий стационарную и критическую точки.

Анализ учебника автора С.М. Никольского

Изучение данного раздела в учебнике С.М. Никольского начинается с того, что вводится понятия приращения функции и формулируется правило для его вычисления.

Затем с использованием предела дают определение дифференцируемой в точке функции. Доказывают дифференцируемость функций x^2 и x^3 на конкретных примерах.

Рассматривается пример на прямолинейное движение, заданное следующей формулой $x=kt+x_0$. После этого выясняется, что k выражает не только скорость движения, но также угловой коэффициент графика данного движения.

Приводится доказательство теоремы о дифференцируемости функции при существовании предела: $k = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Дается определение производной функции $y = f(x)$, которая задана на интервале $(a; b)$ через понятие предела и вводят обозначение производной: $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

После того, как ввели определение производной через предел, дают правило (алгоритм) для нахождения производной по определению.

Приводится вывод следующих формул для отыскания производных функций: $(kx+b)'=k$, $(x^2)'=2x$, $(x^3)'=3x^2$.

Вводится определение дифференциала функции $df=f'(x)dx$ и формулируется определение вычисления приближенного значения функции.

Определение мгновенной скорости выводится на примере конкретной задачи и ненавязчиво выясняется, что мгновенная скорость изменения функции и есть ее производная.

После показан пример, в котором определяют, что такое касательная, тем самым, представляют геометрический смысл производной и в конце первого параграфа говорят о справедливости данного утверждения про угол наклона касательной. После чего выводится уравнение касательной: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Показывают связь между непрерывностью и дифференцируемостью и формулируется теорема.

В рассматриваемом учебнике правила дифференцирования представляют собой теоремы с последующим доказательством и на каждое правило дается пример. Вводят и доказывают правила дифференцирования: линейной функции, вынесения множителя, производных суммы, произведения, дроби, а также степенной и сложной функций.

Формулируется определение второй производной $f''=(f')'$, которое представляет собой ускорение изменения функции. Также определяют производную высшего порядка.

Далее идет применение производной для нахождения экстремумов, исследования на монотонность, отыскания наибольших и наименьших значений функции; исследования функций на выпуклость и точки перегиба. Вместе с тем предлагаются соответствующие схемы, включающие, среди прочего, точки разрыва и асимптоты.

Изучается бином Ньютона $(a + x)^n$, его запись через факториал и несколько свойств биноминальных коэффициентов.

После изучения тригонометрических функций, даются непосредственно их производные, и для обратных. После того, как сформулировали понятие показательной и логарифмической функций, дают вывод формул их дифференцирования.

В достаточном количестве в учебнике даются практические упражнения не только на вычисление, но и на применение производных. Это означает, что учащиеся могут выбирать и решать задания самостоятельно. Примеры предлагаются от более простых к сложным.

Что касается контрпримеров в данном учебнике, то рассматривается тот же пример, что и у Мордковича о том, что не всякая непрерывная функция дифференцируема, на примере $f(x) = |x|$.

Если производная функции равна нулю в некоторой точке, то эта точка может не быть точкой экстремума. Например, производная функции $y = x^3$ в точке $x = 0$ равна нулю, но функция $y = x^3$ в этой точке не имеет экстремума [14].

Учебник предусмотрен для обучения на базовом и профильном уровнях, что может способствовать успешной организации работы с учащимися разного уровня подготовки. Терминология имеет строгую формулировку и строгую доказательную структуру. Данный учебник, по структуре, приближен к первым разделам вузовского курса математического анализа.

Анализ учебника автора Г.К Муравина

Для введения понятия производной вводятся понятия предела и непрерывности функции. Дают определение касательной к кривой в точке M_0, что это предельное положение секущей M_0M, где M стремится к M_0. К понятию производной приходят путем решения задачи на составление уравнения касательной к графику функции, вводят понятие дифференциала, т.е. подведение к понятию начинается непосредственно с геометрического смысла. Затем формулируют само определение через предел.

После рассматривают другую задачу, связанную с движением материальной точки. Перенося физический смысл производной расстояния на произвольные функции, часто говорят, что под производной понимают скорость изменения функции.

С помощью углового коэффициента касательной к графику функции делаем вывод, как вблизи точек касания ведет себя функция. Вводят понятия точек возрастания и убывания, рассматривают теорему Лагранжа и её геометрическую интерпретацию. Определяют, что есть точки экстремума, критическая и стационарная точки, рассматривают алгоритм отыскания точек экстремума, который дается на наглядных примерах.

В третьей главе рассматриваются технические вопросы, которые связаны с применением формул дифференцирования. Здесь идет знакомство с формулами и правилами дифференцирования, которые впоследствии необходимы для исследования функций, решения задач на наибольшие и наименьшие значения и построении графиков.

В Учебнике Муравина содержатся доказательства всех формул и правил дифференцирования и рассматриваются подробные примеры после некоторых доказательств. Перед тем, как доказать теорему о производной частного, находят производную $\frac{1}{v}$ через определение.

Дают определение и вывод формулы сложной функции. Возможности школьников существенно расширяются в применении знаний формул производных.

После того, как будут изучены правила дифференцирования и формулу производной сложной функции, учащиеся знакомятся с производными основных элементарных функций и обратных функций, которые доказываются либо через определение, либо через правила дифференцирования.

Большинство текстовых задач, связанных с нахождением наибольшего или наименьшего значений функции, решается с помощью свойства единственной критической точки.

Рассматривается физический и геометрический смысл второй производной. Привносится представление о промежутках выпуклости и точках перегиба функции, о дифференциальном уравнении гармонических колебаний в качестве дополнительного материала.

В учебнике после каждого параграфа дается большое количество упражнений для выработки навыков и закрепления изученного материала. Система упражнений сплетена из заданий, представляющих три основные группы. Простые задания не имеют никакого значка, номера средней трудности отмечены значком ○, которые означают формирование обязательных умений. Существенную часть в системе данных упражнений основывают номера третьей группы, которые отмеченные значком «•». Перед выполнением многих из таких заданий следует обсудить и составить план решения.

У Муравина большинство задач физического содержания, что подчеркивает то, что производная - это скорость изменения величины. Также в учебнике очень много предоставлено наглядных задач, что тоже имеет большой плюс при работе учащихся. После каждого параграфа предлагается ответить и выполнять «контрольные вопросы и задания».

В учебнике Муравина приводится пример на опровержение той же теоремы, что и в ранее рассмотренных учебниках. 1) Если касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ существует, то функция непрерывна в точке x_0. Однако обратное утверждение неверно. Показан график функции, непрерывной в точке x_0, но не имеющий касательной в точке M_0- предельное положение секущей при стремлении M к M_0 слева и справа оказывается различным.

2) В точке перегиба вторая производная обращается в нуль, либо не существует. Обратное утверждение неверно. Так, например, вторая производная функции $y = x^4$ при $x=0$ обращается в нуль, а сама функция всюду вогнута. И делается вывод: чтобы был перегиб, вторая производная при переходе через соответствующую точку должна изменить свой знак [13].

Учебник Муравина хорош тем, что содержит большое количество подробных примеров после каждой темы, что дает учащимся наглядный пример при самостоятельной работе. Берем во внимание и то, что в конце почти каждой страницы предлагаются небольшие дополнительные интересные факты, либо об ученых, либо о данных теоремах или понятиях.

Анализ учебника автора Ш.А. Алимова

Определение производной в учебнике Алимова вначале формулируется через механический смысл, где производная - это мгновенная скорость. Данное соответствие является наиболее доступным для понимания учащихся. Автор сразу после рассмотрения задачи на скорость переходит к определению производной через пределы, перед этим кратко дав понятия предела и разностного отношения в этой же задаче.

Формулируется понятие дифференцируемой функции в точке. Выводятся следующие формулы для производных функции: x^2, x^3, $kx+b$.

После дается уже строгое определение предела функции и его пояснение. Вводится понятие непрерывной функции.

После рассматривают правила дифференцирования: производная суммы, произведения, частного, сложной функции, вынесения множителя за знак производной. В данном учебнике представлены доказательства только двух первых формул, однако к каждой из формул есть по 1-2 примера.

Алимов решил упростить раздел, касающийся сложной функции, заменив данную формулу на ее частный случай, которым является линейная замена аргумента: $(f(kx + b))' = kf\,`(kx + b)$. Несмотря на то, что формула менее емкая, ее доказательство является менее абстрактным и коротким.

Перед правилами дифференцирования рассматривается степенная функция, а уже после и в отдельном пункте формулы производных других элементарных функций. В этом заключается удобство, поскольку все элементарные функции и правила дифференцирования рассматриваются последовательно и не будет необходимости возвращаться к пройденному материалу.

По определению производной вычисляются формулы:

$C'=0$, $(x)'=1$, $(x^2)'=2x$, $(x^3)'=3x^2$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\left(\frac{1}{x^2}\right)\ (x \neq 0)$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ \ (x > 0)$.

Геометрический смысл производной представлен в учебнике в самом конце, после объяснения методов вычисления. Через рассмотрение хорд дается определение касательной и вывод ее формулы. Применяются приращения и пределы.

В начале раздела применения производной вводят определения возрастающей (убывающей) функции. Формулируется теорема Лагранжа, необходимая при доказательстве теорем о достаточных условиях возрастания (убывания) функций.

Определяются на примере конкретной задачи понятия критических и стационарных точек. Представлена теорема Ферма, с использованием которой идет доказательство теоремы о необходимом и достаточном условии для точек экстремума.

Применение производной наблюдается в построении графиков функций, предлагается схема исследования свойств функции. Также представлен дополнительный повышенной трудности материал, который отмечен звездочкой на применение производной к решению задач на оптимизацию, исследованию на выпуклость.

К данному учебнику прилагается задачник. На уровневой дифференциации построено содержание и учебника, и задачника. Упражнения содержат систему трехуровнего вида, в которой обязательные номера выделены серым цветом, более сложные светло-розовым, трудные задания выделены темно-розовым цветом. Помимо этого, встречается раздел «Проверь себя» и в конце главы предлагаются задания для систематизации приобретенных знаний.

В этом учебнике встречается тот же контрпример, что у Мордковича и Никольского. Функция, которая непрерывна на промежутке, может не иметь производную в некоторых точках этого промежутка. Функция $y = |x|$ непрерывна при всех значениях x, но не имеет производной в точке $x=0$.

Еще пример: функция $y = |log x|$ непрерывна на промежутке (0; +∞), но не имеет производной в точке $x=1$.

2) если производная в точке x_0 равна нулю, то этого недостаточно, чтобы утверждать, что x_0 обязательно точка экстремума функции. Например, если $f(x) = x^3$, то $f'(0) = 0$. Однако функция x^3 возрастает на всей числовой прямой. Данный контрпример также встречался ранее у других авторов.

Вступление главы о производных в учебнике представлено кратко это дает учащимся возможность быстрее приступить к вычислению производных, при этом получив минимум информации. Это отвечает той концепции курса, в соответствии с которой элементы математического анализа в школе, объясняются на наглядно-интуитивной основе с упором на их практическое применение при решении задач математики [1].

Анализ учебника автора Н.Я. Виленкина

Изучение данной темы начинается с того, что рассматривают три задачи: на вычисление мгновенной скорости, тангенса угла наклона касательной и силы тока. Вводятся понятия приращения и дифференцирования функции. После этого дается определение производной через предел. Рассматриваются механический и геометрический смыслы производной.

Для правил дифференцирования выделен целый параграф. Здесь рассматриваются следующие правила: производная суммы, разности, произведения, частного, вынесения множителя за знак производной; и формулы: степенной, показательной, логарифмической и тригонометрических функций. Данные правила рассматриваются в виде теорем с доказательствами. После теоретической части предлагают сделать ряд заданий.

После определяется понятие дифференциала функции df=f'(x)dx (df=dy) и вычисляются приближенные значения.

Формулируется производная сложной функции, а производная обратной функции вводится для углубленного изучения, отмечено звездочкой.

Вводятся понятия максимума, минимума, критической точки. Предоставлена в явном виде схема исследования функций.

Также в учебнике выводится уравнение касательной. Формулируются теоремы Ролля и Лагранжа с доказательством. Рассмотрена формула бинома Ньютона для вычисления на конкретном примере. Дается определение второй производной, ее механический смысл и применение, а также высших порядков.

Рассмотрены особенности экстремума критической точкой и решены задачи на оптимизацию. Включен дополнительно углубленный материал, который отмечен звездочкой: асимптоты, ряд Тейлора.

После каждого пункта рассматривается достаточное количество примеров и предлагается ряд упражнений, содержащие алгебраическое и физическое применение.

Если в ранее рассмотренных учебниках в явном виде был представлен контрпример, опровергающий наличие производной у функции $y = |x|$, то здесь учащиеся должны самостоятельно определить существует ли производная в нуле у данной функции. Только в следующем пункте рассматривается данный пример подробно и говорится о том, что функция хоть и непрерывна, но в нуле не дифференцируема и предлагается ряд похожих примеров для самостоятельного разбора.

Еще один пример на опровержение того, что в точке экстремума производная функции либо равна нулю, либо не существует. Говорится о том, что данное условие является лишь необходимым, но не достаточным, необходима дополнительная проверка. Приводится контрпример, производная функции $(x-1)^3$ равна $3(x-1)^2$. Обращается она в нуль при x=1, но точка 1 не будет точкой экстремума, так как функция $(x-1)^3$ при $x=1$ равна 0, слева от точки x=1 отрицательна, а справа от этой точки положительна. После этого также дается ряд подобных упражнений на наличие экстремума в точках, что позволяет учащимся лучше усвоить материал.

Контрпример представлен и в опровержении необходимого условия точки перегиба, где говорится о том, что это условие не является достаточным. Здесь у функции x^4 вторая производная равна $12x^2$ и обращается в нуль при x=0, но график данной функции точек перегиба не имеет.

Из структуры учебника видно, что данная тема рассматривается достаточно широко и полно. Теоретический материал в данном учебнике изложен на достаточно высоком уровне. Предложен обильный по объему дополнительный и углубленный материал, что в процессе обучения позволит учащимся более широко овладеть знаниями [4].

Таблица 1. Сравнительный анализ учебников по теме «Производная»

Учебник	Мордкович А.Г.	Никольский С.М.	Муравин Г.К.	Алимов Ш.А.	Виленкин Н.Я.
Вспомогательные понятия (предел, прогрессия, касательная)	+	+	+	+	+
Задача о касательной к графику функции (геометрический смысл)	+	+	+	+	+

Задача о скорости движения (механический смысл производной)	+	+	+	+	+
Вычисления производных через определение	+	+	+	+	+
Теоремы о сумме и вынесении множителя с доказательством	+	+	+	+	+
Теоремы о произведении, частном производных с доказательством	-	+	+	-	+
Теорема о производной сложной функции с доказательством	-	+	+	-	-
Применения производной при исследовании функции.	+	+	+	+	+
Упражнения на вычисление и применение производно	+	+	+	+	+
Наличие контрпримеров	+	+	+	+	+

На основании проведенного анализа можно дать следующую характеристику рассмотренным учебникам:

В учебниках Ш.А.Алимова, А.Г.Мордковича учат сначала правилам дифференцирования функций, а после этого показывают применение производной к исследованию функций и решению задач. В учебниках В.К. Муравина, С.М. Никольского и Н.Я. Виленкина при обучении математическому анализу сначала рассматриваются лишь те функции, которые заданы полиномами, а уже на их примере показывают возможности анализа и только после идет изучение правил нахождения производных других функций, однако сразу с практическими приложениями, это помогает учащимся, на доступном языке, понять основы анализа.

В этих учебниках основные принципы изучения данной темы практически схожи, однако различия все же существуют.

В учебниках для общеобразовательных школ авторов Ш.А.Алимова, А.Г.Мордковича определение производной предлагается вовсе без понятия предела, или с ним, но без его строгого определения. Также здесь не изучаются многие приложения. В учебниках Н.Я.Виленкина, С.М.Никольского, А. Г. Муравина понятие производной формулируется через понятие предела с его предварительным и подробным изучением. Также достаточно подробно представлены различные приложения производной.

Что касается контрпримеров в данных учебниках, то нам удалось выявить всего лишь несколько из них, к тому же почти одни и те же на непрерывность и дифференцируемость, и на наличие экстремума. У Виленкина это продемонстрировано наиболее ярко, помимо того, что разбирается конкретный контрпример, после этого предлагается учащимся самим разобрать ряд подобных примеров. Построение контрпримеров не является алгоритмической деятельностью и требует развитого математического мышления, которое, к сожалению, в школе формируется не так часто.

В большинстве своем практически весь материал начал математического анализа выглядит в виде серпантина и от стиля, в котором излагается данный материал зависит успех вообще всего обучения и методики этого обучения.

2.2 Факультативный курс по математике: «Производная функции»

2.2.1 Пояснительная записка

Центральное место в курсе алгебры и начал анализа занимает тема «Производная». Изучение данного раздела весьма актуально, поскольку оно имеет большое образовательное значение. Именно с него начинается процесс изучения элементов математического анализа, что открывает новые методы решения геометрических, математических и физических задач.

Одной из основных целей обучения математике в школе считается обеспечить учащимся прочное и сознательное овладение системой математических знаний, умений и навыков. Кроме обычных уроков, которых нередко бывает недостаточно для хорошего закрепления материала, в решении данной проблемы помочь могут дополнительные занятия по математике – факультативы. Они, в свою очередь, позволят показать в большем объеме все многообразие задач, требующих для своего решения функционального похода, научить учащихся глубоко понимать понятия и использовать свойства функции. Такие занятия помогают систематизировать знания, способствуют развитию умственных способностей у учащихся, формируют математическое мышление и способствуют развитию интеллекта.

Иногда курс математического анализа построен таким образом, что учащиеся встречаются в них только с хорошими примерами и функциями. Такой подход может привести учащихся к неверному пониманию, что объясняется следующим: «Если некто в определенном контексте имеет дело с объектами, которые всегда обладают некоторым свойством, то при отсутствии контрпримеров он вполне может сделать вывод, что это свойство присуще объектам и в более широком контексте» [8].

С целью усиления концептуального понимания математики необходимо объяснить учащимся смысл условий в теоремах и формулировках, и их значение, показать обучающимся ложные математические утверждения и ставить задачу построения контрпримеров, чтобы их опровергнуть. Поэтому факультативные занятия «Производная функции» направлены не только на повторение изученного материала по данной теме, но и на более глубокое понимание учащимися теорем и формулировок, умение доказывать истинность утверждений, что помогает развитию математического мышления школьников.

Данный факультативный курс по теме «Производная функции» предназначен для учащихся 10-11 классов и рассчитан на 4 часа, включая итоговое занятие в форме контрольной работы.

Цель курса: систематизация и углубление системы знаний, навыков учащихся приуроченных к понятию производной, геометрическому смыслу производной, а также развитие математических способностей при умении видеть и использовать контрпримеры для опровержения ложных утверждений.

Задачи курса:

1) углубить и дополнить базовую математическую подготовку учащихся по теме «Производная»;

2) выработать навыки решения задач по данному разделу с применением правил и теорем;

3) способствовать развитию логического и критического мышления на уровне, который необходим для повседневной жизни;

4) научить анализировать и работать с определениями и формулировками

5) показать важность применения контрпримеров и научить применять их для опровержения утверждений.

Теоретический и практический материал, запланированный программой курса, способствует формированию познавательного интереса и мотивации к математике, развитию умственных способностей учащихся, развивает навыки работы с учебной и справочной литературой.

2.2.2. Содержание курса

1. Понятие производной, ее геометрический и физический смысл.

2. Вычисление производных. Правила дифференцирования.

3. Применение производной к исследованию функций.

4. Контрольная работа

Календарно-тематическое планирование

№ занятия	Тема занятия	Количество часов
1	Понятие производной и касательной	1
2	Вычисление производной	1
3	Возрастание и убывание функции. Экстремумы	1
4	Контрольная работа	1

Знание определять и умение работать с понятиями; способность анализировать и классифицировать информацию, умение мыслить и пользоваться аналогиями – все это человек осваивает в большей мере, именно благодаря изучению математики. На основании этого были разработаны «карточки-путеводители» для каждого факультативного занятия.

Содержание занятия № 1 Тема «Понятие производной и касательной»

Повторить основные понятия, связанные с производной, геометрический смысл производной, физический смысл производной, использование уравнения касательной, связь между дифференцируемостью и непрерывностью, показать, как работать с условиями формулировок и теорем, и с помощью контрпримеров показать ограниченность применимости того или иного условия.

Примеры «карточек –путеводителей» занятия №1:

«Нахождение производной функции по определению»

№ шага	Последовательность действий	Результат выполнения действий
1	Находим приращение функции в точке x_0: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$	
2	Находим разностное отношение	

	$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$	
3	Находим предел	
4	Записываем ответ	

«Определение дифференцируемости функции в точке»

№ шага	Последовательность действий	Результат выполнения действий
1	Определим непрерывна ли функция в данной точке	
2	Находим *левостороннюю производную* в данной точке: $f'_-(x_0)$	
3	Находим *правостороннюю производную* в данной точке: $f'_+(x_0)$.	
4	Приравниваем производные, делаем вывод	
6	Записываем ответ	

Содержание занятия №2 Тема «Вычисление производной»

Вспомнить формулы дифференцирования, правила дифференцирования, дифференцирование сложной функции. Рассмотреть несколько способов вычисления производной. Решение типовых задач.

Примеры карточек-путеводителей занятия №2:

«Нахождение производной функции»

№ шага	Последовательность действий	Результат выполнения действий
1	Какая дана функция?	
2	Как у такой функции найти производную?	
3	Выбираем правила дифференцирования	
4	Обозначим u и v	
5	Подставим в правило дифференцирования	
6	Найти значение функции в точке (если задана)	
7	Записываем ответ	

«Нахождение производной сложной функции»

№ шага	Последовательность действий	Результат выполнения действий
1	Выделяем «внутреннюю» функцию	
2	Выделяем «внешнюю» функцию	
3	Вычислить производную сложной функции по формуле	
4	Найти значение производной в точке (если задана)	
5	Записываем ответ	

Содержание занятия №3 Тема «Возрастание и убывание функции. Экстремумы»

Применение производной для исследования функций на монотонность, отыскания точек экстремума, вспомнить алгоритм исследования, необходимое условие экстремума, показать контрпримеры на ограниченность условий.

Примеры карточек-путеводителей занятия №3:

«Нахождение промежутков возрастания и убывания функции»

№ шага	Последовательность действий	Результат выполнения действий
1	Находим область определения функции.	
2	Находим производную функции.	
3	Находим точки пересечения с осью абсцисс графика функции.	
4	Отмечаем точки на числовой прямой.	
5	Проверяем на каждом промежутке знак функции.	
6	Вывод и ответ	

«Нахождение точек экстремума функции»

№ шага	Последовательность действий	Результат выполнения действий
1	Находим область определения функции.	
2	Находим производную функции.	

3	Находим область определения производной	
4	Находим точки пересечения графика функции с осью абсцисс.	
5	Отмечаем точки на числовой прямой.	
6	Проверяем на каждом промежутке знак функции	
7	Вывод и ответ	

2.2.3. Апробация факультативного курса

Апробация факультативного курса была проведена в период прохождения педагогической практики в МКОУ СОШ №2 Локомотивного городского округа Челябинской области. Участниками исследования были учащиеся 11 класса.

Было проведено три занятия по темам «Производная и касательная», «Вычисление производных», «Возрастание и убывание функции. Экстремумы». (Приложение 1).

Предварительно до начала факультативных занятий была составлена и проведена входная контрольная работа №1 с целью определить уровень знаний и умений учащихся по основным моментам темы «Производная функции». На выполнение контрольной работы отводилось 45 минут. Работа состояла из 6 заданий по данной теме, предполагающих подробное решение с ответом (Приложение 2).

Результаты входной контрольной работы №1.

Количество учеников: 21 человек.

Оценки обучающихся:

«отлично» – 2 человека;

«хорошо» – 7 человек;

«удовлетворительно» – 9 человек;

«неудовлетворительно» – 3 человека.

Результат выполнения контрольной работы № 1.

По результатам диаграммы можно сделать вывод, что большая часть учащихся неудовлетворительно справилась с работой или вовсе не справилась.

Типичные ошибки:

Задание 1: не знают физического смысла производной (5 человек), вычислительные ошибки (2 человека)

Задание 2: неточности в определении производной, в частности не умение его применять (16 человек)

Задание 3: заблуждения в использовании формул и правил дифференцирования (10 человек), вычислительные ошибки (3 человека)

Задание 4: неверное определение взаимосвязи функции и производной (6 человек), непонимание существования производной функции в точке (8 человек).

Задание 5: неверный алгоритм действий при нахождение касательной (7 человек), неточности в формуле (4 человека)

Задание 6: неверное определение максимума и минимума (4 человек), неверное нахождение производной сложной функции (5 человек) невнимательность при ответе на вопрос задачи (3 человека).

Таким образом, результаты контрольной работы №1 подтверждают необходимость проведения дополнительных занятий, которые будут способствовать совершенствованию и систематизации знаний учащихся, сформируют расширенное представление о понятии производной, ее физическом и геометрическом смысле, способствуют умению мыслить логически и по аналогии, для этого предлагается использование контрпримеров по данной теме на факультативных занятиях.

После проведения факультативного курса учащиеся выполнили итоговую контрольную работу №2. На выполнение контрольной работы отводилось 45 минут. Работа состояла из 5 заданий, предполагающих подробное решение с ответом (Приложение 2).

Результаты контрольной работы №2.

Количество учеников: 20 человек.

Оценки обучающихся:

«отлично»: 7 человек;

«хорошо»: 10 человек;

«удовлетворительно»: 3 человека;

«неудовлетворительно»: 0 человек.

Результаты выполнения итоговой контрольной работы №2.

Большая часть учащихся справились с заданиями итоговой контрольной работы на «хорошо» и «отлично». С заданиями на физический и геометрический смысл, определение точек по графику справились почти все учащиеся, наблюдались вычислительные ошибки. Некоторые трудности и ошибки возникли в заданиях на доказательство и исследование функции, в частности с построением графика.

По итогам проведения двух контрольных работ, можно наблюдать значительное улучшение знаний учащихся. С помощью проведенных занятий удалось обеспечить усвоение материала, развить способности мышления, расширить и углубить знания учащихся по теме «Производная функции».

Таким образом, проведенное исследование показало реализуемость гипотезы и можно сделать вывод об эффективности разработанной системы занятий.

Заключение

Данная квалификационная работа посвящена контрпримерам в курсе математического анализа.

В ходе ее реализации нами были рассмотрены теоремы и задачи, которые доказываются при помощи контрпримеров. Основной трудностью служит то, что при знакомстве с некоторыми вопросами и моментами, не имея достаточного опыта, можно легко предложить неправильный ответ или же неправильно представить истинную суть задачи. Благодаря контрпримерам преподаватель может указать учащимся на их ошибки при формулировании какого-либо определения или утверждения.

В работе мы выявили и исследовали контрпримеры в разделе дифференциального исчисления.

В ходе проведения исследования нами были решены следующие задачи:

1. Проанализирована вузовская и школьная литература по теме дифференциальное исчисление.

2. Осуществлена работа по подбору контрпримеров в данном разделе, применение которых может быть в последующем использовано в педагогической работе с учащимися.

3. Исследованы выявленные контрпримеры.

4. Исследовано использование контрпримеров в школьном курсе дифференциального исчисления.

5. Разработан и апробирован факультативный курс по теме «Производная функции».

В работе представлены теоретическая и практическая части, связанные с использованием контрпримеров и особенностями их применения в данном разделе курса математического анализа.

Основываясь на проведенном исследовании, можно сделать следующие выводы.

Использование контрпримеров играет важную роль в изучении дифференциального исчисления в курсе математического анализа. Применение контрпримеров необходимо для более глубокого понимания теоретического материала, а также для более наглядной иллюстрации определений и для опровержения гипотез.

Анализ вузовской и школьной литературы показал, что область применения контрпримеров довольно широка, однако в школе мы выявили незначительную часть таких примеров. Но тем не менее, апробация факультативного курса показала, что если при изучении использовать контрпримеры это будет способствовать более глубокому пониманию материала и развитию у учащихся математического мышления.

Проделанную нами работу я считаю не завершенной, поскольку курс математического анализа включает в себя еще немало разделов, которые требуют исследования.

Данные в работе по применению контрпримеров при изучении дифференциального исчисления могут быть использованы в практике школьного учителя математики и преподавателя вуза, и будут востребованы, и полезны при изучении учебного материала по данному разделу.

Поставленные нами задачи исследования решены. Цель достигнута.

Список литературы

1. Алимов Ш.А. Алгебра и начала анализа [Текст]: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В.Ткачева и др.; под ред. Ш.А. Алимова.–3-е изд. - М.: Просвещение, 2016.– 463 с.

2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа [Текст]: учеб.пособие для вузов / Г.Н.Берман. - 22-е изд.- СПб.: 2014. -432 с.

3. Борликов Г.Б. Основные идеи формирования исследовательских компетенций студентов колледжа/ Г.Б. Борликов // Вектор науки ТГУ. – 2012.- № 3 (10).- С. 25-27.

4. Виленкин Н.Я. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. [Текст]: учеб. для учащихся общеобразоват. организаций (углубл.уровень) / Н.Я. Виленкин, О.С.Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд. - 18-е изд., стер. — М.: МНЕМОЗИНА, 2014. — 352 с.

5. Гелбаум Б. Контрпримеры в анализе [Текст]: к изучению дисциплины / Б. Гелбаум, Дж. Олмстед; пер. с англ. Б. И. Голубова; под ред. Л. П. Ульянова. – 3-е изд. - М.: Мир, 2015. – 248 с.

6. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу /Б.П. Демидович. – 21-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2018. — 624 с.

7. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу: учеб. пособие / Г.И. Запорожец. – 8-е изд. – СПб.: Лань, 2014. – 464 с.: ил.

8. Иванов О. Математический анализ для первокурсников [Текст]: учебник для вузов / О.Иванов, С. Климчук. — М.: МЦНМО,2013—136с.

9. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1 [Текст]: учебник для вузов. / Л.Д.Кудрявцев.- 6-е изд. - М.: Дрофа, 2015.- 704с.

10. Мамедов А.Н. О методике использования контрпримеров в преподавании математического анализа в педвузах /А.Н. Мамедов // Вектор науки ТГУ. - 2013.- № 2.- С.185-188.

11. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 класс. [Текст]: в 2 ч. Ч.1 учеб. для учащихся общеобразоват. организаций (баз. уровень) / А.Г. Мордкович, И.М. Смирнова, Л.О. Денищева и др.; под ред. А.Г. Мордковича. – 14-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013.– 400 с.

12. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл.: в двух частях. Ч.1: Задачник для общеобразоват. учреждений / А.Г.Мордкович, Л.О.Денищева и др.; под ред. А.Г.Мордковича. – 7-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2013. – 275с.

13. Муравин Г.К. Алгебра и начала анализа [Текст]: учеб. для 11 кл. общеобразоват. учреждений / Г.К Муравин, О.В. Муравина; под ред. Г.К.Муравина. – М.:Дрофа, 2013.- 256 с.

14. Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа [Текст]: учеб. для 11 кл. общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2018. – 464 с.

15. Петров В.А. Производная на службе у техники /В.А. Петров // Математика в школе. - 2016. - №8. - С.20-24.

16. Сивак Д. Контрпримеры в дифференциальном исчислении / Д. Сивак // Шаг в науку. - 2017. – № 4. – С. 74 – 76.

17. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчислений.Т.1: учебник для вузов. / Г.М. Фихтенгольц. 13-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2018.- 608 с.

18. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. В 2т. /Г.М. Фихтенгольц. – 6-е изд., стер. — М.: Наука, 2015.

19. Шибинский В.М. Примеры и контрпримеры в курсе математического анализа /В.М. Шибинский. — Москва: Высшая школа, 2007. — 544с.

20. Контрпримеры в математике [Электронный ресурс] /. — Электрон. текстовые дан. — Режим доступа: https://matemonline.com/2013/01/counterexamples-in-mathematics/, свободный

Приложение 1

Конспект Занятие № 1

Тема: «Понятие производной и касательной».

Тип урока: комбинированный, новый материал, обобщение и систематизация знаний.

Цели урока:

Обучающая- организовать деятельность учащихся по проверке раннее изученного, рассмотреть систему задач на нахождение производной по определению, разобрать теорему о непрерывности функции, привести контрпримеры.

Развивающая- развивать критическое мышление при использование контрпримеров, развивать навыки самостоятельной работы

Воспитательная – продолжить воспитание трудолюбия, мотивации учения, показывая практическую значимость изучаемого материала.

План занятия:

1. Организационный момент (2 минуты)
2. Актуализация знаний (6 мин.)
3. Решение задач (28 мин.)
4. Проверка знаний (6 мин)
5. Подведение итогов и рефлексия (3 мин)

Ход урока:

1. Организационный момент включает в себя приветствие учителем класса. Учитель сообщает о целях и задачах данного занятия.

2. Актуализация знаний.

Учитель задает ученикам вопросы и предлагает выбрать правильные варианты ответов, из предложенных на доске.

Учащиеся слушают учителя и отвечают на вопросы, выбирая правильный вариант

1) Какая из трех формул является формулой приращения аргумента?

А) $\boldsymbol{\Delta x = x - x_0}$

Б)$\Delta y = x + x_0$

В)$\mathrm{x} = x_0 + \Delta x$

2) Какая из трех формул является формулой приращения функции?

А)$f(x) = f(x + \Delta x)$

Б) $\boldsymbol{\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$

В) $\Delta x = x - x_0$

3) Что называется производной функции y=f(x) в точке x_0?

А) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y$

Б)$\boldsymbol{y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$

В) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \mathrm{x}}{\Delta \mathrm{y}}$

Кто скажет определение производной словами?

Производной функции y=f(x) в точке x_0 называется предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к соответствующему приращению аргумента Δx, при условие, что $\Delta x \to 0$

Таким образом функция называется дифференцируемой в точке, только в том случае, когда существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

3. Решение задач (с объяснением нового материала).

Мы привыкли находить производные функций по определенным правилам и формулам. Предлагаю найти производные следующих функций по определению. Для этого давайте вспомним каков алгоритм наших действий.

Для того, чтобы найти значение производной функции f в точке x, надо *(учащиеся перечисляют действия):*

1) найти выражение для приращения $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ функции f

2) разделить это приращение на приращение аргумента Δx

3) найти предел полученного отношения при $\Delta x \to 0$

Чтобы вы запомнили алгоритм своих действий мы на занятиях будем с вами работать с карточками- путеводителями, которые вам будут помощниками.

Пример 1: Пользуясь определением производной, найдите значение производной функции, если f(x)=$x^2 - 3x$.

№ шага	Последовательность действий	Результат выполнения действий
1	Находим приращение функции в точке x_0: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$	$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) - x_0^2 + 3x_0 = = 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x$
2	Находим разностное отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$	$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x - 3$
3	Выясняем, к какому числу стремится $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, если считать, что Δx стремиться к нулю.	$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x - 3) = 2x_0 - 3$
4	Записываем ответ	$f'(x_0) = 2x_0 - 3$

Пример 2: Найти производную функции $f(x) = \sqrt{x}$, пользуясь определением производной

№ шага	Последовательность действий	Результат выполнения действий

1	Находим приращение функции в точке x_0: $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$	$\Delta f =$ $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \sqrt{x_0+\Delta x} - \sqrt{x_0}$
2	Находим разностное отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$	$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$ $= \frac{\sqrt{x_0+\Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} = \frac{0}{0}$
3	Выясняем, к какому числу стремится $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, если считать, что Δx стремиться к нулю.	$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{x_0+\Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} = \frac{0}{0}$ *Устранение неопределенности:* Домножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение $\sqrt{x_0+\Delta x} + \sqrt{x_0}$: $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{(\sqrt{x_0+\Delta x} - \sqrt{x_0})\cdot(\sqrt{x_0+\Delta x} + \sqrt{x_0})}{\Delta x\cdot(\sqrt{x_0+\Delta x^{\to 0}} + \sqrt{x_0})} =$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{x_0+\Delta x - x_0}{\Delta x\cdot(\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$
4	Записываем ответ	$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

На доске у нас представлены еще четыре формулы, вам нужно выбрать ту, которая выражает физический смысл производной?

Учащиеся выбирают правильный ответ

А) $y' = f'(x)$

Б) s'(t)=v

В) $y' = tg\alpha$

Г) $f'(x) = a$

В чем же заключается физический смысл производной?

Производная показывает скорость изменения функции y=f(x) в зависимости от изменения аргумента x.

Пример 3: Закон движения некоторой точки по прямой задается формулой s(t)= t^2 ,где t-время(в секундах), s(t)- отклонение точки в момент времени t(в метрах) от начального положения. Найдите скорость в момент времени t=2c.

№ шага	Последовательность действий	Результат выполнения действий
1	Находим приращение функции в точке x_0: $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$	$\Delta f = f(t_0+\Delta t) - f(t_0) = (t_0+\Delta t)^2 - t_0^2$
2	Находим разностное отношение	$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_0+\Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} =$ $= \frac{(t_0+\Delta t)^2 - t_0^2}{\Delta t}$

	$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$	
3	Выясняем, к какому числу стремится $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, если считать, что Δx стремиться к нулю.	$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(t_0+\Delta t)^2 - t_0^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2 - t_0^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} 2t_0 + \Delta t = 2t_0$
4	Найти значение в точке	$f'(2) = 2\cdot 2 = 4$
5	Записываем ответ	$f'(2) = 4$

Вернемся к формулам на доске, мы уже выбрали из них формулу, выражающую физический смысл, а сейчас выберете формулу, которая выражает геометрический смысл производной

Учащиеся выбирают правильный ответ

А) $y' = f'(x)$

Б) s'(t)=v

В) $y' = tg\alpha$

Г) $f'(x) = a$

Таким образом, если в точке М$(x_0; f(x_0))$ графика функции f можно провести невертикальную касательную, то функция f дифференцируема при x=x_0 и угловой коэффициент касательной(тангенс угла наклона) в точке М равен значению производной функции f в точке x_0, то есть $к_{кас} = f'(x_0)$.

Используя карточки-путеводители давайте вспомним написание уравнения касательной к графику функции.

Пример 4: К кривой $f(x) = x^2 - 3x + 1$ в точке $x_0 = 2$ провести касательную.

№ шага	Последовательность действий	Результат выполнения действий
1	Вычислим производную функции	$f'(x) = (x^2 - 3x + 1)' = 2x - 3$
2	Найдем значение функции в точке x_0	$f(2) = 2^2 - 3\cdot 2 + 1 = -1$
3	Найдем значение производной в точке x_0	$f'(2) = 2\cdot 2 - 3 = 1$

4	Подставим полученные числа в формулу $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$	$y = -1 + 1 \cdot (x - 2)$
5	Приведем уравнение к стандартному виду	$y = x - 3$
6	Записываем ответ	$y = x - 3$

Пример 5: На параболе $y=x^2-2x-8$ найти точку М, в которой касательная к ней параллельна прямой 4x+y+4=0.

№ шага	Последовательность действий	Результат выполнения действий
1	Определим угловой коэффициент касательной к функции $к_{кас} = f'(x)$	$к_{кас} = f'(x) = (x^2 - 2x - 8)' = 2x - 2$
2	Найдем угловой коэффициент прямой	4x+y+4=0: y=-4x-4, $к_{кас} = f'(x) =$ (-4x-4)'=-4
3	(Касательная к параболе и данная прямая по условию параллельны. Следовательно, их угловые коэффициенты равны) Приравниваем угловые коэффициенты	2x-2=-4
4	Находим абсциссу точки касания	2x=-4+2 2x=-2 X=-1
5	Из уравнения данной функции находим ординату точки касания	$y=x^2-2x-8$, т.е. $y(-1)=(-1)^2-2(-1)-8=-5$
6	Записываем ответ	M(-1;-5)

Обсудим такой вопрос: как связаны между собой такие два тонких свойства функций, как непрерывность и дифференцируемость функции в точке.

Теорема: Если функция дифференцируема в точке x, то она непрерывна в этой точке.

Здесь «функция дифференцируема в точке» - это условие теоремы, «функция непрерывна в точке»- это заключение теоремы.

Построим обратное утверждение: поменяем местами условие и заключение прямой теоремы и получим обратную. Что получится?

Если функция непрерывна в точке, то она дифференцируема в этой точке.

Как вы думаете обратное утверждение будет верным?

Ответы учащихся

Данное утверждение является ложным. Чтобы его опровергнуть достаточно привести контрпример-пример, опровергающий верность некого утверждения.

Контрпример. Докажем, что функция |x|непрерывна во всех точках, но не является дифференцируемой при x=0.

Решение: Функция |x| задается так: $|x| = \begin{cases} x, \text{если } x \geq 0 \\ -x, \text{если } x < 0 \end{cases}$

Она могла бы иметь точку разрыва при x=0, но, поскольку $\lim\limits_{x\to+0}|x| = \lim\limits_{x\to+0} x = 0$ и $\lim\limits_{x\to-0}|x| = \lim\limits_{x\to-0}(-x) = 0$, она непрерывна и в этой точке. Покажем теперь, что она является дифференцируемой при x=0.

Алгоритм решения таков:

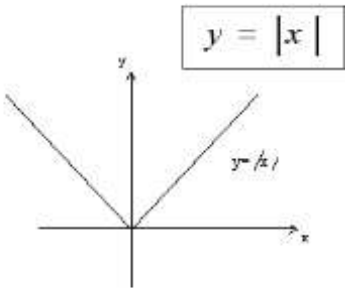
1) Находим *левостороннюю производную* в данной точке: $f'_-(x_0)$.

2) Находим *правостороннюю производную* в данной точке: $f'_+(x_0)$.

3) Если *односторонние производные* конечны и совпадают: $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, то функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и геометрически здесь существует общая касательная. Если получены два разных значения: $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, то функция не дифференцируема в точке x_0.

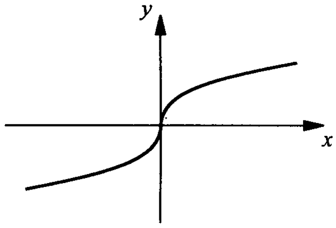
Если же обе односторонние производные равны бесконечности (пусть даже разных знаков), то функция $y = f(x)$ не дифференцируема в точке x_0, но там существует бесконечная производная и общая вертикальная касательная к графику.

В самом деле, поскольку при x=0 имеем |x|=0, а при x=h имеем $|\mathrm{x}| = |h|$,то производная функции |x| в точке x=0 (если бы она существовала) должна была бы равняться значению предела $\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$. Но этот предел не существует, так как мы получили разные значения $\lim\limits_{h\to +0}\frac{|h|}{h} = \lim\limits_{h\to +0}\frac{h}{h} = 1,$ a предел $\lim\limits_{h\to -0}\frac{|h|}{h} = \lim\limits_{h\to -0}\frac{(-h)}{h} = -1.$ Этим и доказано, что функция |x| не имеет производной в точке x=0, т.е. что она не является дифференцируемой в этой точке.



Также мы можем обратить внимание на график функции, мы знаем, что если функция дифференцируема, то к ней можно провести касательную, но видно, что касательной к графику в точке (0;0) не существует, значит и производной у этой функции не существует.

Также отметим еще один случай, функция может быть непрерывной и касательная к графику функции существует в любой точке, даже в точке x=0.



Но в точке x=0 касательная совпадает с чем? *С осью y*

То есть она перпендикулярна оси абсцисс. Её уравнение какой вид имеет? *X=0*

Есть угловой коэффициент у такой прямой? *Нет*

Значит какой вывод можем сделать?

Если касательная перпендикулярна оси абсцисс, то производной не существует.

Пример 6: Будет ли дифференцируема функция $y = f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & если \quad x < 0 \\ x - 4, & если \quad x \geq 0 \end{cases}$ в точке $x_0 = 0$? Вновь воспользуемся нашими помощниками карточками-путеводителями.

№ шага	Последовательность действий	Результат выполнения действий
1	Определим непрерывна ли функция в данной точке	$\lim\limits_{x \to +0} x - 4 = -4$ и $\lim\limits_{x \to -0} x^2 - 4 = -4$, Функция непрерывна в точке x=0.
2	Находим *левостороннюю производную* в данной точке: $f'_-(x_0)$	$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = (0 + \Delta x)^2 - 4 - (0^2 - 4) = \Delta x^2 - 4 + 4 = \Delta x^2$ $f'_-(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x) = 0$
3	Находим *правостороннюю производную* в данной точке: $f'_+(x_0)$.	$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = (0 + \Delta x) - 4 - (0 - 4) = \Delta x - 4 + 4 = \Delta x$ $f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$
4	Приравниваем производные, делаем вывод	$f'_-(0) \neq f'_+(0)$ $0 \neq 1$ Односторонние производные различны, значит функция не дифференцируема
5	Записываем ответ	функция не дифференцируема в точке x_0 =0

4.Проверка знаний.

Учитель предлагает учащимся с помощью карточек самостоятельно решить следующее задание:

Воспользовавшись определением, найти производную функции $y = \begin{cases} 3x, & \text{если } x \geq 0, \\ -2x + 3, & \text{если } x < 0; \end{cases}$ в точке $x_0 = 0$ или доказать, что она не существует.

Ответ: Пределы разные, значит производная не существует.

Учащиеся выполняют задание и делают взаимопроверку.

5.Подведение итогов и рефлексия.

Учитель подводит итог занятия и задает вопросы учащимся:

Что называется производной в точке?

Сформулируйте физический смысл производной?

Геометрический смысл? Когда существует производная?

Какой момент был самым интересным на уроке?

Какой был самым трудным?

Учащиеся отвечают на вопросы учителя.

Домашнее задание: Дома я попрошу вас закрепить изученное на уроке и решить пример, аналогичный самостоятельной работе.

Задание: Воспользовавшись определением, найти производную функции $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 1, \\ 2x - 1, & \text{если } x > 1; \end{cases}$ в точке $x_0 = 1$ или доказать, что она не существует.

Учащиеся записывают задание в тетрадь.

Учитель благодарит за работу на уроке!

Конспект занятия №2

Тема: «Вычисление производной»

Тип урока: урок систематизации знаний.

Цели урока:

Обучающие: закрепить знания, умения, навыки учащихся по теме «Производная, вычисление производной»; повторить физический и геометрический смысл производной; проверить умения учащихся применять формулы и правила вычисления производных; показать с помощью контрпримеров ограниченность применимости некоторых правил.

Развивающие: развивать мыслительную деятельность учащихся, способность работать по алгоритму, способность самооценки и взаимооценки; формировать умения чётко и ясно излагать свои мысли.

Воспитательные: воспитывать умение работать с имеющейся информацией, умение слушать товарищей, воспитывать уважение к предмету.

План урока:

1. Организационный момент (2 минуты).
2. Актуализация знаний (10 минут).
3. Решение задач (20 минут)
4. Самостоятельная работа (10 минут)
5. Рефлексия (3 минуты)

Ход урока:

1.Организационный момент.

Приветствие обучающихся, проверка готовности к уроку.

Учащиеся приветствуют учителя, настраиваются на работу.

2. Актуализация знаний.

Учитель подводит учащихся к озвучиванию темы занятия и целеполаганию, через проверку домашнего задания.

Ученик выходит к доске объясняет и записывает решенное задание. Остальные проверяют.

Задание: Воспользовавшись определением, найти производную функции $y = \begin{cases} x^2, \text{ если x} \le 1, \\ 2\text{x} - 1, \text{если x} > 1; \end{cases}$ в точке $\text{x}_0 = 1$ или доказать, что она не существует.

Решение: Аргументу можно дать либо положительное, либо отрицательное приращение.

Если $\Delta\text{x} > 0$, то $\Delta\text{y} = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2(x_0 + \Delta x) - 1 - 2x_0 + 1 = 2x_0 + 2\Delta x - 2x_0 = 2\Delta x$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \text{y}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$

Если $\Delta\text{x} < 0$, то $\Delta\text{y} = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - \text{x}_0^2 = \text{x}_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - \text{x}_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \text{y}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2x_0 + \Delta x = 2x_0 = 2$

Так как пределы одинаковые, то производная существует.

Учитель в это время предлагает вспомнить алгоритм нахождения производной по определению.

Вспоминают алгоритм, сравнивают правильно ли он представлен на доске в работе ученика.

Все мы знаем, что для основных простейших функций существуют формулы для нахождения производных, которые, как вы поняли, находились с помощью рассмотренного нами алгоритма. Была замечена закономерность и эта закономерность между одного вида функциями была систематизирована. Сегодня мы будем пользоваться готовым формулами и правилами для нахождения производных функций.

Итак, какова же тема нашего урока? *«Вычисление производных».*

Какую цель на сегодняшний урок вы ставите для себя? Чего хотите достичь?

Отработать умения вычислять производные.

Мы с вами изучали и формулы, и правила вычисления производных. Давайте их повторим.

На доске записаны правила вычисления производных, но кто-то в перемену побаловался и стер некоторые элементы. Предлагаю попробовать их восстановить.

Функция	Производная
kx+m	
	2x
c,c - const	
$\frac{1}{x}, x \neq 0$	
	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $x \rangle o$
x^n, $n \neq o$	
	$\frac{1}{\cos^2 x}; x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$
sin x	
	1
ctg x	
	- sin x
k**f*(x)	
	f'(x)+*g*'(x)

$f(x)*g(x)$	
	$\frac{1}{\cos^2 x}; x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$
$f(kx+m)$	

Активно работает вся группа, учащиеся по очереди выходят к доске заполняют недостающие строчки, корректируют и исправляют ошибки друг друга.

3. Решение задач.

Давайте проверим, как вы умеете применять эти формулы.

Чтобы вы четко понимали где и когда нам нужно применять формулы, будем действовать по алгоритму. В этом нам помогут карточки-путеводители.

Пример 1: Найдите производную функции $f(x) = \sqrt{x} - 5x^2$

№ шага	Последовательность действий	Результат выполнения действий
1	Какая функция дана?	Степенная
2	Как найти производную такой функции?	$y = x^n, y' = nx^{n-1}$
3	Выберем правила дифференцирования	$(u - v)' = u' - v'$
4	Обозначим чему равно u, v	$u = \sqrt{x}, \quad v = 5x^2$
5	Подставим значение в выбранное правило дифференцирования	$f'(x) = (\sqrt{x})' - (5x^2)' = x^{\frac{1}{2}} - 5 * 2x = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - 10x = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 10x$
6	Найти значение функции в точке (если задана)	-
7	Записываем ответ	$\frac{1}{2\sqrt{x}} - 10x$

Пример 2: Аналогично с использованием карточек учащиеся совместно с учителем находят производную функции: $y = \frac{cosx}{x}$ в точке $x_0 = \pi$

№ шага	Последовательность действий	Результат выполнения действий
1	Какая функция дана?	Тригонометрическая
2	Как найти производную такой функции?	$(cosx)' = -sinx$
3	Выберем правила дифференцирования	$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
4	Обозначим чему равно u, v	$u = cosx, v = x$
5	Подставим значение в выбранное правило дифференцирования	$f'(x) = \frac{(cosx)' \cdot x - x' \cdot cosx}{x^2} = \frac{-xsinx - cosx}{x^2}$

6	Найти значение функции в точке (если задана)	$f'(\pi) = \frac{-\pi sin\pi - cos\pi}{\pi^2} = \frac{-\pi \cdot 0 - (-1)}{\pi^2} = \frac{1}{\pi^2}$
7	Записываем ответ	$\frac{1}{\pi^2}$

Мы привыкли считать, что данные правила применимы ко всем функциям. Однако, существуют функции с бесконечными производными, для которых неприменимо правило $(u \pm v)' = u' \pm v'$. Приведем следующий контрпример.

Рассмотрим функции $u = \sqrt[3]{x}$ и $v = -\sqrt[3]{x}$, где в точке x=0 она имеет следующие производные u' (0)=+∞ и v' (0)=-∞,и применим к ним усиленное правило. Получим $(\sqrt[3]{x}+(-\sqrt[3]{x}))'=(\sqrt[3]{x})'+(-\sqrt[3]{x})'$, что при x=0 слева дает нуль (правильный результат), а справа-неопределенность вида (+∞)+(-∞).

Таким образом, данное правило применить нельзя.

В математике приходится рассматривать не только «чистые функции», но и функции от функций. Как называются такие функции? *Сложная функция*

Для того, чтобы найти производную сложной функции нужно найти произведение производной внутренней функции и производной внешней функции. Чтобы запомнить процесс нахождения таких производных, вновь воспользуемся карточками.

Пример 3: Найдите производную сложной функции $f(x) = \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{12}$

№ шага	Последовательность действий	Результат выполнения действий
1	Выделим «внутреннюю» функцию	$y = 4x-\frac{\pi}{6}$
2	Выделим «внешнюю» функцию	g(y)= siny
3	Вычислить производную сложной функции	$f'(x) = \left(\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)\right)' = \left(4x - \frac{\pi}{6}\right)' \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\,(4x - \frac{\pi}{6})$
4	Найти значение производной в точке(если задана)	$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 4\cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\right) = 4cos\frac{\pi}{6} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

5	Записываем ответ	$2\sqrt{3}$

Необходимо запомнить, что производная в физическом смысле выражает что?

Скорость изменения функции

Да, то есть скорость изменения y относительно x и если нас просят найти скорость протекания какого-либо процесса в момент времени, то нужно найти производную этой функции в данной точке. Воспользуемся карточками - консультантами.

Пример 4: Найдите скорость изменения функции $f(x) = \frac{1}{(6x^2-5)^4}$, в точке x=1

№ шага	Последовательность действий	Результат выполнения действий
1	Выделим «внутреннюю» функцию	y = $6x^2 - 5$
2	Выделим «внешнюю» функцию	g(y)= y^{-4}
3	Вычислить производную сложной функции	$f'(x) = ((6x^2-5)^{-4})' = -4(6x^2-5)^{-5}(6x^2-5)' = \frac{-48x}{(6x^2-5)^5}$
4	Найти значение производной в точке(если задана)	$f'(1) = \frac{-48 \cdot 1}{(6 \cdot 1^2 - 5)^5} = \frac{-48}{1^5} = -48$
5	Записываем ответ	-48

Пример 5: При каких значениях аргумента скорость изменения функции $f(x) = \frac{2}{3}sin3x$ равна скорости изменения функции $g(x) = cos2x$

№ шага	Последовательность действий	Результат выполнения действий
1	Находим производную от первой функции	$f'(x) = \left(\frac{2}{3}sin3x\right)' = \frac{2}{3} \cdot 3cos3x = 2cos3x$
2	Находим производную от второй функции	$g'(x) = (cos2x)' = -2sin2x$
3	Приравниваем полученные производные и решаем уравнение	$2cos3x = -2sin2x$ $cos3x = -sin2x$ $\cos 3x = \cos\left(-2x - \frac{\pi}{2}\right)$ $3x = \frac{3\pi}{2} - 2x + 2\pi n, n\epsilon Z$ или $3x = -\frac{3\pi}{2} + 2x + 2\pi k, k\epsilon Z$ $5x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z$ или $x = -\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z$ $x = \frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, n\epsilon Z$

4	Записываем ответ	$x_1 = -\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z,$ $x_2 = \frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, n\epsilon Z$

На прошлом занятии мы выявили, если к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой x=a можно провести касательную, непараллельную оси ординат, то производная является чем?

Угловым коэффициентом касательной

Да, в этом заключается геометрический смысл производной, то есть если встречаются такие задания, то мы точно знаем, что нам необходимо найти производную.

Пример 6: Найдите тангенс угла между касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{3\sin x} + \frac{x^2}{\pi} + xsin\frac{\pi}{6}$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{6}$

№ шага	Последовательность действий	Результат выполнения действий
1	Сумма каких функций представлена?	Сложная, степенная, тригонометрическая
2	Определяем формулы, необходимые для вычисления производной	$f\big(g(x)\big)' = \big(g(x)\big)'\big(f(g)\big)'$ $sinx = cosx$ $(y^n)' = ny^{n-1}$
3	Выберем правила дифференцирования	$(u+v)' = u' + v'$, $(uv)' = u'v + uv'$
4	Вычисляем значение производной	$f'(x) = \big(\sqrt{3sinx}\big)' + \left(\frac{x^2}{\pi}\right) + \left(xsin\frac{\pi}{6}\right)' = (3sinx)' \cdot \frac{1}{2\sqrt{3sinx}} + \frac{2x}{\pi} + sin\frac{\pi}{6} = \frac{3cosx}{2\sqrt{3sinx}} + \frac{2x}{\pi} + sin\frac{\pi}{6}$
5	Найти значение производной в точке(если задана)	$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3cos\frac{\pi}{6}}{2\sqrt{3sin\frac{\pi}{6}}} + \frac{2\frac{\pi}{6}}{\pi} + sin\frac{\pi}{6} = \frac{3\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{9\sqrt{2}+10}{12}$
6	Записываем ответ	$\frac{9\sqrt{2}+10}{12}$

4. Этап проверки знаний. Самостоятельная работа.

Учитель предлагает учащимся задания для самостоятельной работы.

Тест-прогноз

Ф.И. ______________________________

ВАРИАНТ 1

1. Производная функции $f(x)=\frac{1}{5}x^5-4x^3+8$ равна:

а) $\frac{1}{5}x^4-4x^2$; б) x^4-12x^2; в) x^5-4x;
г) x^6-12x^4+8x.

2. Производная функции $y=x\cos x+x^2\sin x$ в точке $x_0=\frac{\pi}{2}$ равна:

а) $1-\pi^2$; б) π; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\pi$.

3. Производная функции $y=\frac{x^2+1}{x-1}$ в точке $x_0=-1$ равна:

а) 0,5; б) 1; в) $-0{,}5$; г) -1.

Тест-прогноз

Ф.И. ______________________________

ВАРИАНТ 2

1. Производная функции $f(x)=\frac{1}{4}x^4-3x^2+5$ равна:

а) $\frac{1}{4}x^3$; б) x^4-3x^2; в) x^3-6x; г) x^5-6x^3+5x

2. Производная функции $y=x^2\cos x-\sin x$ в точке $x_0=\pi$ равна:

а) $1-\pi^2$; б) π; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\pi$

3. Производная функции $y=\frac{x^2-1}{x+1}$ в точке $x_0=1$ равна:

а) 0,5; б) 1; в) $-0{,}5$; г) -1.

Учащиеся самостоятельно решают задания в тетрадях и обводят правильный вариант ответа в тесте. По окончанию данного задания карточки сдаются учителю на проверку.

Ответы теста:

	1	2	3
1 вариант	б	в	а
2 вариант	в	г	б

5.Подведение итогов урока. Рефлексия.

Учитель анализирует достижение цели занятия, успешность работы учащихся.

Организует рефлексию:

- Ребята, понравился ли вам урок?
- Какие вопросы вызвали у вас затруднения?
- Что больше всего понравилось на сегодняшнем уроке?

Обучающиеся, определяют наиболее интересный этап урока; оценивают степень достижения цели.

Учитель благодарит за урок.

Конспект Занятие № 3

Тема: «Возрастание и убывание функции. Экстремумы»

Тип урока: комбинированный

Цели урока:

Обучающая- закрепить и совершенствовать имеющиеся знания по данной теме, рассмотреть систему задач на исследование функции с использованием производной, разобрать необходимое условие точек экстремума, привести контрпримеры.

Развивающая- развивать пространственное мышление, умение планировать, мыслить логически и по аналогии.

Воспитательная – формировать интерес к предмету, мотивации учения, обще трудовые умения в условиях наибольшей ответственности и ограниченности во времени.

План занятия:

6. Организационный момент (1 минуты)
7. Актуализация знаний (7 мин.)
8. Решение задач (25 мин.)
9. Проверка знаний (10 мин)
10. Подведение итогов и рефлексия (2 мин)

Ход урока:

1. **Организационный момент.**

Учитель приветствует учащихся, сообщает тему занятия, проверяет готовность класса к уроку.

Учащиеся приветствуют учителя, настраиваются на работу.

2. **Актуализация знаний.**

Мы знаем, что в геометрическом смысле производная это?

Угловой коэффициент касательной

Для того, чтобы мы смогли сегодня плодотворно поработать нам необходимо вспомнить ряд свойств и определений.

Если касательная к графику функции образует с осью x острый угол, то есть возрастает, то что скажем об угловом коэффициенте?

Он будет положителен, а значит производная в точке касания будет положительна.

Если касательная к графику функции образует с осью х тупой угол, то есть убывает?

Значит угловой коэффициент отрицательный и соответственно производная отрицательна в точке касания.

Если касательная к графику функции параллельна оси х?

Угловой коэффициент равен 0, а значит и производная равна 0.

Как называется точка, в которой значение функции больше значений вблизи этой точки? *Точка максимума*

Как называется точка, в которой значение функции меньше значений вблизи этой точки? *Точка минимума*

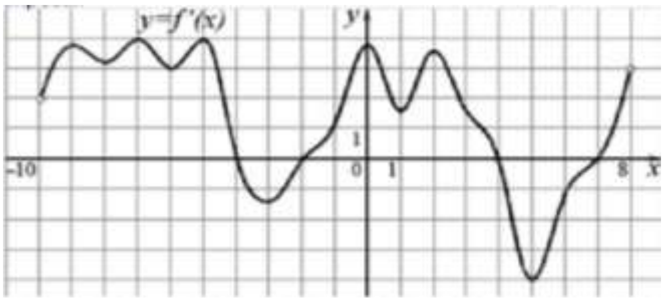
Учитель предлагает по графику функции y=f’’(x) ответить на следующие вопросы:

1) Сколько точек максимума имеет эта функция?

2) Назовите точки минимума функции

3) Сколько промежутков возрастания у этой функции

4) Назовите длину большего промежутка убывания этой функции.



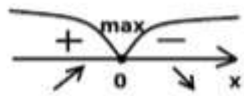
Учащиеся по графику функции, представленному на доске, отвечают на вопросы.

3.Решение задач

С помощью карточек-путеводителей давайте вспомним алгоритм нахождения промежутков монотонности.

Пример1: Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = \frac{-3x^2}{x^2+4}$

№ шага	Последовательность действий	Результат выполнения действий

1	Находим область определения функции.	$D(f): x^2+4\neq 0$ $x^2\neq -4$-верно $D(f)=R$
2	Находим производную функции.	$f'(x) = \frac{(-3x^2)'(x^2+4)-(-3x^2)(x^2+4)'}{(x^2+4)^2} = \frac{-6x^3-24x+6x^3}{(x^2+4)^2} = \frac{-24x}{(x^2+4)^2}$
3	Находим точки пересечения графика функции с осью Ох.	$-24x=0$ x=0
4	Отмечаем точки на числовой прямой.	
5	Проверяем знак функции на каждом промежутке.	$f'(x)\ \leq 0$ на [0;+∞) $f'(x)\ \geq 0$ на (-∞; 0]
6	Делаем вывод.	Функция убывает на [0;+∞) Функция возрастает на (-∞; 0]

Всем нам известна теорема: Если функция y=f(x) имеет экстремум в точке $x=x_0$, то в этой точке производная функции либо равна 0, либо не существует.

Как называются точки, в которых производная обращается в нуль?

Стационарными

А точки, в которых производная не существует?

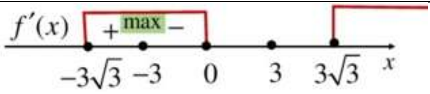
Критическими

Помним, что слева от точки максимума функция возрастает, справа убывает. А если это точка минимума?

Слева от точки минимума функция убывает, справа возрастает.

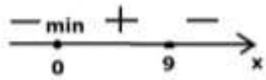
Пример 2: Найдите точки экстремума функции $f(x)=\sqrt{x^3-27x}$ и определите их характер

№ шага	Последовательность действий	Результат выполнения действий
1	Находим область определения функции.	$D(f): x^3-27x\geq 0$ $x(x^2-27)\geq 0$ $x(x-3\sqrt{3})(x+3\sqrt{3})\geq 0$ $x\in[-3\sqrt{3};0]\cup[3\sqrt{3};+\infty)$
2	Находим производную функции.	$f'(x)=\left(\sqrt{x^3-27x}\right)' = \frac{3x^2-27}{2\sqrt{x^3-27x}}$
3	Находим область определения производной функции	$D(f'): x^3-27x>0$ $x\in(-3\sqrt{3};0)\cup(3\sqrt{3};+\infty)$

4	Находим точки пересечения графика функции с осью Ox.	$3x^2-27=0$ $x=-3$ или x = 3
5	Отмечаем точки на числовой прямой.	
6	Проверяем знак функции на каждом промежутке.	$f'(x)\geq 0$ на $\left[-3\sqrt{3};3\right]$ $f'(x)\leq 0$ на $[3;0]$ x = -3 – точка максимума
7	Делаем вывод.	x = -3 – точка максимума

С нахождением точек экстремума связано много разных процессов, решим следующее задание.

Пример 3: Количество вещества, участвующего в реакции, меняется по закону v(t)=$0{,}25t^4-6t^3+40{,}5t^2$. В какой момент времени скорость реакции будет минимальной.

№ шага	Последовательность действий	Результат выполнения действий
1	Находим область определения функции.	$D(f)=R$
2	Находим производную функции.	$f'(x)=(0{,}25t^4-6t^3+40{,}5t^2)'$ $=t^3-18t^2+81t$
3	Находим область определения производной функции	$D(f')=R$
4	Находим точки пересечения графика функции с осью Ox.	$t^3-18t^2+45t=0$ $t(t^2-18t+45)=0$ $t_1=0$ $t_2=9$
5	Отмечаем точки на числовой прямой.	
6	Проверяем знак функции на каждом промежутке.	$f'(t)\ \leq 0$ на (-∞; 0] ∪ [9; +∞) $f'(t)\ \geq 0$ на [0; 9] t=0- точка минимума
7	Делаем вывод.	Скорость реакции будет минимальной в момент времени t=0

Вернемся к предыдущей теореме, в которой говорится, что если в точке x функция имеет экстремум, то эта точка стационарная или критическая. Возникает вопрос: Верна ли обратная теорема? Сформулируйте её

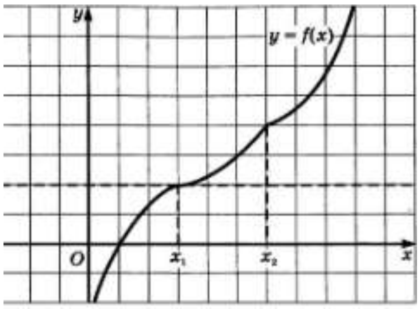
Если в точке производная равна 0 либо не существует, то эта точка является точкой экстремума.

Как обосновать ответ «нет» или «не является? – Достаточно привести контрпример.

Как обосновать ответ «да» или «Является»? – Достаточно убедиться в том, утверждение, обратное исходному, истинно.

Давайте выясним этот момент.

Посмотрите на график функции на доске. Можете назвать точки экстремума данной функции? (*нет*)



А стационарную точку, в какой точке производная равна 0? Как вы это определили? (*В точке* x_1 *производная равна 0, касательная параллельна оси* x)

А критическая точка существует? (*да, в точке* x_2 *производная не существует*)

Вы увидели, что у этой возрастающей функции существуют точки, в которых производная обращается в нуль и не существует, но они не являются точками экстремума. Таким образом мы привели с вами контрпример, и тем самым опровергли данное утверждение. И можем сделать вывод:

Для того, чтобы функция имела экстремум в точке, необходимо, чтобы ее производная либо равнялась нулю, либо не существовала. (т.е.справедлива прямая теорема).

Но это условие не является достаточным, поскольку мы убедились в том, что не всегда существование критической или стационарной точки свидетельствует о наличии экстремума в точке (обратная теорема неверна).

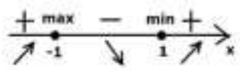
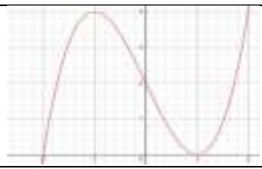
Пример 4: Докажите, что функция $\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x - 12$ не имеет ни точек максимума, ни точек минимума.

№ шага	Последовательность действий	Результат выполнения действий

1	Находим область определения функции.	$D(f) = R$
2	Находим производную функции.	$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x - 12\right)' = x^2 + 4x + 4$
3	Находим область определения производной функции	$D(f') = R$
4	Находим точки пересечения графика функции с осью Ох.	$x^2 + 4x + 4 = 0$ $D = 16 - 16 = 0$ $x = \frac{-4}{2} = -2$
5	Отмечаем точки на числовой прямой.	
6	Проверяем знак функции на каждом промежутке. Делаем вывод	Функция всюду является возрастающей, следовательно точек экстремума нет.
7	Записываем ответ	Функция не имеет ни максимума, ни минимума

Закрепим полученные знания на сегодняшнем занятии на следующем примере, воспользуемся карточками-путеводителями.

Пример 5: Исследуйте функцию $f(x) = (x-1)^2(x+2)$ на монотонность и экстремумы и постройте ее график.

№ шага	Последовательность действий	Результат выполнения действий
1	Находим область определения функции.	$D(f) = R$
2	Находим производную функции.	$f'(x) = ((x-1)^2(x+2))' = 2(x-1)(x-1)'(x+2) + (x+2)'(x-1)^2 = (2x-2)(x+2) + (x-1)^2 = 2x^2 + 2x - 4 + x^2 - 2x + 1 = 3x^2 - 3$
3	Находим область определения производной функции	$D(f') = R$
4	Находим точки пересечения графика функции с осью Ох.	$3x^2 - 3 = 0$ $x = \pm 1$
5	Отмечаем точки на числовой прямой. Проверяем знак функции на каждом промежутке.	
6	Делаем вывод	$f'(x) \geq 0$ на $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ $f'(x) \leq 0$ на $[-1; 1]$ x $= -1$ – точка максимума, $x = 1$ – точка минимума
7	Строим график функции по точкам	

4.Проверка знаний.

Учитель предлагает учащимся два задания для самостоятельной работы.

Задание 1: Докажите, что функция $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + x$-7 не имеет ни точек максимума, ни точек минимума.

Задание 2: Исследуйте функцию $y = -x^4 + 5x^2 - 4$ на монотонность и экстремумы и постройте ее график

Учащиеся самостоятельно выполняют задания и затем совместно с учителем делают проверку.

5.Подведение итогов. Рефлексия.

Учитель подводит итоги уроки, сообщает о предстоящей контрольной работе. Задает вопросы:

Назовите алгоритм отыскания точек экстремума функции? Когда экстремум в точке не существует?

Что нового узнали на уроке? Какой момент урока понравился больше всего? Было ли полезно вам данное занятие?

Ответы учащихся

Учитель благодарит за работу на занятии!

Приложение 2

Контрольная работа № 1 по теме «Производная» и ее решение

Инструкция по выполнению

На выполнение контрольной работы по математике на тему «Производная функции» отводится 45 минут. Работа состоит из 6 заданий по данной теме, предполагающих подробное решение с ответом. Задания считаются выполненными если, учащийся следовал верному ходу решения и дал правильный ответ.

Вариант №1

Задание 1. Прямолинейное движение точки описывается законом $s(t) = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 2t + 1$. Найдите ее скорость в момент времени *t* = *3*.

Решение: В физическом смысле производная – это скорость изменения функции.

Находим производную функции $s'(t) = \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 2t + 1\right)' = 4\frac{t^3}{4} - 3\frac{t^2}{3} - 2 \cdot 6t + 2 = t^3 - t^2 - 12t + 2$.

Находим значение производной (скорость) в точке (в момент времени) *t* = *3:* $s'(3) = 3^3 - 3^2 - 12 \cdot 3 + 2 = 27 - 9 - 36 + 2 = -16$

Ответ: -16

Задание 2. Воспользовавшись определением, найдите производную функции $y = x^2$.

Решение: Находим приращение функции в точке x_0: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$

Находим разностное отношение:

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$

Выясняем, к какому числу стремится $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, если считать, что Δx стремиться к нулю.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

Предел отношения приращения функции к приращению аргумента и есть производная.

Ответ: $f'(x_0) = 2x_0$

Задание 3. Найдите значение производной функции

$y = 2\sin(2x - \pi)$.

Решение: Находим производную сложной функции.

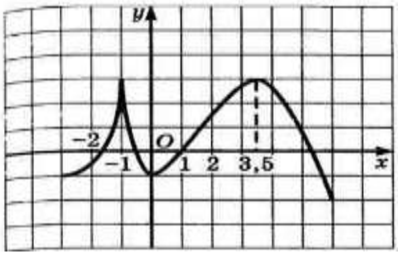
Выделим «внутреннюю» функцию: $(2x - \pi)$.

Выделим «внешнюю» функцию: 2siny

Вычислить производную сложной функции по формуле $f(g(x))' = (g(x))'(f(g))' = (2\sin(2\text{x}-\pi))' = 2(2\text{x}-\pi)'\cos(2\text{x}-\pi) = 4cos(2\text{x}-\pi)$

Ответ: $4cos(2\text{x}-\pi)$

Задание 4. Представлен график функции y=f(x). Укажите точки, в которых производная равна нулю и точки, в которых производная не существует.



Решение: В точках (3,5;0) и (0;-1) производная функции будет равняться нулю, поскольку касательная в этих точках будет параллельна оси абсцисс, а значит ее угловой коэффициент равен 0, а производная в геометрическом смысле и есть угловой коэффициент касательной. В точке (-1;3) производная не существует, поскольку касательной к графику в этой точке провести нельзя.

Ответ: f’(x)=0 в (3,5;0) и (0;-1); f’(x) не существует в (-1;3).

Задание 5. Составьте уравнение касательной к графику функции $\text{y} = \frac{1}{(\text{x}+2)^3}$ в точке с абсциссой x_0=-3.

Решение: Вычислим производную функции: $y' = \left(\frac{1}{(x+2)^3}\right)' = ((x+2)^{-3})' = -3(x+2)^{-3-1}(x+2)' = -3(x+2)^{-4} = \frac{-3}{(x+2)^4}$

Найдем значение функции в точке x_0: $y(-3) = \frac{1}{(-3+2)^3} = -1$

Найдем значение производной в точке x_0: y’(-3)= $\frac{-3}{(-3+2)^4} = -3$

Подставим полученные числа в формулу $\text{y} = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) = -1-3(x+3)$

Приведем уравнение к стандартному виду y=-3x-10

Ответ: y=-3x-10

Задание 6. Исследуйте функцию $f(x) = (x + 2)^2(x - 3)$ на монотонность и экстремумы

Решение: Находим область определения функции: $D(f) = R$

Находим производную функции:

$$f'(x) = ((x + 2)^2(x - 3))' = 2(x + 2)(x + 2)'(x - 3) + (x - 3)'(x + 2)^2$$
$$= (2x + 4)(x - 3) + (x + 2)^2 = 2x^2 - 2x - 12 + x^2 + 4x + 4$$
$$= 3x^2 + 2x - 8$$

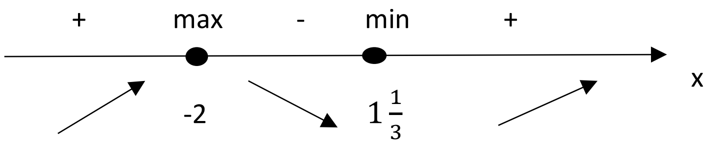
Находим область определения производной функции:

$$D(f') = R$$

Находим точки пересечения графика функции с осью Ox:

$$3x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$D = 100$$
$$x_1 = \frac{-12}{6} = -2, x_2 = \frac{8}{6} = 1\frac{1}{3}$$

Отмечаем точки на числовой прямой. Проверяем знак функции на каждом промежутке.



Делаем вывод:

$$f'(x) \geq 0 \text{ на } (-\infty; -2] \cup [1\frac{1}{3}; +\infty)$$
$$f'(x) \leq 0 \text{ на } \left[-2; 1\frac{1}{3}\right]$$
$$x = -2 - \text{точка максимума,}$$
$$x = 1\frac{1}{3} - \text{точка минимума}$$

Контрольная работа № 2 по теме «Производная» и ее решение

Инструкция по выполнению

На выполнение контрольной работы по математике на тему «Производная функции» отводится 45 минут. Работа состоит из 5 заданий по данной теме, предполагающих подробное решение с ответом. Задания считаются выполненными если, учащийся следовал верному ходу решения и дал правильный ответ.

Вариант №1

Задание 1. Вычислите скорость изменения функции

$y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$, в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

Решение: В физическом смысле производная – это скорость изменения функции.

Находим производную функции $y' = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)\right)' = -\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)' sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 2sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$.

Находим значение производной (скорость) в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$: $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$

Ответ: $-\sqrt{3}$

Задание 2. В какой точке графика функции $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x - 7$ касательная параллельна прямой $y = x - 3$.

Решение: Вычислим производную функции: $f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x - 7\right)' = x^2 - 2x + 2$

Угловой коэффициент прямой: $y' = (x - 3)' = 1$

Приравниваем угловые коэффициенты: $x^2 - 2x + 2 = 1, x^2 - 2x + 1 = 0, x = 1$

Из уравнения данной функции находим ординату точки касания: $y = \frac{1^3}{3} - 1^2 + 2 \cdot 1 - 7 = \frac{1}{3} - 6 = -5\frac{2}{3}$

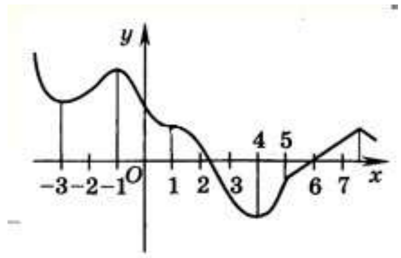
Ответ: $(1; -5\frac{2}{3})$

Задание 3. По заданным графика функции y= f(x) укажите:

А) критические точки

Б) стационарные точки

В) точки экстремума



Решение: а) точки, в которых производной не существует(критические):5, 8

Б) точки, в которых производная равна 0(стационарные):-3,-1,1,4

В) точки экстремума: -3,-1,4,8

Задание 4. Исследуйте функцию $y = 5x^3 - 3x^5$ на монотонность и экстремумы и постройте ее график.

Решение: Находим область определения функции: $D(f) = R$

Находим производную функции:

$$y'(x) = (5x^3 - 3x^5)' = 15x^2 - 15x^4$$

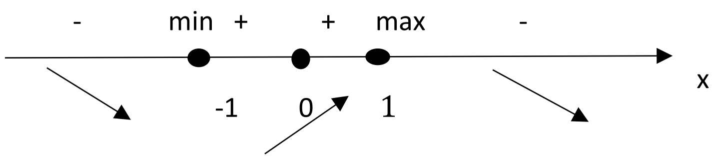
Находим область определения производной функции:

$$D(f') = R$$

Находим точки пересечения графика функции с осью Ox:

$$15x^2 - 15x^4 = 0, \qquad 15x^2(1 - x^2) = 0, \qquad x = 0, \qquad x = \pm 1$$

Отмечаем точки на числовой прямой. Проверяем знак функции на каждом промежутке.



Делаем вывод:

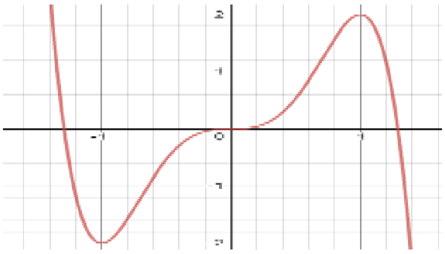
$$f'(x) \geq 0 \text{ на } [-1; 0] \cup [0; 1], 0 - \text{не точка экстремума}$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ на } (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$

$$x = 1 - \text{точка максимума},$$

$$x = -1 - \text{точка минимума}$$

Строим график функции по точкам:



Задание 5. Воспользовавшись определением, найдите производную функции $y = \begin{cases} -4x + 2, & \text{если } x \geq 3 \\ 2x - 4, & \text{если } x < 3 \end{cases}$ в точке x_0=3 или докажите, что она не существует.

Решение: Определим непрерывна ли функция в данной точке: $\lim\limits_{x \to +3} -4x + 2 = -10$ и $\lim\limits_{x \to -3} 2x - 4 = -10$, Функция непрерывна в точке x=3.

Проверим дифференцируема ли она в этой точке. Находим *левосторонную производную* в данной точке: $f'_{-}(x_0)$:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(-3 + \Delta x) - f(-3)$$
$$= 2(-3 + \Delta x) - 4 - (2(-3) - 4) = -6 + 2\Delta x - 4 + 6 + 4$$
$$= 2\Delta x$$

$$f'_{-3} = \lim_{\Delta x \to -3} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -3} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$$

Находим *правостороннюю производную* в данной точке: $f'_{+}(x_0)$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(3 + \Delta x) - f(3)$$
$$= -4(3 + \Delta x) + 2 - (-4 \cdot 3 + 2) = -12 - 4\Delta x + 2 + 12 - 2$$
$$= -4\Delta x$$

$$f'_{+3} = \lim_{\Delta x \to +3} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +3} \frac{-4\Delta x}{\Delta x} = -4$$

Приравниваем производные, делаем вывод: $f'_{-3} \neq f'_{+3}, \;\; 2 \neq -4$

Односторонние производные различны, значит функция не дифференцируема.

Ответ: Функция не дифференцируема в точке x_0 =3