МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

Физико-математический факультет
Кафедра математики и методики обучения математике

«ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНТРПРИМЕРОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ПРЕДЕЛОВ»

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05 Педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»

Проверка на объем заимствований:
82,24 % авторского текста

Выполнил:
Студент группы ОФ-513/086-5-1
Кривоносова Ольга Олеговна

Работа рекомендована к защите
«29» марта 2019 г.
И.о. зав. кафедрой МиМОМ
__________ Шумакова Е.О.

Научный руководитель:
Канд. пед. наук, доцент кафедры ММОМ
Коржакова Светлана Васильевна

Челябинск
2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В повседневной жизни мы часто встречаем выражения «Сила учит, примеры влекут», «Ворчанием наскучишь, примером научишь», «Пример — лучший учитель». Однако эти выражения и поговорки обладают не только бытовым, житейским смыслом. Слово «пример» является однокоренным со словами «мера», «мерить», «измерить», но не только поэтому математики используют примеры с древнейших времен. Пример является помощником в обучении: он способен проиллюстрировать математическое выражение, уяснить его смысл, подтвердить правильность утверждения. Однако роль контрпримера при изучении математики не менее важна. Контрпример обладает доказательной силой, с его помощью можно опровергать ложные утверждения. Контрпримеры демонстрируют ограниченность действия определения или правила и опровергают ошибочные утверждения, полученные отбрасыванием отдельных предположений исходного утверждения, а также показывает только достаточность или только необходимость математического предложения.

Актуальность исследования. Тема «Последовательности», изучаемая в 9 классах имеет большое значение, особенно при изучении прогрессий и начала анализа в 10-11 классах, в частности пределов функции и последовательности. Предел – это опорное понятие при изучении дифференциального и интегрального исчисления. Российский педагог, профессор МГПУ. Мордкович А. Г. относит понятие предела к основным понятиям языка, на котором говорит сама природа, называя такие понятия золотым фондом общечеловеческой природы[23].

Кроме того нельзя не отметить, что рассматриваемые темы изучаются также и в других областях школьной программы. Так, например, предел (последовательности и функции), как основное понятие математического анализа, является неотъемлемой составляющей в изучении механики из школьного курса физики. Поскольку физическое ускорение тела определяется как производная скорости движения этого тела, то, используя определение производной через предел, имеем, что ускорение – это предел отношения изменения скорости к интервалу времени, когда этот интервал стремится к нулю. Поэтому становится очевидным, что изучение данных разделов математики является необходимым, и уровень этого изучения должен быть достаточным.

Однако из-за ряда причин учителя вынуждены давать учебный материал не в полном объеме, уделяя больше внимания лишь определенным темам и разделам. Нередко учителю просто не хватает времени, чтобы насытить урок контрпримерами, выяснить с его помощью границы действия и применения понятий, правил и теорем, объяснить учащимся принцип его применения. Данная выпускная квалификационная работа призвана подчеркнуть значимость контрпримеров в изучение теории последовательностей и начала математического анализа в школе, а так же показать, как применять на уроках математики контрпример, опровергать и доказывать различные математические утверждения.

Объектом исследования является курс введения в математический анализ.

Предметом исследования является использование контрпримеров на уроке математики при обучении школьников 9-11 классов последовательностям, непрерывным функциям и их пределам в общеобразовательных школах и школах с углубленным изучением математики.

Цель работы: выявить и исследовать контрпримеры в курсе введения математического анализа, и показать, где они применимы в школьном курсе математики в старших классах. Для достижения поставленной цели необходимо решение следующих задач:

1) Проанализировать ВУЗовские и школьные учебники, по курсу введения в математический анализ с целью изучить данный раздел;
2) Осуществить выделение и подбор контрпримеров в исследуемой теме;

3) Исследовать выявленные контрпримеры;

4) Составить сравнительную таблицу по изучению данного раздела в средней и старшей школе на основе анализа школьных учебников;

5) Выявить возможности применения контрпримеров при изучении данного раздела в старшей школе;

6) Разработать факультативный курс по теме Предел последовательности и функции для обучающихся 11 класса;

7) Провести экспериментальные исследования разработанного факультативного курса;

Гипотеза: предполагается, что применение контрпримеров в старшей школе при изучении введения в математический анализ повысит качество знания и углубит его содержание, а также позволит учащимся уяснить смысл и важность формулировок математических утверждений и определений.

Методы исследования: для написания данной выпускной квалификационной работы были использованы следующие методы исследования: анализ литературы, сравнение, обобщение, теоретический анализ и синтез.

Теоретическая значимость данной выпускной квалификационной работы заключается в составлении анализа учебных пособий, применяемых в общеобразовательных организациях и нахождения в рассматриваемой учебной литературе контрпримеров по исследуемой теме.

Практическая значимость состоит в возможности использовать результаты данной выпускной квалификационной работы при подготовки факультативных курсов для старших школьников, а также проведения занятий по математическому анализу в СУЗах и ВУЗах.

В процессе выполнения выпускной квалификационной работы, была определена ее структура: введение, теоретическая и практическая части, заключение, список литературы и приложение.

В первой главе рассматриваются следующие темы математического анализа: предел последовательности и функции, теоремы о пределах, непрерывность функции, теоремы о непрерывных функциях. В каждой из тем приводятся основные понятия, теоремы и свойства, а затем контрпримеры, показывающие ограниченность применения рассматриваемых математических предложений.

Вторая глава включает в себя анализ школьных учебников по исследуемому разделу, разработку и апробацию факультативного курса на тему «Предел последовательности и функции».

В приложении представлены два конспекта уроков, проведенных в рамках факультативного курса, и варианты диагностических работ.

ГЛАВА I. КОНТРПРИМЕРЫ В КУРСЕ ВВЕДЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

§ 1 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Изучение любой дисциплины начинается с формулировки основного определения. Приведем определение предела последовательности. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для всех x_n, $n>N$, выполняется неравенство $|x_n - a|<\varepsilon$

Величина $|x_n - a|$ характеризует расстояния от точки x_n до фиксированной точки *a, таким образом,* допуская различные «способы» стремления членов последовательности $\{x_n\}$ к своему пределу.

Рассмотрим последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, $\{u_n\}$: $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{3}{n}$, $z_n = -\frac{1}{n}$, $u_n = -\frac{3}{n}$, n=1,2,…, предел каждой из последовательностей равен нулю. Однако, члены данных последовательностей стремятся к нулю по-разному. Видно, что переменные $x_n = \frac{1}{n}$ и $y_n = \frac{3}{n}$ неотрицательны, а переменные $z_n = -\frac{1}{n}$ и $u_n = -\frac{3}{n}$ остаются меньше нуля, при этом переменные x_n и z_n стремятся к нулю «быстрей» переменных y_n и u_n . Построим последовательность $\{v_n\}$, чередуя члены последовательностей $\{z_n\}$ и $\{x_n\}$, получим $v_n = \frac{(-1)^n}{n}, n = 1,2,\dots$(рис. 1,*а*) Переменная v_n стремится к нулю, поочередно меняя знак с плюса на минус. Чередуя члены последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, построим последовательность $\{s_n\}$, $s_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$, n=1, 2,… (рис. 1, *б*). Переменная s_n при стремлении к нулю периодически то приближается, то удаляется от нуля. Если чередовать члены последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, $\{u_n\}$, то получим последовательность $\{q_n\}$ (рис. 1, *в*). При стремлении к нулю переменная q_n периодически то приближается, то удаляется от нуля, меняя знак через каждые два члена.

Последовательность $\{ x_n \}$, $x_n = (-1)^n$, не имеет предела (рис. 1, *г*). Предположим, что предел существует и равен некоторому числу *a*. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, а значит и для $0 < \varepsilon < 1$, существует номер N такой, что для всех $n > N$ выполняется $| x_n - a| < \varepsilon$. Отсюда и $| x_{n+1} - a| < \varepsilon$. Следовательно, $|x_{n+1} - x_n| < 2\varepsilon < 2$. Но модуль разности между любыми двумя соседними членами последовательности равен двум. Получаем противоречие, предел не существует.

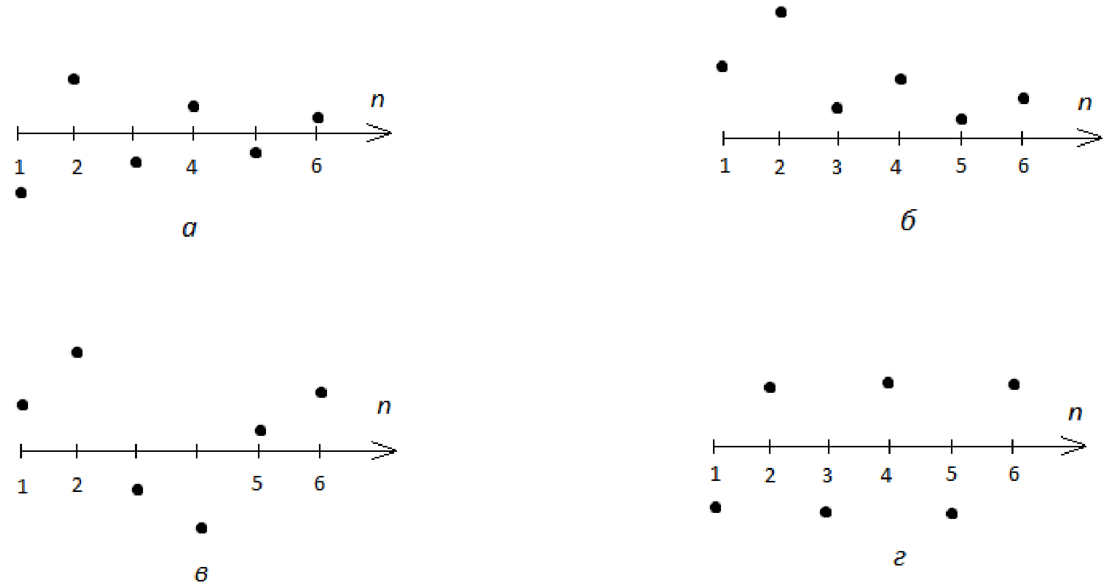


Рис. 1. Изображение членов последовательностей на числовой прямой.

Приведем контрпример, способный опровергнуть обратное утверждение теоремы об ограниченности последовательности, имеющей предел.

Теорема: Последовательность $\{ x_n \}$, имеющая конечный предел, является ограниченной.

Обратное утверждение: ограниченная последовательность имеет предел.

Последовательность $x_n = (-1)^n$, n = 1, 2, ..., ограничена, так как выполняется $| x_n | \le 1$, но не имеет предела, как было доказано ранее.

Некоторые арифметические операции над сходящимися последовательностями приводят к таким же арифметическим операциям над их пределами. Рассмотрим теорему – предельный переход в неравенстве.

Теорема: Если для последовательностей $\{ x_n \}$, $\{ y_n \}$ существует номер N такой, что для всех $n > N$ справедливо неравенство $x_n \geq y_n$, и существуют конечные пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то выполняется $a \geq b$.

Аналогичное утверждение для случая строгих неравенств $x_n > y_n$ и $a > b$ опровергается следующим контрпримером.

Контрпример: Последовательности $\{ x_n \}$ и $\{ y_n \}$, такие, что $x_n > y_n$,, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Пусть $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n+1}$, тогда выполняется при всех n $x_n > y_n$, однако $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Контрпримеры помогают уяснить смысл формулировки математического утверждения, подчеркнуть важность каждого слова в условии теоремы, раскрыть необходимость или достаточность математического суждения. Рассмотрим теорему: Сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей.

Теорема: Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ то последовательность $\{ x_n \}$ называется бесконечно малой. Сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей это также бесконечно малая последовательность.

Приведем контрпример и покажем что требование конечности числа бесконечно малых последовательностей не является необходимым.

Рассмотрим счетное множество бесконечно малых последовательностей, которые заданы в виде $\alpha_k = \frac{1}{n2^k}$, $n = 1, 2, ..., k = 1, 2, ...$, Можем вычислить их сумму, применив формулу для суммы членов бесконечной геометрической прогрессии. Полученная сумма $\beta = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1}{n}$ также является бесконечно малой последовательностью.

Аналогичное применение контрпримера продемонстрируем на теореме о произведении последовательности ограниченной на бесконечно малую последовательность.

Теорема: Произведение $\{ x_n \alpha_n \}$ ограниченной последовательности $\{ x_n \}$ на бесконечно малую последовательность $\{ \alpha_n \}$ есть бесконечно малая последовательность.

Предположение об ограниченности последовательности $\{ x_n \}$ является достаточным, но не является необходимым для бесконечной малости произведения $\{ x_n\alpha_n \}$. Приведем контрпример.

Пусть $x_n = n$ – неограниченная последовательность $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$ - бесконечно малая последовательность. Однако произведение $\{ x_n \}$ на бесконечно малую последовательность $\{ \alpha_n \}$ является последовательностью бесконечно малой, так как $x_n\alpha_n = \frac{1}{n}$.

Однако совсем исключить из утверждения условие об ограниченности последовательности $\{ x_n \}$ нельзя. Рассмотрим контрпример.

Пусть неограниченная $x_n=n^2$ и бесконечно малая $\alpha_n = \frac{1}{n}$ последовательности. Их произведение является бесконечно большой последовательностью, так как $x_n\alpha_n = n$, то есть произведение - неограниченная последовательность.

Теорема о пределе суммы, разности, произведения и отношения последовательностей: Если последовательности $\{ x_n \}$ и $\{ y_n \}$ имеют конечные пределы, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то их сумма, разность, произведение и отношения также имеют конечные пределы (в последнем случае b и y_n ,$n= 1,2, \ldots$, отличны от нуля), и выполняется: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n)=a+b$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n)=a-b$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

Существование конечных пределов последовательностей только достаточно для существования конечных пределов суммы, разности, произведения и отношения этих последовательностей. Рассмотрим расходящиеся последовательности, сумма, разность, произведение и отношение которых сходятся.

Пусть последовательности $\{ x_n \}$ и $\{ y_n \}$имеют общие члены $x_n =(-1)^n$ и $y_n =(-1)^{n+1}$ не имеют пределов. Однако их сумма имеет предел, равный нулю, а

их произведение и частное имеют пределы, равные -1. Заметим, что разность этих последовательностей не имеет предела. Поэтому мы рассмотрим совпадающие последовательности $x_n =(-1)^n$, $y_n =(-1)^n$, и их разность будет иметь предел, равный нулю.

На примере Теоремы Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности) покажем с помощью контрпримера, что условие монотонности ограниченной последовательности в данном утверждении является достаточным, но *не является необходимым* условием сходимости последовательности.

Теорема Вейерштрасса: Если монотонно возрастающая последовательность $\{ x_n \}$ ограничена сверху, т.е. $x_n \leq M$, где M=const, n=1,2,…, то имеет конечный предел, если она не ограничена сверху, то имеет предел, равный $+\infty$. Аналогично имеет предел и монотонно убывающая последовательность $\{ x_n \}$. Этот предел конечен, если она ограничена снизу, иначе ее предел равен $-\infty$.

Рассмотрим немонотонную сходящуюся последовательность

$x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n = 1,2, \ldots$, Эта последовательность ограничена, так как $|x_n| \leq 1$. Кроме того она сходится, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, но не является монотонной.

Теорема (о вложенных отрезках): Имеем бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2. b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$,... таких, что каждый последующий отрезок содержится в предыдущем, при этом $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n)=0$, т.е. длина отрезков стремится к нулю. Тогда концы a_n и b_n отрезков стремятся к общему пределу $c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$, и точка c является единственной общей точкой всех отрезков данной последовательности.

Если в теореме вместо замкнутых промежутков рассмотреть промежутки незамкнутые, тогда получится ложное утверждение, которое можно опровергнуть следующим известным контрпримером.

Рассмотрим бесконечную последовательность вложенных полуинтервалов $(0,1]$, $(0,\frac{1}{2}]$,…,$(0,\frac{1}{n}]$,… Длина этих полуинтервалов стремится к нулю при $n \to \infty$, однако у них нет общей точки.

Теорема (о пределе последовательности): Если последовательность имеет предел a (конечный или нет), то такой же предел имеет любая ее подпоследовательность.

Известно, что сходящаяся последовательности имеет только один предел. Рассмотрим несколько примеров, демонстрирующих множество частичных пределов расходящихся последовательностей.

1. Последовательность 1, 2, 1, 2, ... имеет два частичных предела 1 и 2, соответствующие подпоследовательностям 1, 1,... и 2, 2,... Последовательность 1, 2, 3, 1, 2, 3,... имеет три частичных предела 1, 2, 3. Аналогично можно построить последовательность с любым конечным, заранее заданным множеством частичных пределов.

2. Последовательность 1,1, 2, 1, 2, 3 1, 2, 3, 4,... имеет частичные пределы - все натуральные числа, поскольку для любого натурального m она содержит подпоследовательность m, m, ... По аналогичной схеме строится последовательность 0,1,-1,0,1,-1,2,-2,0,1,-1,2,-2,3,-3,..., для которой частичными пределами являются все целые числа.

3. Приведем такую последовательность, частичные пределы которой есть все числа из отрезка [0,1].

Построим последовательность из конечных десятичных дробей 0,1; 0,2; ...; 0,9; 0,01; 0,02; ...; 0,99; 0,001; 0,002; ...; 0,999; ... которая содержит подпоследовательности, предел которых любое заданное действительное число на отрезке [0, 1]. Рассмотрим это подробней. Данная последовательность состоит из следующих друг за другом серий: десятые доли, сотые доли, тысячные доли и т.д. Рассмотрим произвольное действительное число a, $a \in [0,1]$. В серии с номером m, содержащей числа $\frac{1}{10^m}, \frac{2}{10^m}, \frac{3}{10^m}, \dots, \frac{10^m-1}{10^m}$, очевидно, что найдется некоторое число $\frac{k}{10^m}$, где k$< 10^m$ – натуральное, для которого $\left|a - \frac{k}{10^m}\right| \leq \frac{1}{10^m}$, где равенство выполняется только для a=0 или 1. Заметим также, что каждая последующая серия содержит все числа предыдущей серии. Выписывая из последовательных серий с номерами m, m =1, 2,…, . члены рассматриваемой последовательности, составленной из конечных десятичных дробей, которые отличаются от числа a по абсолютной величине не более чем на $\frac{1}{10^m}$ получим подпоследовательность, сходящуюся к числу a.

4. Последовательность, частичные пределы которой - все действительные числа.

Изложенное выше построение можно несколько обобщить, а именно записать последовательность 0,1; 0,2; ...; 0,9; 0,01; 0,02;...;1,99; 0,001; 0,002; ...;2,999; ..., для которой уже любое неотрицательное действительное число является частичным пределом. От предыдущей последовательности она отличается тем, что первая серия составлена из всех десятых долей, меньших единицы, вторая - из всех сотых долей, меньших двух, третья - из всех тысячных долей, меньших трех, и т.д. Рассмотрим произвольное действительное число a, $a \in [0,+\infty)$. Пусть m_0 - некоторое натуральное число, $m_0 > a$, тогда построение подпоследовательности, сходящейся к действительному числу a, начнем с серии, имеющей номер m_0 (заметим, что и в этом случае каждая последующая серия содержит все числа предыдущей серии). В остальном процедура построения подпоследовательности выполняется дословно аналогично предыдущему случаю.

Наконец, если после каждого члена последовательности вписать член с противоположным знаком, то получим последовательность, которая содержит подпоследовательности, сходящиеся к любому заданному действительному числу a. $a \in (-\infty, +\infty)$.

Теорема Больцано – Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к конечному пределу.

Если отбросить условие ограниченности последовательности, то сходящейся к конечному пределу подпоследовательности, может не быть. Рассмотрим контрпример: неограниченная последовательность, не имеющая конечных частичных пределов. Такой является, например, последовательность -1,2,-3,…,$(-1)^n n$,…

Однако существуют неограниченные последовательности, которые имеют подпоследовательности с конечными пределами. Например, последовательность 1, $\frac{1}{1}$, 2, $\frac{1}{2}$, 3 , $\frac{1}{3}$, ..., Она является неограниченной, но содержит подпоследовательность (из членов с четными номерами $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, ...), которая имеет предел, равный нулю.

Критерий Коши сходимости последовательности. Для существования у последовательности $\{ x_n \}$ конечного предала необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, чтобы неравенство $|x_n - x_{n'}| < \varepsilon$ выполнялось для всех $n > N$, $n' > N$.

Сформулируем более сильное утверждение, потребовав выполнения неравенства $|x_n - x_{n'}| < \varepsilon$ не для всех $n > N$, $n' > N$, а только для тех из них, для которых $|n - n'| \leq m$, где m - произвольное натуральные число. *Контрпример*: расходящаяся последовательность, для которой абсолютная величина разности ее членов, с номерами, отличающимися на константу, стремится к нулю при стремлении их номеров к бесконечности.

Рассмотрим расходящуюся последовательность:

$$\ln 1, \ln 2, \ldots, \ln n, \ldots \tag{1}$$

Пусть $n > n'$ и $n - n' = k \leq m$, где $m = const$, тогда

$$|x_n - x_n'| = \ln n - \ln n' = \ln \frac{n}{n'} = \ln \frac{n' + k}{n'} \tag{2}$$

.

Так как $\lim\limits_{n' \to \infty} \frac{n'+k}{n'} = 1$, то предел правой части равенства (2) при $n' \to \infty$ равен нулю. Отсюда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что $|x_n - x_n'| < \varepsilon$ для всех $n > N$, $n' > N$, $|n - n'| = k \leq m$. Однако последовательность не имеет конечного предела ввиду неограниченного возрастания функции $\ln x$ при $x \to +\infty$.

§2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ, ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ

Определение (предела функции). Рассмотрим X - множество определения функции $f(x)$. X - ограниченное или нет. Пусть точка a - предельная точка множества X , a может не принадлежать X, a - конечное число, или равно $-\infty$, или $+\infty$. Пусть также *A* - некоторое конечное число, или равно $-\infty$, или $+\infty$.

Если *a и A* - конечные числа, то функция *f(x)* имеет предел *A* при стремлении *x* к *a,* если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется также число $\delta > 0$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех $x \in X$, таких, что $0 < |x - a| < \delta$.

Если $a = +\infty$, A — конечное число (или $+\infty$), то функция *f(x)* имеет предел *A* при стремлении *x к* $+\infty$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ $(E > 0)$ найдется такое число $\Delta > 0$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ $(f(x) > E)$ для всех $x \in X$, таких, что $x > \Delta$.

Определения в других случаях конечных и бесконечных значений *a* и *A* формулируются аналогично.

Заметим, что отбрасывание требования $0 < |x - a|$, т.е. $x \neq a$, в определении сужает его область действия. Рассмотрим несколько примеров.

Функции, не определенные в точке x = a, но имеющие предел при x→a.

Следующие замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

потеряли бы смысл, так как функции, стоящие под знаком предела, не определены в точках *x*=0, +∞, 0 соответственно.

Приведем примеры несуществования пределов функций.

Функции, не имеющие пределов в отдельной точке или всюду.

Непосредственно используя определение предела и свойства функций можно показать, например, несуществование предела, $\lim\limits_{x\to a} D(x)$, где $D(x)$ − функция Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x - \text{рациональное число,} \\ 0, \text{если } x - \text{иррациональное число,} \end{cases}$$

a -любое действительное число, или a = +∞, или $a = -\infty$. возьмем значение ε = 0,5. В этом случае $f(x_1)$ - $f(x_2)$ = 1−0=1$> \varepsilon = 0{,}5$, где числа x_1 - рациональное, x_2 - иррациональное, взятые в любой окрестности a.

Если a = +∞ или a = —∞, то под окрестностями a понимаем интервалы (Е, +∞) или (Е, −∞) соответственно, Е > 0. Таким образом, требования определения не выполняются.

Понятие предела функции определяется для одной отдельной точки x = a, конечной или бесконечно удаленной (a = +∞ или a = - ∞), которая является предельной для множества определения X функции $f(x)$. Поэтому адекватно иллюстрируют понятие предела функции примеры, в которых предел существует только в одной точке. Такой пример демонстрирует отличия в «поведении» функции в окрестности упомянутой точки и в окрестностях всех других точек. Приведем такие примеры.

Функция, имеющая предел только в одной точке.

Рассмотрим определенную на всей числовой оси функцию $f(x)=x\left(D(x)\ -\ \frac{1}{2}\right)$ (рис. .2 a), где $D(x)$ — функция Дирихле. На рис. 2, a, график функций изображен условно — пунктиром, так как при рациональных и иррациональных значениях x точки графика лежат на прямых $y=x\,/\,2$ и y = — $x\,/\,2$ соответственно.

Существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$= 0 как предел произведения бесконечно малой функции $f_1(x)=x$ на функцию $f_2(x)$= $D(x)$—$\frac{1}{2}$ — ограниченную, которая принимает только два: значения: $\frac{1}{2}$ — при рациональных x и - $\frac{1}{2}$ - при x иррациональных. В любой точке x_0, отличной от x = 0, функция $f(x)$ не имеет предела, так как в любой окрестности точки x_0 принимает значения как большие $x_0/2$, так и меньшие - $x_0/2$.

Функция, имеющая предел только при $x\to +\infty$.

Функция $f(x) = \frac{1}{x}\left(D(x) - \frac{1}{2}\right)$, $x > 1$, по той же самой причине имеет предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ (рис. 2, 6). Точки графика функции располагаются при рациональных и иррациональных x соответственно на гиперболах $y = \frac{1}{2x}$ и $y = -\frac{1}{2x}$. В любой конечной точке $x_0 > 1$ функция $f(x)$ не имеет предела, так как в любой окрестности точки x_0 принимает значения как большие $\frac{1}{2x_0}$, так и меньшие $-\frac{1}{2x_0}$

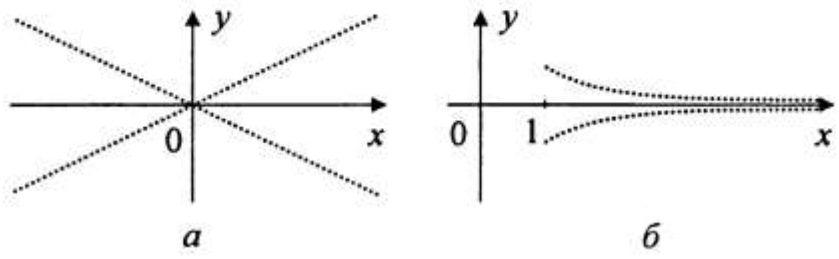


Рис.2. Графики функций $f(x) = x\left(D(x) - \frac{1}{2}\right)$ и $f(x) = \frac{1}{x}\left(D(x) - \frac{1}{2}\right)$

Теорема (об ограниченности функции, имеющей конечный предел). Если функция $f(x)$ имеет конечный предел A при стремлении x к a, то для некоторого $\delta > 0$ и всех значений x: $0 < |x - a| < \delta$ функция будет ограниченной, т.е. найдутся постоянные m и M такие, что $m \le f(x) \le M$.

Рассмотрим контрпример, опровергающий обратное утверждение: Ограниченная функция $y = \sin\frac{1}{x}$ ограничена, так как $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$. Однако, $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ - не существует.

Теорема (Предельный переход в неравенствах). Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на некотором множестве X, имеющем предельную точку a, и для некоторого $\delta > 0$ и всех $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $f(x) \ge g(x)$, и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то и $A \ge B$.

Если в этом утверждении использовать строгие неравенства $f(x)> g(x)$ и $A>B$, то получим неверное утверждение, опровергаемое следующим контрпримером. Функции $f(x)$ и $g(x)$, такие, что выполняется $f(x) > g(x)$, но $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} g(x)$. Пусть $f(x) = |x|$, а $g(x)=x^2$. Тогда для всех x, $0 <|x| < 1$, выполняется $f(x) > g(x)$, однако $\lim_{x\to 0} f(x)= 0$ и $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

Теорема (Сумма конечного числа бесконечно малых функций).Пусть функции $f_1(x), f_2(x),\ldots,f_n(x)$ определены на множестве X, имеющем предельную точку a, и являются бесконечно малыми при $x\to a$, тогда их сумма также бесконечно малая функция при $x\to a$.

Покажем, что требование конечности числа бесконечно малых функций не является необходимым, применив следующий контрпример:

Контрпример: счетное множество бесконечно малых функций, сумма которых есть функция бесконечно малая.

Функции $f_k(x)=\frac{x}{2^k}$, k=1,2,... являются бесконечно малыми при $x\to 0$. Рассмотрим их сумму $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = x\frac{1/2}{1-1/2} = x$, она также является бесконечно малой функцией при $x\to 0$. Заметим, что мы использовали формулу суммы членов бесконечной геометрической прогрессии.

Теорема (Предел суммы, разности, произведения и частного функций). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы в области X с предельной точкой a и при стремлении x к a имеют конечные пределы $\lim_{x\to a} f(x)= A$ и $\lim_{x\to a} g(x) =B$ тогда и функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ также имеют конечные пределы (в случае частного предполагаем, что $B\neq 0$), а именно $A\pm B$, $A*B$, $\frac{A}{B}$

Условие существования конечных пределов $\lim_{x\to a} f(x)=A$ и $\lim_{x\to a} g(x) = B$ функций $f(x)$ и $g(x)$ является достаточным, но не являлся необходимым для существования пределов функций $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$. Приведем контрпримеры.

Контрпример: Функции, не имеющие предела ни в одной точке, сумма, разность, произведение и частное которых имеют пределы в любой точке.

Сумма $D(x)+(-D(x)) = 0$, разность $D(x) - D(x) = 0$, произведение $D(x)D(x + \pi) = 0$, частное $\frac{D(x)+1}{D(x)+1} = 1$ двух функций, каждая из которых не имеет предела ни в одной точке, являются константами, т.е. имеют пределы в любой точке. Следует только пояснить, что в произведении, если аргумент x — иррационален, то $D(x) = 0$, если x — рационален, то $x + \pi$ — иррациональное число, и $D(x + \pi) = 0$.

Теорема (о пределе монотонной функции) Пусть функция $f(x)$ монотонно возрастает (хотя бы нестрого) в области X, имеющей предельную точку a, и число a (конечное или равное $+\infty$) больше всех x. Если при этом функция ограничена сверху: $f(x) \leq M$, для всех $x \in X$, то существует конечный предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$; в противном случае - $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$. Аналогичное утверждение имеет место для монотонно убывающей, ограниченной снизу функции.

Монотонность ограниченной функции является достаточным, но не является необходимым условием, существования ее предела. Рассмотрим несколько контрпримеров.

Контрпример: немонотонная ограниченная функция, имеющая предел.

Функция $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{\pi} < x < 0$, ограничена сверху и снизу (рис. 3) Ни в какой левой полуокрестности точки $x = 0$ она не является монотонной, так как совершает в ней бесконечное число колебаний. Однако существует предел $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = 0$.

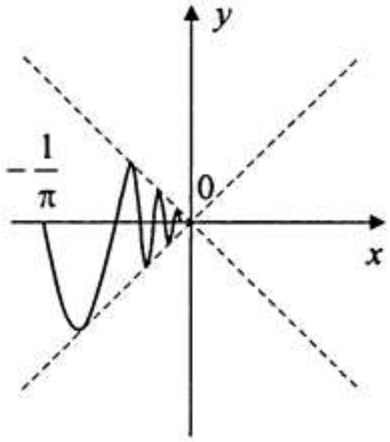


Рис.3. График функции *f(x) = x*$sin\,\frac{1}{x}$

Однако условие монотонности нельзя изъять из теоремы.

Контрпример: немонотонная ограниченная функция, нигде не имеющая предела. Простейший такой пример — функция Дирихле.

§ 3 НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ, ТЕОРЕМЫ О НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЯХ

Определение (непрерывности функции в точке). Пусть функция *f(x)* определена в некотором промежутке X и пусть x_0 — точка этого промежутка. Функция *f(x)* непрерывна в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x_0)$, т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in X$, для которых справедливо неравенство $|x - x_0| < \delta$, выполняется $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Приведем пример функции, которая является непрерывной действительно только в одной точке.

Функция, непрерывная только в одной точке.

Примем $f(x) = xD(x)$, где $D(x)$ - функция Дирихле. Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, $f(0)=0$. Покажем, что в точке $x_0 = 0$ функция $f(x) = xD(x)$, непрерывна. Действительно, $\lim_{x\to 0}\big(xD(x)\big) = 0$, как предел произведении бесконечно малой функции на функцию ограниченную и выполняется $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Заметим, что в любой другой точке $x_1 \neq 0$ функция $f(x)$ разрывна, так как предел $\lim_{x\to x_1} f(x)$ не существует. Это следует из того, что в любой окрестности точки $x_1 \neq 0$ функция $f(x)$ принимает как значения, равные нулю (при иррациональных x), так н значения, большие числа x_1 по абсолютной величине (при рациональных x)[27].

Рассмотрим примеры функций, не отвечающих данному определению, т.е. разрывные функции.

Функции, имеющие точки разрыва.

Функции $y = [x]$ — целая часть числа x (рис. 4, *а*), $y = \{x\}$ — дробная часть числа x (рис. 4, *б*) имеют разрывы первого рода при всех целых значениях x, в каждой точке разрыва они непрерывны справа и разрывны слева.

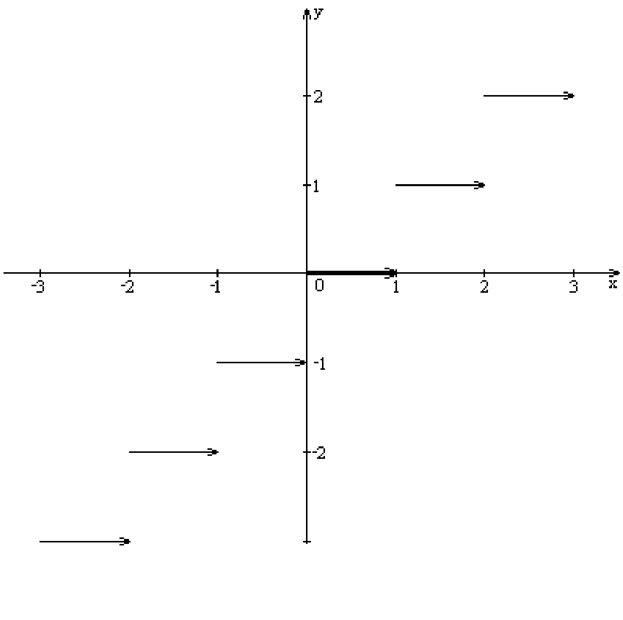


Рис. 4, *а* График $y = [x]$

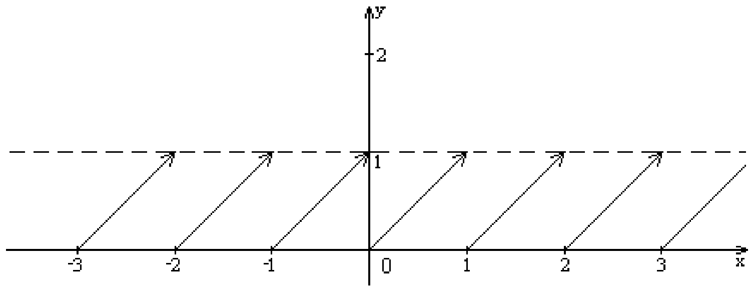


Рис. 4, *б* График $y = \{x\}$

Функция $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{если } x \neq 0, \\ 0, \text{если } x = 0 \end{cases}$ (рис.5, *а*) имеет разрыв второго рода в нуле, так как она неограниченна в любой окрестности нуля, пределы слева и справа в нуле существуют и равны $-\infty$ и $+\infty$ соответственно. Функция y = $\begin{cases} \sin\frac{1}{x}, \text{если } x \neq 0, \\ 0, \text{если } x = 0 \end{cases}$, (рис. 5, б) имеет разрыв второго рода в нуле, так как не существует предел $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$, не существует в нуле также пределы слева и справа. Функция *y=D(x)* в любой точке числовой оси имеет разрыв второго рода, так как для любого значения x_0 не существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$, не существуют также соответствующие пределы слева и справа. Это следует из того, что в любой окрестности любой точки функция *y=D(x)* принимает значения 0 и 1.

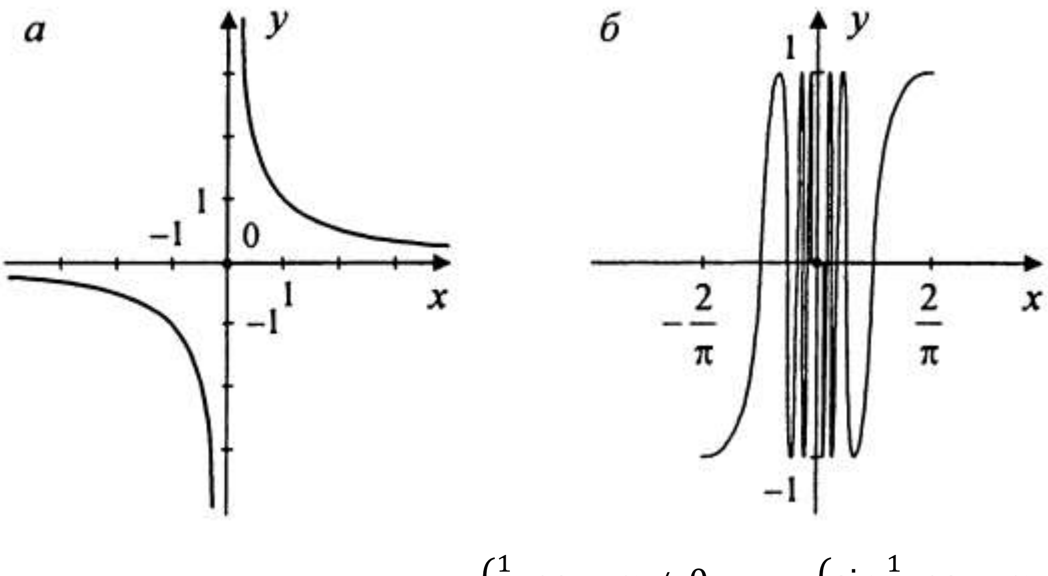


Рис.5 Графики функций $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{если } x \neq 0, \\ 0, \text{если } x = 0 \end{cases}$ и y = $\begin{cases} \sin\frac{1}{x}, \text{если } x \neq 0, \\ 0, \text{если } x = 0 \end{cases}$

Определение (непрерывности функции в точке (в терминах приращений)). Пусть функция $f(x)$ определена в некотором промежутке X, а x_0 - точка этого промежутка. Дадим значению x_0 приращение $\Delta x = x - x_0$, где $x \in X$. Получим приращение функции $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы при стремлении приращения Δx к нулю ее приращение Δy в этой точке также стремилось к нулю.

Иногда возникает заблуждение, что справедливо и альтернативное утверждение: для непрерывности $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы приращение Δx независимой переменной в этой точке стремилось к нулю вместе с приращением Δy функции. Опровергнем это, применив контрпример.

Контрпример: Непрерывная функция такая, что стремлению в данной точке приращения Δy к нулю не соответствует стремление к нулю приращения Δx.

Рассмотрим всюду непрерывную функцию

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{если } x < -1, \\ 0, \text{если } -1 \leq x \leq 1, \\ x - 1, \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Примем $x_0 = 0$, получим значение функции $f(x_0) = 0$. Придадим ему произвольное (не равное нулю) приращение $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Ему соответствует приращение $\Delta x = x - x_0$, такое, что $|\Delta x| > 1$. Очевидно, что при $\Delta y \to 0$ будет выполняться $|\Delta x| \to 1$.

Теорема (об арифметических операциях над непрерывными функциями)[4]. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в промежутке X и обе непрерывны в точке x_0 этого промежутка, тогда в точке x_0 будут непрерывны и функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (в последнем случае $g(x_0) \neq 0$)

Условие непрерывности функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 является достаточным, но не является необходимым для непрерывности в x_0 функций $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$. Приведём контрпримеры.

Приведем примеры всюду разрывные функции, сумма, разность, произведение и частное которых всюду непрерывны. Сумма $D(x)+(-D(x))=0$, разность $D(x)-D(x)=0$, произведение $D(x)D(x+\pi)=0$, частное $\frac{D(x)+1}{D(x)+1} = 1$ двух функций, каждая из которых разрывна в любой точке числовой оси, являются константами, т.е. непрерывны в любой точке.

Теорема (о суперпозиции непрерывных функций). Рассмотрим функцию $\varphi(y)$, которая определена в промежутке Y, и функцию $f(x)$, которая определена в промежутке X, при этом $f(x) \in Y$, если $x \in X$. Если $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, а $\varphi(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, $y_0 \in Y$, то сложная функция $\varphi\ (f(x))$ непрерывна в точке x_0.

Условия непрерывности $f(x)$ в точке x_o из X и $\varphi(y)$ в точке $y_0 = f(x_0\ )$ из Y являются достаточными, но не являются необходимыми, для непрерывности сложной функции.

Контрпример: всюду непрерывная и всюду разрывная функции, суперпозиция которых всюду непрерывна.

Рассмотрим определенные всюду функции $\varphi(x)=y^2$ и $f(x)=D(x)-\frac{1}{2}$. Первая из них непрерывна, вторая − всюду разрывна. Однако сложная функция $\varphi\ (f(x))= \left(D(x) - \frac{1}{2}\right)^2 \equiv \frac{1}{4}$ непрерывна всюду.

Контрпример. Две всюду разрывные функции, суперпозиция которых всюду непрерывна.

Пусть φ *(y) = D(y)*, а *f (x) = D(x)*. Эти функции всюду определены и всюду разрывны. Сложная функция *D(D(x))* ≡ 1 всюду непрерывна.

Первая теорема Больцано-Коши. Пусть функция *f(x)* определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда в интервале (a, b) найдется точка c, в которой функция равна нулю: *f (c)* = 0, c ∈ (a, b).

Попытаемся усилить теорему, снимая ее отдельные условия. Для начала снимем предположение об определении функции на всем отрезке $[a, b]$ Полученное утверждение опровергнем контрпримером.

Контрпример: Не определенная в одной внутренней точке отрезке функция, для которой не выполняется заключение первой теоремы Больцано-Коши.

Функция $f(x) = \begin{cases} -1, \text{если } -1 \le x < 0, \\ 1, \text{если } 0 < x \le 1 \end{cases}$ определена на отрезке $[-1{,}1]$, за исключением точки *x=0*. Во всех точках области своего определения она непрерывна и на концах отрезка $[-1{,}1]$ принимает значения разных знаков. Функция нигде не обращается в нуль.

Снимем предположение о непрерывности функции на всем отрезке $[a, b]$. Получим ложное утверждение.

Контрпример. Разрывная в одной внутренней точке отрезка функция, для которой не выполняется заключение первой теоремы Больцано-Коши. Функция $f(x) = \begin{cases} -1, \text{если } -1 \le x < 0, \\ 1, \text{если } 0 < x \le 1 \end{cases}$ определена на всем отрезке $[-1{,}1]$ и непрерывна во всех его точках, кроме нуля. Она принимает значения разных знаков на концах отрезка, но нигде не обращается в нуль.

Снимем предположение о замкнутости области определения функции, заменив отрезок $[a, b]$ на полуинтервал, например, $(a, b]$.

Контрпример. Функция, определенная и непрерывная на полуинтервале, для которой не выполняется заключение первой теоремы Больцано-Коши.

Функция $f(x) = \begin{cases} -1, \text{если } x = -1, \\ 1, \text{если } -1 < x \leq 1 \end{cases}$ определена и непрерывна на полуинтервале $(-1,1]$, а на его концах принимает значения разных знаков (здесь мы вынуждены определить функцию в обоих концах полуинтервала). Функция ни в одной точке интервала $(-1, 1)$ не обращается в нуль.

Вторая теорема Больцано-Коши. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает неравные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$. Тогда для любого числа C, лежащего между A и B, существует такая точка c интервала (a, b), что $f(c) = C$.

Попытаемся усилить теорему, снимая отдельные ее предположения. Делать это будем точно так же и в той же последовательности, как в случае первой теоремы Больцано-Коши.

Контрпримеры к утверждениям, альтернативным второй теореме Больцано-Коши.

Последовательно используем функции предыдущих контрпримеров. В качестве C можно принять любое число, лежащее строго между -1 и 1. Так как названные функции принимают только значения -1 и 1, то не существует точки c $(-1 < c < 1)$ такой, что $f(c) = C$.

Сформулируем теорему, обратную данной: пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает неравные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$. И пусть для любого числа C, лежащего между

A и *B*, существует такая точка *c* интервала ($a,\ b$), что $f(c) = C$. Тогда функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$

Контрпример. Функция, определенная на отрезке и принимающая на его концах различные значения, а внутри отрезка - все промежуточные значения, но разрывная.

Функция $f(x) = \begin{cases} 2x+1, \text{если} -1 \le x \le 0, \\ 2x-1, \text{если } 0 < x \le 1 \end{cases}$ определена на отрезке $[-1,1]$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$ Функция принимает в точках отрезка $[-1,\ 1]$ все значения, лежащие между -1 и 1. Однако она имеет разрыв в нуле.

Теорема (о существовании обратной функции). Пусть функция $y = f(x)$ определена, строго монотонно возрастает (убывает) и непрерывна в некотором промежутке X. Тогда в промежутке Y значений этой функции существует однозначная обратная функция $x = g(y)$, также строго монотонно возрастающая (убывающая) и непрерывная.

Заметим, что для существования однозначной обратной функции предположения данной теоремы являются достаточными, но не являются необходимыми. Рассмотрим следующие контрпримеры.

Контрпример. Функция, всюду немонотонная и всюду разрывная, имеющая однозначную обратную функцию.

Определенная на всей оси Ox функция $y=x+D(x)$ (рис. 6) ни в одном интервале не является монотонной, она разрывна в каждой точке. На рисунке график изображен схематически: при иррациональных x точка графика лежит на прямой $y = x$, при рациональных x - лежит на прямой $y = x+1$. Эти прямые нарисованы пунктиром. Функция имеет однозначную обратную функцию, определенную на всей оси Oy. Действительно, если x - иррациональное число, то $y = x$, и y также иррационально; если x - рациональное число, то $y = x+1$, где y это также число рациональное. Таким образом, рациональным значениям аргумента отвечают рациональные значения функции, и на множестве рациональных чисел существует однозначная обратная функция $x = y - 1$. Иррациональным значениям аргумента отвечают иррациональные значения функции, и на множестве иррациональных чисел существует однозначная обратная функция $x = y$. Следовательно, на всей оси *Oy* существует однозначная функция, обратная функции $y = x + D(x)$. Нетрудно заметить, что она выразится в виде $x = y - D(x)$.

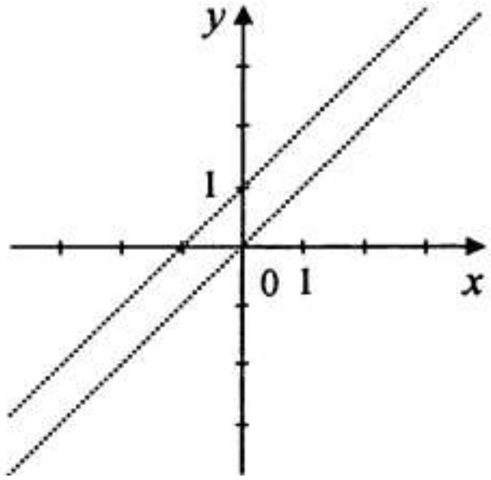


Рис.6. График *y=x+D(x)*

Первая теорема Вейерштрасса. Если функция *f(x)* определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существуют такие числа m и M , что $m \leq f(x) \leq M$ для всех $x \in [a, b]$.

Попытаемся усилить теорему, снимая отдельные ее предположения. Сначала снимем предположение об определении функции на всем отрезке $[a, b]$. Приведем контрпример.

Контрпример. Не определенная в одной внутренней точке отрезка функция, для которой не выполняется заключение первой теоремы Вейерштрасса.

Функция $f(x) = 1/x$ на отрезке $[-1,1]$ не определена только в нуле. Она непрерывна всюду в области своего определения. Данная функция не является ограниченной ни снизу, ни сверху.

Снимем предположение о непрерывности функции на всем отрезке.

Контрпример. Разрывная в одной внутренней точке отрезка функция, для которой не выполняется заключение первой теоремы Вейерштрасса. Функция *f (x)* = 1/x, x $\neq$ 0, *f(0)* = *0*, определена на всем отрезке $[-1{,}1]$, имеет разрыв только в нуле. Функция не является ограниченной ни снизу, ни сверху.

Снимем предположение о замкнутости области определения. Заменим в формулировке теоремы отрезок на интервал.

Контрпример. Функция, определенная и непрерывная на интервале, для которой не выполняется заключение первой теоремы Вейерштрасса.

Функция *f(x)* = $tg\, x$ на интервале $(-\pi/2,\ \pi/2)$ всюду определена и непрерывна, но не является ограниченной ни снизу, ни сверху.

Вторая теорема Вейерштрасса. Если функция *f(x)* определена и непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то она достигает на нем своей нижней грани и своей верхней грани.

Снимем предположение об определении функции на всем отрезке.

Контрпример. Не определенная в одной внутренней точке отрезка функция, для которой не выполняется заключение второй теоремы Вейерштрасса.

Функция $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ если } -1 \le x < 0, \\ x-1, \text{ если } 0 < x \le 1 \end{cases}$ определена всюду на отрезке $[-1,\ 1]$, кроме нуля, и непрерывна во всей области своего определения. Своей нижней грани и своей верхней грани функция на данном отрезке не достигает.

Снимем предположение о непрерывности функции на всем отрезке.

Контрпример. Разрывная в одной внутренней точке отрезка функция, для которой не выполняется заключение второй теоремы Вейерштрасса.

Функция из предыдущего контрпример доопределенная в точке $x = 0$: $f(0) = 0$. Она определена всюду на отрезке $[-1.1]$ и непрерывна на всем отрезке, кроме точки $x = 0$. Функция на $[-1, 1]$ не достигает своей нижней грани и своей верхней грани.

Снимем предположение о замкнутости области определения. Вместо отрезка рассмотрим интервал.

Контрпример. Функция, определенная н непрерывная на интервале, для которой не выполняется заключение второй теоремы Вейерштрасса.

Функция $f(x) = x$ в интервале $(-1,1)$ всюду определена и непрерывна, но не достигает своих верхней и нижней граней.

ВЫВОД ПО ГЛАВЕ I

В первой главе были рассмотрены теоремы и задачи из курса математического анализа, доказываемые при помощи контрпримеров. В первом параграфе были рассмотрены последовательности, имеющие и не имеющие предела, суммы бесконечно малых последовательностей, расходящиеся последовательности, сумма, разность, произведение и отношение которых сходится. Приведены теоремы Больцано – Вейерштрасса, о вложенных отрезках, Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности, о пределе последовательности, критерий Коши. Во втором параграфе мы рассмотрели пределы функций и теоремы о пределах, а именно теоремы об ограниченности функции, имеющей конечный предел, о пределе монотонной функции, предельный переход в неравенстве, существование предела суммы, разности, произведения и частного функций. В третьем параграфе были рассмотрены непрерывные функции одной переменной: функции, имеющие непрерывность только в одной точке, функции имеющие точки разрыва, разрывные функции, суперпозиции которых непрерывны, а также функции, имеющие в любом интервале бесконечное число точек разрыва и точек непрерывности. Рассмотрены теоремы о непрерывных функциях: первая теорема Больцано-Коши, вторая теорема Больцано-Коши, теорема о существовании обратной функции, первая теорема Вейерштрасса, вторая теорема Вейерштрасса.

ГЛАВА II. КОНТРПРИМЕРЫ В РАЗДЕЛЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ИХ ПРЕДЕЛОВ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

§1.АНАЛИЗ ШКОЛЬНЫХ УЧЕБНИКОВ В РАЗДЕЛАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРОГРЕССИЯ, ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИИ

Понятие последовательности является важным в общеобразовательном плане и в то же время базовым для введения арифметической и геометрической прогрессий–частных случаев числовых последовательностей, изучаемых в курсе алгебры 9-го класса. Прогрессии являются наиболее распространённым типом числовых последовательностей, заданных рекуррентно. Понятия последовательности и ее предела в качестве основных понятий математического анализа находят важное применение при изучении дифференциального и интегрального исчислений.

В большинстве учебников алгебры общие сведения о последовательностях даются в том объеме, в котором они необходимы для изучения прогрессий: определение последовательности, член последовательности, порядковый номер члена, способы задания. Анализ учебников показывает, что к началу изучения последовательностей учащиеся не раз встречались с ними, например, натуральный ряд чисел, последовательность квадратов чисел, последовательность четных и нечетных чисел, последовательность простых чисел, последовательность чисел, делящихся на 4 и так далее.

Знакомство учащихся с пределами начинается с 10 (в некоторых пособиях с 11) класса. Теоретическое содержание учебников по данному разделу различается, однако некоторые моменты авторы считают обязательным для изучения.

Для того чтобы провести подробный анализ школьного материала по темам «Последовательности», и «Предел последовательности и функции» и выделения контрпримеров нами были рассмотрены следующие учебники для общеобразовательных школ:

1. А.Г. Мордкович. Алгебра 9 класс (с повышенным уровнем математической подготовки)
2. А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. Алгебра 10 класс (базовый и углубленный уровень)
3. Г. К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина. Алгебра 9 класс
4. Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова. Алгебра 9 класс
5. Г.К. Муравин, О.В. Муравина. Алгебра 11 класс
6. Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова. Алгебра 9 класс
7. Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.В. Ткачева. Алгебра 11 класс (профильный уровень)

Проанализировав представленные учебные пособия, была создана следующая сравнительная таблица (Табл.1.), позволяющая оценить учебный материал, представленный в данных учебниках.

Таблица 1

Сравнительная таблица, составленная по учебникам алгебры для общеобразовательных школ.

	Мордкович А.Г. 9 класс (проф. ур.).	Дорофеев Г.В. 9 класс.	Колягин Ю.М. 9 класс.	Муравин Г.К. 9 класс.	Мордкович А.Г., 10 класс(проф.ур.)	Муравин Г.К., 11 класс	Колягин Ю.М., 11 класс	Мордкович А.Г. 10 (базовый ур.)
Числовая последовательность								
Определение числовой последовательности	+	+	+	+				
Виды последовательности								
1) монотонная	+			+				+
2) постоянная (стационарная)	+	+						
3) сходящаяся и расходящаяся					+			+
Способ задания								
алгебраический	+	+	+	+				

	Мордкович А.Г. 9 класс (проф. ур.).	Дорофеев Г.В. 9 класс.	Колягин Ю.М. 9 класс.	Муравин Г.К. 9 класс.	Мордкович А.Г., 10 класс(проф.ур.)	Муравин Г.К., 11 класс	Колягин Ю.М., 11 класс	Мордкович А.Г. 10 (базовый ур.)
рекуррентный	+	+	+	+				
словесный	+							
Геометрическое изображение	+	+	+					
Арифметическая прогрессия								
Понятие арифметической прогрессии	+	+	+	+				
Формула суммы первых n членов	+	+	+	+				
Характеристическое свойство	+		+	+				
Геометрическое изображение	+	+						

	Мордкович А.Г. 9 класс (проф. ур.).	Дорофеев Г.В. 9 класс.	Колягин Ю.М. 9 класс.	Муравин Г.К. 9 класс.	Мордкович А.Г., 10 класс(проф.ур.)	Муравин Г.К., 11 класс	Колягин Ю.М., 11 класс	Мордкович А.Г. 10 (базовый ур.)
Геометрическая прогрессия								
Понятие геометрической прогрессии	+	+	+	+				
Формула суммы первых n членов	+	+	+	+				
Характеристическое свойство	+		+	+				
Геометрическое изображение	+	+						
Простые и сложные проценты	+	+	+					
Сумма бесконечной прогрессии при $\|q\| < 1$				+	+			+

	Мордкович А.Г. 9 класс (проф. ур.).	Дорофеев Г.В. 9 класс.	Колягин Ю.М. 9 класс.	Муравин Г.К. 9 класс.	Мордкович А.Г., 10 класс(проф.ур.)	Муравин Г.К., 11 класс	Колягин Ю.М., 11 класс	Мордкович А.Г. 10 (базовый ур.)
Предел последовательности и функции								
Определение предела последовательности					+		+	+
Определение предела функции по Коши						+	+	
Свойства сходящихся последовательностей					+		+	+
Левый и правый пределы						+	+	
Теорема о пределе суммы, разности, произведения и частного					+	+	+	+
Непрерывность функций					+	+	+	+
Геометрический смысл предела						+		

1.1.ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРОГРЕССИИ

В курсе алгебры 9 класса важное место занимает вопрос изучения прогрессий. Этот блок в свою очередь делится на разделы: числовые последовательности, арифметическая и геометрическая прогрессии. Первый раздел посвящен общим вопросам числовых последовательностей. Изучение материала начинается с записи известных учащимся примеров числовых последовательностей, которые могут быть бесконечными и конечными, возрастающими и убывающими, постоянными; вводится соответствующая терминология и символика. В результате их анализа учащиеся знакомятся с соответствующими понятиями. Так, например, все авторы приводят примеры, на основе некоторых можно без особых трудностей дать определение числовой последовательности. Авторы Дорофеев и Колягин не дают строгое определение числовой последовательности. В учебнике Муравина предлагается следующее определение Числовая последовательность – это расположенные в определенном порядке числа. Кроме того, Муравин отмечает, что числовая последовательность, как функция натурального аргумента, обладает свойствами функций [19]. В учебнике Мордковича определение числовой последовательности дается как функция от натурального аргумента $y = f(n)$ или $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$. Определение n-ого члена последовательности во всех учебниках задается аналогичным образом. Однако в разных учебниках авторы дополнительно указывают следующие определения. Муравин и Мордкович приводят определения возрастающей и убывающей последовательности, Дорофеев дает определение постоянной последовательности.

С помощью конкретных примеров учащиеся знакомятся со способами задания последовательности, которые позволяют найти любой ее член с заданным номером. Среди них особенно тщательно изучаются два способа задания: формулой n-ого члена и рекуррентный способ. Однако Мордковичем отмечаются три способа задания числовой последовательности: аналитический, словесный и рекуррентный. На каждый способ приведены несколько примеров:

1) Последовательность правильных дробей с числителем, равным 1 задается формулой $b_n = \frac{1}{n+1}$.

2) Последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{2}$ по недостатку: 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142,…

3) Для задания последовательности рекуррентным способом рассмотрена последовательность Фибоначчи: (u_n) – последовательность, в которой $u_1 = 1, u_2 = 1, u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ при n>2 [18].

Авторы Дорофеев, Мордкович и Колягин также используют пример последовательности чисел Фибоначчи для описания рекуррентного задания числовой последовательности. Колягин указывает, что последовательность можно задавать формулой n-ого члена, например, формулой $a_n = \frac{1}{n}(n = 1,2,3, \dots)$ задана последовательность 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{n}, \dots$ В учебном пособии под авторством Муравина выделен целый параграф для изучения рекуррентно заданных последовательностей, в котором подробно описан принцип задания последовательности, используя треугольные числа, сопровождаемые понятными иллюстрациями.

После теоретического материала авторы анализируемых пособий включают упражнения, направленные на закрепление теоретического знания, более глубокого понимания нового материала. Авторы Мордкович и др. в своем учебнике предлагают несколько разных типов упражнений для первичного закрепления новой темы. Например:

1) Дана (c_n)-последовательность, все члены которой с нечетными номерами равны -1, а с четными 0. Найти $c_{10}, c_{253}, c_{2k}, c_{2k+1}$

2) Перечислить члены последовательности (x_n), которые расположены между x_{n-2} и x_{n+2}

3) Последовательность задана формулой $a_n = n^2 - n - 20$. Указать номера отрицательных членов и найти их [18].

Встречается много упражнений на рекуррентное задание последовательности.

Среди представленных в учебнике упражнений можно выделить упражнения для отработки словесного задание числовой последовательности. Например, вычислить пять членов последовательности, если известно, что первый член равен 40, а каждый последующий равен предыдущему, деленному на два.

Дорофеев часто предлагает учащимся работу в таблицах. Для ясного представления подобных заданий рассмотрим одно из таких заданий. Учащиеся работают в таблице (рис.6) с последовательностью правильных несократимых дробей со знаменателем 100. В задании необходимо:

1) заполнить таблицу, занеся в нее первые десять членов этой последовательности

2) указать номер члена последовательности, равного определенному значению или указать член последовательности, соответствующего определенному номеру.

3) найти последний член этой последовательности и указать его номер.

Номер члена последовательности	1	2	...	10
Обозначение	c_1	c_2		
Член последовательности	$\frac{1}{100}$	$\frac{3}{100}$		

Рис.6. Упражнение работа с таблицей

Помимо заданий с заполнением таблиц, стоит отметить следующие:

1) определить правило, по которому строится последовательность.

2) вычислить первые шесть членов последовательности, заданной формулой *n*-ого члена, и дать ей «имя»

3) найти формулу n-ого члена последовательности

4) выписать все члены последовательности $y_n = 3^{n-5}$, большие 1-10 и меньшие 10 [9].

Перед выполнением упражнений Колягин рекомендует учащимся ответить устно на вопросы по изученному материалу. В качестве вводных упражнений предлагают:

1) расположить в порядке возрастания вещественные числа, для каждого назвать предшествующее и следующее з за ним число.

2) найти значение выражения при заданном n.

3) отметить числа на координатной прямой, точки на координатной плоскости.

4) найти значение функции в заданной точке.

5) для первичного закрепления материала предлагают следующие типы упражнений:

6) назвать n-ый член последовательности и указать номер члена последовательности, равного определенному значению.

7) вычислить несколько первых членов последовательности и изобразить их на числовой прямой; координатной плоскости.

8) проверить является ли членов последовательности, заданной формулой, следующие числа.

9) найти номер члена последовательности, заданной формулой [13].

Рассмотрим некоторые упражнения, которые стоит обязательно выделить в учебнике Муравина:

1) выпишите в порядке убывания все двузначные числа, дающие при деление на 7 в остатке 1. укажите член последовательности, следующий за пятым, предшествующий четвертом.

2) выпишите возрастающую последовательность всех трехзначных чисел, сумма цифр которых равна 24. укажите номера членов последовательности, кратных 6. есть ли среди членов последовательности простые числа, квадраты рациональных чисел?

3) имеется ли в последовательности $a_n = 65 - 4n$ член, равный -15.

4) подобрать формулу n-ого члена для последовательности, указать, является ли она возрастающей.

5) записать формулу числа диагоналей d_n выпуклого многоугольника в зависимости от числа его сторон n [19].

Второй раздел посвящен традиционному для школы материалу – прогрессиям. Слово «прогрессия» имеет латинское происхождение, буквально означает «движение вперед». К слову «прогрессия» добавляются два эпитета «арифметическая» и «геометрическая». Получаем во многом родственные прогрессии, что и позволило в учебнике К.С. Муравина и др. излагать все их узловые вопросы одновременно. Остальные авторы придерживаются последовательного изучения прогрессий: от арифметической до геометрической. Ознакомление с каждой прогрессией начинается с практической задачи, мотивирующей ее изучение.

Как объем, так и уровень доступности теоретического материала дают возможность организовывать учебно-познавательную деятельность учащихся дифференцированно с большой долей самостоятельности. В теории о прогрессиях можно выделить следующие узловые вопросы: определение, формула n-ого члена, характеристическое свойство, формула суммы членов. В ходе изучения учащиеся должны твердо усвоить предлагаемые формулировки, распознавать прогрессии при разных способах задания, выводить формулы и решать задачи с их применением, приводить примеры из реальной жизни.

Авторы анализируемых учебников используют пример-задачу для ввода определения арифметической прогрессии. Например, в учебнике Ю.М. Колягина Рассматривается пример про високосные года. Г.В. Дорофеев дает задачу о начислении стоимости проката лодки. Такие примеры позволяют донести до учащихся актуальности и значимость изучаемой темы, показать ее применение в жизни. Далее Дорофеев, опираясь на приведенную ранее пример-задачу, приводит формулу n-ого члена арифметической прогрессии, используя определение.

А.Г. Мордкович наоборот дает вначале определение, а уже потом разбирает с учащимися упражнения, отрабатывая введенное ранее определение арифметической прогрессии. Арифметическая прогрессия в учебнике алгебры под авторством Мордкович задается рекуррентным способом $\mathrm{a}_1 = \mathrm{a}, \mathrm{a}_\mathrm{n} = \mathrm{a}_{\mathrm{n}-1} + \mathrm{d}, (\mathrm{n} = 2,3,4, \ldots)$. Далее авторы учебника дают определение возрастающей и убывающей арифметической прогрессии. Рассматривая последовательно члены арифметической последовательности как сумму предыдущего и разность d приходят к формуле n-ого члена последовательности. Данное равенство доказывается с помощью математической индукции. А.Г. Мордкович также указывает способ графического изображения арифметической прогрессии, поскольку, как уже было отмечено в учебнике Г. К. Муравина, арифметическая прогрессия, как частный случай числовой последовательности является функцией натурального аргумента и вследствие обладает свойствами функций. Позже у Дорофеева в примерах к теоретической части также встречается указание на способ изображения арифметической прогрессии на координатной плоскости.

Сумма первых n членов во всех четырёх учебниках выводят одинаково с помощью свойства арифметической прогрессии: сумма члена, находящегося на k-ом месте от начала конечной арифметической прогрессии, и члена, находящегося на k-ом месте от ее конца, равно сумме первого и последнего члена прогрессии. Для установления формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии используют такой прием: расписывают суммы, начиная с первого члена прогрессии, в первом случаи, и со второго, во втором. $.S_\mathrm{n} = \mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 + \cdots + \mathrm{a}_{\mathrm{n}-1} + \mathrm{a}_\mathrm{n}$. И $\mathrm{S}_\mathrm{n} = \mathrm{a}_\mathrm{n} + \mathrm{a}_{\mathrm{n}-1} + \cdots + \mathrm{a}_2 + \mathrm{a}_1$. Далее почленно складывают обе части равенств, и воспользовавшись установленным ранее свойством, приходят к формуле суммы первый n-членов арифметической прогрессии.

Характеристическое свойство выражается в виде теоремы. В учебнике Дорофеева формулу суммы первых n членов арифметической последовательности находят без использования свойства арифметической прогрессии, воспользовавшись способом Гаусса. Характеристическое свойство арифметической прогрессии встречается только в учебнике А.Г. Мордковича, и оно представлено в виде теоремы, и в учебнике Г.К. Муравина, где авторы указывают на связь со средним арифметическим двух соседних чисел. Как уже было замечено ранее, Г.К. Муравин предлагаем одновременное изучение арифметической и геометрической прогрессий, таким образом учащиеся могут сразу устанавливать взаимосвязь между понятиями и уяснить различая применении свойств и формул этих прогрессий при решении задач и на практике. В рассматриваемом учебнике определение геометрической прогрессии дается следующим образом: последовательность, каждый член которой отличен от нуля, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и тоже число q, называется геометрической прогрессией. Аналогичное определение приводится в учебнике А.Г. Мордковича. В учебном пособии Г.В. Дорофеева приведён пример, позволяющий плавно перейти к изучению нового материала и познакомиться с новым для учащихся определением. Далее автор замечается, что в зависимости от значения q геометрическая последовательности называется возрастающей или убывающей.

Ю.М. Колягин трактует геометрическую прогрессию следующим образом: числовая последовательность $\mathrm{b_1, b_2, \dots, b_n}$ называется геометрической прогрессией, если для всех натуральных n выполняется равенство $\mathrm{b_n q = b_{n+1}, b_n \neq 0, q \neq 0}$ [13]. Формулу n-ого члена геометрической прогрессии во всех рассматриваемых учебниках получают из определения, расписав последующий член через первый член последовательности. Сумма первых n членов последовательности выводится аналогично: рассматривают сумму $\mathrm{S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 +}$

$b_1q^3 + \dots + b_1q^{n-1}$ и домножают обе части равенства на q $qS_n = b_1q +$ $+b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^n$. Далее выполняя протстые преобоазоваения, получают суммы формулу n первых членов Характеристическое свойство геометрической прогрессии рассматривается в учебниках Мордковича, Колягина и Муравина. У Мордковича, как и в случае с арифметической последовательностью, характеристическое свойства подставлено в виде теоремы, Муравин указывает на связь со средним геометрическим (пропорциональным).

В ряде учебников алгебры 9-ого класса для ознакомления учащихся излагается материал о бесконечной убывающей геометрической прогрессии. В наиболее компактном виде он представлен в учебниках К.С. Муравина и др. Объясняется происхождение названия прогрессии: при $|q| < 1$ b_n становится сколько угодно малым, «бесконечно убывает», стремится (приближается) к нулю. Изложение материала строится с опорой на наглядно-интуитивные представления учащихся о бесконечном процессе. Понятие бесконечно убывающей геометрической прогрессии сложно для усвоения учащимися основной школы. Они впервые задумываются о существовании прогрессии, которая убывает бесконечно. В объяснительном тексте учебников изложение материала начинается с практической задачи (разрезание пирога на части: пополам, одну половину еще пополам и т.д.), геометрических задач (единичный квадрат делится на квадраты с уменьшающимися в два раза сторонами, на прямоугольники с уменьшающимися в два раза площадями и штрихуются из них те, которые не делятся). Выписывая полученные три числовые последовательности, являющиеся геометрическими прогрессиями с $|q| < 1$, формулируется определение. Затем выясняется формула нахождения суммы этой прогрессии $S = \frac{b_1}{1-q}$. Важно отметить, что полученная формула позволяет найти «сумму всех членов прогрессии», а поэтому и отличается от формулы суммы n членов той же прогрессии. Необходимо обратить внимание учащихся на то, что говорить о сумме всех членов бесконечной прогрессии можно только условно, т. к. невозможно сложить бесконечно много чисел –такой процесс сложения никогда не закончится.

1.2 ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ФУНКЦИЙ.

Переход от конечного к бесконечному создает определенную трудность в изучении теоретического материала, что приводит к формальному его усвоению. Ещё В. М. Брадис в 1954 г. писал о том, что раздел «Пределы» –один из трудных, и борьба между стремлением к научности изложения и стремлением сделать его максимально доступным и наглядным привела к созданию многих вариантов его изложения [23].

В учебнике А.Г. Мордковича как для профильного, так и для базового уровня рассматриваются пределы последовательностей. Для базового уровня авторы учебника уделяют большое внимание повторению материала из курса 9 класса «Последовательности». Пропедевтический этап обучения включает в себя следующие определения: последовательность как функция, задание последовательности, ограниченная и монотонная, сходящаяся и расходящаяся последовательности.

Определение предела последовательности формулируется одинаково как для базового, так и для профильного уровня подготовки учащихся: Число b называют пределом последовательности (y_n), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера. В учебнике А.Г. Мордковича для профильного уровня (для базового уровня этот материал исключен из учебного пособия) уделяется внимание значению предела последовательности с геометрической точки зрения. Свойства сходящихся последовательностей для обоих уровней подготовки учащихся сформулированы одинаково:

1) Если последовательность сходится, то только к одному пределу.

2) Если последовательность сходится, то она ограничена.

3) Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится (теорема Вейерштрасса).

Отдельным параграфом рассматриваются методы вычисления пределов с помощью теоремы о пределах суммы, разности, произведения и отношения последовательностей, которая дается в двух учебных пособий А.Г. Мордковича, но в обоих без доказательства.

Определение предела функции в учебнике Мордковича дается в описательном виде, понятным учащимся, многие вводимые понятия сопровождаются иллюстрациями. Определение непрерывности функции в точке $x=a$ определяется равенством $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ одинаково в учебниках с базовым и профильным уровнем. В этом параграфе аналогичным образом формулируются свойства предела суммы, разности, произведения и частного двух функций, что и для пределов последовательностей.

Таким образом, учебные пособия А.Г. Мордковича содержат нестрогие, но понятные учащимся математические понятия, сопровождающиеся наглядными иллюстрациями. Материал отлично подходит для самостоятельного изучения соответствует наглядно интуитивному уровню обоснования и подобран с учетом практического опыта старшеклассников.

В учебнике алгебры 11 класса под авторством Г.К. Муравина изучение пределов функций начинается с изучения непрерывности функций. В курсе алгебры 10 класса определение непрерывных функций определялось только как возможность изображения графика функция, не отрывая карандаш от тетрадного листа. На последнем году обучения авторы учебника предлагают учащимся строго математическое определение непрерывности в точке по Коши: Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x0, если для любого числа ε>0 существует такое число δ>0, что $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Формулируются определения непрерывной функции на промежутке, а также понятие точки разрыва функции.

Предел функции в точке формулируется также по Коши, что позволяет учащимся самостоятельно заметить, что предел в точке имеют только функции, которые в этой точке либо непрерывны, либо имеют устранимый разрыв. Учащиеся знакомятся с понятиями левого, правого и двустороннего предела. Для каждого понятия приводится разобранный пример и его иллюстрация. Без доказательства дается терема о пределе суммы, произведения и частного. Также стоит отметить, что в этом учебнике особое внимание уделяется изучению асимптот (горизонтальных, вертикальных, наклонных) к графикам функций. Учащимся также рассказывается о кванторах общности и существования, на эту тему приведено достаточно упражнений.

В учебном пособии Колягина Ю.М. понятие предела последовательности впервые вводится в 10 классе при вычислении суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. А уже в 11 классе используется определение предела последовательности по Коши. Стоит отметить, что в данном учебнике содержится большое количество разобранных задач на нахождение предела последовательности по определению. Далее сформулировано определение сходящейся последовательности и приведены свойства сходящихся последовательностей. Также изучаются предел монотонной последовательности и теорема о пределе монотонной последовательности, которая проиллюстрирована геометрическим примером на вычисление площади многоугольников, описанных окружностью.

Для введения понятия предела функции Колягин в своем учебнике алгебры для 11 класса рассматривает три функции:

1) y=x+1;

2) $y = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} \text{ при } x \neq 1 \\ 3 \text{ при } x = 1 \end{cases}$;

3) $y = \frac{x^2-1}{x-1}$.

Значения этих трех функций совпадают, однако сами функции отличаются своим поведением при x=1 – первые две функции определены и имеют в этой точке значения 2 и 3 соответственно, а третья функция не определена на этой точке. С помощью этих функций автор дает нестрогое, описательное определение предела функции в точке: учащиеся должны заметить, что при значении x близких к 1, значение каждой из функций мало отличается от 2. В этом случае говорят, что каждая из этих функция в точке x=1 имеет предел, равный 2. Далее определяют, что первая функция, у которой значение функции в точке x=1 совпадает с пределом в этой точке, называется непрерывной, а остальные, соответственно, разрывными. Не смотря на то, что в этом учебнике определение предела функции на первых этапах изучения материала было сформулировано нестрого, дается определение предела функции в точке по Коши. Также авторы учебника дают (δ-ε) определения правостороннего и левостороннего пределов, бесконечный предел в конечной точке, и предел в бесконечности.

В этом разделе приведено определение бесконечно малых функций и их свойства. Выделены свойства пределов функций (предел суммы, произведения, частного и теорема о «двух милиционерах»), но даются без явного доказательства, учащимся только предлагается некая подсказка, позволяющая доказать свойства самостоятельно.

Далле в учебнике Колягина Ю.М. с помощью описания различных функций формируется понятие точек непрерывности и разрыва функций. Позже дается строгое определение непрерывной функции, непрерывной функции слева и справа, а также сформулировано понятие приращения фукнции.

1.3 КОНТРПРИМЕРЫ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ В РАЗДЕЛЕ ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИИ

Контрпримеры имеют особую значимость, особенно при изучении курса Начало математического анализа, поскольку этот раздел содержит сложные для понимания математические понятия и утверждения. Грамотное использование контрпримеров значительно облегчает усвоение материала, помогает уяснить тонкий смысл математических понятий, доказать или опровергнуть истинность предполагаемого утверждения [10]. Контрпример подчеркивает важность строгого соблюдения формулировок теорем и определений, что так важно объяснить учащимся. К сожалению, перегруженность учебных программ, вынуждает учителей давать материал в сжатой форме или даже пренебрегать некоторыми математическими свойствами или понятиями, которые способны актуализовать знания учащихся, объяснить потребность в изучении предмета и обосновать значимость математики в дальнейшем обучении. При анализе данных учебных пособий стало очевидно, что контрпримеры в школьном курсе математики представлены в небольшом количестве, однако, нам удалось обнаружить несколько таких контрпримеров.

При изучении свойств сходящихся последовательностей, авторы учебников по алгебре Колягин Ю.М. и Мордкович Г.К. опровергают обратное утверждение к свойству: если последовательность имеет предел, то она ограничена. Составим обратное утверждение: ограниченная последовательность имеет предел. Колягин Ю.М. рассматривает последовательность вида $x_n = (-1)^{\mathrm{n}}$. Эта последовательность, действительно, ограничена (снизу -1, сверху 1), но предела она не имеет. Г.К. Мордкович в учебнике с профильным уровнем применяет следующий контрпример – последовательность a_n={1,2,3,1,2,3,…1,2,3,…}.

Действительно, хоть эта последовательность и ограничена снизу 1 и сверху 3, предела она не имеет, значит расходится.

§2 ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС ПО ТЕМЕ «ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИИ»

Одними из центральных вопросов курса алгебры старшей школы являются производная функции и ее приложения. Полноценное его изучение представляется неразумным вне знакомства хотя бы на описательном уровне с понятием предела. Предел функции и предел последовательности являются фундаментальными понятиями математики, поэтому знакомство с ними является обязательным ученикам, изучающим математику в старшей школе. Это изучение должно быть понятным и интересным для учащихся, и чтобы добиться глубокого понимания учебного материала, предлагается использовать на уроках контрпримеры по данному разделу. Проанализировав школьную учебную литературу, было выявлено, что в некоторых учебных пособиях рассмотрение контрпримеров по исследуемой теме отсутствует. Следовательно, требуется дополнительные факультативные занятия в рамках внеурочной деятельности, которые позволят решить какие-либо недостатки в изложении темы Предел последовательности и функции.

Предлагаемый факультатив «Предел последовательности и функции» предназначен для дополнения и углубления знаний учащихся, полученных на уроках алгебры при изучении раздела «Предел последовательности и функции». Данный факультатив включает в себя этап повторения математических знаний учащихся из раздела «Последовательности», а также изучение нового раздела «Предел последовательности и функции». Таким образом, разработанный курс позволяет систематизировать и укрепить знания по изучению способов задания числовых последовательностей, их видов и свойств, расширить представление о сумме бесконечной геометрической последовательности, а также сформировать не только интуитивное понятие предела, но и строгое на основании (ε) определения, изучить свойства сходящихся последовательностей, научиться вычислять предел функции в точке и определять поведение графика функции.

С целью углубить понимание раздела и исключить неверное толкование математических утверждений предполагается занятиях рассматривать с обучающимися контрпримеры. Также для формирования умения доказывать истинность и опровергать ложные утверждения, используя контрпримеры, в ходе занятия применяются утверждения и свойства из других разделов математики.

Факультативный курс по теме «Последовательность и ее предел» рассчитан на 3 часа для учащихся 10-11 классов. По окончании курса предусмотрена итоговая работа, рассчитанная на 1 час.

Цель факультативного курса: расширить и систематизировать знания учащихся, связанных с понятием предела последовательности и функции, его свойствами; применением этих понятий на практике, а также развить навыки и умения доказывать истинные и опровергать ложные утверждения с помощью контрпримеров.

Задачи:

- расширить и углубить знания и умения учащихся в разделе «Последовательность»;
- сформировать интуитивное понятие предела последовательности и функции;
- сформировать навыки решения математических задач в рамках изучаемого раздела с использованием строгого определения предела, свойств и теорем о пределах последовательности и функции;
- ознакомить учащихся с методами и приемами пользования контрпримеров при доказательстве и опровержении математических утверждений.

Личностные, метапредметные и предметные результаты освоения курса

1. личностные:

- формирование ответственного отношения к учению, готовности обучающихся к саморазвитию, самообразованию;
- умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры;
- развитие критического мышления, умения распознавать логически некорректные высказывания;
- формирование креативного мышления, инициативы, находчивости, активности при решении математических задач;
- умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности;

2. метапредметные:

регулятивные универсальные учебные действия:

- умение осуществлять контроль по результату и способу действия, вносить необходимые коррективы;
- умение самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем;

познавательные универсальные учебные действия:

- умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и выводы;
- умение создавать, применять и преобразовывать знаково-символические средства, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач;

коммуникативные универсальные учебные действия:

- умение организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками;
- умение работать в группе: находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учета интересов;
- формулировать, аргументировать и отстаивать свое мнение;

3. предметные:

- овладение базовым понятийным аппаратом по основным разделам содержания данного курса; представление об основных изучаемых понятиях (последовательность, предел последовательности, предел функции, окрестность точки, бесконечность, …)
- умение работать с математическим текстом, точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений;
- умение применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочные материалы и технические средства.

Таблица 2

Календарно тематическое планирование курса

№ урока	Тема занятия	Количество часов
1	Числовая последовательность, предел последовательности.	1
2	Свойства пределов. Вычисления пределов	1
3	Предел функции	1
4	Итоговое занятие	1

Содержание программы:

1. Числовая последовательность, предел последовательности.

Способы задания последовательности. Свойства последовательности (монотонность, ограниченность). Определение предела последовательности. Свойства сходящихся последовательностей. Нахождение предела последовательности по определению.

2. Свойства пределов. Вычисления пределов.

Арифметические свойства предела последовательности. Сумма убывающей геометрической прогрессии. Вычисление пределов последовательности.

3. Предел функции.

Геометрический смысл предела функции в точке и на бесконечности. Непрерывность функции. Построение эскиза графика функции по заданным пределам. Вычисление предела функции в точке. Раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и $\left(\frac{0}{0}\right)$

§3 АПРОБАЦИЯ ФАКУЛЬТАТИВНОГО КУРСА «ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИИ»

Апробация факультативного курса проводилась в период прохождения педагогической практики в МБОУ Гимназия №10 г.Челябинск в 11 классе с углубленным изучением математики. Было разработано и проведено 3 занятия по темам:

1) Числовая последовательность, предел последовательности.
2) Свойства пределов. Вычисления пределов.
3) Предел функции.

Перед проведением факультативного курса была составлена и проведена входная диагностическая работа №1, направленная на определение уровня сформированности знаний по темам Предел последовательности и функции. Диагностическая работа №1 состояла из 7 заданий по данным темам. На работу отводилось 45 минут. Форма проведения работы – фронтальная. Во время выполнения работы учитель следит за тем, чтобы каждый работал самостоятельно. Задания работы см. в приложении выпускной квалификационной работы.

Результаты входной диагностической работы №1.

Количество учеников: 18 человек.

Оценки обучающихся:

1) «отлично» –2 человека;
2) «хорошо» –10 человек;
3) «удовлетворительно» –5 человек;
4) «неудовлетворительно» –1 человек.

Диаграмма 1. Результаты входной диагностической работы №1

Таблица 3

Результаты выполнения входной диагностической работы №1

№ задания	Тип задания	Количество учащихся выполнивших задание	% выполнения
1	Использование формулы суммы бесконечной геометрической прогрессии.	15	83
2	Решение уравнений с использованием формул бесконечно убывающей геометрической прогрессии.	9	50
3	Монотонность последовательности	14	78
4	Определить некорректную формулировку свойства, определения.	7	39
5	Вычисление предела последовательности при $n \to \infty$.	9	50
6	Построение эскиза графика функции при заданных ее пределах.	6	33
7	Вычисление предела функции в точке.	9	50

Таким образом, можно сделать вывод, что учащиеся справились с заданиями диагностической работы №1 на 54,7 %. Хорошо справились с заданиями на использование формул суммы бесконечной геометрической прогрессии, исследовании последовательности на монотонность. Более половины учащихся не справились с заданием на построение эскиза графика функции, если даны ее пределы, а также не смогли определить неверно сформулированное определение предела и его свойства. Остальные испытывали сложности при поиске контрпримера для опровержения неверной формулировки.

Результаты диагностической работы №1 свидетельствуют о необходимости проведения дополнительных мер по формированию наглядно-интуитивных представлений о пределе функции и последовательности, в том числе развивать культуру использования формально-логических определений и свойств, для этого предлагается на факультативных занятиях использовать контрпримеры по изучаемым темам.

После проведения факультативного курса учащиеся выполнили контрольную диагностическую работу №2, состоящую из аналогичных заданий, что и первая работа. Результаты диагностической работы №2 представлены ниже.

Оценки обучающихся:

1) «отлично» –6 человека;
2) «хорошо» –9 человек;
3) «удовлетворительно» –3 человек;
4) «неудовлетворительно» –0 человек.

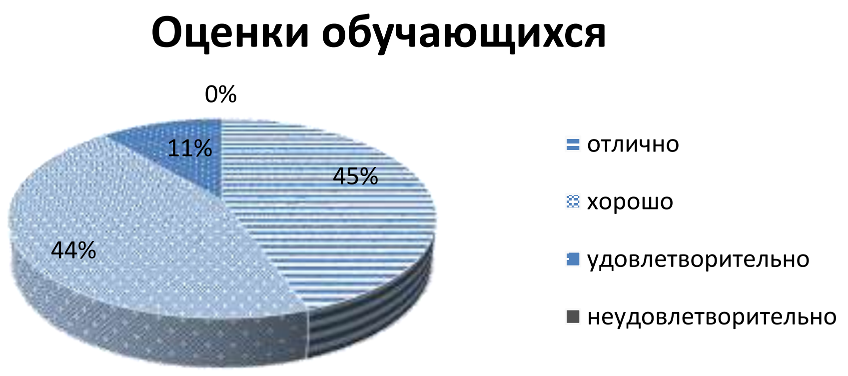


Диаграмма 2. Результаты входной диагностической работы №2

Таблица 4

Результаты выполнения входной диагностической работы №2

№ задания	Тип задания	Количество учащихся выполнивших задание	% выполнения
1	Использование формулы суммы бесконечной геометрической прогрессии.	17	94
2	Решение уравнений с использованием формул бесконечно убывающей геометрической прогрессии.	12	67
3	Монотонность последовательности	16	89
4	Определить некорректную формулировку свойства, определения.	12	67
5	Вычисление предела последовательности при $n \to \infty$.	13	72
6	Построение эскиза графика функции при заданных ее пределах.	9	50
7	Вычисление предела функции в точке.	14	78

Контрольная диагностическая работа №2 показала, что уровень владения теоретическими и практическими знаниями и навыками по теме

Предел последовательности и функции улучшился до 73,9%. Из таблиц, приведенных выше, следует, что количество выполненных заданий, увеличилось, а значит и повысилось и качество овладения изучаемого материала в рамках исследуемых тем. Кроме того хочется отметить, что использование контрпримеров на занятиях разработанного факультативного курса позволило добиться более глубокого понимания предмета, свести к минимуму неверное толкование формулировок математических утверждений в разделе Предел последовательности и функции. Также контрпримеры, безусловно, дополняют урок творческой составляющей и повышают заинтересованность учащихся в изучении предмета.

ВЫВОД ПО ГЛАВЕ II

Анализ школьных учебников показал, что не все авторы используют контрпримеры при объяснении учебного материала в разделе Предел последовательности и функции. Разработанный нами факультативный курс и проведенный на учащихся 11 класса показал, что уровень усвоения материала повысился, что свидетельствует о том, что контрпримеры при изучении математики, в частности при изучении пределов последовательностей и функций, позволяет учащимся изучить учебный материал более подробно, избежать ошибок при формулировании определений, свойств и теорем. А также использование контрпримеров на уроке позволяет учителю добавить в занятие немного творческой деятельности обучающихся, что в свою твою очередь, непременно, будет способствовать развитию творческих способностей и навыков критического ума школьников.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тема «Предел последовательности и функции» одна из самых сложных тем в школьном курсе математического анализа. На эту ситуацию оказывают влияния многие факторы, но прежде всего, это связано со сложностью теоретического материала и нехваткой учебного времени для глубокого понимания темы. Использование контрпримеров на уроке позволит учителю исключить поверхностное понимания теории пределов последовательности и функции, показать обучающимся, где они ошибаются при формулировании теорем, свойств и определений. Данная выпускная квалификационная работа призвана подчеркнуть значимость контрпримеров в курсе Начала математического анализа.

Согласно цели и задачам, поставленным в начале работы, была изучена учебно-методическая и математическая литература по исследуемой теме. Таким образом, были выделены и отобраны контрпримеры в курсе математического анализа в разделе Предел последовательности и функции. Был проведен анализ 8 школьных учебников по математике (4 учебника для 9 классов и 4 учебника для 10-11 классов). В ходе анализа были выявлены достоинства и недостатки каждого из учебников, а также были рассмотрены методы изучения данной темы, выделены контрпримеры и показана их роль при изучении пределов последовательностей и функции в исследуемых учебных пособиях.

Чтобы показать важность использования контрпримеров при изучении пределов последовательностей и функции был разработан и проведен факультативный курс «Предел последовательности и функции». В ходе факультатива было выявлено, что контрпримеры развивают навыки доказательства, там самым добавляют в урок момент творческой деятельности; позволяют учащимся избегать ошибок при формулировании математических утверждений. Таким образом, контрпримеры способны усилить учебный процесс и добиться более глубокого и качественного усвоения учебного материала по теме Предел последовательности и функции.

Результаты данной выпускной квалификационной работы могут быть использованы как дополнительный материал при проведении занятий по математическому анализу как в высших и средних учебный заведениях, так и в старших классах с углубленным изучением математики или для проведения факультативах занятиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баврин, И. И. Математический анализ для педагогических вузов: учебник и практикум для прикладного бакалавриата / И. И. Баврин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 327 с.

2. Балабаева Н.П. Контрпримеры в курсе высшей математики как средство развития критического мышления студентов IT-направлений/ Н.П. Балабаева //Самарский научный вестник.-2014.-№4(9)-С.30-33.

3. Вайнштейн И.И., Манушкина М.М. К методике преподавания темы «Предел функции»/ И.И. Вайнштейн // Сибирский педагогический журнал.-2011 -С.64-68.

4. Гелбаум Б., Контпримеры в анализе / Б. Гелбаум, Дж. Олмстед.- М.: Мир, 1967.- 251 с.

5. Гурова З.И. Математический анализ - Начальный курс с примерами и задачами / З.И. Гурова, С.Н. Каролинская, А.П. Осипова.- М.:ФИЗМАЛИТ, 2012.-352 с.

6. Гурьянова, К.Н. Математический анализ : учеб. пособие / К. Н. Гурьянова, У. А. Алексеева, В. В. Бояршинов .- Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 330 с.

7. Далингер В.А. Методика обучения началам математического анализа .Учебник и практикум для академического бакалавриата / В.А. Далингер М.:-Юрайт, 2018.-162с.

8. Дорофеев Г.В. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова– М.: Просвещение, 2016.-336с.

9. Иванов О. Математический анализ для первокурсников / Иванов О., Климчук С. -М.: МЦНМО, 2016.-136 с.

10. Иноземцев С.А. Исследование последовательностей в интерактивном обучающем документе/ С.А. Иноземцев, К.В. Часов // Международный студенческий научный вестник.-2017.-№4-С.837-841.

11. Колягин Ю.М., Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – М.: Мнемозина, 2016.-264с.

12. Колягин Ю.М. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др. – М.: Просвещение, 2014.-304с.

13. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. В 3 томах. Т.1. / Л.Д. Кудрявцев – М.: Физматлит, 2015 г.-444с.

14. Мамедов А.Н. О методике использования контрпримеров в преподавании математического анализа в педвузах/ А.Н. Мемадов //Вектор науки ТГУ.-2013.-№2(13)-С.185-188.

15. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Ч.1. : учеб. для общеобразоват. учреждений (базовый уровень)/ А.Г. Мордкович, П.В. Семенов и др. -М. : Мнемозина, 2014. – 432с.

16. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Ч.1. : учеб. для общеобразоват. учреждений(профильный уровень)/ А.Г. Мордкович, П.В. Семенов и др. -М. : Мнемозина, 2014. – 424с..

17. Мордкович А.Г. Алгебра. 9 класс. Ч.1.: учеб. для общеобразоват. учреждений/ А.Г. Мордкович, П.В. Семенов и др. -М.: Мнемозина, 2016. – 272с.

18. Муравин Г. К. Алгебра. 9 класс. : учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. -М.: Дрофа, 2018.- 315с.

19. Муравин Г. К. Алгебра и начала математического анализа. 11кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений./ Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. -М.: Дрова, 2018.- 320с.

20. Мысливец С.Г. Математический анализ: Учеб. пособие для экон. специальностей /С.Г. Мысливец. Краснояр. гос. ун-т.-Красноярск, 2014.- 276 с.

21. Покровский В.П. Методика обучения математике: функциональная содержательно-методическая линия : учебно-метод. пособие/ В.П. Покровский. М.: Изд-во ВлГУ, 2014-143с.

22. Савостьянова Н.И. Математический анализ для инженеров и экономистов / Н.И. Савостьянова, Н.М. Федорова. М.: Факториал, 2018.-504с.

23. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления Том 1 / Г.М. Фихтенгольц- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. - 616с.

24. Фихтенгольц Г.М.. Основы математического анализа. Том 1 / Г.М. Фихтенгольц - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. - 440с.

25. Хинчин А.Я. Краткий курс математического анализа / А.Я. Хинчин - М.: URSS, 2018. -632с.

26. Шибинский В.М. Примеры и контрпримеры в курсе математического анализа / В.М. Шибинский -М. Высшая школа,2007.-544с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Конспект урока №1 из факультативного курса

Тема: Числовая последовательность, ее свойства, предел последовательности

Цели урока: Создать условия для усвоения знаний о последовательностях, формирования представления предела последовательности; организовать деятельность учащихся по первичному усвоению новых знаний и умению применять определение предела на практике.

Задачи урока:

1) Обучающие:

- Сформировать знания о последовательностях, ее монотонности и ограниченности.
- Обеспечить в ходе урока усвоение определения предела последовательности и отработать навыки использования определения предела на практике.
- Познакомить учащихся с методом доказательства, используя контрпример.

2) Развивающие:

- Развитие памяти, монологической речи, любознательности, познавательного интереса.
- Развитие самостоятельного мышления учащихся.
- Способствовать развитию математической речи, умению наблюдать, делать выводы доказывать и опровергать математические утверждения, применяя контрпримеры.

3) Воспитательные:

- Способствовать развитию культурного общения в группе,
- Воспитание внимания, самоконтроля, интереса к предмету.

Тип урока: изучение нового материала

Формы работы учащихся: индивидуальная, фронтальная.

Планируемые результаты:

1) Личностные: формирование интереса к предмету и волевого усилия для преодоления трудностей в обучении, формирование положительного отношения к изучению математики

2) Предметные: понимать геометрический смысл предела последовательности, научиться использовать определение предела при решении задач, овладение основами логического и алгоритмического мышления, уметь анализировать и обобщать.

3) Метапредметные: расширить интерес к методу доказательства с применением контрпримера, развитие способностей видеть математическую задачу в других дисциплинах и окружающей среде, развивать умение точно и грамотно выражать свои мысли, отстаивать свою точку зрения.

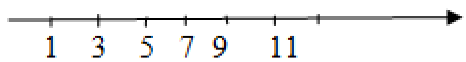
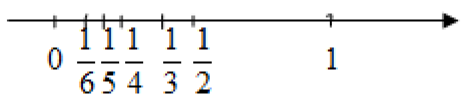
Ход урока:

1) Организационный момент (1 мин.)
2) Актуализация знаний учащихся (12 мин.)
3) Изучение нового материала (20 мин.)
4) Первичное закрепление (10 мин.)
5) Постановка домашнего задания (1 мин.)
6) Рефлексия(1мин.)

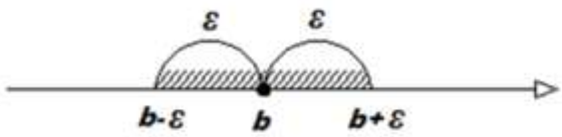
Деятельность учителя	Деятельность учащихся
Организационный момент	
Приветствие учащихся. Настраиваемся на работу. Проверяю отсутствующих.	Подготавливаются к уроку и настраиваются на работу.
Актуализация знаний учащихся	
В 9 классе на уроках алгебры мы уже встречались с понятием числовой последовательности. Рассматривали свойства некоторых последовательностей, способы их задания. Арифметическая и геометрическая прогрессии нами были изучены более подробно. Мы познакомились с формулами n-го члена прогрессии, суммы n первых членов прогрессии. Настало время вспомнить и обобщить изученный материал, систематизировать его и применить к более сложным понятиям. Обратимся к следующим примерам числовых последовательностей: **1)** 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, **2)** 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19,	Отвечают на вопросы учителя: В первом примере представлены члены геометрической прогрессии со знаменателем 2 $y_n = 2^n$. В примере (2) имеем последовательно расположенные нечетные числа, начиная с 5, $y_n = 2n + 3$. В третьем примере представлены члены геометрической прогрессии с n-членом $y_n = (\frac{1}{3})^n$

3) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$ Внимательно посмотрите на эти примеры. Что у них общего? Продолжите последовательности. Найдите формулу *n*-ого члена каждой последовательности.	
Таким образом, существует некий закон, по которому каждому из натуральных чисел (номеров членов) ставится в соответствие определенное число (соответствующий член последовательности). В примере (1) это соответствие выглядит так: <table><tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td><td>16</td><td>32</td><td>…</td><td>2^{n-1}</td><td>…</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>…</td><td>n</td><td>…</td></tr></table>Сформулируйте определение последовательности самостоятельно.	Говорят, что задана числовая последовательность, если всякому натуральному числу (номеру места) по какому-либо закону однозначно поставлено в соответствие определенное число (член последовательности).
Также последовательность определяют как функцию от натурального аргумента. Запишем продление. Функция вида $y=f(x)$, $x \epsilon N$ называют числовой последовательностью и обозначают y_1, y_2, y_3, $\ldots y_n$, …	Записывают в тетрадь
Из курса 9 класса вы также помните, что задать числовую последовательность можно несколькими способами. Назовите их.	Последовательность можно задать словесно, аналитически, рекуррентно. Приводят примеры.

Сейчас в парах вы должны придумать по одному примеру последовательности на каждый способ задания.	
Изучение нового материала	
Последовательность, как и функция, может возрастать или убывать. Как вы думаете, какая последовательность называется возрастающей, убывающей? Приведите примеры.	Последовательность называется возрастающей, если каждый ее член больше предыдущего. 1, 3, 5, …, $2n$-1 Последовательность называется убывающей, если каждый ее член меньше предыдущего. $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots \frac{1}{n}$
Изобразим на числовой прямой точками члены последовательности $y_n = n^3$, $c_n = -n^2$, $a_n = \frac{1}{\mathrm{n}}$. $y_n = n^3$  $c_n = -n^2$  $a_n = \frac{1}{n}$. 	Изображают в тетради чертежи. Вторая последовательность ограничена сверху -1. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху, если существует такое число $M \in R$, что для любого номера n, $x_n \leq M$ Третья последовательность имеет две

Заметим, что члены первой последовательности всегда больше 1, т.е. эта последовательность ограничена снизу и 1 – нижняя граница. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной снизу, если существует такое число $m \in R$, что для любого номера n, $x_n \geq m$ Для второй и третьей последовательности определите нижнюю границу самостоятельно. Сформулируйте определение ограниченной последовательности.	границы: нижнюю 0 и верхнюю 1 Последовательность (y_n) называется ограниченной, если можно указать такие два числа А и В, между которыми лежат все члены последовательности. $$A \leq y_n \leq B, \ (n=1, 2, 3, \ldots)$$
Рассмотрим две числовые последовательности. Изобразим их члены на числовой прямой Заметим, что члены последовательности (x_n) сгущаются около точки 0, а у второй (y_n):1, 3, 5, 7, 9, 11,…,2n-1,…;  (x_n):1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$  последовательности такой точки сгущения нет. В таких случаях мы будем говорить, что последовательность (x_n) сходится, а (y_n) расходится, а саму точку	Записывают определение предела последовательности. Число b называется пределом последовательности (y_n), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены данной последовательности, начиная с некоторого номера. Записывают формулы.

сгущения будем называть пределом последовательности. Точка а называется предельной точкой последовательности, если в любой ее окрестности содержится бесконечное множество точек последовательности. Последовательность $\{x_n\}$, где x_n = 1/n имеет одну предельную точку a = 0. А Последовательность$\{ x_n \}$, где x_n = - (1)n имеет две предельные точки a_1 = 1 и a_2 = - 1. Объясните почему? Долгое время математики всего мира пытались дать строгое определение предела на математическое языке с использование математических символом. Именно математик Коши сформулировал определение, используя термин окрестность точки. Определение: число b называется пределом последовательности $\{ x_n \}$, если для любой его ε -окрестности (ε >0) существует натуральный номер N (ε)– такой, что для всех $n \geq N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\|x_n-b\|<\varepsilon$.	



Пояснение к определению

Если число b-предел последовательности, то образно выражаясь, окрестность точки b(интервал $(b-\varepsilon ;b+\varepsilon)$- это «ловушка» для последовательности: начиная с некоторого номера $n0$ эта ловушка, в которую попадают $xn0$ и все последующие члены последовательности. Чем меньше выбирается окрестность, тем дольше «сопротивляется » последовательность, но потом всё равно попадает, в выбранную окрестность.

Так, например, «бесконечный хвост» последовательности $xn = 1/n$ полностью зайдёт в любую сколь угодно малую -окрестность точки . Таким образом, это значение является пределом последовательности $xn = 1/n$ по определению.

Итак, вы определили, что у последовательности $\{xn\}$ предел равен 0. Кроме того, И вообще, если

А если $|q|>1$ т.е. мы имеем последовательность, например,

3^1,3^2,3^3,… Эта последовательность явно расходится, так как нет точки сгущения.	
Закрепим данное определение на практике. Доказать $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+3}=0$. Решение: В нашем случае, $x_n=\frac{1}{n+3}$, a=0. Рассмотрим *произвольную* ε - окрестность точки $a=0$ и проверим, $\exists N(\varepsilon)\in \mathbf{N}$ найдётся ли номер такой, что все члены с большими номерами $(\forall n > N(\varepsilon))$ окажутся внутри этой окрестности:$\lvert x_n-a\rvert<\varepsilon$, $\left\lvert\frac{1}{n+3}-0\right\rvert<\varepsilon$, $\left\lvert\frac{1}{n+3}\right\rvert<\varepsilon$. Чтобы показать существование искомого номера N(ε), выразим n через ε. Получаем $\frac{1}{\varepsilon}<n+3,\, n>\frac{1}{\varepsilon}-3$. Поскольку слева речь идёт о натуральных номерах, то округлим правую часть до целых: $n>\left[\frac{1}{\varepsilon}-3\right]$. Выберем в качестве N(ε) какое-нибудь натуральное число, удовлетворяющее $N(\varepsilon)>\frac{1}{\varepsilon}-3$. Например, число $N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}-3\right]+1$, где	Алгоритм: 1) Составить $\lvert x_n-a\rvert<\varepsilon$ 2) Выразить n через ε 3) Выбрать $N(\varepsilon)$ 4) Показать выполнение требования из определения 5) Записать ответ

$\left[\frac{1}{\varepsilon}-3\right]$ целая часть числа $\frac{1}{\varepsilon}-3$, т.е. целое число, не превосходящее данное. Тогда для всех $n \geq N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\lvert x_n-0\rvert=\frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{N(\varepsilon)+3}<\varepsilon$. Таким образом, число a=0 является пределом последовательности $x_n=\frac{1}{n+3}$ по определению. Что и требовалось доказать. Теперь, работая в парах, составьте алгоритм доказательства предела по определению.	
Сходящиеся последовательности, т.е. те, которые имеют предел, обладают рядом свойств. 1. Если последовательность сходится, то только в одному пределу. Рассмотрим последовательность $x_n=(-1)^n+\frac{1}{n}$ и распишем ее члены подробно: $0, \frac{3}{2},-\frac{2}{3}, \frac{5}{4},-\frac{4}{5}, \frac{7}{9},-\frac{6}{7}, \frac{9}{8}, \frac{8}{9}, \ldots$ Эту последовательностью можно разбить на две подпоследовательности с нечетными номерами : $0,-\frac{2}{3},-\frac{4}{5},-\frac{6}{7},-\frac{8}{9}, \ldots$ и четными: $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \ldots$. Заметим также, что члены с подпоследовательности с четными номерами приближаются к 1, а члены с	Придумывают свои контрпримеры для опровержения обратного утверждения ко второму свойству. 1) -1, 0, 1, -1, 0, 1, … 2) 1, ½, 2, 1/3, 3, ¼, 4, …

нечетными стремятся к -1. Очевидно, что не найдётся такого номера, после которого все члены $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ окажутся в малой ε-окрестности точки 1, например. Нечетные члены будут выскакивать к -1. Аналогично -1 не предел данной последовательности. 2. Если последовательность сходится, то она ограничена. Давайте построим обратное утверждение для этого свойства. Выделим условие: последовательность сходится, заключение: последовательность ограничена. Поменяем местами условие и заключение и получим обратное утверждение: Если последовательность ограничена, то она сходится. Чтобы доказать, что обратное утверждение неверно достаточно привести контрпример. Т.е. нам достаточно придумать одну последовательность, которая докажет, что утверждение не выполняется. Рассмотрим, например последовательность 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1,… Она действительно ограничена снизу 1 и сверху 3, но она не сходится. Таким образом, мы привели контрпример, который доказывает, что обратное	

утверждение не верно. Сможете привести свои контрпримеры? 3)Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится.	
Первичное закрепление	
1. Задать n-член последовательности: А)3, 9, 27, 81,… Б)9,16,25,36,… 2. Исследовать на монотонность и ограниченность последовательность $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$. 3. Изобразить на числовой прямой несколько членов последовательности и определить, к какому числу они приближаются: А) $x_n = \frac{(-1)\hat{}n}{n}$ Б) $b_n = \frac{n-2}{n}$ 4. Пользуясь определением предела последовательности доказать, что предел последовательность А) $x_n = \frac{n}{n+1}$ равен 1 Б) $c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ равен 0 В) $a_n = \frac{n-1}{n}$ равен 1	1. А)$y = 3^n$ Б) $y = (2+n)^2$ 2. $a_{n+1} - a_n = \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2} = \frac{(2n+3)(n+2)-(2v+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{3}{(n+3)(n+2)} > 0$ Т.е. при любом n $a_{n+1} > a_n$, значит последовательность возрастающая. Она ограниченная снизу $a_1 = 1$. Определим верхнюю границу: $a_n = \frac{2n+1}{n+2} = 2 - \frac{3}{n+2} < 2$, следовательно, последовательность ограничена сверху 2. 3. А) $x_n = \left\{-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots\right\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)\hat{}n}{n} = 0$ Б) $b_n = \left\{-1; 0; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \dots\right\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-2}{n} = 1$ 4. А) $\left\lvert\frac{n}{n+1} - 1\right\rvert < \varepsilon$; $\left\lvert\frac{1}{n+1}\right\rvert < \varepsilon$; $n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$; $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$; $N(\varepsilon) =$

	$\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$. Тогда при всех $n \geq N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left|\frac{n}{n+1}-1\right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N(\varepsilon)+1} < \varepsilon$ Значит $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$ Б) $\left|\frac{1}{\sqrt{n}}-0\right| < \varepsilon\,; \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon; \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon};\ \ n > \frac{1}{\varepsilon^2}; N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]+1$. Тогда $\frac{1}{\sqrt{N(\varepsilon)}} < \varepsilon$ и при всех $n \geq N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left|\frac{1}{\sqrt{n}}-0\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{N(\varepsilon)}} < \varepsilon$.Значит $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ В) $\left|\frac{n-1}{n}-1\right| < \varepsilon;\ \ \frac{1}{n} < \varepsilon;$ $N(\varepsilon) = [1/\varepsilon]+1$. Тогда при всех *n≥N(ε)* выполняется $\left|\frac{n-1}{n}-1\right| = 1/n \leq \frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon$, значит $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} = 1$
Постановка домашнего задания	
Сегодня вы узнали много новой информации, новых определений и свойств. Ваше задание на дом: сделать шпаргалку по новому материалу. Она не должна содержать много текста, только схемы. На следующем уроке устроим конкурс на самую лучшую шпаргалку.	
Рефлексия	
Учитель проводит рефлексию	Выполняют задание

«3М». На листочках необходимо кратко изложите 3 момента того, что на уроке получилось хорошо и предложить одно действие, которое улучшит работу на следующем. Благодарит учащихся за урок.	учителя. Благодарят учителя.

Конспект урока №2 из факультативного курса

Тема: Свойства пределов. Вычисления пределов

Цели урока: Изучить свойства предела последовательности; сформировать умения вычислять пределы последовательности; вывести формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии; выработать практические навыки применения этой формулы при решении заданий.

Задачи урока:

1) Обучающие:

- Актуализировать знания обучающихся по теме Последовательность, ее свойства.
- Закрепить полученные навыки и умения нахождения предела по определению.
- Обеспечить в ходе урока усвоение основных свойств предела последовательности.
- Вывести формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии.

2) Развивающие:

- Развитие умения анализировать и находить пути решения поднимаемой проблемы
- Развитие самостоятельного мышления у учащихся, а также критического мышления при помощи поиска контрпримеров к математическим ситуациям.

- Способствовать развитию математической речи, умению наблюдать, делать выводы доказывать и опровергать математические утверждения, применяя контрпримеры.

3) Воспитательные:

- Способствовать развитию таких мыслительных операций, как анализ и обобщение.
- Воспитание внимания, самоанализа, самоконтроля, интереса к предмету.
- Формировать умение ввести диалог с учителем и сверстниками, работать в парах.

Тип урока: изучение нового материала

Формы работы учащихся: индивидуальная, фронтальная, парная.

Планируемые результаты:

1) Личностные: создать условия для формирования представлений о причинах успехов в учёбе, формирование навыков абстрактного мышления, формирование волевого усилия для преодоления трудностей в обучении

2) Предметные: научить использовать свойства предела последовательности при его вычислении; расширить представление о сумме бесконечной геометрической прогрессии, овладение основами логического и алгоритмического мышления, уметь анализировать и обобщать.

3) Метапредметные: развитие способностей замечать и исправлять свои ошибки; научиться работать в парах; потренироваться использовать контрпримеры при изучении математики; расширить интерес к методу доказательства с применением контрпримера.

Ход урока:

1) Организационный момент (1 мин.)
2) Актуализация знаний учащихся (10 мин.)
3) Изучение нового материала (15 мин.)

4) Первичное закрепление (17 мин.)
5) Постановка домашнего задания (1 мин.)
6) Рефлексия (1 мин.)

Организационный момент	
Приветствие учащихся. Настраиваемся на работу. Проверяю отсутствующих.	
Актуализация знаний учащихся	
Итак, на прошлом занятии вы изучили много новых определений и свойств, теорем. Дома вам было задано подготовить шпаргалку. Давайте обсудим, что вы поместили на свои шпаргалки? У вас есть 5 минут, чтобы разместить свои шпаргалки на доске при помощи магнитов и рассмотреть работы своих одноклассников. Чтобы определить лучшую шпаргалку, нужно сформулировать критерии оценки.	Рассказывают, какой материал поместили на шпаргалки. Демонстрируют свои работы на доске. Придумывают критерии для оценки шпаргалок (кратность, четкость, схематичность, выделена важная информация, …)
На прошлом уроке вы познакомились с еще одним способом доказательства математических предложений: контрпримером. Чтобы опровергнуть утверждения, что ограниченная последовательность сходится, вы придумали несколько различных контрпримеров. Сейчас	Работают в парах. 1) 3*4:6, но 3 не делится на 6, и 4 не делится на 6 2) 9:3, но 9 не делится на 6 3) (12+3):5, но 12 не делится на 5 и 3 не делится на 5 4) a + b > 0 a > -b. Достаточно, чтобы число

перед вами на партах лежат карточки, на карточках написаны различные математические предложения. Ваша задача в парах определить, является ли данное предложение истинным. Если нет, доказать это, используя контрпримеры. 1) Если произведение двух множителей делится на некоторое число, то и какой-нибудь из этих множителей делится на это число 2) Если число делится на 3, то она делится на 6. 3) если сумма двух слагаемых делится на некоторое число, то и каждое слагаемое делится на это число 4) если a + b > 0 , то a и b - числа положительные 5) если a*b > 0 , то a и b - числа положительные.	большее по модулю было положительно: -2+6>0 5) Произведение двух отрицательных числе положительно: -3*(-7)=21
Изучение нового материала	
На практике под знаком предела частно встречаются большие, объёмные конструкции, и поэтому найти предел от таких выражений бывает не легко. Поэтому для вычисления пределов необходимо знать следующие соотношения: 1) Постоянный множитель	Оформляют в тетради теоретический материал. Доказательство , $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n)=a-b$: Зададим ε>0 и выберем N(ε), так чтобы выполнялись $\lvert x_n - a\rvert < \frac{\varepsilon}{2}, \lvert y_n - b\rvert < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

можно выносить за знак предела $\lim\limits_{n\to\infty} kx_n = ka$ 2) Предел стационарной последовательности равен значению любого члена последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$ 3) *Теорема*: Если последовательности { x_n } и { y_n } имеют конечные пределы, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то их сумма, разность, произведение и отношения также имеют конечные пределы, и выполняется: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a+b$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a-b$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ $(b\neq 0)$ Докажем, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a+b$. Для этого зададим ε>0 и выберем N(ε), так чтобы выполнялись $\lvert x_n - a\rvert < \frac{\varepsilon}{2}, \lvert y_n - b\rvert < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда, $\lvert x_n + y_n - (a+b)\rvert \leq \lvert x_n - a\rvert + \lvert y_n - b\rvert < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ Докажите, что , $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a-b$ самостоятельно	$\lvert x_n - y_n - (a-b)\rvert =$ $\lvert (x_n - a) + (-y_n + b)\rvert =$ $\lvert x_n - a\rvert + \lvert -y_n + b\rvert =$ $\lvert x_n - a\rvert + \lvert y_n - b\rvert < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$
В процессе обучения естественно возникает вопрос, а обратное утверждение теоремы всегда ли верно? То есть, если сумма, разность,	Предлагают свои примеры последовательностей (например, $x_n = y_n = n$ не имеют пределов, однако предел разности и

произведение и частное двух последовательности { x_n } и { y_n } имеют пределы, то имеет ли предел каждая из этих последовательностей? Покажем это с помощью контрпримера. Рассмотрим последовательности $x_n = (-1)^{n+1}$ и $y_n = (-1)^n$ расходящиеся, то есть не имеют предела. Составим сумму этих последовательностей: $(-1)^{n+1} + (-1)^n = (-1)^n * ((-1)^1 + 1) = 0$. $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$. Таким образом, сумма данных последовательностей равно нулю, следовательно предел этой суммы существует и равен нулю. Рассмотрим предел произведения $\lim\limits_{x\to\infty}((-1)^{n+1} * (-1)^n) = \lim\limits_{x\to\infty}(-1)^{2n+1} = -\lim\limits_{x\to\infty}(-1)^{2n} = -1$. Предел частного $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n} = \lim\limits_{x\to\infty}(-1) = -1$. Чтобы показать справедливость утверждения для разности двух последовательностей достаточно рассмотреть две совпадающие последовательности, например $c_n = (-1)^n$ и $d_n = (-1)^n$	частного существует)
Запишем пример применения этих свойств. Необходимо найти предел последовательности:	Работа у доски $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} * \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 * 0 = 0$

$x_n = \frac{1}{n^2}$	
В 9 классе вы изучали последовательности – прогрессии. Вы помните, как найти сумму первых членов геометрической последовательности. Кто готов назвать мне эту формулу? Теперь у вас достаточно знаний чтобы искать __сумму бесконечной геометрической прогрессии. Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ Пусть $S_1=b_1$, $S_2=b_1+b_2$, $S_3=b_1+b_2+b_3$, ... $S_n= b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n$. Получилась последовательность S_1, S_2, $S_3, \ldots$, $S_n, \ldots$ Как всякая последовательность она может сходится или расходится. Если последовательность S_n сходится к пределу S, то число S называют суммой геометрической прогрессии. Пусть надо найти сумму n первых членов геометрической прогрессии: $S_n= b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n$,то	Формула суммы *n* первых членов геометрической последовательности $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ Оформляют выведение формулы для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ Пусть $S_1=b_1$, $S_2=b_1+b_2$, $S_3=b_1+b_2+b_3$, ... $S_n= b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n$. $S_n= b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n$,то $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Если $\|q\| < 1$. Наедём:. $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} \lim_{n\to\infty}(1-q^n)$ $= \frac{b_1}{1-q}\left(\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} q^n\right)$ $= \frac{b_1}{1-q}(1-0) = \frac{b_1}{1-q}$

$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.Рассмотрим случай, когда знаменатель q геометрической прогрессии удовлетворяет неравенству $\|q\|<1$. Наедём:. $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} \lim_{n\to\infty}(1-q^n)$ $= \frac{b_1}{1-q}\left(\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} q^n\right)$ $= \frac{b_1}{1-q}(1-0) = \frac{b_1}{1-q}$ Поэтому $S = \frac{b_1}{1-q}$ для $\|q\|<1$.	Поэтому $S = \frac{b_1}{1-q}$ для $\|q\|<1$.
Первичное закрепление	
Найти пределы последовательностей. 1) $l_n = \frac{k}{n^4}$ 2) $c_n = \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + 3$ 3) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+4}$ 4) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{n^2}+1\right) * \left(-\frac{8}{n^3}-2\right)$	1) $\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n^4} = k * \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} * \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} * \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} * \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ 2) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + 3\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} + \lim_{n\to\infty} 3 = 0 - 0 + 3 = 3$ 3) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{4}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n^2}\right)} = \frac{2}{1} = 2$ 4) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{n^2}+1\right) * \left(-\frac{8}{n^3}-2\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{n^2}+1\right) * \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{8}{n^3}-2\right) = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} + \lim_{n\to\infty} 1\right) * ($

	$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{8}{n^3}\right)-\lim_{n\to\infty}2)=(0+1)*$ $(0-2)=-2$
1. Найти сумму бесконечной геометрической прогрессии $3,1,\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\ldots$ 2. Решить уравнение, если $\|x\|<1: 1+x+x^2+x^3+\cdots=4$ 3. В квадрат со стороной а вписан второй квадрат, вершины которого – середины сторон первого. Во второй квадрат писан аналогичным образом третий и так далее. Найти сумму площадей этих квадратов.	1. b_1=3, q=$\frac{1}{3}$, то есть $\|q\|<1$. Значит $$S=\frac{3}{1-\frac{1}{3}}=4{,}5$$ 2. $b_1=1$, $q=x$ $S=\frac{1}{1-x}=4$; $1-x=1/4$; $x=3/4$ 3. $S_1=a^2$ Сторона второго равна $\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$ Таким образом, площадь второго $S_2=\frac{a^2}{2}$ Сторона третьего квадрата $\sqrt{\frac{a^2}{8}+\frac{a^2}{8}}=\frac{a}{2}, S_3=\frac{a^2}{4}$ и т.д. Получаем последовательность $a^2,\frac{a^2}{2},\frac{a^2}{4},\ldots$ $b_1=a^2$, $q=1/2$, $S=\frac{a2}{1-1/2}=2$ a^2
Постановка домашнего задания	

Найти краткую информацию о том, когда были впервые использованы пределы, какие ученые занимался их изучением и для чего они нужны.	Записывают в дневники.
Рефлексия	
На листочках поставьте галочку Сегодня на уроке: -мне было трудно и скучно -мне было трудно, но интересно -легко справился с заданиями	

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Диагностическая работа 1

1) Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n) и b_3, если S=-10, b_1=-5

2) Решите уравнение, если известно, что $|x|$<1:

$x+x^2+x^3+...+x^n+...=4$

3) Указать характер монотонности последовательностей

$y_n = 2n - 1$; $y_n = 5^{-n}$

4) Укажите неправильные утверждения и объясните почему, используя контрпример.

А) число a не является пределом последовательности, если

можно выбрать такую ε - окрестность точки a, за пределами которой будет находиться бесконечное число элементов последовательности.

Б) Ограниченная последовательность сходится.

В) Точка a называется пределом последовательности, если в любой ее окрестности содержится бесконечное множество точек последовательности.

5) Вычислить предел

А) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2}$

Б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n} + \frac{8}{\sqrt{n}} - 4 + \frac{7}{n^3})$

6) Постройте эскиз графика какой-нибудь функции $y=f(x)$, если

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$=5 и функция возрастает

7) Найти предел функции

А) $\lim\limits_{x\to 1}(x^3 - 3x + 5)$

Б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2x+3}{4x+2}$

Диагностическая работа 2

1) Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n) и b_3,если S=2, b_1=3
2) Решите уравнение, если известно, что $|x|<1$: $2x-4x^2+8x^3-16x^4+\ldots=3/8$
3) Указать характер монотонности последовательностей $y_n = \frac{2}{3n+1}$; $y_n = \sqrt{n+8}$

4) Укажите неправильные утверждения и объясните почему, используя контрпример.

   А) Число a не является пределом последовательности, если можно выбрать такую ε - окрестность точки a, за пределами которой будет находиться бесконечное число элементов последовательности.

   Б) Сходящаяся последовательность имеет не менее одного предела.

   В) Точка a называется пределом последовательности, если в любой ее окрестности содержится бесконечное множество точек последовательности.
5) Вычислить предел

   А) $\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{17}{n^3})$

   Б) $\lim\limits_{n\to\infty}(6-\frac{7}{n}+\frac{3}{\sqrt{n}}+\frac{2}{n^2})$
6) Постройте эскиз графика какой-нибудь функции $y=f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-2$ и $f(x)<0$ на $(-\infty; +\infty)$
7) Найти предел функции

   А) $\lim\limits_{x\to-1}(x^2+6x-8)$;

   Б) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{7x-14}{21x+2}$