



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)**

Физико-математический факультет  
Кафедра математики и методики обучения математике

**«ИССЛЕДОВАНИЕ ВСПЛЕСКОВ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С  
ЗАПАЗДЫВАНИЕМ»**

Выпускная квалификационная работа  
по направлению 44.03.05 Педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата  
«Математика. Экономика»

Проверка на объем заимствований:  
94,77 % авторского текста

Выполнил:  
Студент группы ОФ-513/086-5-1  
Ветлугина Татьяна Викторовна

Работа рекомендована к защите  
«29» марта 2019 г.  
И.о. зав. кафедрой МиМОМ  
Шумакова Е.О. Шумакова Е.О.

Научный руководитель:  
к.ф.-м.н., доцент кафедры МиМОМ  
Нигматулин Равиль Михайлович

Челябинск  
2019

## Оглавление

Введение.....	3
Глава 1. Общая теория линейных разностных уравнений.....	5
§1. Основные определения и общее решение .....	5
§2. Асимптотическое поведение решений линейных разностных уравнений .....	7
Глава 2. Исследование всплесков решений разностных уравнений с одним запаздыванием .....	9
§1. Численные эксперименты по выявлению всплесков у разностного уравнения с одним запаздыванием .....	9
§2. Вывод формулы общего решения разностного уравнения с одним запаздыванием.....	16
§3. Периодические решения и всплески.....	17
§4. Всплески решения разностного уравнения $k$ порядка для вероятностной задачи.....	26
Заключение .....	31
Список литературы .....	32
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 .....	34
ПРИЛОЖЕНИЕ 2 .....	36
ПРИЛОЖЕНИЕ 3 .....	39

## Введение

Разностные уравнения применяются для исследования различных моделей в естественных и технических науках. Такие уравнения возникают, например, при моделировании процессов с дискретным временем, а также при численном интегрировании дифференциальных уравнений [1]. Теория линейных разностных уравнений во многом схожа с теорией линейных дифференциальных уравнений, хотя имеет свои особенности [1, 8, 13].

Теория разностных уравнений в настоящее время активно развивается. Одной из новых трудно решаемых задач является выявление условий, при которых возникают так называемые всплески, и определение величины отклонения для них [9, 12, 13].

На практике простейшие разностные уравнения возникают при исследовании известного логистического отображения. Логистическое отображение – это полиномиальное отображение, которое описывает, как меняется численность популяции с течением времени и имеет сложное поведение решений для различных значений  $r$  [8]. Математическая формулировка отображения

$$x_{n+1} = r x_n(1 - x_n),$$

где  $x_n$  принимает значения от 0 до 1 и отражает численность популяции в  $n$  – ом году,  $r$  – положительный параметр, характеризующий скорость размножения (роста) популяции [8]. Примером простейшего линейного разностного уравнения также может служить формула вычисления величины банковского вклада или оставшегося долга по выплате кредита [8].

На основании изложенного выше, в работе ставится цель: выявить наличие всплесков решений разностных уравнений с запаздыванием и оценить их величину.

Для достижения цели требуется решить следующие задачи:

1. Найти и проанализировать материалы о всплесках решений разностных уравнений с запаздыванием.

2. Выявить условия появления всплесков.
3. Вывести формулу решения разностного уравнения  $k$  – ого порядка с начальными условиями, определяющими появление всплесков.
4. Исследовать связь асимптотического поведения и всплесков решений линейных разностных уравнений.

Работа состоит из двух глав. В первой главе, которая состоит из двух параграфов, представлены теоретические основы данной темы: основные определения и алгоритмы. Вторая глава состоит из 4 параграфов, в которых разбираются поставленные задачи исследования.

В работе применяются методы теории разностных уравнений, а также методы вычислительных экспериментов.

# Глава 1. Общая теория линейных разностных уравнений

## §1. Основные определения и общее решение

Равенство вида  $x_n = f(n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k})$ , где  $f$  – некоторая функция,  $(x_n)$  – числовая последовательность, называется разностным уравнением порядка  $k$ .

Пусть имеется последовательность  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , члены которой связаны соотношением

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_k x_{n-k}, n \geq k + 1, \quad (1)$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_k$  – заданные числа,  $a_k \neq 0$ . Такие последовательности называются рекуррентными, а соотношение (1) называется однородным линейным разностным уравнением порядка  $k$ . Более точно его называют разностным уравнением с постоянными коэффициентами [1].

Решением разностного уравнения (1) называется последовательность  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ , для которой при любом  $n \geq 1$  выполняется равенство [12]

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_k x_{n-k} \quad (2)$$

При заданных коэффициентах  $a_1, a_2, \dots, a_k$  каждое решение  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  однозначно определяется начальными условиями

$$x_i = \alpha_i, 1 \leq i \leq k \quad (3)$$

Разностным уравнением с одним запаздыванием будем называть уравнение вида (4), в котором пропущено некоторое количество членов [12]

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-k}, \quad a, b \in R, \quad n > k \quad (4)$$

Для дальнейшего изложения мы будем рассматривать начальные условия специального вида:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_k = 1. \quad (5)$$

Для исследования таких уравнений необходимо по заданным начальным условиям определить формулу общего члена в явном виде для последовательности, которая является решением уравнения (2). В общей

теории рекуррентных соотношений доказывается, что любое решение разностного уравнения можно представить в виде линейной комбинации  $k$  линейно независимых решений  $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k)}$  таких, что

$$x_n = C_1 x_n^{(1)} + C_2 x_n^{(2)} + \dots + C_k x_n^{(k)} \quad (6)$$

Формула вида (6) называется формулой общего решения разностного уравнения. Любое решение, полученное из (6) при конкретных значениях констант  $C_1, C_2, \dots, C_k$  называется частным решением. Среди частных решений этого уравнения обязательно найдутся последовательности – геометрические прогрессии  $x_n = \lambda, \lambda \neq 0$  [1]. Подставив в (6) получим характеристическое уравнение разностного уравнения:

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k = 0$$

Для нахождения решений в виде геометрической прогрессии нужно найти корни характеристического уравнения.

Существует 2 случая корней:

- Все корни действительные
- Среди корней есть комплексные корни

В 1 случае если все корни различные, то система линейно независимых решений будет иметь вид  $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n$ , а общее решение будет иметь вид

$$x_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + \dots + C_k \lambda_k^n.$$

Если корни будут кратные, общее решение будет иметь вид  $x_n = \sum_{i=1}^s \lambda_i^n \cdot P(n)$ , где  $\deg P(n) = m_i - 1$ , если  $s$  – количество различных корней,  $m_i - 1$  кратность соответствующего корня [1].

В случае существования комплексных корней каждый корень будет иметь комплексно-сопряженный, соответственно каждой паре комплексных корней будет соответствовать пара решений, являющихся линейно независимыми. Тогда общее решение будет содержать линейную комбинацию решений, соответствующих действительным и парам комплексных корней [1].

Если комплексные корни будут кратными, то общим решением будет линейная комбинация из действительных корней и пары комплексно сопряженных корней (если  $m_s$ - кратность комплексного корня, то получим  $2m_s$  последовательности линейно независимых решений) [1].

## §2. Асимптотическое поведение решений линейных разностных уравнений

Важным свойством разностных уравнений и их решений является устойчивость. Решение разностного уравнения называется устойчивым, если малое изменение начальных условий влечет малое изменение исходного решения. Дадим более формализованное определение устойчивости [10, 13].

Нулевое решение уравнения разностного уравнения вида (2) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого наперед заданного числа  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , что для всех решений  $x_n$  уравнения (2) с начальными условиями вида (3) и  $\max|\alpha_i| < \delta(\varepsilon)$  при  $n \geq k + 1$  получим  $|x_n| < \varepsilon$ .

Устойчивое по Ляпунову положение равновесия нулевого решения разностного уравнения (2) называется асимптотически устойчивым, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$ .

Под областью устойчивости уравнения (4) на плоскости коэффициентов  $(a, b)$  будем понимать множество  $D(k)$  таких пар  $(a, b)$ , что уравнение (5) с данными коэффициентами  $a, b$  и запаздыванием  $k$  будет асимптотически устойчивым [1].

Особенностью решений устойчивых разностных уравнений с запаздываниями является наличие больших отклонений решений от положения равновесия, также называемых всплесками [10].

Всплеском решения  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  устойчивого разностного уравнения с запаздыванием вида (4) назовем число  $P = \max|x_n|$  при  $n \geq k + 1$  [10].

Проанализировав уже известные материалы по теории разностных уравнений, будем проводить исследования, которые помогут выявить условия появления всплесков, их характер, существование верхней границы всплеска, а также вывести формулу решения разностного уравнения с одним запаздыванием при заданных начальных условиях и изучить применение полученных знаний при решении задач по теории вероятностей.



## Глава 2. Исследование всплесков решений разностных уравнений с одним запаздыванием

### §1. Численные эксперименты по выявлению всплесков у разностного уравнения с одним запаздыванием

Рассмотрим разностное уравнение с одним запаздыванием вида (4) с начальными условиями вида (5).

В работе на основании численных экспериментов выявляются некоторые закономерности и оценки отклонений решений разностного уравнения (4) с одним запаздыванием равным  $k = 2$  или  $k = 3$  при начальных условиях (5). При выполнении поставленных задач основные вычисления будем проводить с помощью программы Wolfram Mathematica.

В ходе изучения основной литературы было выявлено, что появление всплесков «типично» для рассматриваемого разностного уравнения (4) в случае, если коэффициенты уравнения  $a, b$  лежат вне так называемой области Кона  $|a| + |b| > 1$ , но внутри области устойчивости разностного уравнения с одним запаздыванием [4]. Такова, например, следующая область в плоскости коэффициентов уравнения (4)

$$1 < a < 1 - b, \quad -\frac{1}{k-1} \leq b < 0.$$

Меняя коэффициенты уравнения и коэффициент запаздывания, получаем различные варианты последовательностей и всплесков. Проводя такие численные эксперименты, получили следующие результаты (Табл.1, Табл. 2).

Таблица 1. Возможные случаи появления феномена всплеска при коэффициентах, лежащих вне области Кона и корни соответствующего характеристического уравнения при  $k = 3, k = 4$ .

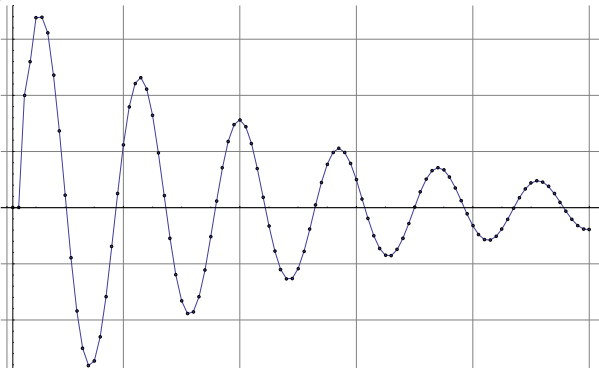
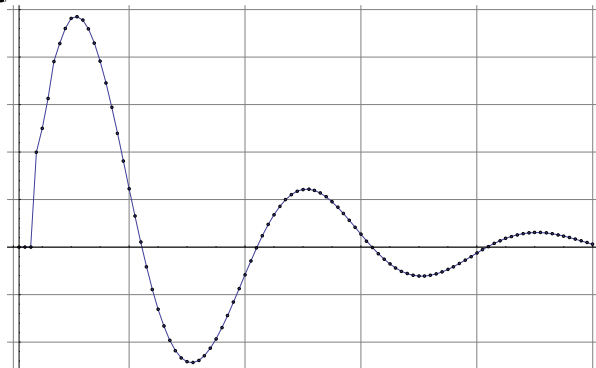
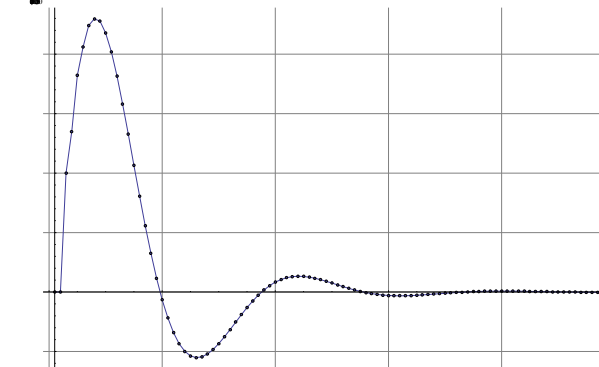
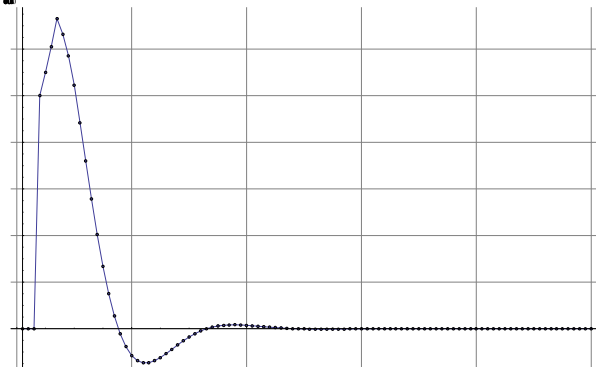
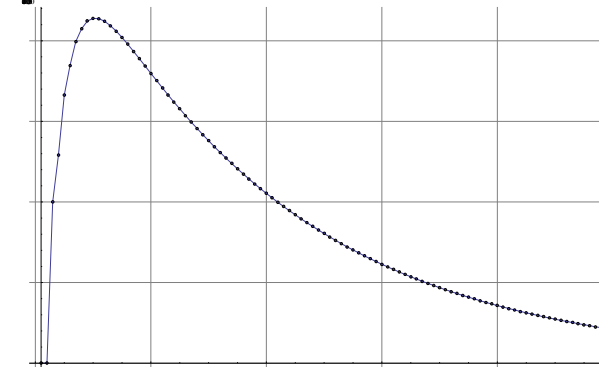
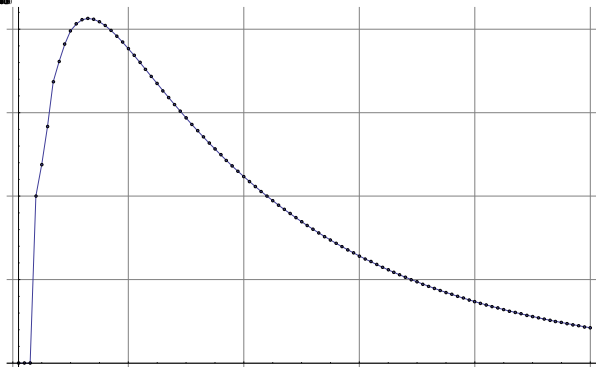
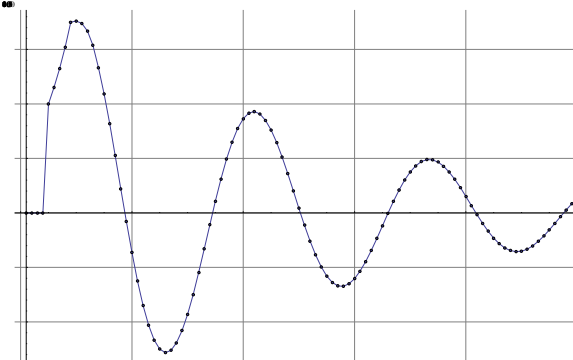
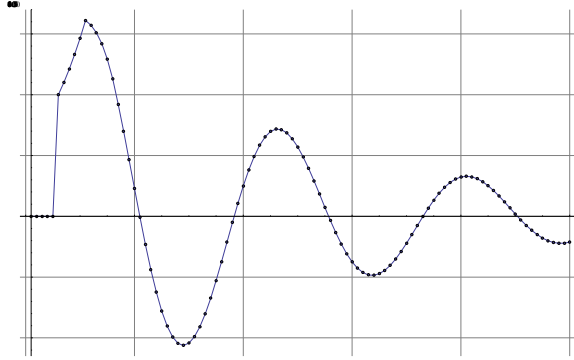
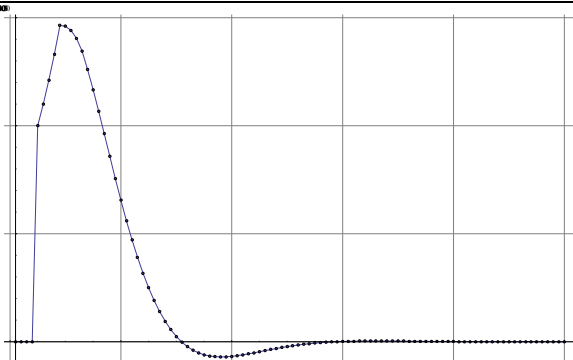
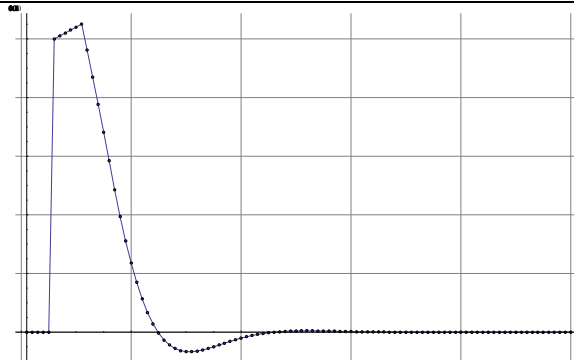
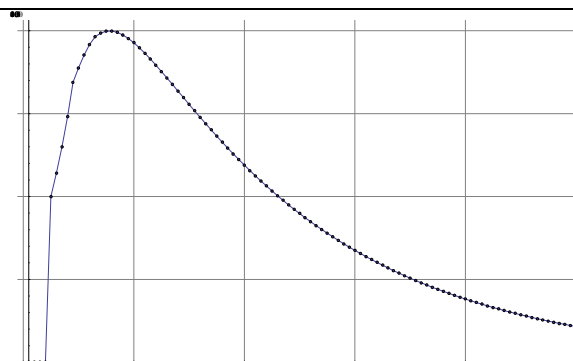

	
<p><math>k = 3, a = 1.3, b = -0.5</math>  <math>\{-0.52, 0.91 \pm 0.35i\},</math></p>	<p><math>k = 4, a = 1.25, b = -0.3</math>  <math>\{-0.33 \pm 0.46i, 0.95 \pm 0.15i\}</math></p>
	
<p><math>k = 3, a = 1.35, b = -0.4</math>  <math>\{-0.47, 0.91 \pm 0.16i\}</math></p>	<p><math>k = 4, a = 1.1, b = -0.2</math>  <math>\{-0.3 \pm 0.42i, 0.85 \pm 0.18i\}</math></p>
	
<p><math>k = 3, a = 1.29, \quad b = -0.3</math>  <math>\{-0.42, 0.74, 0.97\},</math></p>	<p><math>k = 4, b = -0.2 \quad a = 1.19</math>  <math>\{0.80, 0.97, -0.29 \pm 0.41i\},</math></p>

Таблица 2. Возможные случаи появления феномена всплеска при коэффициентах, лежащих вне области Кона и корни соответствующего характеристического уравнения при  $k = 5$ ,  $k = 6$ .

 <p> <math>k = 5, a = 1.15, b = -0.25</math>  <math>\{-0.61, -0.079 \pm 0.65i, 0.96 \pm 0.19i\}</math> </p>	 <p> <math>k = 6, a = 1.1, b = -0.2</math>  <math>\{-0.54 \pm 0.36i, 0.13 \pm 0.69i, 0.96 \pm 0.17i\}</math> </p>
 <p> <math>k = 5, a = 1.1, b = -0.15</math>  <math>\{-0.55, -0.07 \pm 0.58i, 0.89 \pm 0.10i\}</math> </p>	 <p> <math>k = 6, a = 1.01, b = -0.1</math>  <math>\{-0.48 \pm 0.32i, 0.12 \pm 0.61i, 0.87 \pm 0.13i\}</math> </p>
 <p> <math>k = 5, a = 1.14, b = -0.15</math>  <math>\{-0.55, 0.84, 0.97, -0.064 \pm 0.57i\}</math> </p>	 <p> <math>k = 6, a = 1.03, b = -0.05</math>  <math>\{0.68, 0.97, -0.42 \pm 0.28i, 0.11 \pm 0.53i\}</math> </p>

В ходе численных экспериментов можно наличие всплесков решений подтверждается. Если решение разностного уравнения осциллирующее (т.е. пересекает горизонтальную ось бесконечно много раз), то всплеск будет наблюдаться до первого пересечения с горизонтальной осью. В противном случае найти точку, в которой будет всплеск затруднительно. Форма всплеска зависит от корней характеристического уравнения: так при  $k = 3$  всплеск будет колебательный, если уравнение имеет комплексно-сопряженные корни. При  $k = 4$  всплески будут колебательными, если все 4 корня будут комплексно-сопряженными. При этом можно заметить, что действительные корни в уравнении появляются (или их количество увеличивается) с уменьшением разности модулей коэффициентов  $a$  и  $b$ . Выводы по запаздывания  $k = 5$  и  $k = 6$  можно увидеть в таблице результатов численных экспериментов (Табл. 3).

Номер  $n$  максимального члена последовательности  $(x_n)$  не постоянен, и увеличивается с уменьшением модулей разности модулей между коэффициентами  $a$  и  $b$ .

Общая задача исследования всплесков заключается в установлении верхней границы, выраженной через коэффициенты уравнения.

Можно заметить, что при начальных условиях (5) значения  $x_n$  для  $k + 1 \leq n \leq 2k$  будут возрастать как геометрическая прогрессия со знаменателем  $a > 1$ , поэтому величина всплеска будет не меньше чем  $a^k$ .

Основные результаты данного исследования были опубликованы в работе [7]

Рассмотрим, как изменяется величина всплеска при изменении коэффициентов. Далее рассматриваем значение  $k = 10$ . Тогда ввиду начальных условий (5) значения  $x_n$  при  $n = 1, 2, \dots, 9$  образуют геометрическую прогрессию со знаменателем  $a > 1$ . Вследствие этого и появляется всплеск (рис. 1).

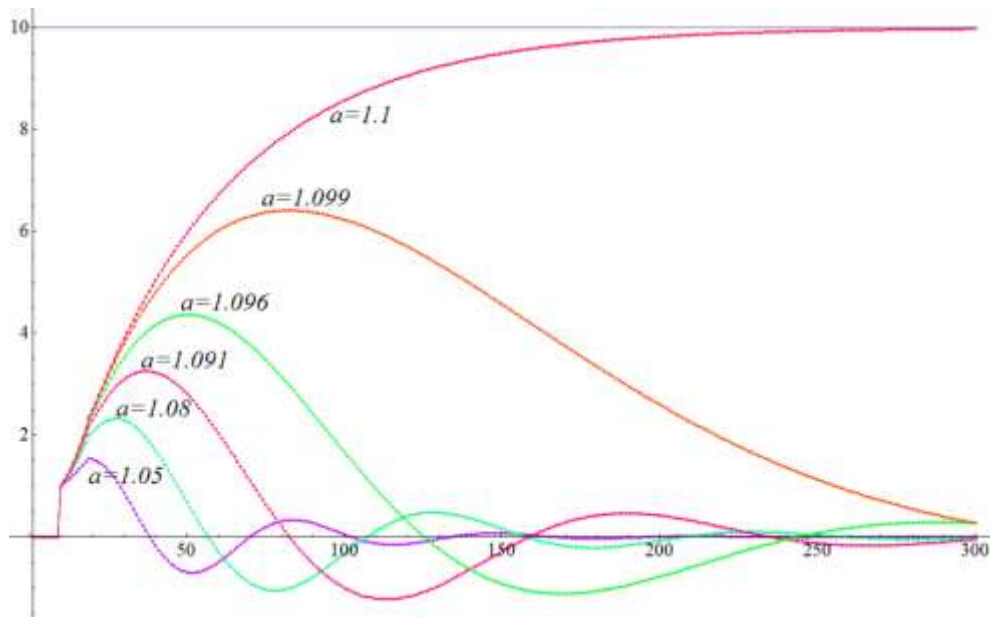


Рис. 1. Траектории  $(x_n)$  уравнения (4), при  $k = 10$ ,  $b = -0.10$ . Значения параметра  $a$  в порядке увеличения всплеска: 1.05, 1.08, 1.091, 1.096, 1.099, 1.1 .

При последнем значении  $a = 1.1$  уравнение (4) теряет устойчивость ввиду появления корня  $\lambda = 1$  у характеристического уравнения: соответствующая траектория стремится к константе  $C = \frac{1}{kb+a} = 10$ .

В угловой точке области устойчивости  $a = \frac{k}{k-1}, b = -\frac{1}{k-1}$  характеристический полином уравнения (4) имеет двукратный корень 1. Поэтому при  $b = -\frac{1}{k-1}, a = \frac{k}{k-1} - \varepsilon$  горб можно неограниченно увеличивать, уменьшая  $\varepsilon > 0$  (Рис.2). Общие выводы по результатам численных экспериментов собраны в таблицу (Табл. 3).

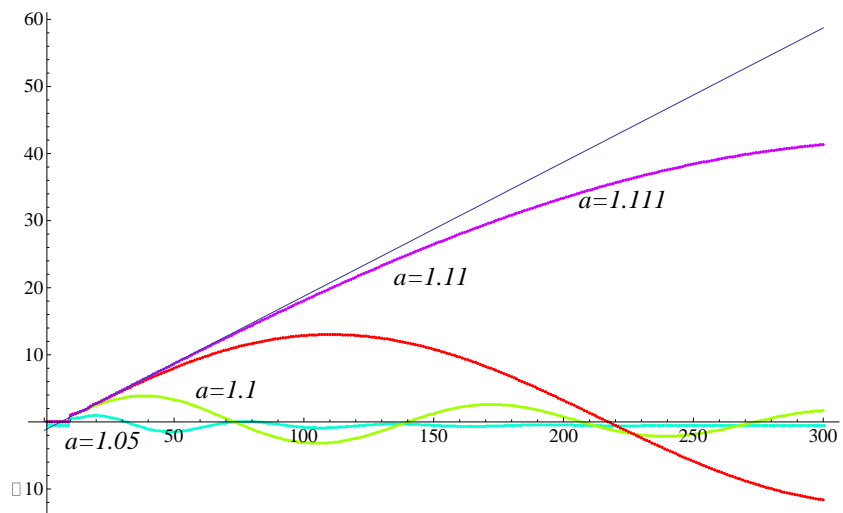


Рис. 1. Траектории  $(x_n)$  уравнения (4), при  $k = 10$ ,  $b = -\frac{1}{9}$ . Значения параметра  $a$  в порядке увеличения всплеска: 1.05, 1.1, 1.11, 1.111.

Основные результаты данного параграфа были опубликованы в работе [5].

Табл. 3. Некоторые результаты численных экспериментов.

	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
Зависимость между действительными и комплексными корнями при осциллирующем решении.	Один корень действительный, два комплексно-сопряженных	Четыре попарно-сопряженных комплексных корня	Один корень действительный, четыре попарно-сопряженных комплексных корня	Шесть попарно-сопряженных комплексных корня
Зависимость между действительными и комплексными корнями при не осциллирующем решении	Три действительных корня	Два действительных корня, 2 комплексно-сопряженных корня.	Три действительных корня, два комплексно-сопряженных.	Два действительных корня, четыре попарно-сопряженных комплексных корня.
		Сумма модулей комплексных корней меньше суммы модулей действительных корней.		
Границы для номера элемента последовательности, соответствующей всплеску.	Не менее 5	Не менее 7	Не менее 9	Не менее 11
	$ a + b  \rightarrow 1, n_{max} \rightarrow \infty$			

## §2. Вывод формулы общего решения разностного уравнения с одним запаздыванием.

Одной из задач работы было выведение формулы общего решения разностного уравнения (4) с одним запаздыванием при различных  $k$ .

Рассмотрим вид общего решения при  $k = 2$

$$x_n = C_1 \left( \frac{1}{2} (a - \sqrt{a^2 + 4b}) \right)^n + C_2 \left( \frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + 4b}) \right)^n \quad (7)$$

Для нахождения общего решения необходимо решить систему уравнений, получаемую при подставлении начальных условий в полученное уравнение и найти константы  $C_1$  и  $C_2$ .

$$\begin{cases} C_1 (a - \sqrt{a^2 + 4b}) + C_2 (a + \sqrt{a^2 + 4b}) = 0 \\ C_1 (a - \sqrt{a^2 + 4b})^2 + C_2 (a + \sqrt{a^2 + 4b})^2 = 4 \end{cases}$$

Решая данную систему с помощью платформы Wolfram Mathematica, найдем коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$ , подставим их в уравнение (7) и получим общее решение уравнения вида (4) при  $k = 2$ .

$$x_n = \left( \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2b\sqrt{a^2 + 4b}} \right) \left( \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n - \left( \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2b\sqrt{a^2 + 4b}} \right) \left( \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n$$

Даже в этом случае нахождение коэффициентов затруднительно, а формула общего решения разностного уравнения (4), построенная с помощью корней характеристического уравнения очень громоздка из-за радикалов в записи корней и поэтому неудобна для нахождения величины всплесков. Используя таблицы разностных уравнений (Приложение 1) и составляя таблицы коэффициентов разностных уравнений (Приложение 2), мы получили формулу для решения разностного уравнения(4) с начальными условиями (5) в форме полинома относительно коэффициентов  $a, b$ . Эта формула для  $k = 2$  имеет вид

$$x_n = \sum_{i=0}^{t-1} C_{n-1-(t-i)}^{t-1-i} \cdot a^{n-2(t-i)} \cdot b^{t-1-i}, t = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$



$$k = 3$$

$$x_n = \sum_{i=0}^{t-1} C_{n-1-2(t-i)}^{t-1-i} \cdot a^{n-3(t-i)} \cdot b^{t-1-i}, t = \left[ \frac{n}{3} \right]$$

$$k = 4$$

$$x_n = \sum_{i=0}^{t-1} C_{n-1-3(t-i)}^{t-1-i} \cdot a^{n-4(t-i)} \cdot b^{t-1-i}, t = \left[ \frac{n}{4} \right].$$

После выведение 2 формул замечаем схожие формулы, отличающиеся на коэффициент, проверяя аналогичную формулу для запаздывания  $k = 4$  можем вывести общую формулу решения для разностного уравнения с одним запаздыванием  $k$  –ого порядка.

$$x_n = \sum_{i=0}^{t-1} C_{n-1-(k-1)(t-i)}^{t-1-i} \cdot a^{n-k(t-i)} \cdot b^{t-1-i}, t = \left[ \frac{n}{k} \right].$$

Данная формула позволяет упростить исследование всплесков для разностного уравнения вида(4) с начальными условиями (5).

После упрощения коэффициентов получаем следующую формулу:

$$x_n = \sum_{j=1}^t C_{n-1-(k-1)j}^{j-1} \cdot a^{n-kj} \cdot b^{j-1}, t = \left[ \frac{n}{k} \right].$$

Возможно и другое построение в виде степенного ряда, но даже при коэффициенте  $a = 1$  последовательность  $(x_n)$  представляется в виде конечной суммы степенного ряда по степеням  $b$ , что требует привлечение и использование дополнительных методов высшей математики.

Основные результаты этого параграфа были опубликованы в работе [6].

### §3. Периодические решения и всплески

Для дальнейшего исследования феномена всплесков необходимо изучить, что происходит на границе области устойчивости, когда асимптотически устойчивое решение становится периодическим, что позволит найти величину максимального всплеска при заданных параметрах.

Далее будем рассматривать уравнения вида (4) с начальными условиями вида (5) при значении коэффициента  $a = 1$ .

Анализ литературы показал следующее: при значении коэффициента  $b = -2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2(2k-1)}\right)$  (Константа Мэя) амплитуда всплесков не меняется, мы получаем последовательность точек, которая графически стремится к части синусоиды.

Экспериментально было выявлено, что период зависит только от величины запаздывания и выражается формулой  $T = 4k - 2$ .

Для решения поставленной задачи будем решать характеристическое уравнение, и находить формулу общего вида, выраженную в тригонометрической форме.

### Уравнение второго порядка

Рассмотрим разностное уравнение вида (4) с запаздыванием  $k = 2$ . Получим необходимые значения параметров:  $T = 4$ ,  $b = -1$ . Характеристическое уравнение будет иметь вид:  $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ . Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

или в тригонометрической форме

$$\lambda_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad \lambda_2 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Тогда общее решение будет иметь вид:

$$x_n = c_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) + c_2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right).$$

Решение с начальными условиями  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$  будет иметь вид:

$$x_n = -1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) \quad (8)$$

Решение (8) разностного уравнения при помощи тригонометрических формул можно привести к виду

$$x_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{3}\right) \quad (9)$$

Изобразим траекторию решений данного разностного уравнения, выраженного в явном виде (9) (Рис. 3).

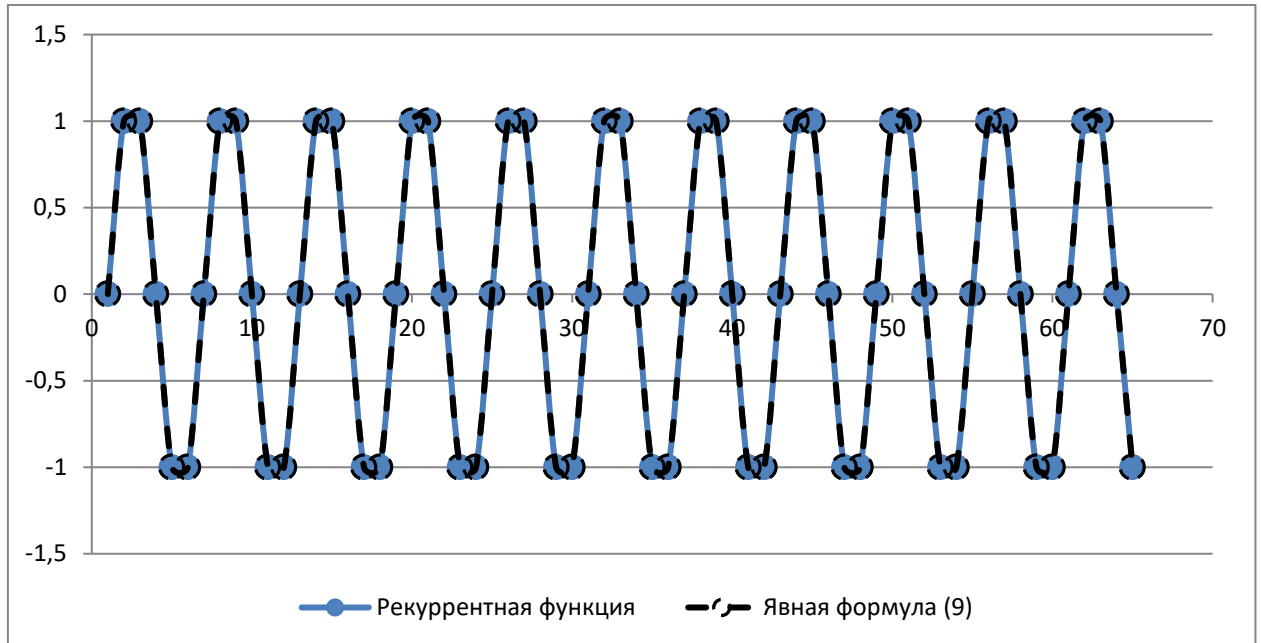


Рис. 3. Траектории решений, полученные по формуле (4) при  $k = 2$ ,  $a = 1$ ,  $b = -1$  и по формуле (9)

Если изменять значения начальное значение  $x_2 \in (0; 1)$ , то будем получать периодические решения с величиной всплеска меньше максимума модуля значений решения вида (9). Это свидетельствует о том, что при коэффициентах  $a = 1, b = -2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2(2k-1)}\right)$  будем получать максимальную абсолютную величину всплеска, таким образом, можем говорить о верхней границе всплеска (Рис. 4).

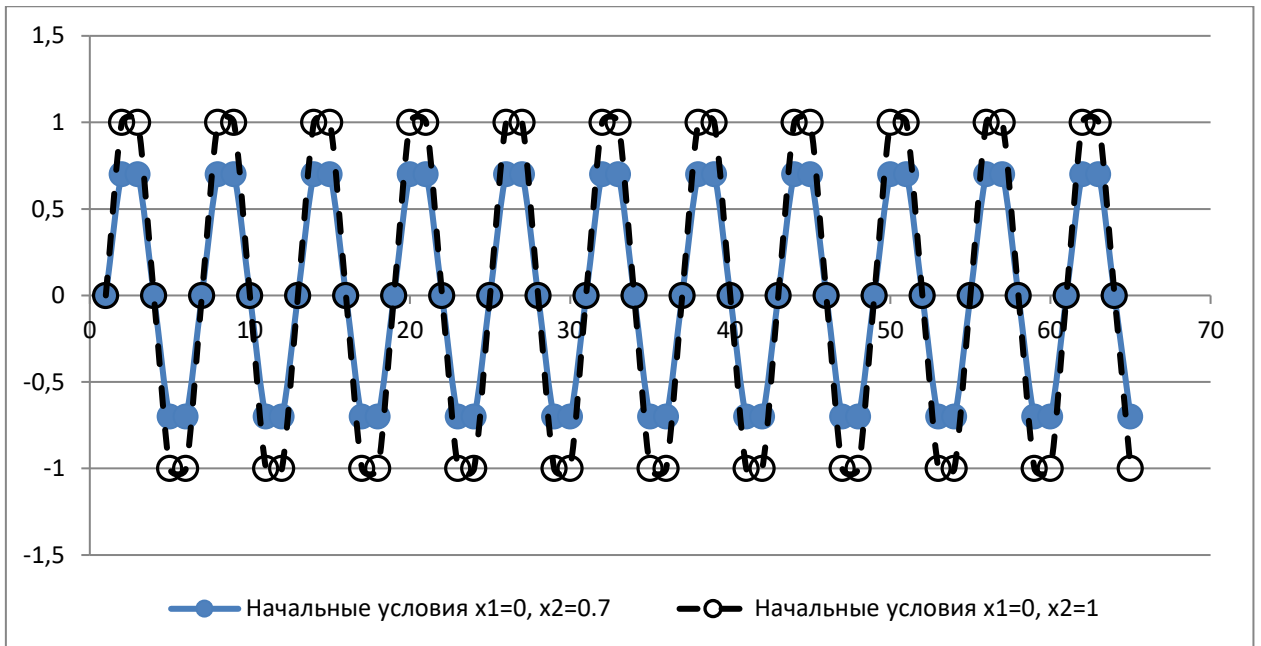


Рис. 4. Траектория решений  $(x_n)$  при заданных параметрах  $a = 1, b = -1$ , с начальным значением  $x_2 \in (0; 1)$

При изменении параметра  $b$  в пределах области устойчивости, т.е.  $-1 < b < 0$  будем получать траекторию  $(x_n)$  такую, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$  (Рис. 5).

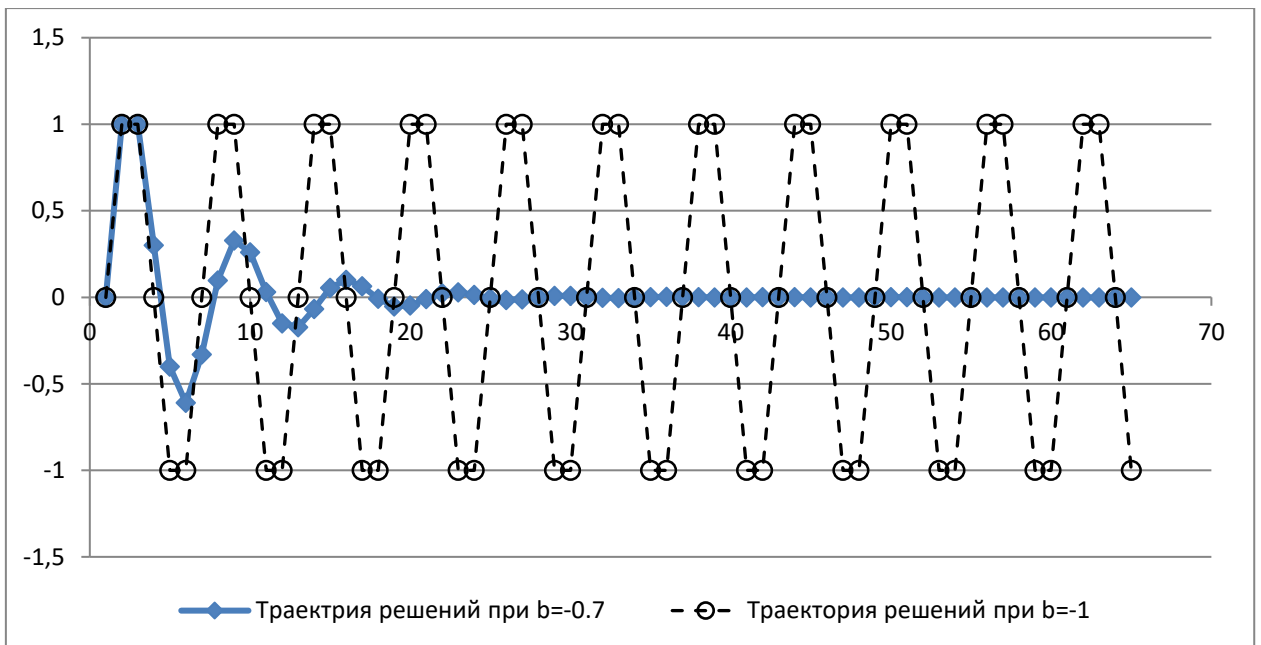


Рис.5 Траектория решений  $(x_n)$  при  $a = 1, b = -0.7$ , с начальными условиями  $x_1 = 0, x_2 = 1$ .

Можем заметить, что величина всплеска не превышает максимальное абсолютное значение  $(x_n)$  при  $b = -1$ , т.е. получили, что максимальное по модулю значение решения  $(x_n)$  при  $b = -1$  будет верхней границей всплеска.

Максимальное значение  $y$  функции вида  $y = k \sin mx$  будет равно  $y_{max} = k$ , поэтому получаем, что при  $k = 2$ ,  $Max(x_n) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ . Однако можем заметить, что в разностном уравнении вида (9) в зависимости от значения  $n$  величина  $(n - 1)$  может давать всего три возможных остатка при делении на 3. Таким образом, значения  $n + 1$  можно выразить тремя способами:

1.  $n + 1 = 3t$
2.  $n + 1 = 3t + 1$
3.  $n + 1 = 3t + 2$ .

Подставляя данные значения, получаем последовательность решений  $0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, \dots$  которая имеет период  $T = 6$ , что не противоречит заданным условиям.

### Уравнение третьего порядка

Рассмотрим разностное уравнение с одним запаздыванием вида (4) с начальными условиями вида (5) при  $k = 3$ .

Получим необходимые значения параметров:  $T = 10, b = -2 \sin \frac{\pi}{10}$ .

Характеристическое уравнение будет иметь вид:  $\lambda^3 - \lambda^2 + 2 \sin \frac{\pi}{10} = 0$

Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}), \lambda_2 = \frac{1}{4} \left( 1 + \sqrt{5} + i \sqrt{16 - (1 + \sqrt{5})^2} \right),$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{4} \left( 1 + \sqrt{5} - i \sqrt{16 - (1 + \sqrt{5})^2} \right).$$

Также их можно представить в тригонометрической форме

$$\lambda_1 = 2 \sin \left( \frac{\pi}{10} \right), \quad \lambda_2 = \cos \left( \frac{\pi}{5} \right) + i \cdot \sin \left( \frac{\pi}{5} \right), \quad \lambda_3 = \cos \left( \frac{\pi}{5} \right) - i \cdot \sin \left( \frac{\pi}{5} \right)$$

Представим комплексные корни в тригонометрической форме, и тогда общее решение будет иметь вид:

$$x_n = c_1 \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot n\right) + c_3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot n\right)$$

Для нахождения коэффициентов  $c_1, c_2, c_3$  будем использовать начальные условия  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1$ . После вычислений мы получили формулу общего решения разностного уравнения третьего порядка при

коэффициентах  $a = 1, b = -2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2(2k-1)}\right)$

$$x_n = \left(\frac{-3 - 2\sqrt{5}}{11}\right) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{-5 - 7\sqrt{5}}{22}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot n\right) + \frac{1}{11} \sqrt{\frac{205 + 89\sqrt{5}}{10}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot n\right)$$

Будем строить решение уравнений, в которые не входит первый член, так как при  $n \rightarrow \infty, \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \rightarrow 0$

$$x_n = \left(\frac{-5 - 7\sqrt{5}}{22}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot n\right) + \frac{1}{11} \sqrt{\frac{205 + 89\sqrt{5}}{10}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot n\right) \quad (10)$$

Данное решение не можем представить в виде  $y = k \sin mx$ , т.к. коэффициенты довольно громоздкие.

Изобразим графически полученную последовательность решений (Рис.6).

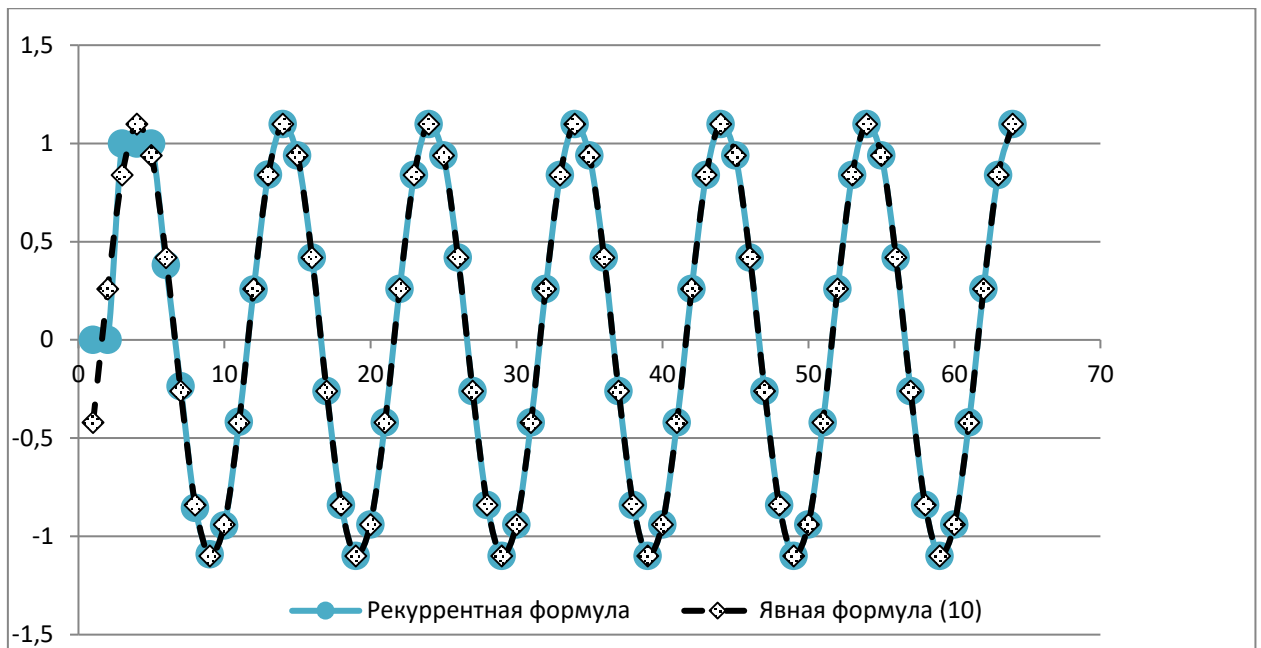


Рис. 6. Траектория решений  $(x_n)$  при  $k = 3$ ,  $a = 1$ ,  $b = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$  и решения  $(x_n)$  вида (10).

Если изменять значения начального значения  $x_3 \in (0; 1)$ , то получим периодические решения с величиной всплеска меньше максимума модуля значений решения вида (10). Это свидетельствует о том, что при коэффициентах  $a = 1, b = -2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$  будем получать максимальную абсолютную величину всплеска (Рис.7).

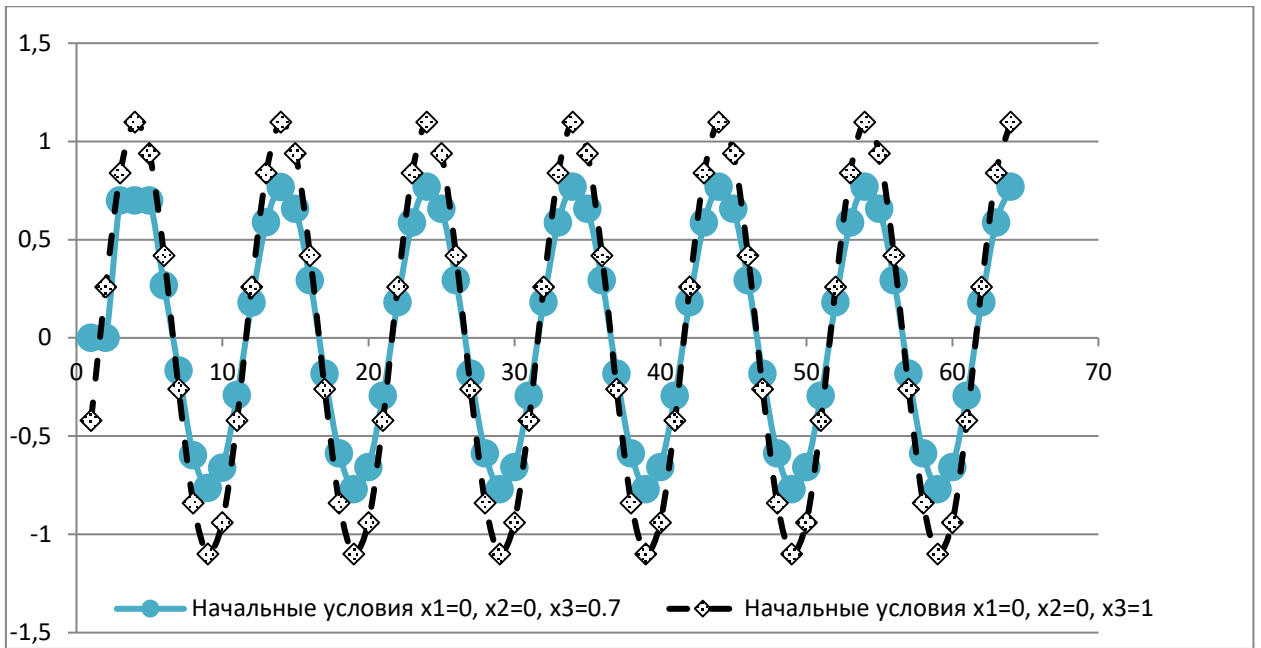


Рис. 7. Траектория решений  $(x_n)$  при заданных параметрах  $a = 1, b = -2 \cdot$

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right), \text{ с начальном значением } x_3 \in (0; 1)$$

При выборе  $b \geq \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$  получаем траекторию  $(x_n)$  такую, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \infty$ . Рассмотрим, что происходит с траекторией решений при изменении  $-1 < b \leq \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$  (Рис. 8).

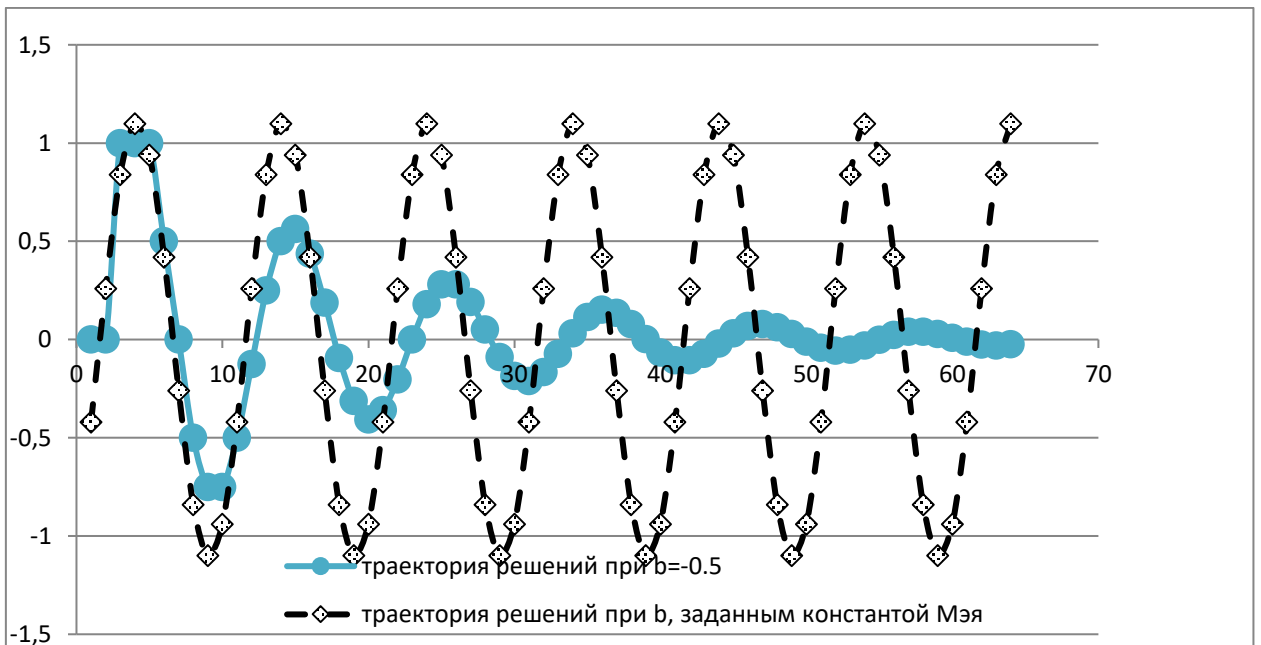


Рис.8 Траектория решений  $(x_n)$  при  $a = 1, b = -0.5$ , с начальными условиями  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1$ .



Получаем, что при изменении параметра  $b$  в пределах области устойчивости, т.е.  $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) < b < 0$  будем получать траекторию  $(x_n)$  такую, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$ .

В ходе вычислений мы получили функцию вида  $f(x) = c \cdot \cos(kx) + d \cdot \sin(kx)$ , для которой можем найти максимальное значение, равное  $\sqrt{c^2 + d^2}$ . При  $k = 3$ , получаем  $Max(x_n) = 2 \cdot \sqrt{\frac{10+3\sqrt{5}}{55}}$ , что будет являться границей всплеска при заданных условиях, т.е.  $|x_n| \leq \sqrt{c^2 + d^2} = 2 \cdot \sqrt{\frac{10+3\sqrt{5}}{55}}$ .

В результате проведения экспериментов получаем, что внутри области устойчивости абсолютная величина всплеска не превышает значение, полученное  $b = -2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2(2k-1)}\right)$ , что позволяет находить верхнюю границу всплеска при заданных начальных условиях и параметров.

### Уравнение четвертого порядка

Рассмотрим разностное уравнение с одним запаздыванием вида (4) с начальными условиями вида (5) при  $k = 4$ .

Получим необходимые значения параметров:  $T = 14, b = -2 \sin \frac{\pi}{14}$ .

Характеристическое уравнение будет иметь вид:  $\lambda^4 - \lambda^3 + 2 \sin \frac{\pi}{14} = 0$

Решая характеристическое уравнение при  $k = 4$ , получили корни:

$$\lambda_1 = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{7}\right), \lambda_2 = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{7}\right),$$

$$\lambda_3 = e^{-i \operatorname{ArcCos}[-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \sqrt{2 \sin\left(\frac{\pi}{14}\right)}]} \sqrt{2 \sin\left(\frac{\pi}{14}\right)}, \lambda_4 =$$

$$e^{i \operatorname{ArcCos}[-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \sqrt{2 \sin\left(\frac{\pi}{14}\right)}]} \sqrt{2 \sin\left(\frac{\pi}{14}\right)}$$

Общее решение будет иметь очень громоздкий вид,. При этом для нахождения решения при начальных условиях  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1$  необходимо привлечение вспомогательных способов решения.

#### **§4. Всплески решения разностного уравнения $k$ порядка для вероятностной задачи**

Теория всплесков находит свое применение, как в прикладных задачах, так и в других разделах математики, например в теории вероятностей. Далее в работе мы исследуем обобщенную задачу о вероятности суммы очков.

**Задача.** Пусть результатом эксперимента является появление одного из  $k$  натуральных чисел  $1, 2, 3, \dots, k$ . Вероятность появления каждого значения одинакова и равна  $\frac{1}{k}$ . В рамках этого эксперимента загадывается натуральное число  $n$ . Эксперимент повторяют и выпавшие значения суммируются. Как только сумма выпавших очков станет равной или больше  $n$ , серия повторений заканчивается. Требуется найти вероятность события – сумма выпавших очков равна  $n$ . Какова вероятность для больших  $n$ ?

Интересным дополнительным вопросом к задаче является следующий: какое число  $n > k$  нужно загадать, чтобы вероятность его получения была наибольшей.

Основываясь на формуле полной вероятности мы приходим к разностному уравнению

$$p_n = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k p_{n-i}, \quad (n \geq k + 1). \quad (11)$$

Для вычисления вероятности с его помощью требуется найти начальные вероятности  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . В нашем случае (т.к. заданы начальные условия) считаем, что

$$p_1 = 0, p_2 = 0, \dots, p_{k-1} = 0, p_k = 1 \quad (12)$$

Далее в работе мы проводим полное исследование поведения последовательности  $\{p_n\}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Несмотря на то, что теория линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами хорошо развита [1, 8, 13], формула для решения рекуррентного соотношения (11) с начальными условиями (12) не может быть получена явно в нашей задаче. Для этого необходимо было бы найти все корни характеристического уравнения

$$\lambda^k - \frac{1}{k}\lambda^{k-1} - \frac{1}{k}\lambda^{k-2} - \dots - \frac{1}{k}\lambda - \frac{1}{k} = 0 \quad (13)$$

Можно заметить, что при любых  $k$  это уравнение имеет корень  $\lambda = 1$ . Тогда получим

$$(\lambda - 1) \cdot \left( \lambda^{k-1} + \frac{(k-1)}{k} \cdot \lambda^{k-2} + \frac{k-2}{k} \cdot \lambda^{k-3} \dots + \frac{2}{k} \cdot \lambda + \frac{1}{k} \right) = 0$$

Обозначим  $Q(\lambda) = \lambda^{k-1} + \frac{(k-1)}{k} \cdot \lambda^{k-2} + \frac{k-2}{k} \cdot \lambda^{k-3} \dots + \frac{2}{k} \cdot \lambda + \frac{1}{k}$ . Корни многочлена  $Q(\lambda)$  в общем случае найти невозможно. Но, как известно из теории линейных рекуррентных соотношений (разностных уравнений) [1-3] поведение решения при  $n \rightarrow \infty$  зависит от расположения корней характеристического уравнения (13) относительно единичного круга на комплексной плоскости.

Выясним, как расположены корни многочлена  $Q(\lambda)$  на комплексной плоскости. Коэффициенты этого многочлена положительны. Мы использовали теорему Энестрёма-Какейи [8, 9]:

Пусть все коэффициенты полинома  $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_kz^k$  положительны и

$$\alpha = \min_{0 \leq i \leq k-1} \left( \frac{a_i}{a_{i+1}} \right), \quad \beta = \max_{0 \leq i \leq k-1} \left( \frac{a_i}{a_{i+1}} \right).$$

Тогда все корни многочлена удовлетворяют неравенству  $\alpha \leq |z| \leq \beta$ . Для многочлена  $Q(\lambda)$  получаем отношения коэффициентов  $\frac{a_i}{a_{i+1}}$ :

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k}$$

Таким образом, все корни многочлена  $Q(\lambda)$  удовлетворяют неравенству

$$\frac{1}{2} \leq |\lambda| \leq 1 - \frac{1}{k}.$$

т.е. лежат внутри единичного круга на комплексной плоскости, более того известно, что все корни этого многочлена различны. Общее решение соотношения (11) имеет вид

$$p_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot \lambda_2^n + C_3 \cdot \lambda_3^n + \dots + C_k \cdot \lambda_k^n,$$

где  $1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  – корни характеристического уравнения (10). Тогда при  $n \rightarrow \infty$  каждое слагаемое  $C_2 \cdot \lambda_2^n, C_3 \cdot \lambda_3^n, \dots, C_k \cdot \lambda_k^n$  стремится к нулю, т.к.  $|\lambda_k|^n \rightarrow 0$ .

Следовательно, существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = C_1.$$

Константу  $C_1$  можно найти из системы, используя начальные условия (12).

$$\begin{cases} 1 \cdot C_1 + \lambda_2 \cdot C_2 + \dots + \lambda_k \cdot C_k = p_1 \\ 1^2 \cdot C_1 + \lambda_2^2 \cdot C_2 + \dots + \lambda_k^2 \cdot C_k = p_2 \\ \dots \\ 1^k \cdot C_1 + \lambda_2^k \cdot C_2 + \dots + \lambda_k^k \cdot C_k = p_k \end{cases}$$

Определитель этой системы можно вычислить с помощью определителя Вандермонда

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ 1 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_2^k & \dots & \lambda_k^k \end{vmatrix} = \lambda_2 \cdot \lambda_3 \dots \lambda_k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = \\ &= \lambda_2 \cdot \lambda_3 \dots \lambda_k (\lambda_2 - 1) \cdot (\lambda_3 - 1) \cdot \dots \cdot (\lambda_k - 1) \cdot \\ &\quad \cdot (\lambda_3 - \lambda_2) \dots (\lambda_k - \lambda_2) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \neq 0 \end{aligned}$$

где  $\prod_{j>i} (\lambda_j - \lambda_i)$  – это произведение всевозможных разностей, в которых  $2 \leq i < j \leq k$ .

Для нахождения константы  $C_1$  можно использовать известные формулы Крамера. Тогда составим и вычислим (вновь с помощью определителя Вандермонда) определитель

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 0 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ 0 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_2^k & \dots & \lambda_k^k \end{vmatrix} = (-1)^{k+1} \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_k \\ \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_2^{k-1} & \lambda_3^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{k+1} \lambda_2 \cdot \lambda_3 \dots \lambda_k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_2^{k-2} & \lambda_3^{k-2} & \dots & \lambda_k^{k-2} \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{k+1} \lambda_2 \cdot \lambda_3 \dots \lambda_k (\lambda_3 - \lambda_2) \dots (\lambda_k - \lambda_2) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \end{aligned}$$

Тогда по формулам Крамера получаем

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{(-1)^{k+1} \lambda_2 \cdot \lambda_3 \dots \lambda_k (\lambda_3 - \lambda_2) \dots (\lambda_k - \lambda_2) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})}{\lambda_2 \cdot \lambda_3 \dots \lambda_k (\lambda_2 - 1) \cdot (\lambda_3 - 1) \cdot \dots \cdot (\lambda_k - 1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})} = \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{Q(1) \cdot (-1)^{k-1}} = \frac{1}{Q(1)} \end{aligned}$$

Нетрудно найти  $Q(1)$ :

$$Q(1) = 1 + \frac{(k-1)}{k} + \frac{k-2}{k} + \dots + \frac{2}{k} + \frac{1}{k} = \frac{1 + \frac{1}{k}}{2} \cdot k = \frac{k+1}{2k} \cdot k = \frac{(k+1)}{2}$$

Получаем значение для  $C_1 = \frac{1}{Q(1)} = \frac{2}{(k+1)}$ . Таким образом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{2}{(k+1)}.$$

Решение разностного уравнения (11) имеет пик при  $n = 2k$  и наибольшее значение вероятности равно  $p_n = \frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k-1}$ , а для больших  $n$  вероятность стремится к значению  $\frac{2}{k+1}$ . Значения вероятности при  $k+1 \leq n \leq 2k$  можно посчитать по формуле  $P_n = \frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{n-k-1}$ .

Рассмотрим пример задачи при конкретном  $k = 6$ .

Начальные условия будут означать, что первые  $k-1$  бросок не выпадает число или мы его не учитываем, а при  $k$ -ом подбрасывании выпадает 6 очков.

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$P_i$	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{49}{216}$	$\frac{343}{1296}$	$\frac{2401}{7776}$	$\frac{16807}{46656}$	$\frac{70993}{279936}$	$\frac{450295}{1679616}$

При этом до  $n = 2k = 12$  значение вероятности можно получить с помощью формулы  $P_n = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{6}\right)^{n-7}$

После подсчета вероятностей составим график вероятности (Рис. 9):

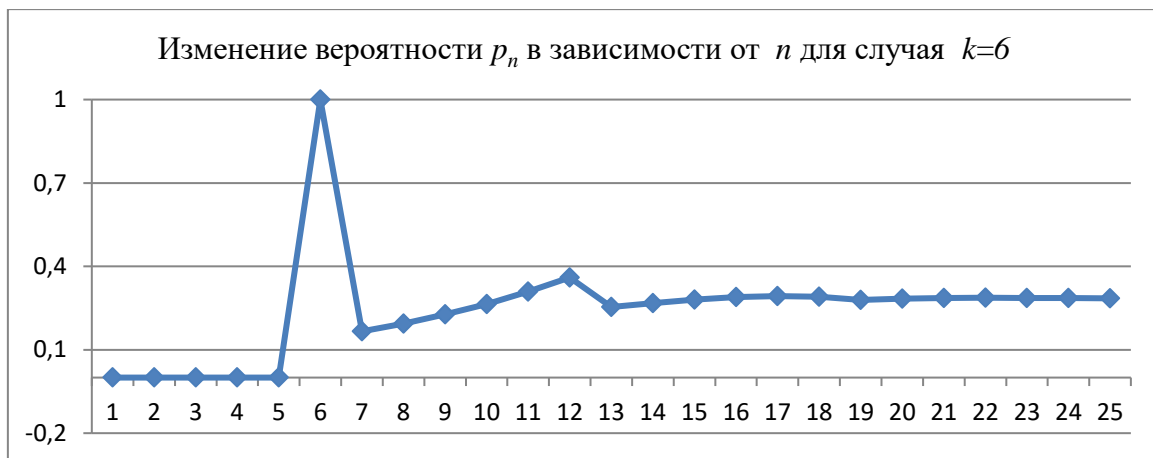


Рис. 9. График изменения вероятности для случая  $k = 6$ .

Результаты численных экспериментов для случаев  $k = 7, \dots, 10$  представлены в Приложении 3 к работе.

## Заключение

В ходе работы был изучен эффект всплесков и исследованы особенности всплесков для устойчивого линейного разностного уравнения с запаздыванием. Для некоторых запаздываний ( $k = 2, k = 3$ ) были найдены максимальные величины всплесков и установлена их связь с периодичностью решений. Также была получена формула решения разностного уравнения для специальных начальных условий в виде степенного ряда. Поставлена и решена вероятностная задача, сводящаяся к исследованию всплесков линейного разностного уравнения порядка  $k$ , найдена величина всплеска и асимптотическое поведение решения этого уравнения.

Разностные уравнения с запаздыванием, исследуемые в данной работе, феномен всплеска могут применяться при изучении электрических сигналов в цепи и предотвращение возможной перегрузки электрической цепи.

Результаты работы могут использоваться для дальнейшего изучения всплесков решений разностных уравнений с запаздываниями

Основные результаты, представленные в работе были опубликованы в нескольких статьях.

## Список литературы

1. Elaydi S. N. An introduction to difference equations, Springer, 1999
2. Eneström G. Härledning af en allmän formel for antalet pensionärer... Öfv. af. Kungl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, No 6, Stockholm, 1893.
3. Kakeya S. On the limits of the roots of an algebraic equation with positive coefficients, Tôhoku Math. J. 2:140-142 (1912).
4. Kuruklis S. A., "The asymptotic stability of  $x^{(n+1)}-ax^{(n)}+bx^{(n-k)}=0$ ", J. Math. Anal. Appl., 188 (1994), 719–731
5. Ветлугина Т.В. Некоторые свойства отклонений устойчивых решений разностного уравнения с запаздыванием // Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук: Сборник научных статей IV научно-практической международной конференции (школы-семинара) молодых ученых: 23-25 апреля 2018г. 2018. С. 238-240.
6. Ветлугина Т.В. О всплесках решений разностного уравнения для одной вероятностной задачи // Сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции студентов и магистрантов высших учебных заведений «Актуальные вопросы математики, ее истории и методики преподавания» 2 апреля 2019. 2019г. №1. С. 10-11.
7. Ветлугина Т.В. Численное исследование отклонений решений разностного уравнения с запаздыванием» // Молодежь XXI века: образование, наука, инновации: материалы VI всероссийской студенческой научно-практической конференции с международным участием (г. Новосибирск, 22-24 ноября 2017г.). 2017. №1.С. 189-190.
8. Комаров М. А. Линейные разностные уравнения и их приложения: учеб. пособие для студентов математических факультетов. М.:Владим. гос. ун-т. Владимир. 2012. 42 с.
9. Нигматулин Р.М., Кипнис М.М., Вагина М.Ю. Аналог теоремы Фельдбаума для разностного уравнения // Материалы XII



Международной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики». Махачкала: Изд-во:ДГУ, 2017. С. 160-161.

10. Нигматулин Р.М. Глобальная устойчивость дискретной модели динамики популяции с двумя запаздываниями // Автоматика и телемеханика. 2005. № 12. С. 105-113.
11. Нигматулин Р.М., Кипнис М.М. Свойства дискретных систем третьего порядка на границе их областей устойчивости // Фундаментальные исследования. 2015. № 9-1. С. 39-43.
12. Поляк Б.Т. и др. Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // Автоматика и телемеханика. 2015. № 6. С. 18-41.
13. Романко В.К. Разностные уравнения. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблицы разностных уравнений при  $k = 2, 3, 4$

Таблица разностных уравнений при  $k = 2$

$$\begin{aligned} &0 \\ &1 \\ &a \\ &a^2 + b \\ &a^3 + 2ab \\ &a^4 + 3a^2b + b^2 \\ &a^5 + 4a^3b + 3ab^2 \\ &a^6 + 5a^4b + 6a^2b^2 + b^3 \\ &a^7 + 6a^5b + 10a^3b^2 + 4ab^3 \\ &a^8 + 7a^6b + 15a^4b^2 + 10a^2b^3 + b^4 \\ &a^9 + 8a^7b + 21a^5b^2 + 20a^3b^3 + 5ab^4 \\ &a^{10} + 9a^8b + 28a^6b^2 + 35a^4b^3 + 15a^2b^4 + b^5 \end{aligned}$$

Таблица разностных уравнений при  $k = 3$

$$\begin{aligned} &0 \\ &0 \\ &1 \\ &a \\ &a^2 \\ &a^3 + b \\ &a^4 + 2ab \\ &a^5 + 3a^2b \\ &a^6 + 4a^3b + b^2 \\ &a^7 + 5a^4b + 3ab^2 \\ &a^8 + 6a^5b + 6a^2b^2 \\ &a^9 + 7a^6b + 10a^3b^2 + b^3 \\ &a^{10} + 8a^7b + 15a^4b^2 + 4ab^3 \\ &a^{11} + 9a^8b + 21a^5b^2 + 10a^2b^3 \\ &a^{12} + 10a^9b + 28a^6b^2 + 20a^3b^3 + b^4 \\ &a^{13} + 11a^{10}b + 36a^7b^2 + 35a^4b^3 + 5ab^4 \\ &a^{14} + 12a^{11}b + 45a^8b^2 + 56a^5b^3 + 15a^2b^4 \\ &a^{15} + 13a^{12}b + 55a^9b^2 + 84a^6b^3 + 35a^3b^4 + b^5 \end{aligned}$$

Таблица разностных уравнений при  $k = 4$

$$\begin{aligned}
 &0 \\
 &1 \\
 &a \\
 &a^2 \\
 &a^3 \\
 &a^4 + b \\
 &a^5 + 2ab \\
 &a^6 + 3a^2b \\
 &a^7 + 4a^3b \\
 &a^8 + 5a^4b + b^2 \\
 &a^9 + 6a^5b + 3ab^2 \\
 &a^{10} + 7a^6b + 6a^2b^2 \\
 &a^{11} + 8a^7b + 10a^3b^2 \\
 &a^{12} + 9a^8b + 15a^4b^2 + b^3 \\
 &a^{13} + 10a^9b + 21a^5b^2 + 4ab^3 \\
 &a^{14} + 11a^{10}b + 28a^6b^2 + 10a^2b^3 \\
 &a^{15} + 12a^{11}b + 36a^7b^2 + 20a^3b^3 \\
 &a^{16} + 13a^{12}b + 45a^8b^2 + 35a^4b^3 + b^4 \\
 &a^{17} + 14a^{13}b + 55a^9b^2 + 56a^5b^3 + 5ab^4 \\
 &a^{18} + 15a^{14}b + 66a^{10}b^2 + 84a^6b^3 + 15a^2b^4 \\
 &a^{19} + 16a^{15}b + 78a^{11}b^2 + 120a^7b^3 + 35a^3b^4 \\
 &a^{20} + 17a^{16}b + 91a^{12}b^2 + 165a^8b^3 + 70a^4b^4 + b^5
 \end{aligned}$$

**ПРИЛОЖЕНИЕ 2**

Таблицы коэффициентов при  $k = 2, 3, 4$

Таблица коэффициентов при  $k = 2$

0					
1					
$1 = C_1^0$					
$1 = C_2^0$	$1 = C_1^1$				
$1 = C_3^0$	$2 = C_2^1$				
$1 = C_4^0$	$3 = C_3^1$	$1 = C_2^2$			
$1 = C_5^0$	$4 = C_4^1$	$3 = C_3^2$			
$1 = C_6^0$	$5 = C_5^1$	$6 = C_4^2$	$1 = C_3^3$		
$1 = C_7^0$	$6 = C_6^1$	$10 = C_5^2$	$4 = C_4^3$		
$1 = C_8^0$	$7 = C_7^1$	$15 = C_6^2$	$10 = C_5^3$	$1 = C_4^4$	
$1 = C_9^0$	$8 = C_8^1$	$21 = C_7^2$	$20 = C_6^3$	$5 = C_5^4$	
$1 = C_{10}^0$	$9 = C_9^1$	$28 = C_8^2$	$35 = C_7^3$	$15 = C_6^4$	$1 = C_5^5$

Таблица коэффициентов при  $k = 3$

0					
1					
$1 = C_1^0$					
$1 = C_2^0$					
$1 = C_3^0$	$1 = C_1^1$				
$1 = C_4^0$	$2 = C_2^1$				
$1 = C_5^0$	$3 = C_3^1$				
$1 = C_6^0$	$4 = C_4^1$	$1 = C_2^2$			
$1 = C_7^0$	$5 = C_5^1$	$3 = C_3^2$			
$1 = C_8^0$	$6 = C_6^1$	$6 = C_4^2$			
$1 = C_9^0$	$7 = C_7^1$	$10 = C_5^2$	$1 = C_3^3$		
$1 = C_{10}^0$	$8 = C_8^1$	$15 = C_6^2$	$4 = C_4^3$		
$1 = C_{11}^0$	$9 = C_9^1$	$21 = C_7^2$	$10 = C_5^3$		
$1 = C_{12}^0$	$10 = C_{10}^1$	$28 = C_8^2$	$20 = C_6^3$	$1 = C_4^4$	
$1 = C_{13}^0$	$11 = C_{11}^1$	$36 = C_9^2$	$35 = C_7^3$	$5 = C_5^4$	
$1 = C_{14}^0$	$12 = C_{12}^1$	$45 = C_{10}^2$	$56 = C_8^3$	$15 = C_6^4$	
$1 = C_{15}^0$	$13 = C_{13}^1$	$55 = C_{11}^2$	$84 = C_9^3$	$35 = C_7^4$	$1 = C_5^5$

Таблица коэффициентов при  $k = 4$

0					
1					
$1 = C_1^0$					
$1 = C_2^0$					
$1 = C_3^0$					
$1 = C_4^0$	$1 = C_1^1$				
$1 = C_5^0$	$2 = C_2^1$				
$1 = C_6^0$	$3 = C_3^1$				
$1 = C_7^0$	$4 = C_4^1$				
$1 = C_8^0$	$5 = C_5^1$	$1 = C_2^2$			
$1 = C_9^0$	$6 = C_6^1$	$3 = C_3^2$			
$1 = C_{10}^0$	$7 = C_7^1$	$6 = C_4^2$			
$1 = C_{11}^0$	$8 = C_8^1$	$10 = C_5^2$			
$1 = C_{12}^0$	$9 = C_9^1$	$15 = C_6^2$	$1 = C_3^3$		
$1 = C_{13}^0$	$10 = C_{10}^1$	$21 = C_7^2$	$4 = C_4^3$		
$1 = C_{14}^0$	$11 = C_{11}^1$	$28 = C_8^2$	$10 = C_5^3$		
$1 = C_{15}^0$	$12 = C_{12}^1$	$36 = C_9^2$	$20 = C_6^3$		
$1 = C_{16}^0$	$13 = C_{13}^1$	$45 = C_{10}^2$	$35 = C_7^3$	$1 = C_4^4$	
$1 = C_{17}^0$	$14 = C_{14}^1$	$55 = C_{11}^2$	$56 = C_8^3$	$5 = C_5^4$	
$1 = C_{18}^0$	$15 = C_{15}^1$	$66 = C_{12}^2$	$84 = C_9^3$	$15 = C_6^4$	
$1 = C_{19}^0$	$16 = C_{16}^1$	$78 = C_{13}^2$	$120 = C_{10}^3$	$35 = C_7^4$	
$1 = C_{20}^0$	$17 = C_{17}^1$	$91 = C_{14}^2$	$165 = C_{11}^3$	$70 = C_8^4$	$1 = C_5^5$

Графики изменения вероятности для случаев  $k = 7, 8, 9, 10$ .



Рис. График изменения вероятности для случая  $k = 7$ .



График изменения вероятности для случая  $k = 8$ .



График изменения вероятности для случая  $k = 9$ .

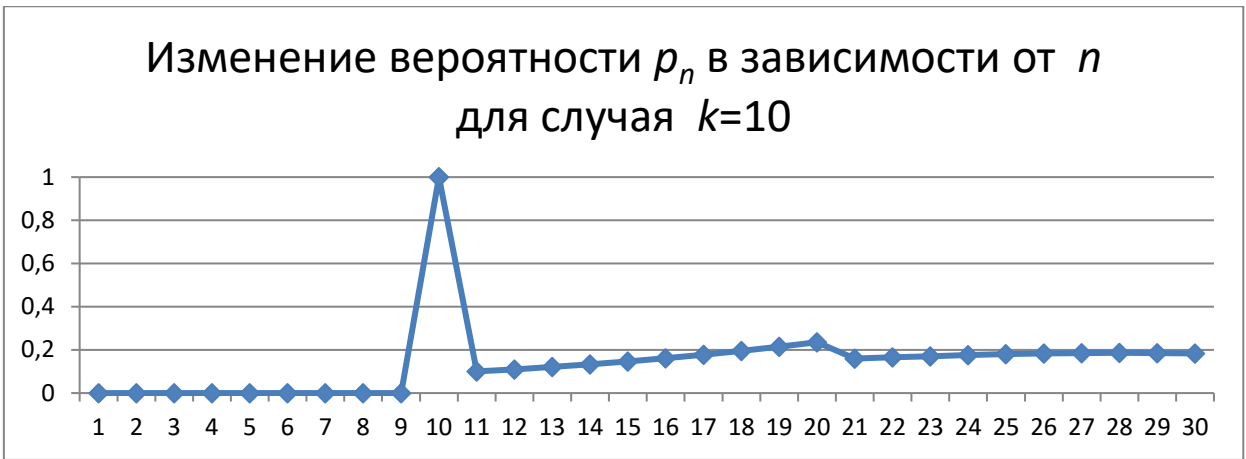


График изменения вероятности для случая  $k = 10$ .