

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**С.М. Горяинова, Л.М. Свирская**

# **ЭЛЕКТРОДИНАМИКА**

*Курс лекций в двух частях*

*Часть I*

Челябинск 2019

УДК 538.3(021)

ББК 22.313я73

Г 71

**Горяинова, С.М. Электродинамика [Текст]: курс лекций: в 2 ч. Ч. I /**  
**Г 71** С.М. Горяинова, Л.М. Свирская; под ред. Л.М. Свирской. – Челябинск: Изд-во  
Южно-Урал. гос. гуман.-пед. ун-та, 2019. – 207 с.

ISBN 978-5-907210-33-2

ISBN 978-5-907210-34-9

Учебное пособие написано на основе курса лекций доцентов С.М. Горяиновой и Л.М. Свирской. В нём изложена классическая электродинамика, являющаяся частью курса «Основы теоретической физики». Часть I пособия включает систему уравнений Максвелла, электростатику, магнитостатику, стационарное и квазистационарное электромагнитное поле. Теоретический материал дополнен примерами решения задач, рассмотренных в приложениях.

Предназначается для студентов физических специальностей педвузов.

**УДК 22.313я73**

**ББК 538.3(021)**

Рецензенты: Бескачко В.П., д-р физ.-мат. наук, профессор  
Андрейчук В.П., канд. физ.-мат. наук, доцент

ISBN 978-5-907210-33-2

ISBN 978-5-907210-34-9

© С.М. Горяинова, Л.М. Свирская, 2019  
© Издательство Южно-Уральского  
государственного гуманитарно-педагогического  
университета, 2019.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие .....	5
Науки преданный слугитель .....	10
Введение .....	16
<b>ГЛАВА I. ОСНОВЫ МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ</b>	
§ 1. Четвертое уравнение Максвелла как обобщение экспериментального закона Кулона .....	20
§ 2. Третье уравнение Максвелла как обобщение экспериментального факта отсутствия в природе свободных магнитных зарядов .....	30
§ 3. Второе уравнение Максвелла как обобщение закона электромагнитной индукции.....	31
§ 4. Первое уравнение Максвелла как обобщение закона Био-Савара-Лапласа. Уравнение непрерывности. Ток смещения.....	35
§ 5. Система уравнений Максвелла .....	45
§ 6. Закон сохранения и превращения энергии электромагнитного поля. Теорема Умова-Пойнтинга.....	46
§ 7. Граничные условия для нормальных и касательных составляющих векторов электромагнитного поля .....	50
<b>ГЛАВА II. ЭЛЕКТРОСТАТИКА</b>	
§ 8. Основные уравнения. Основные задачи электростатики.....	58
§ 9. Основные свойства поля. Скалярный потенциал, его связь с работой.....	59
§ 10. Дифференциальные уравнения для потенциала, их общие решения. Нормировка потенциала. Решение 2-й задачи электростатики .....	62
§ 11. Разложение потенциала системы зарядов на больших расстояниях. Дипольное, квадрупольное, мультипольное приближения.....	66
§ 12. Проводники в электростатическом поле.....	76
§ 13. Диэлектрики в электростатическом поле .....	78
§ 14. Энергия в электростатике.....	85
§ 15. Механические силы в электростатике .....	95
<b>ГЛАВА III. СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ. МАГНИТОСТАТИКА</b>	
§ 16. Основные уравнения. Основные задачи теории стационарного поля .....	98
§ 17. Электрическое стационарное поле.....	99
§ 18. Основные уравнения магнитостатики. Вихревой характер магнитного поля. Циркуляция магнитной напряженности.....	103
§ 19. Вектор-потенциал магнитного поля. Градиентная или калибровочная инвариантность поля. Калибровка вектор-потенциала .....	104

§ 20. Дифференциальные уравнения для вектор-потенциала, их общие решения.....	106
§ 21. Закон Био-Савара-Лапласа для объемных и линейных токов .....	107
§ 22. Разложение вектор-потенциала тока на больших расстояниях в магнитном дипольном приближении. Магнитный момент тока. Магнитомеханическое отношение .....	110
§ 23. Магнетики в магнитном поле .....	115
§ 25. Энергия в магнитостатике.....	125
§ 24. Связь вектора намагничивания с плотностью молекулярных токов.....	119
§ 26. Механические силы в магнитостатике.....	131

#### **ГЛАВА IV. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ**

§ 27. Основные уравнения квазистационарного поля. Условие квазистационарности .....	133
§ 28. Потенциалы, их связь с векторами $\vec{B}$ и $\vec{E}$ .....	135
§ 29. Дифференциальные уравнения для потенциалов, объёмной плотности зарядов, их общие решения .....	136
§ 30. Скин-эффект. Элементарная теория скин-эффекта .....	140
§ 31. Скиновая проводимость. Нормальный и аномальный скин-эффект.....	145
§ 32. Магнитная кумуляция.....	148
§ 33. Дифференциальные уравнения для линейных квазистационарных токов.....	153

#### **ПРИЛОЖЕНИЯ**

##### *Приложение I*

Темы лекций с указанием соответствующих параграфов пособия.....	160
---	-----

##### *Приложение II*

Основные понятия векторного анализа .....	163
---	-----

##### *Приложение III*

Основные формулы векторного анализа. Интегральные теоремы.....	170
--	-----

##### *Приложение IV*

Избранные задачи электростатики.....	172
--------------------------------------	-----

##### *Приложение V*

Избранные задачи магнитостатики .....	194
---------------------------------------	-----

##### *Приложение VI*

Примеры решения дифференциальных уравнений для линейных квазистационарных токов .....	199
--	-----

Заключение .....	203
------------------	-----

Библиографический список .....	205
--------------------------------	-----

## Предисловие

Данное учебное пособие является отражением многолетнего опыта преподавания электродинамики на физико-математическом факультете ЧГПИ–ЧГПУ–ЮУрГГПУ по различным программам и учебным планам. На протяжении полувека этот курс читала доцент Сусанна Маврикиевна Горяинова. В 2014 году её не стало. И, таким образом, на меня легла почетная и ответственная обязанность подготовить к печати пособие, в основу которого положен курс лекций моего учителя и коллеги.

В книгу вошли только лекции, но не весь курс, предусматривающий ещё проведение практических занятий. Поэтому ряд вопросов вынесен в приложения, материал которых может быть использован на практических занятиях и для самостоятельной работы. В условиях ограниченного количества лекционных часов, предусмотренных учебным планом, приложения дают дополнительную возможность ознакомиться как с принципиальными, так и с прикладными вопросами, имеющими важное значение для понимания содержания курса.

В приложении I проведена разбивка материала по темам лекций в соответствии с Рабочей программой дисциплины для бакалавров по направлению 44.03.05 «Педагогическое образование» (с двумя профилями подготовки).

В списке литературы, в первую очередь, рекомендуется великолепная книга одного из самых выдающихся советских физиков, лауреата Нобелевской премии по физике (1958 г.) Игоря Евгеньевича Тамма «Основы теории электричества», которая выдержала уже 11 изданий, практически не подвергаясь редактированию. Это непревзойденное учебное пособие для студентов физических специальностей вузов.

«Теория поля» Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица не нуждается в афишировании для преподавателя теоретической физики, но студентам для первоначального изучения курса может быть сложной. Поэтому разумно использовать «Теорию поля» совместно с рекомендуемым «Курсом теоретической физики» В.Г. Левича (т. 1 и 2).

Наряду с хорошо известными «классическими» изданиями, в библиографический список включена книга талантливого ученого-астрофизика и популяризатора науки Николая Николаевича Горькавого «Электрический дракон» (из серии «Научные сказки»). Эта книга (так же, как «Астровитянка» и другие произведения Н.Н. Горькавого) будет интересна читателям разного возраста, и будущий учитель обязательно должен с ней познакомиться и в дальнейшем рекомендовать для чтения своим ученикам. Включение этой книги в список литературы особенно приятно в связи с тем, что доктор физико-математических наук, лауреат Государственной премии СССР, научный сотрудник НАСА (США) Н.Н. Горькавый начинал свой путь в большую науку в кружке теоретической физики Научного общества учащихся при Челябинском Дворце пионеров и школьников под руководством профессора М.С. Свирского.

Электродинамика представляет собой вторую ступень курса «Основы теоретической физики». На первой ступени – в рамках классической механики, и особенно её венца – аналитической механики Лагранжа и Гамильтона, – впервые открывается мощь теоретического исследования природы. Восхищение этой мощью должно усиливаться по мере постижения теории электромагнитных явлений. Каждому изучающему данный курс постепенно открывается стройная логика, внутренне присущая любому разделу теоретической физики. В то время как при изучении курса общей и экспериментальной физики студент сталкивается с огромным спектром отдельных экспериментальных фактов и законов, не объединённых между собой единой теоретической платформой и не перегруженных подробностями математических преобразований, электродинамика, как и другие теоретические курсы, даёт прекрасную возможность почувствовать единство в описании широкого круга явлений и закономерностей. Учитель в своей дальнейшей практической деятельности не будет предаваться длинным математическим преобразованиям, лежащим в основе той или иной теории, но он обязательно должен на студенческой скамье научиться понимать, как всё это красиво, замечательно и логично выводится на основе заданного «лейтмотива».

Характерной чертой данного учебного пособия является сочетание строгого академического стиля с доступностью изложения материала, что является отражением традиций преподавания теоретической физики, сложившихся на протяжении десятилетий в ЮУрГГПУ. Оно содержит подробные математические преобразования и обсуждение физического смысла каждого получаемого результата и может быть рекомендовано не только будущим учителям, но и студентам классических университетов.

Выдающийся физик-теоретик XX столетия Альберт Эйнштейн в 1931 году писал: «Со времени обоснования теоретической физики Ньютоном наибольшие изменения в её теоретических основах, другими словами, в нашем представлении о структуре реальности, были достигнуты благодаря исследованиям электромагнитных явлений Фарадеем и Максвеллом».

Майкл Фарадей экспериментально открыл основные законы электродинамики и создал первые образцы электрического двигателя, электрогенератора и трансформатора, заложив тем самым прочный фундамент современной электрической цивилизации [3]. Когда член парламента Гладстоун, будущий премьер-министр Великобритании, поинтересовался у Фарадея, в чём состоит значимость его открытий, учёный ответил: «Сэр, я не знаю, для чего именно будут использоваться эти машины, но уверен, что когда-нибудь вы станете облагать их налогом».

Заслугой Фарадея является введение понятия физического поля. Согласно Фарадею, пространство между зарядами и магнитами заполнено электромагнитным полем. Оно является переносчиком взаимодействия между зарядами. Как заметил Эйнштейн, «надо иметь могучий дар научного предвидения, чтобы распознать, что в описании

электрических явлений не заряды и не частицы описывают суть явлений, а скорее пространство между зарядами и частицами». Концепция поля образует фундамент современной физики. Сам же Фарадей, испугавшись, что его идеи не поймут современники, изложил их на бумаге и запечатал в конверт с надписью «Королевскому обществу. Вскрыть через 100 лет».

Благодаря работам гениального физика-теоретика Джеймса Максвелла законы Фарадея обрели элегантную математическую форму. Система уравнений Максвелла демонстрирует огромную предсказательную силу теоретической физики, настоящим триумфом которой явилось предсказание Максвеллом «на кончике пера» электромагнитных волн.

Необходимо сделать замечания относительно нумерации уравнений Максвелла.

1) В «Теории поля» Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица под первой парой уравнений понимается система уравнений для  $\text{rot}\vec{E}$  и  $\text{div}\vec{H}$ , а под второй парой уравнений – система уравнений для  $\text{rot}\vec{H}$  и  $\text{div}\vec{E}$ .

2) В учебнике «Электродинамика» Я.П. Терлецкого и Ю.П. Рыбакова первая группа уравнений содержит источники полей (плотность заряда и плотность тока), а вторая группа уравнений не содержит их (т.е. для  $\text{rot}\vec{E}$  и  $\text{div}\vec{B}$ ).

3) В классическом учебнике И.Е. Тамма «Основы теории электричества» уравнения рассматриваются в следующем порядке:  $\text{rot}\vec{H}$ ,  $\text{rot}\vec{E}$ ,  $\text{div}\vec{B}$ ,  $\text{div}\vec{D}$ .

4) В учебнике А.Н. Матвеева «Электродинамика и теория относительности», написанном специально для студентов педагогических институтов, уравнения приводятся в том же порядке, что и в книге Тамма.

Нумерация уравнений Максвелла в данном учебном пособии совпадает с нумерацией в книгах И.Е. Тамма и А.Н. Матвеева.

В книге используется гауссова система единиц. И это продиктовано не соображениями «удобства» или привычки физиков-теоретиков. Система СИ противоречит требованиям специальной теории относительности и приводит к нарушению физического равноправия полей. Электродинамическая константа, совпадающая со скоростью света в вакууме, отсутствует в формулах системы СИ, приводя к физически неразумным результатам. Не случайно 10-томный «Курс теоретической физики» Ландау и Лифшица, переведённый на 20 языков мира, использует гауссову систему единиц. Кроме того, использование гауссовой системы единиц при изложении электродинамики позволяет обеспечить преемственность с другими разделами курса «Основы теоретической физики». Курс «Электродинамика» читается в тесном контакте с преподавателями курсов «Высшая математика» и «Математическая физика», поэтому опускается ряд математических определений и доказательств.

Изложенный в книге курс лекций имеет давнюю историю. Сусанна Маврикиевна в шутку говорила: «Мы с вами – “внучки” МГУ». И этому утверждению есть определенные основания. Истоки курса восходят к 1950 году, когда Моисей Соломоно-

вич Свирский, выпускник физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, приехал в Челябинск. Зашел в педагогический институт и на лестнице у входа встретил Юрия Викторовича Карасова, который в то время был заведующим кафедрой физики. В медленно поднимающемся по лестнице с палочкой, на протезе, молодом человеке Ю.В. Карасов сразу распознал фронтовика: он и сам был участником Великой Отечественной войны. Разговорились. Узнав о том, что перед ним – выпускник МГУ, имеющий диплом с отличием, специализировавшийся на студенческой скамье по теоретической физике, сразу предложил: «Пойдёмте к нам, у нас некому электродинамику читать, студенты бегают с лекций...» (в то время на физмате существовала замечательная школа физиков-экспериментаторов под руководством профессора Н.Ф. Кунина, но преподавателей, имевших специальную подготовку по теоретической физике, не было). Тут же направились к директору института В.А. Жданову, и все формальности были быстро улажены. Министерство просвещения согласилось оставить молодого специалиста в Челябинске (взамен двухгодичного учительского института в г. Сарапул, куда он должен был ехать по распределению).

Так в Челябинском пединституте появился первый физик-теоретик. Курс лекций по электродинамике, который ему довелось слушать в МГУ, был непригоден для педагогического института: он был слишком высок и малодоступен. Почти три года, с фронтовым упорством, он создавал свой первый лекционный курс. Постепенно были разработаны и подняты на должный уровень преподавания, а впоследствии переданы своим ученикам и другие разделы теоретической физики.

В 1956/57 учебном году Сусанна Маврикиевна, будучи студенткой 3-го курса, прослушала курс лекций по электродинамике в изложении М.С. Свирского. Через 6 лет она становится аспиранткой кафедры теоретической физики ЧГПИ. Профессор М.С. Свирский вспоминал: «Когда Сусанна Маврикиевна окончила аспирантуру и приступила к работе на кафедре, я смело передал ей чтение ответственных теоретических курсов электродинамики и специальной теории относительности». Так начинался путь длиною в полвека, освещенный гением Максвелла, наполненный творческим горением и неустанным совершенствованием педагогического мастерства.

Принимая в 2014 году эстафету в чтении лекций по электродинамике в качестве ученицы Сусанны Маврикиевны, я вспомнила про тетрадь с конспектами лекций этого курса, подаренную мне выпускницей физмата 1954 года Соколовой Натальей Марковной. На обложке тетради – надпись: «Людмиле Моисеевне Свирской с пожеланием научиться читать лекции так же, как Моисей Соломонович». Захотелось добавить: «...и как Сусанна Маврикиевна». Этот курс всегда отождествлялся с её именем. Ещё долго в памяти будет звучать её голос и своеобразная музыка, создаваемая стучащим по доске кусочком мела.

Данное учебное пособие выходит в свет благодаря неоценимой помощи наших замечательных и отзывчивых студентов, которых я перечисляю с большим удовольствием. Акимов Дмитрий, Антонова Надежда, Болтенко Александр, Бурцева Анастасия, Гагич Екатерина, Горюнова Мария, Потапова Анастасия, Раздьяконова Анастасия, Садыгов Эльдар, Самойлова Евгения, Сафронова Нина, Скворцов Николай, Сорокина Евгения, Турсунбаева Диана, Чалов Дмитрий, Шадиев Артур, несмотря на свою загруженность, нашли возможность параллельно с изучением курса электродинамики осуществить компьютерный набор рукописи.

В 2011 году было издано учебное пособие Сусанны Маврикиевны «Основы общей теории относительности». Она преподнесла мне свою книгу с дарственной надписью: «Коллеге и соратнице в борьбе за души студентов». Эти слова ко многому обязывают и являются дополнительным стимулом для того, чтобы рукопись лекционного курса преобразовалась в печатное издание, так необходимое студентам при изучении электродинамики.

**Л.М. Свирская,  
научный редактор**

## Науки преданный служитель



**Сусанна Маврикиевна  
ГОРЯИНОВА**

В истории каждого вуза есть имена, которые подобны ярким звездам на небосклоне. Такой яркой звездой на небосклоне Челябинского государственного педагогического университета была Горяинова Сусанна Маврикиевна (2.03.1936–17.06.2014). На протяжении шести десятилетий её жизнь была неразрывно связана с ЧГПИ–ЧГПУ. Её «мировая линия» – это последовательность событий глубокой значимости, которые затрагивали не только учебную деятельность, но и многие другие стороны жизни физико-математического факультета.

Путь, который она выбрала в 17 лет, во многом был определен особой атмосферой научного подъёма, характерного для 50–60-х годов прошлого века. Рождение квантовых генераторов, разгадка явления сверхпроводимости, запуск первых искусственных спутников Земли и человека в космос – всё это создавало особую атмосферу благоговения перед физической наукой

и порождало естественное стремление быть сопричастным ко всем этим достижениям.

Родилась она в Москве в семье инженеров-химиков. Жили они в самом центре, на улице Герцена, недалеко от Московской консерватории. В 1941 году, накануне Великой Отечественной войны, отец был командирован в Челябинск, где стал главным инженером химфармзавода, построенного во время войны. Семья коренных москвичей обратно в столицу уже не вернулась.

Большое влияние на выбор профессии оказал замечательный учитель физики школы № 1 М.И. Уманский, благодаря которому физика стала для Сусанны Маврикиевны любимым предметом в школе. Окончив в 1954 году школу с серебряной медалью, она поступила на физико-математический факультет ЧГПИ. «С каким уважением мы в разговорах произносили слова «интеграл, дифференциальное исчисление, производная...». Мы гордились тем, что изучали высшую математику», – так вспоминала однажды С.М. Горяинова о своих первых шагах на пути освоения мира науки. На третьем курсе, испытав восхищение удивительным миром квантовой механики, она начала заниматься в кружке теоретической физики под руководством Моисея Соломоновича Свирского.

В 1959 году, окончив с отличием ЧГПИ по специальности «физика и основы производства», С.М. Горяинова по распределению поехала работать учителем физики в с. Медведёвка Кусинского района, а затем вернулась в свою родную школу, где про-

работала два года. Но неудержимо влекла область науки, занимающая особое место в физике – «теоретика», как называл теоретическую физику Л.Д. Ландау. Ощувив однажды всю красоту и могущество методов теоретического исследования природы, уже невозможно расстаться с миром научных сокровищ, как бы ни был труден путь восхождения к научным вершинам. «У высот науки то же свойство, что и у горных высот: там захватывает дух», – писал Д.С. Данин в книге «Неизбежность странного мира», которую в молодости очень любила Сусанна Маврикиевна.

По рекомендации Уманского она поступила в аспирантуру по теоретической и математической физике к М.С. Свирскому. И сразу осознала, насколько нелёгок труд физика-теоретика, состоящий из головокружительных по своей сложности расчётов и порой изнуряющих размышлений. «Как нетрудно видеть...», «после ряда несложных преобразований получим...» – с таким набором стандартных фраз сталкивается каждый, кто пытается понять содержание работ по теоретической физике, начиная от многотомного курса теоретической физики Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица и заканчивая оригинальными научными статьями. Однако за этими так называемыми «несложными» преобразованиями скрываются обычно горы исписанных, прежде чем удаётся получить требуемый результат, формулами бумаг.



**Первые аспиранты кафедры теоретической физики ЧГПИ.  
Р.И. Рейзельман, Т.Н. Луковских, С.М. Горяинова, В.Д. Лунёв,  
в центре – научный руководитель профессор М.С. Свирский**

К этой естественной трудности добавлялась ещё проблема, связанная с содержанием программы педагогического вуза, не рассчитанной на подготовку специалистов в области теоретической физики. За три отпущенных аспиранту года нужно было сначала освоить необходимый теоретический минимум, позволяющий понимать содержание научных работ, овладеть техникой вычислений, и только после этого приступить к выполнению серьёзных теоретических исследований. В частности, в теории твёрдого тела было необходимо освоить метод вторичного квантования, метод функций Грина, фейнмановскую диаграммную технику и многое другое.

Как известно, с целью подготовки высококвалифицированных физиков-теоретиков, Л.Д. Ландау в своё время создал теорминимум, включавший 9 экзаменов: 7 – по теоретической физике и 2 – по математике. Сдавали его сильнейшие молодые теоретики, которые затрачивали на подготовку к нему не менее 2–3 лет. «Просочиться» через такой серьёзный барьер удавалось немногим: за три десятилетия список сдавших экзамены самому Л.Д. Ландау насчитывает только 43 фамилии!

Совершенно очевидно, поступить в аспирантуру по теоретической физике после педагогического вуза было абсолютным героизмом.

Едва окончив аспирантуру, начинающему физику-теоретику пришлось выдержать «боевое крещение». В 1966 году Министерство просвещения устроило тотальную проверку педвузов страны. Контролировалось, в первую очередь, качество чтения лекций. Уже тогда педагогическое мастерство, данное Сусанне Маврикиевне от природы и умноженное на огромный труд, получило очень высокую оценку.

Более полувека С.М. Горяинова трудилась в стенах ЧГПИ–ЧГПУ. С её именем, в первую очередь, ассоциировались великолепные лекции по электродинамике и теории относительности. Они являли собой органическое сочетание науки и искусства. Постигая под руководством С.М. Горяиновой шаг за шагом классическую электродинамику с её замечательными в своей завершенности и изяществе уравнениями, написанными Максвеллом «на кончике пера», студентам порой казалось, что всё получается легко и просто. Настолько виртуозно, лаконично, ясно и красиво это преподносилось слушателям! Как послушный мелок в руках Сусанны Маврикиевны, которым она на доске выводила узоры великих уравнений, традиционно был завернут в золотинку (обёртку от конфет), так и уравнения по своей глубине были просто на вес золота! Она как никто другой понимала, что означает уникальный язык теоретической физики, и добивалась от студентов понимания его значимости.

Слушателей поражала её абсолютная свобода владения сложным теоретическим материалом. Эта невысокая, хрупкая женщина, одаренная интеллектуальной силой и педагогическим талантом, приходила на лекции лишь с кусочком мела, без всяких конспектов и бумажек, и, подобно скрипачу-виртуозу, исполняла полтора часовую научную «поэму», лейтмотивом которой являлись уравнения Максвелла и формулы Эйнштейна.

Сусанна Маврикиевна была великой труженицей. Разрабатывая сложнейшие теоретические курсы садилась за работу ранним утром и только поздним вечером вставала из-за письменного стола. Но это её не тяготило. Изнурительный труд физика-теоретика приносил ей глубокое удовлетворение и радость. Она радовалась каждой удачно выведенной формуле и каждому найденному изящному методическому приёму.

Если бы с небес явился ангел и воскресил Максвелла, Лоренца, Эйнштейна, Минковского, Фридмана, а затем спросил у них, хотели бы они видеть её в качестве ученицы, последователя и коллеги? Ответ, несомненно, был бы утвердительным!

Ей удалось разработать уникальный курс по общей теории относительности и релятивистской космологии. Студенты, имевшие возможность изучать данный курс, в таких терминах, как «искривленное пространство-время», «символы Кристоффеля», «ковариантные и контравариантные тензоры» слышали не набор устрашающих понятий, а симфонию современной физики. Сусанна Маврикиевна блестяще доказала возможность преподавания этой выдающейся теории XX века в стенах педагогического вуза. Главный подвиг её творческой жизни состоял в том, что она сумела издать учебное пособие «Основы общей теории относительности», явившееся итогом 30-летнего труда.

А как увлекательно умела она посвятить студентов в тайны магнетизма в рамках разработанного ею спецкурса «Магнитные свойства вещества»! Результатом многолетней работы в этом направлении явилось издание атласа «Эффективное число магнетонов Бора для ионов редкоземельных и переходных элементов». Это учебно-методическое пособие содержит вычисления орбитального, спинового и полного момента импульса,  $g$  – фактора и эффективного числа магнетонов Бора для переходных и редкоземельных элементов, выполненные слушателями указанного курса в рамках осеннего семестра 2012/2013 учебного года. Материал, содержащийся в пособии, оказался полезным не только студентам, изучающим курсы квантовой механики и квантовой химии, но и аспирантам и научным работникам в области физики и химии твёрдого тела.

Сусанной Маврикиевной разработана своя очень эффективная система преподавания. Она подчеркивала важность «штучной» работы с каждым студентом, поскольку видела в каждом из них потенциального учителя. А учитель не имеет права быть необразованным. Только тот сможет по-настоящему научить школьников физике, кто сам в ней глубоко разбирается. Ничто не спасёт, если нет знания предмета.

Она гордилась тем, что удавалось сохранять высокий дух науки в процессе преподавания теоретической физики в педагогическом вузе. По её инициативе и при личном участии на факультете были проведены многие научные конференции для студентов:

**16.04.2008** – конференция к 100-летию Л.Д. Ландау.

**12.12.2008** – 150-летие Макса Планка.

**17.04.2009** – «Бегство от чуда», 130 лет со дня рождения Альберта Эйнштейна.

**28.10.2010** – 100-летие академика С.В. Вонсовского.

**30.11.2010** – «Эра квантов», 110 лет квантовой теории.

**9.11.2011** – 100-летие явления сверхпроводимости.

**1.11.2012** – 125-летие Эрвина Шрёдингера.

**16.04.2013** – Л.Д. Ландау и современная физика.

Именно Сусанна Маврикиевна предложила назвать книгу о Моисее Соломоновиче Свирском «Очарованный наукой», потому что и сама была очарована ею!

С большой любовью создавала она научные бюллетени, посвященные памятным датам и творцам физической науки: «Магнитные монополи», «Л.Д. Ландау», «150 лет со дня рождения Дж. К. Максвелла» и др. Эти стенды буквально «зачитывались» до утечки информации, как бывает, исчезают из книг самые нужные страницы...

Помимо огромной учебной и научно-методической деятельности С.М. Горяинова на протяжении 10 лет являлась куратором «Кванта» – лучшей стенгазеты вуза. Будучи настоящим энтузиастом, она преданно служила газете и реализовывала в этой деятельности свою многогранную творческую суть.

Редколлегии «Кванта» порой приходилось решать очень трудные задачи. Так, например, весной 1975 года по поручению ЦК ВЛКСМ, который возглавлял тогда бывший ректор ЧГПИ Е.М. Тяжелников, в чрезвычайно короткий срок пришлось делать легендарный «номер на экспорт» в подарок советской сборной на чемпионат мира по хоккею в США.

Иногда процесс «испускания» «Кванта» затягивался далеко за полночь. Но наутро, в 8.00, Сусанна Маврикиевна уже стояла у доски. И квантовцы без опоздания занимали свои места в аудитории. Не прийти на первую пару считалось преступлением, устав «Кванта» предписывал обязательное посещение занятий по электродинамике и квантовой механике.

Еще одной замечательной страницей жизни была «Коуровка» – уральская зимняя школа физиков-теоретиков. Организованная в 1961 году академиком С.В. Вонсовским на Коуровской турбазе Свердловской области, она уже почти шесть десятилетий сохраняет свою огромную притягательную силу для ученых не только нашей страны, но и дальнего зарубежья. Побывав в этой школе однажды и окунувшись в атмосферу большой науки, Сусанна Маврикиевна всегда стремилась туда попасть – и в лютый сорокаградусный мороз, и в нездоровье, с переломом руки, когда с трудом удавалось передвигаться с кое-как пристроенным на спине тяжелым рюкзаком, и в дремучую ночную глухомань, где поезд не останавливается даже ни на минуту, а только немного притормаживает, когда при подсветке фонарей встречающих членов оргкомитета, громко командующих «Прыгай!», нужно на ходу поезда прыгать под откос... Ничто не могло помешать устремиться туда, где можно было иметь практически круглосуточное общение с крупными учеными, портреты которых раньше доводилось видеть лишь на страницах научных журналов. Впечатления об этих школах Сусанна Маври-

киевна бережно сохраняла в памяти как драгоценную духовную реликвию и своеобразный научный камертон, помогавший избегать «фальшивых нот» во всей научно-педагогической деятельности.

Она буквально вся светилась радостью, когда в журнале “Physica Status Solidi” появились две её первые работы по магнетизму неупорядоченных систем, подготовленные совместно с д.ф.-м.н. М.В. Медведевым во время её стажировки в Институте физики металлов УрО РАН весной 1980 года. Она вспоминала как самые счастливые периоды жизни те дни, когда имела возможность работать в Ленинке (РГБ им. В.И. Ленина) или в библиотеке ИФМ в Екатеринбурге. Исписанные аккуратными формулами страницы толстых тетрадей с разбором статей из солидных зарубежных научных журналов, недоступных в Челябинске, – истинные свидетели её возвышенного отношения к большой и настоящей Науке!

Сусанна Маврикиевна любила часто повторять фразу: «Ради науки». Она могла бы выбрать другие, более лёгкие жизненные пути. Но на протяжении всей её жизни именно наука оставалась сильнейшим и загадочным магнитом. Смыслом жизни была работа со студентами, приобщение их к величайшим достижениям теоретической физики. Здесь проявлялась абсолютная принципиальность и нетерпимость к поверхностному освоению физики. Она преданно служила делу, избранному в молодости.

Сусанна Маврикиевна обладала даром художественного восприятия мира. Любила поэзию и классическую музыку, рисовала натюрморты и пейзажи. Её дом напоминал небольшой музей, стены которого были украшены семейными реликвиями – картинами, написанными художниками нескольких поколений семьи Горяиновых.

Она ушла от нас на пике творческой деятельности, оставив яркий след в истории вуза. В эпитафии на черном мраморе высечена формула Эйнштейна из общей теории относительности, символизирующая её бесконечную преданность высокой Науке, и три слова, составлявшие главное содержание её жизни: «КВАНТ», «ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ», «МАГНЕТИЗМ».

Хрустальным именем СУСАННА  
Был славен лучший факультет,  
Она трудились неустанно  
На протяженьи многих лет!  
Прекрасна её жизни суть:  
Наукой озарённый путь,  
Науки преданный служитель,  
Искусств и музыки ценитель!

Л.М. Свирская

# Введение

## План

- I. Предмет и метод электродинамики. Представления о поле и веществе в электродинамике.
- II. Краткая история развития электродинамики.
- III. Концепции близко- и дальнего действия.

I. Электродинамика – раздел теоретической физики, изучающий свойства электромагнитного поля и взаимодействие поля с веществом. Электродинамика – фундаментальная физическая наука. Без открытий электродинамики, внедренных в практику человеческой деятельности, существование современной цивилизации невозможно. Это – производство и потребление электроэнергии, это – связь, обусловленная применением электромагнитных волн, это – радио и телевидение, электротранспорт и многое другое, что предопределило невиданный в истории человечества научно-технический прогресс XX века.

Изучение электродинамики способствует формированию современной научной картины мира. Поэтому неслучайно то, что электродинамика составляет примерно третью часть школьного курса физики.

В основе электродинамики лежат представления о поле и веществе. Отметим, в дальнейшем мы часто будем просто говорить «поле», опуская «электромагнитное». Электромагнитное поле – вид материи, который характеризуется такими же физическими величинами, как и вещество: энергия, импульс, масса. Но имеет и свои специфические характеристики – векторы напряженности и индукции, потенциалы. Наглядно представить себе поле сложно, но, по словам Л.Д. Ландау, «мы можем понять даже то, что себе вообразить не можем». И это одна из основных задач курса электродинамики.

Электромагнитное поле оказывает силовое воздействие на заряженные тела. В вакууме поле распространяется со скоростью  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. В классическом представлении поле непрерывно. Однако уже в 1905 году А. Эйнштейн ввел представление о дискретном распределении поля в виде квантов-фотонов, но в классической электродинамике, к изучению которой мы приступаем, эти представления не используются, они используются в квантовой электродинамике. Необходимо особо отметить, что электромагнитное поле не имеет электрического заряда. Электрический заряд – свойство вещества. Наименьший электрический заряд – это заряд электрона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

В классической электродинамике используются различные представления о веществе. Вещество трактуется как непрерывная среда – это макроскопическая или феноменологическая электродинамика. Учет дискретности вещества проводится в микроскопической электродинамике.

В макроскопической электродинамике поле характеризуется четырьмя векторами:  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ . Первые два – электрическая напряженность и электрическая индукция, вторая пара – магнитная индукция и магнитная напряженность. Вещество описывается следующими физическими величинами:  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость,  $\mu$  – магнитная проницаемость,  $\lambda$  – электропроводность,  $q$  – электрический заряд,  $\rho$  – объемная плотность распределения заряда,  $\sigma$  – поверхностная плотность заряда.

В основе макроскопической электродинамики лежит система четырех уравнений Максвелла.

В микроскопической электродинамике поле описывается двумя векторами:  $\vec{E}_{\text{микро}}, \vec{H}_{\text{микро}}$  – микроскопические (иногда говорят «истинные») электрическая и магнитная напряженности. Вещество описывается элементарным зарядом  $e$ , концентрацией зарядов  $n$ , массой заряженной частицы  $m$ , скоростью  $\vec{u}$ . Четыре уравнения Максвелла-Лоренца – основа микроскопической электродинамики.

II. В истории развития электродинамики условно можно выделить три основных этапа.

1) Накопление экспериментальных фактов, открытие экспериментальных законов. Этот этап начинается, конечно, с открытия закона Кулона. Но, главное, с опубликования в 1820 году опыта Эрстеда. опыты Эрстеда означали, что вокруг проводника с током появляется магнитное поле! Затем наступил, как отмечает В.П. Карцев [5], «звездный час Ампера». Ампер ввел в физику термин «электродинамика», открыл закон – закон Ампера, силу – силу Ампера и т.п. Затем в течение первого года последовало установление закона Био-Савара и его математическое оформление Лапласом, наконец, в 1831 году – открытие Фарадеем явления электромагнитной индукции, увенчавшим его идею «превратить магнетизм в электричество». После этого наступил основной (второй) этап.

2) Создание теории электромагнитного поля, связанное с именем Максвелла. Кратко отметим основные результаты работ Максвелла.

- Максвелл обобщил всю совокупность экспериментальных фактов, накопленных к тому времени, создав теорию электромагнитного поля.

- Впервые в истории теоретической физики создал теорию, объединяющую взаимодействия – электрическое и магнитное – в электромагнитное. Это особенно актуально в настоящее время, когда делаются попытки создания теории, объединяющей все четыре фундаментальных взаимодействия.

- Теоретически – «на кончике пера» – предсказал существование электромагнитных волн в природе, теоретически доказал, что свет есть электромагнитные волны.

Позднее, в 1905 году, Эйнштейн показал, что электромагнитное поле не нуждается ни в каком материальном носителе – эфире, оно само является видом материи, причем разделение на электрическое и магнитное поле условно, связано с выбором

системы отсчета. Кроме того, он ввел представление о квантовом характере электромагнитного поля.

3) Экспериментальное подтверждение, внедрение.

Здесь необходимо отметить работы Герца по экспериментальному – в физической лаборатории – созданию электромагнитных волн и изучению их свойств. А затем изобретение радио А.С. Поповым и продолжающееся и поныне внедрение в практику человеческой деятельности результатов электродинамики, которые трудно переоценить.

В последующих лекциях будут приводиться некоторые исторические справки установления определенных законов и следствий электродинамики.

III. В физике используются две концепции, которые по-разному трактуют взаимодействие материальных объектов. Это концепции близко- и дальнего действия. Рассмотрим, например, взаимодействие двух заряженных тел с зарядами  $q_1$  и  $q_2$ , находящимися на расстоянии  $r$  друг от друга (рис.1).

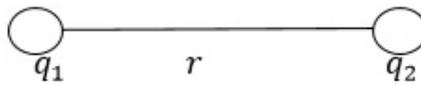


Рис. 1. Два заряженных тела

Концепция дальнего действия: взаимодействие происходит мгновенно, время взаимодействия  $t = 0$ . Это означает, что скорость взаимодействия бесконечна. Взаимодействие происходит на любом расстоянии, и никакого переносчика взаимодействия нет. При этом причина и следствие находятся в разных точках пространства. Формально применяется интегральная форма описания взаимодействия. Эта концепция приводит к большим трудностям. В самом деле, представим себе, что расположенное в какой-то точке заряженное тело с зарядом  $q_2$  перемещается в некоторую сторону, например, вправо (рис. 2).



Рис. 2. Перемещение заряженного тела

А где же искать причину? По закону Кулона это должен быть заряд  $q_1$ , который либо притягивает, либо отталкивает заряд  $q_2$  (зависит от знаков  $q_1$  и  $q_2$ ), но находится на одной прямой с вектором  $\vec{S}$ . Но может быть и несколько разных зарядов, распо-

ложенных в различных точках пространства, которые дают тот же эффект. В принципе придется учитывать заряды во всей Вселенной. Как видите, это весьма неблагоприятная задача. Оговорка? В дальнейшем везде используется научный жаргон – для краткости будем говорить «заряд» вместо «заряженная частица» или «заряженное тело».

Концепция близкодействия: взаимодействие осуществляется за конечное время, т.е.  $t \neq 0$ . Скорость взаимодействия конечна. Предельной скоростью физического взаимодействия согласно специальной теории относительности является скорость света в вакууме. При этом материальным носителем взаимодействия является поле, в данном случае электромагнитное. Причина (состояние поля в данной точке) и следствие – сила, действующая на заряд  $q_2$ , находятся в одной и той же точке пространства (или в бесконечно близких точках), отсюда название концепции – близкодействие. Можно представить себе, как происходит взаимодействие: заряд  $q_1$  создает поле, но это состояние поля доходит до места, где находится  $q_2$  не мгновенно, а через некоторое время и тогда только подействует с некоторой силой на  $q_2$ ! Для того чтобы определить эту силу, надо знать характеристику поля в том же месте, где находится наш «подопытный» заряд  $q_2$ . В этом огромное преимущество концепции близкодействия. Существенно, что в этой концепции вводится представление о поле, как о переносчике взаимодействия. Для описания физических явлений применяется дифференциальная форма. Поэтому в электродинамике появляются уравнения в дифференциальной форме.

Современная теоретическая физика использует концепцию близкодействия. Математическим аппаратом электродинамики является векторный анализ, основы которого изучаются в курсах высшей математики и «Методов математической физики» (приложение II).

# ГЛАВА I. ОСНОВЫ МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В этой главе будут рассмотрены: система уравнений Максвелла как обобщение экспериментальных законов, закон сохранения и превращения энергии электромагнитного поля, граничные условия для нормальных и касательных составляющих векторов электромагнитного поля.

## § 1. Четвертое уравнение Максвелла как обобщение экспериментального закона Кулона

### План

- I. Полевая трактовка закона Кулона. Напряженность и индукция поля точечного заряда.
- II. Вторая (электростатическая) теорема Остроградского–Гаусса.
- III. Четвертое уравнение Максвелла как обобщение закона Кулона.

I. Закон Кулона – закон взаимодействия неподвижных точечных зарядов.

Точечный заряд – это абстракция. Точечным зарядом можно считать заряд тела, размерами которого можно пренебречь, или, например, размеры взаимодействующих заряженных тел достаточно малы по сравнению с расстоянием между ними.

Рассмотрим два точечных заряда  $q_1$  и  $q_2$ , находящихся на расстоянии  $\vec{r}_{21}$  (рис. 3).

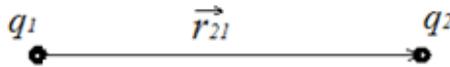


Рис 3. Два точечных заряда

Сила, действующая на  $q_2$ , по закону Кулона равна:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{\epsilon r_{21}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}},$$

$k$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц. В системе СИ  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , где  $\epsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума. В гауссовой системе  $k = 1$ . В дальнейшем используется гауссова система единиц – для преемственности с другими разделами теоретической физики.

Тогда закон Кулона записывается так:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{\epsilon r_{21}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}. \quad (1.1)$$

Формула (1.1) показывает, что может происходить как притяжение, если  $q_1$  и  $q_2$  – разноименные заряды, так и отталкивание, если  $q_1$  и  $q_2$  – одноименные.

Закон Кулона соответствует концепции дальнего действия, так как сила, действующая на  $q_2$ , имеет причину – заряд  $q_1$ , находящийся от  $q_2$  на расстоянии  $r_{21}$ .

Наша «сверхзадача» – перейти к такой форме, которая связывала бы причину и следствие в одной точке пространства. Для этого вводим понятие поля. Сначала определим вектор напряженности поля заряда  $q_1$  в точке 2, где находится заряд  $q_2$ :

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{F}_2}{q_2} = \frac{q_1 q_2}{q_2 \epsilon r_{21}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} = \frac{q_1}{\epsilon r_{21}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}.$$

Эта формула не совсем удобна, так как  $\vec{E}_2$  имеет разное значение в разных средах (зависит от  $\epsilon$ ). Введем вектор электрической индукции поля заряда  $q_1$ , равный:

$$\vec{D}_2 = \epsilon \vec{E}_2 = \frac{\epsilon q_1}{\epsilon r_{21}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} = \frac{q_1}{r_{21}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}.$$

Проведем обобщение этой формулы:

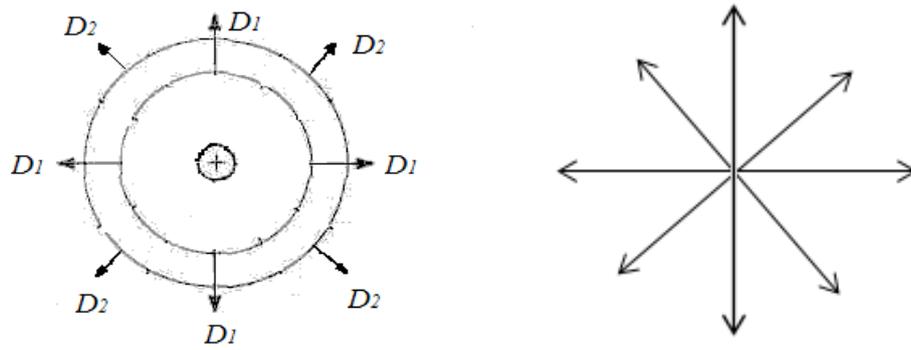
1) сначала отвлечемся от точки 2 и напишем формулу для любой точки поля:

$$\vec{D} = \frac{q_1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r},$$

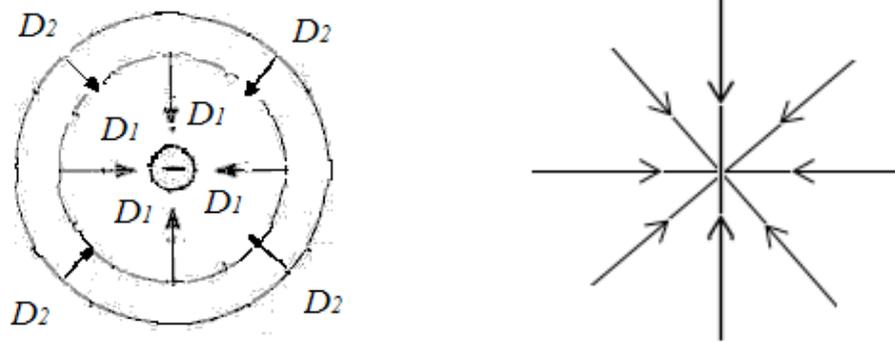
2) затем перепишем это выражение для любого заряда  $q$ , создающего поле:

$$\vec{D} = \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \quad (1.2)$$

Формула (1.2) означает, что поле вектора  $\vec{D}$  обладает сферической симметрией (рис. 4, а и б).



a)



б)

**Рис 4. Силовые линии точечного заряда: а) положительный заряд; б) отрицательный заряд**

Это хорошо известные «школьные» картинки. Они показывают, что силовые линии могут выходить («вытекать») из заряда – случай *a*), могут входить («втекать») в заряд – случай *б*). Что является дифференциальной причиной такого «источка» и «стока» в данной точке поля, нам и предстоит выяснить. Но сначала докажем интегральную теорему для потока вектора электрической индукции, то есть вторую (электростатическую) теорему Остроградского–Гаусса.

## II. Вторая (электростатическая) теорема Остроградского–Гаусса

Необходимо вычислить поток вектора электрической индукции через произвольную замкнутую поверхность в случае произвольного распределения заряда, т.е.

$$N = \oint_s D_n dS.$$

Вычисление проведем в несколько этапов, постепенно обобщая результаты.

1. Сначала вычислим элементарный поток вектора электрической индукции  $dN = D_n dS$ , т.е. поток вектора  $\vec{D}$  через элементарную площадку  $dS$ , отстоящую от точечного заряда  $q$  на расстоянии  $r$ . Для определенности пусть заряд  $q$  – положительный.

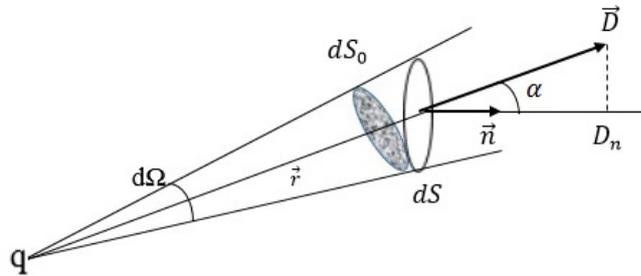


Рис. 5. К вычислению потока вектора электрической индукции

Тогда (см. рис. 5)

$$dN = D_n dS = D \cdot dS \cdot \cos\alpha = D \cdot dS_0,$$

где  $dS_0$  – элементарная площадка, перпендикулярная радиусу-вектору  $\vec{r}$  и равная  $dS_0 = dS \cos\alpha$ . Подставляем вместо  $D$  его значение для точечного заряда, т.е.  $\frac{q}{r^2}$  и получаем, что поток равен  $dN = \frac{q}{r^2} dS_0 = q d\Omega$ , где  $d\Omega$  – элемент телесного угла, под которым из точки, где расположен заряд  $q$ , видны поверхности  $dS$  и  $dS_0$ . При этом  $d\Omega$  равен

$$d\Omega = \frac{dS_0}{r^2} = \frac{dS \cos\alpha}{r^2}. \quad (1.3)$$

Обратите внимание на эту формулу. Она показывает, что  $d\Omega$  может иметь разные знаки, а именно:

$$d\Omega > 0, \cos\alpha > 0, \quad (1.4a)$$

$$d\Omega < 0, \cos\alpha < 0. \quad (1.4b)$$

Итак, для элементарного потока получено следующее выражение:

$$dN = q d\Omega. \quad (1.5)$$

2. Вычислим поток вектора электрической индукции через произвольную замкнутую поверхность от одного точечного заряда. Для этого используем только что доказанный результат. Рассмотрим два случая:

а) Заряд находится внутри замкнутой поверхности  $S$ . Тогда согласно рисунку 6:

$$N = \oint_S D_n dS = \int q d\Omega = q \int d\Omega = q\Omega = 4\pi q,$$

поскольку полный телесный угол, под которым изнутри видна замкнутая поверхность, равен  $\Omega = 4\pi$ .



Рис 6. Заряд находится внутри замкнутой поверхности

Итак, в этом случае поток равен

$$N = \oint_S D_n dS = 4\pi q. \quad (1.6)$$

б) Заряд  $q$  находится вне замкнутой поверхности  $S$ . Тогда поток

$$N = \oint_S D_n dS = q \int_{\Omega} d\Omega.$$

Рассмотрим два элемента поверхности  $dS_1$  и  $dS_2$ , которые из точки, где расположен заряд, видны под одним и тем же по величине телесным углом  $d\Omega$  (рис.7).

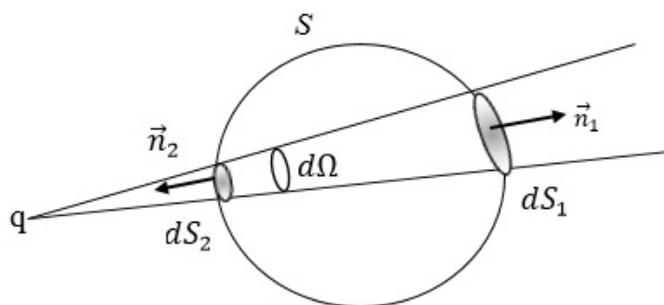


Рис 7. Заряд находится вне замкнутой поверхности

Однако площадка  $dS_1$  видна под положительным телесным углом  $d\Omega_1$ , потому что нормаль  $\vec{n}_1$  образует острый угол с радиусом-вектором. Площадка  $dS_2$  видна под отрицательным телесным углом  $d\Omega_2$ , так как нормаль  $\vec{n}_2$  образует тупой угол с радиусом-вектором. В сумме же эти два телесных угла компенсируют друг друга, т.е.  $d\Omega_1 + d\Omega_2 = 0$ . В итоге

$$\int_{\Omega} d\Omega = 0.$$

Тогда поток будет равен

$$N = q \int_{\Omega} d\Omega = 0. \quad (1.7)$$

Рассматривая совместно (1.6) и (1.7), запишем:

$$N = \oint_s D_n dS = \begin{cases} 4\pi q, & \text{если заряд } q \text{ внутри поверхности } S, \\ 0, & \text{если заряд } q \text{ вне поверхности } S. \end{cases} \quad (1.8)$$

Итак, для одного точечного заряда теорема доказана.

3. Пусть имеется система точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_k$ . Вычислим поток вектора электрической индукции через произвольную замкнутую поверхность. Согласно принципу суперпозиции каждый заряд независимо от других создает свою  $\vec{D}$  и, соответственно, свой поток  $N$  через поверхность  $S$ . Но, согласно (1.8), надо учитывать только заряды, находящиеся внутри поверхности  $S$ , так как заряды, находящиеся вне поверхности  $S$ , вклада в поток не дадут. Тогда каждый заряд, находящийся внутри поверхности  $S$ , дает поток:

$$\begin{aligned} N_1 &= \oint_s D_{1n} dS = 4\pi q_1, \\ N_2 &= \oint_s D_{2n} dS = 4\pi q_2, \dots, \\ N_i &= \oint_s D_{in} dS = 4\pi q_i. \end{aligned}$$

Просуммируем эти потоки:

$$N = \sum_i N_i = \sum_i \oint_s D_{in} dS = \sum_i 4\pi q_i = 4\pi \sum_i q_i,$$

$$\sum_i \oint_s D_{in} dS = \oint_s \left( \sum_i D_{in} \right) dS = \oint_s D_n dS,$$

где

$$\vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \dots + \vec{D}_i,$$

$$D_n = \sum_i D_{in}, \quad q = \sum_i q_i.$$

Тогда поток равен:

$$N = \oint_s D_n dS = 4\pi q. \quad (1.9)$$

Формально получен такой же результат, что и в (1.6), но он применим для более общего случая.

4. Рассмотрим непрерывное распределение заряда  $q$  по объему  $V$ , ограниченному поверхностью  $S$ . Характеристикой такого распределения является объемная плотность электрического заряда  $\rho$ , определяемая следующим образом:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}. \quad (1.10)$$

При этом элемент объема  $dV$  имеет заряд  $dq = \rho dV$ , заряд же всего объема

$$q = \int_V \rho dV,$$

где  $\rho$  в общем случае может зависеть как от координат, так и от времени, т.е.  $\rho = \rho(x, y, z, t)$ .

Разбиваем мысленно объем  $V$  на элементарные объемы  $\Delta V_i$  такие, что заряд  $\Delta q_i$  объема  $\Delta V_i$  можно было бы считать точечным. Тогда этот заряд равен  $\Delta q_i = \rho_i \Delta V_i$ . Согласно доказанной ранее теореме каждый такой точечный заряд создает свой поток:

$$\Delta N_i = \oint_s \Delta D_{in} dS = 4\pi \Delta q_i.$$

Здесь  $\Delta\vec{D}_i$  – вектор электрической индукции, создаваемой зарядом  $\Delta q_i$ . Для этих зарядов так же выполняется принцип суперпозиции. Просуммируем все потоки от зарядов  $\Delta q_i$  и перейдем к пределу суммы:

$$\lim \sum_i \Delta N_i = \lim \sum_i \oint_s \Delta D_{in} dS = \lim \sum_i 4\pi \Delta q_i. \quad (1.11)$$

Рассмотрим по отдельности каждое выражение, вспоминая, что предел такой суммы есть соответствующий интеграл:

$$\begin{aligned} \lim \sum_i \Delta N_i &= \int dN = N, \\ \lim \sum_i \oint_s \Delta D_{in} dS &= \oint_s (\lim \sum_i \Delta D_{in}) dS = \oint_s (\int dD_n) dS = \oint_s D_n dS, \\ \lim \sum_i 4\pi \Delta q_i &= \lim \sum_i 4\pi \rho_i \Delta V_i = 4\pi \int_V dq = 4\pi \int_V \rho dV = 4\pi q. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Тогда вместо (1.11) на основании равенств (1.12) получаем, что

$$N = \oint_s D_n dS = 4\pi q. \quad (1.13)$$

Итак, в случае произвольного распределения заряда (см. (1.9), (1.13)) поток вектора электрической индукции через произвольную замкнутую поверхность  $S$  равен  $4\pi q$ , где  $q$  – заряд, находящийся внутри поверхности  $S$ . Если внутри данной поверхности  $S$  нет зарядов, то поток равен нулю. Это и есть 2-я теорема Остроградского–Гаусса. Она позволяет достаточно просто вычислять значение вектора  $\vec{D}$  для ряда случаев, т.е. решать конкретные задачи.

III. Переходим к нахождению 4-го уравнения Максвелла. Для этого рассмотрим совместно две интегральные теоремы – 1-ю и 2-ю теоремы Остроградского–Гаусса. По 1-й теореме (из векторного анализа) запишем для потока любого вектора  $\vec{a}$ :

$$\oint_s a_n ds = \int_V \text{div} \vec{a} dV.$$

Для потока вектора  $\vec{D}$  получаем, полагая  $\vec{D} \equiv \vec{a}$ ,

$$\oint_s D_n dS = \int_V \operatorname{div} \vec{D} dV. \quad (1.14)$$

По второй теореме для потока вектора  $\vec{D}$  имеем

$$\oint_s D_n dS = 4\pi q.$$

Будем считать, что заряд  $q$  распределен по объему с плотностью  $\rho$ . Тогда для потока вектора  $\vec{D}$  можно записать:

$$\oint_s D_n dS = \int_V 4\pi\rho dV. \quad (1.15)$$

Левые части (1.14) и (1.15) представляют собой поток вектора  $\vec{D}$ , следовательно, можно приравнять и правые части:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \int_V 4\pi\rho dV.$$

Для элемента объема  $dV$  получаем:

$$\operatorname{div} \vec{D} dV = 4\pi\rho dV, \quad dV \neq 0,$$

откуда следует, что

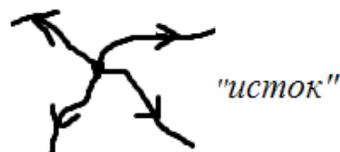
$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho. \quad (1.16)$$

Это и есть искомое четвертое уравнение Максвелла.

Выясним его физический смысл. В теоретической физике уравнения записываются следующим образом: в правой части – причина, в левой – следствие. Согласно (1.16) в левой части стоит  $\operatorname{div} \vec{D}$ . Как известно из векторного анализа, дивергенция характеризует источник поля данного вектора. Нас интересует, что является причиной образования источника поля  $\vec{D}$  в данной точке. Ответ содержится в правой части уравнения (1.16): причиной является объемная плотность заряда  $\rho$  в этой же самой точке поля.

Итак, причиной источника поля  $\vec{D}$  является объемная плотность заряда  $\rho$  в этой же самой точке. При этом возможны три случая:

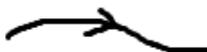
1) если  $\rho > 0$  (положительные заряды), то  $\text{div}\vec{D} > 0$  – это означает, что в данной точке находится «исток»  $\vec{D}$  («начало» силовых линий  $\vec{D}$ );



2) если  $\rho < 0$  (отрицательные заряды), то  $\text{div}\vec{D} < 0$  – это означает «сток» (конец силовых линий  $\vec{D}$ );



3) если  $\rho = 0$ , то  $\text{div}\vec{D} = 0$ , но  $\vec{D} \neq 0$  – это означает, что линии  $\vec{D}$  идут непрерывно:



Четвертое уравнение Максвелла является обобщением закона Кулона.

Во-первых, закон Кулона соответствует концепции дальнего действия, как это уже отмечалось, потому что причина – заряд  $q_1$  и следствие – сила, действующая на заряд  $q_2$ , находятся в разных точках пространства. Четвертое уравнение Максвелла соответствует концепции ближнего действия, так как причина – объемная плотность заряда  $\rho$  и следствие –  $\text{div}\vec{D}$  связаны в одной и той же точке. Таким образом, 4-е уравнение Максвелла описывает любую точку поля, даже такую, в которой отсутствует заряд (см. случай 3).

Во-вторых, закон Кулона – закон взаимодействия точечных зарядов. Четвертое уравнение Максвелла применимо для любого распределения зарядов и даже тогда, когда  $\rho = 0$ .

В-третьих, закон Кулона – это закон электростатики. Так взаимодействуют неподвижные заряды. 4-е уравнение Максвелла – уравнение электродинамики. Оно применимо и в случае  $\rho = \rho(t)$ .

## § 2. Третье уравнение Максвелла как обобщение экспериментального факта отсутствия в природе свободных магнитных зарядов

Кулон экспериментально установил закон взаимодействия магнитных полюсов, предполагая, что в каждом полюсе содержатся свободные магнитные заряды:

$$\vec{F} = k \frac{q_{1\text{св.маг}} q_{2\text{св.маг}}}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

По аналогии с электростатикой вводились векторы  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$ :

$$\vec{H} = \frac{\vec{F}}{q_{\text{св.маг}}}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}.$$

Затем можно было записать 2-ю теорему Остроградского–Гаусса для вектора магнитной индукции:

$$\oint_S B_n dS = 4\pi q_{\text{св.маг.}}$$

Но на этом аналогия с электростатикой заканчивается, так как в природе до сих пор не обнаружены частицы, имеющие свободный магнитный заряд. Природа не устроена по шаблону, который пытается навязать ей человек. Природа гораздо богаче!

Итак, в соответствии с экспериментальным фактом отсутствия в природе свободных магнитных зарядов полагаем, что  $q_{\text{св.маг.}} = 0$ , следовательно, можно записать:

$$\oint_S B_n dS = 0. \quad (1.17)$$

Применяя 1-ю теорему Остроградского–Гаусса для вектора  $\vec{B}$ , получаем:

$$\oint_S B_n dS = \int_V \text{div} \vec{B} dV. \quad (1.18)$$

Рассматривая совместно (1.17) и (1.18), получаем:

$$\int_V \text{div} \vec{B} dV = 0.$$

Откуда для элемента  $dV$  имеем  $\text{div}\vec{B} dV = 0$ , но  $dV \neq 0$ , тогда получаем окончательно:

$$\text{div}\vec{B} = 0. \quad (1.19)$$

Это и есть искомое третье уравнение Максвелла.

Физический смысл этого уравнения заключается в следующем: магнитное поле – поле вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  не имеет источников, так как в природе отсутствуют носители свободных магнитных зарядов. Следовательно, силовые линии  $\vec{B}$  всегда замкнуты, идут непрерывно.

3-е уравнение Максвелла соответствует концепции близкодействия, так как имеет дифференциальную форму.

Отметим, что еще в 1932 году Дирак создал квантовую теорию, из которой следовало существование частиц, несущих свободный магнитный заряд, т.е. монополей. Но до сих пор монополи Дирака в природе не обнаружены, по крайней мере, в исследованной области Вселенной.

### § 3. Второе уравнение Максвелла как обобщение закона электромагнитной индукции

Явление электромагнитной индукции было открыто Фарадеем в 1831 году. Оно заключается в следующем: при любом изменении магнитного потока, пронизывающего произвольную поверхность  $S$ , опирающуюся на замкнутый проводящий контур  $l$ , в контуре возникает индукционный ток (рис. 8).

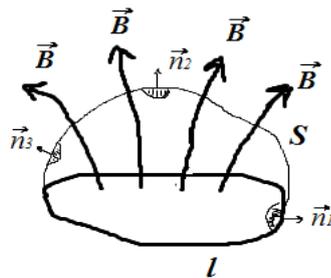


Рис. 8. Поток вектора  $\vec{B}$  через поверхность  $S$

Закон электромагнитной индукции с учетом правила Ленца имеет вид:

$$\mathcal{E}_{инд} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (1.20)$$

где  $\mathcal{E}_{инд}$  – ЭДС индукции,  $\Phi$  – магнитный поток,  $c$  – электродинамическая постоянная в гауссовой системе.

При этом ЭДС индукции возникает (наводится) в контуре  $l$ , а магнитный поток меняется через поверхность  $S$ , и необязательно через всю поверхность. Может, как показывают многочисленные эксперименты, даже через некоторые участки поверхности. Впечатляющие опыты, в которых участвуют простые школьные приборы (демонстрационный гальванометр, катушка индуктивности и постоянный магнит) сейчас доступны для наблюдения явления на уроках в школе.

Закон (1.20) имеет интегральную форму, что мы сейчас и покажем, а только затем перейдем к дифференциальной форме.

Рассмотрим левую часть (1.20). По определению, ЭДС – это работа, совершаемая по перемещению единичного положительного заряда вдоль замкнутого контура  $l$  под действием некоторой электрической напряженности, в данном случае наведенной, т.е. индуцированной напряженности  $\vec{E}$ . Тогда можно записать:

$$\mathcal{E}_{инд} = A = \oint_l \delta A = \oint_l \vec{F} d\vec{l} = \oint_l q\vec{E} d\vec{l} = \oint_l \vec{E} d\vec{l}, \quad (q = +1)$$

Таким образом,

$$\mathcal{E}_{инд} = \oint_l \vec{E} d\vec{l}. \quad (1.21)$$

Теперь переходим к правой части (1.20). Используем определение магнитного потока:

$$\Phi = \int_s B_n dS.$$

Находим, что

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_s B_n dS = \int_s \frac{\partial B_n}{\partial t} dS.$$

При этом, считая поверхность фиксированной, предполагаем, что изменение магнитного потока происходит за счет изменения магнитной индукции  $\vec{B}$ . Тогда производную  $\frac{d}{dt}$  можно внести под знак интеграла. Итак, получаем:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_s \frac{\partial B_n}{\partial t} dS. \quad (1.22)$$

Подставляем найденные выражения в (1.20):

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \int_s \frac{\partial B_n}{\partial t} dS. \quad (1.23)$$

Используем теорему Стокса:

$$\oint_l \vec{a} d\vec{l} = \int_s \text{rot}_n \vec{a} dS.$$

Полагая  $\vec{E} \equiv \vec{a}$ , получим:

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = \int_s \text{rot}_n \vec{E} dS. \quad (1.24)$$

Рассматривая совместно (1.23) и (1.24), получаем:

$$\int_s \text{rot}_n \vec{E} dS = \int_s \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial B_n}{\partial t} \right) dS.$$

Для элемента поверхности  $dS$  выполняется равенство

$$\text{rot}_n \vec{E} dS = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_n}{\partial t} dS.$$

Но так как  $dS \neq 0$ , то

$$\text{rot}_n \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_n}{\partial t}. \quad (1.25)$$

Мы получили пока соотношение для проекций на нормаль некоторых векторов. Но поскольку элемент поверхности выбран произвольно, нормаль  $\vec{n}$  ориентирована в пространстве, соответственно, произвольно (см. рис. 8), то из равенства нормальных составляющих векторов следует равенство для самих векторов:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.26)$$

Это и есть искомое 2-е уравнение Максвелла.

Физический смысл второго уравнения Максвелла заключается в следующем: вихрь электрической напряженности в некоторой точке создается изменением вектора магнитной индукции в той же самой точке. Иначе говоря, переменным магнитным полем порождается вихревое электрическое поле. Вихревое поле имеет замкнутые силовые линии. Если в какой-то точке  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$  и направлено вверх (см. рис. 9), то  $\operatorname{rot} \vec{E}$  направлен вниз. В окрестности этой точки происходит циркуляция вектора  $\vec{E}$  в плоскости, перпендикулярной  $\operatorname{rot} \vec{E}$ .

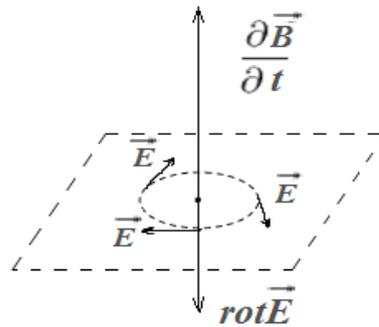


Рис 9. Связь  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  и  $\operatorname{rot} \vec{E}$

Второе уравнение Максвелла показывает, что Фарадей открыл новое по качеству электрическое поле – вихревое, и новый способ создания электрического поля – с помощью переменного магнитного поля!

Но, как будет показано в главе II, электрическое поле может быть и безвихревым, т.е.  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ . Силовые линии такого поля незамкнуты, связаны с электрическими зарядами.

Второе уравнение Максвелла является обобщением закона электромагнитной индукции:

1) Закон электромагнитной индукции соответствует концепции дальнего действия. В самом деле, как мы уже отмечали, изменение магнитного поля может происходить в какой-то одной части поверхности  $S$ , а индукционный ток возникает вдоль контура  $l$ . Это означает, что причина – изменение магнитного потока и следствие – ток в контуре – разделены в пространстве.

Второе уравнение Максвелла соответствует концепции близкого действия, так как причина – скорость изменения вектора  $\vec{B}$  и следствие – вихрь электрической напряженности связаны в одной и той же точке поля. При этом, как мы покажем в следующих пунктах, 2-е уравнение Максвелла описывает любую точку поля.

2) Максвелл раскрыл сущность явления электромагнитной индукции – возникновение вихревого электрического поля при изменении магнитного поля, это означает, что явление электромагнитной индукции есть объективное свойство электромагнитного поля.

3) Проводящий контур играет второстепенную роль – роль индикатора, позволяющего обнаружить явление. Но само явление может происходить и без контура. Например, в нашей аудитории, так как везде есть свет, а это электромагнитные волны, в которых связаны переменные во времени и вихревые электрическое и магнитное поля (см. главу V).

4) Роль вещества, отметим снова, второстепенная. Запишем уравнение для вакуума. В вакууме  $\mu = 1$ , тогда  $\vec{B} = \vec{H}$  и уравнение имеет вид:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (1.27)$$

но в среде  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ , тогда уравнение примет вид:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (1.28)$$

Для ферромагнетиков  $\mu \gg 1$ , следовательно ферромагнитные материалы усиливают явление. Это широко применяется в технике.

Вообще значение открытия Фарадеем явления электромагнитной индукции и выяснения Максвеллом сущности явления для современной цивилизации огромно и его трудно переоценить!

#### **§ 4. Первое уравнение Максвелла как обобщение закона Био–Савара–Лапласа. Уравнение непрерывности. Ток смещения**

##### **План**

- I. Первое уравнение Максвелла как обобщение закона Био–Савара–Лапласа для постоянного тока.
- II. Уравнение непрерывности – дифференциальная форма закона сохранения электрического заряда.
- III. Гипотеза Максвелла о токе смещения. 1-е уравнение Максвелла для переменного тока.

I. Согласно закону Био-Савара-Лапласа магнитная напряженность бесконечного прямого проводника, по которому течет постоянный ток, равна:

$$H = k \frac{J}{r},$$

где  $k = \frac{1}{2\pi}$  – в системе СИ,  $k = \frac{2}{c}$  в гауссовой системе.

На рисунке 10 изображены силовые линии и вектор  $\vec{H}$  в некоторых точках.

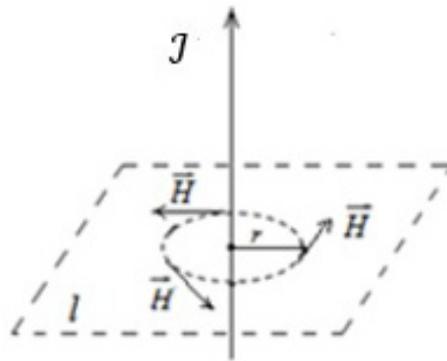


Рис. 10. Циркуляция  $\vec{H}$  вдоль силовых линий

Видно, что вектор  $\vec{H}$  циркулирует вдоль силовых линий. Запишем значение  $H$  в гауссовой системе единиц:

$$H = \frac{2J}{cr}. \quad (1.29)$$

Формула (1.29) показывает, что причина – сила тока  $J$  – и следствие – магнитная напряженность  $H$  – разделены расстоянием  $r$  (радиус силовой линии), что соответствует концепции дальнего действия. Необходимо написать такое уравнение, в котором причина и следствие находились бы в одной точке.

Но сначала перейдем к интегральной форме. Для этого умножим (1.29) слева и справа на  $2\pi r$  – длину окружности, т.е. длину силовой линии радиуса  $r$ . Тогда получим:

$$H * 2\pi r = 2\pi r * \frac{2J}{cr},$$

или

$$H * 2\pi r = \frac{4\pi}{c} J. \quad (1.30)$$

Покажем, что левая и правая части теперь имеют интегральную форму. Вычислим циркуляцию  $\vec{H}$  вдоль силовой линии радиуса  $r$ , т.е.  $\oint \vec{H} d\vec{l}$ .

Выберем  $d\vec{l}$  совпадающим по направлению с  $\vec{H}$ , затем используем постоянство  $H$  по величине на данной силовой линии и получаем:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \oint_l H dl = H \oint_l dl = Hl = H * 2\pi r.$$

Итак,

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = 2\pi r H. \quad (1.31)$$

Теперь нам надо показать, что  $\mathcal{J}$  тоже есть некоторый интеграл. Для этого введем известное из курса общей физики понятие вектора плотности тока проводимости  $\vec{j}$ .

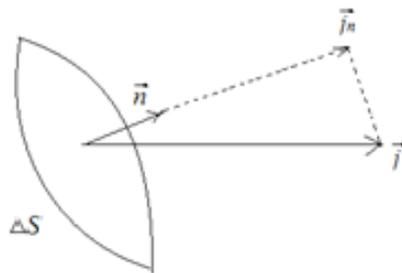


Рис. 11. Вектор  $\vec{j}$

Для случая произвольно ориентированной площадки  $\Delta S$  проводника, через которую протекает ток  $\Delta I$ , получаем:

$$j_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathcal{J}}{\Delta S} = \frac{d\mathcal{J}}{dS}.$$

Тогда

$$d\mathcal{J} = j_n dS$$

и сила тока равна:

$$\mathcal{J} = \int_S j_n dS. \quad (1.32)$$

Подставляя полученные интегральные выражения (1.31) и (1.32) в (1.30), получаем:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int_s j_n dS. \quad (1.33)$$

Используем теорему Стокса для  $\vec{H}$ :

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_s \text{rot}_n \vec{H} dS. \quad (1.34)$$

Совместное рассмотрение (1.33) и (1.34) позволяет записать:

$$\int_s \text{rot}_n \vec{H} dS = \frac{4\pi}{c} \int_s j_n dS.$$

Следовательно, для элемента поверхности  $dS$  выполняется равенство:

$$\text{rot}_n \vec{H} dS = \frac{4\pi}{c} j_n dS.$$

Поскольку  $dS \neq 0$ , то можно написать:

$$\text{rot}_n \vec{H} = \frac{4\pi}{c} j_n.$$

Но элемент поверхности  $dS$  выбран произвольно, поэтому равенство выполняется и для векторов:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (1.35)$$

Это – искомое первое уравнение Максвелла для постоянного тока. Возникает вопрос, применимо ли оно и для описания поля переменного тока?

Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо ввести некоторый критерий, конечно, в дифференциальной форме, позволяющий отделять случай постоянного тока от случая переменного тока. Для этого сделаем отступление и рассмотрим закон сохранения электрического заряда.

II. Пусть в некотором объеме  $V$  находится заряд  $q$ . За счет чего может происходить изменение заряда  $q$ ? Только за счет втекания или вытекания зарядов через поверхность  $S$ , ограничивающую объем  $V$  (см. рис.12), т.е. за счет силы тока  $\vec{J}$  или, иначе,

потока вектора плотности тока  $\vec{j}$  через  $S$ . Других способов изменения заряда нет в природе. Это фундаментальный закон природы.

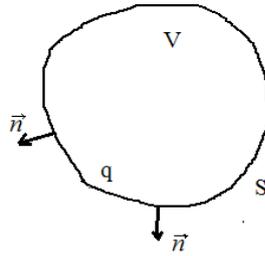


Рис. 12. Заряд в объеме  $V$

Закон можно записать в интегральной форме:

$$\frac{dq}{dt} = - \oint_S j_n dS. \quad (1.36)$$

Рассмотрим три разных случая:

1) Пусть

$$\oint_S j_n dS > 0,$$

это означает, что заряды вытекают из объема  $V$ . Согласно (1.36)  $\frac{dq}{dt} < 0$ , т.е. заряд  $q$  убывает, что логично.

2) Если

$$\oint_S j_n dS < 0,$$

т.е. заряды втекают в объем  $V$  через поверхность  $S$ , то согласно (1.36)  $\frac{dq}{dt} > 0$ . Это значит, что заряд увеличивается.

3) Если

$$\oint_S j_n dS = 0,$$

то и  $\frac{dq}{dt} = 0$  – заряд сохранится. Значит в исходном уравнении (1.36) знаки выбраны правильно.

Теперь переходим к дифференциальной форме закона. Пусть заряд  $q$  распределен по объему с плотностью  $\rho$ . Тогда будет иметь место следующее равенство:

$$q = \int_V \rho dV.$$

Далее находим:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

При этом сделано предположение, что объем не меняется, а все изменение заряда происходит за счет изменения объемной плотности. С учетом полученного выражения вместо (1.36) запишем:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S j_n dS. \quad (1.37)$$

Применим 1-ю теорему Остроградского-Гаусса к вектору  $\vec{j}$ :

$$\oint_S j_n dS = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV, \quad (1.38)$$

и подставим правую часть (1.38) в (1.37):

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV. \quad (1.39)$$

Для элемента объема  $dV$  справедливо равенство:

$$\frac{d\rho}{dt} dV = - \operatorname{div} \vec{j} dV.$$

Так как  $dV \neq 0$ , то получаем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{j}.$$

Это и есть искомое дифференциальное уравнение, которое называется уравнением непрерывности.

Рассмотрим возможные частные случаи.

1) Если  $\operatorname{div} \vec{j} > 0$ , то  $\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$ , т.е. плотность заряда  $\rho$  в данной точке убывает, если ток вытекает.

2) Если  $div\vec{j} < 0$ , то  $\frac{\partial\rho}{\partial t} > 0$ , т.е. плотность заряда в данной точке увеличивается, если ток втекает.

3) Если  $div\vec{j} = 0$  при  $\vec{j} \neq 0$ , то  $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$  и  $\rho = const$  – ток течет, но плотность заряда  $\rho$  не меняется.

Случаи 1 и 2 соответствуют переменному току. При этом

$$div\vec{j} \neq 0. \quad (1.41)$$

Случай 3 – случай постоянного тока. При этом

$$div\vec{j} = 0. \quad (1.42)$$

Итак, получены критерии, позволяющие отделить случай переменного тока от постоянного тока, это условия (1.41) и (1.42).

III. Проверим, удовлетворяет ли уравнение (1.35) требованиям уравнения непрерывности. Для этого образуем дивергенцию от уравнения (1.35):

$$div\,rot\vec{H} = div\left(\frac{4\pi}{c}\vec{j}\right).$$

Согласно тождеству векторного анализа  $div\,rot\vec{a} \equiv 0$  получаем, что  $div\,rot\vec{H} = 0$  и, следовательно,  $div\vec{j} = 0$ .

Это означает, что уравнение (1.35) удовлетворяет уравнению непрерывности только для постоянного тока. Для переменного тока, как мы получили ранее,  $div\vec{j} \neq 0$ , но уравнение (1.35) этого не дает. Возникает противоречие между фундаментальным законом (уравнение непрерывности) и частным уравнением (1.35).

Максвелл разрешил это противоречие следующим образом. Он предположил, что в случае переменного тока в уравнение (1.35) надо к вектору  $\vec{j}$  добавить еще некоторый вектор, который он назвал вектором плотности тока смещения, т.е.  $\vec{j}_{смещ.}$ . Иначе, вместо (1.35) надо записать:

$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}(\vec{j} + \vec{j}_{смещ.}). \quad (1.43)$$

Выясним, как этот дополнительный вектор устраняет противоречие, т.е. согласует уравнение (1.43) с требованиями уравнения непрерывности (1.41) и (1.42).

Для этого снова образуем дивергенцию от обеих частей уравнения (1.43):

$$div\,rot\vec{H} = div\frac{4\pi}{c}(\vec{j} + \vec{j}_{смещ.}).$$

Но  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = 0$ , следовательно  $\operatorname{div}(\vec{j} + \vec{j}_{\text{смещ.}}) = 0$ ,  $\operatorname{div} \vec{j} + \operatorname{div} \vec{j}_{\text{смещ.}} = 0$ .  
Иначе:

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\operatorname{div} \vec{j}_{\text{смещ.}} \quad (1.44)$$

Теперь имеются две возможности.

1) Если  $\operatorname{div} \vec{j}_{\text{смещ.}} = 0$ , то  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$  – удовлетворяется случай постоянного тока.

2) Если  $\operatorname{div} \vec{j}_{\text{смещ.}} \neq 0$ , то  $\operatorname{div} \vec{j} \neq 0$  – удовлетворяется случай переменного тока.

Это означает, что противоречие с уравнением непрерывности устраняется. Остается найти явный вид  $\vec{j}_{\text{смещ.}}$ . Для этого используем уравнение непрерывности (1.40) и соотношение (1.44). Тогда получаем:

$$\operatorname{div} \vec{j}_{\text{смещ.}} = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Выразим  $\rho$  из 4-го уравнения Максвелла:  $\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{D}$  и подставим в предыдущую формулу:

$$\operatorname{div} \vec{j}_{\text{смещ.}} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{D} \right). \quad (1.45)$$

Докажем следующее важное свойство для любого вектора  $\vec{a}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{div} \frac{\partial \vec{a}}{\partial t}.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{a} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 a_x}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial t \partial z} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial a_x}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial a_y}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial a_z}{\partial t} \right) = \operatorname{div} \frac{\partial \vec{a}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Это означает, что операторы  $\frac{\partial}{\partial t}$  и  $\operatorname{div}$  коммутируют, т.е. их можно переставлять. Аналогично доказывается, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{a} = \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{a}}{\partial t}, \quad (1.46)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (1.47)$$

Используя (1.46) для вектора  $\vec{D}$ , можно (1.45) переписать так:

$$\operatorname{div} \vec{j}_{\text{смещ}} = \operatorname{div} \left( \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right).$$

Максвелл предположил, что искомый вектор  $\vec{j}_{\text{смещ}}$  равен:

$$\vec{j}_{\text{смещ}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (1.49)$$

Подставив (1.49) в уравнение (1.43), получаем:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (1.50)$$

Это и есть искомое 1-е уравнение Максвелла.

Физический смысл уравнения (1.50) заключается в следующем: в природе существуют две причины возбуждения вихря магнитной напряженности – это плотность тока проводимости  $\vec{j}$  и плотность тока смещения  $\vec{j}_{\text{смещ}}$ . Ток проводимости обусловлен движением свободных заряженных частиц, а ток смещения есть скорость изменения вектора электрической индукции  $\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$  в данной точке поля. Иначе, магнитное вихревое поле в данной точке создается плотностью тока проводимости и скоростью изменения вектора электрической индукции. Магнитное поле вихревое, имеет замкнутые силовые линии.

Первое уравнение Максвелла есть обобщение закона Био–Савара–Лапласа.

1) Закон Био–Савара–Лапласа соответствует концепции дальнего действия, так как причина – сила тока  $I$  – и следствие – магнитная напряженность  $H$  – находятся в разных точках.

Первое уравнение Максвелла соответствует концепции ближнего действия, так как две причины – плотность тока проводимости  $\vec{j}$  и скорость изменения вектора электрической индукции  $\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$  находятся в той же самой точке поля, что и вихрь магнитной напряженности –  $\operatorname{rot} \vec{H}$ .

2) Закон Био–Савара–Лапласа – закон постоянного тока.

Первое уравнение Максвелла обобщено и на случай переменного тока.

3) В вакууме, где нет проводящего ток вещества, закон Био–Савара–Лапласа при  $\mathbf{J} = 0$  никакого магнитного поля  $\mathbf{H}$  дать не может.

Первое уравнение Максвелла в вакууме (при  $\varepsilon = 1$ ,  $\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \vec{E}$ ) имеет вид:

$$\text{rot}\vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.51)$$

Уравнение (1.51) показывает, что вихревое магнитное поле создается переменным электрическим полем. Это свойство самого электромагнитного поля, как и явление электромагнитной индукции. Отсюда – исключительное значение гипотезы Максвелла о токе смещения. Отметим лишь в общих чертах некоторые моменты.

1. С введением плотности тока смещения в виде (1.49) в уравнениях электродинамики появляется симметрия свойств поля, что особенно хорошо видно в случае уравнений для вакуума:

$$\text{rot}\vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

– теоретическое предсказание Максвелла;

$$\text{rot}\vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

– открытое Фарадеем явление электромагнитной индукции и его обобщение Максвеллом.

2. Гипотеза о токе смещения «примирила» систему уравнений Максвелла с основными законами сохранения в электродинамике: с законом сохранения электрического заряда, законом сохранения и превращения энергии электромагнитного поля, законом сохранения импульса поля и вещества.

3. Гипотеза о токе смещения привела к тому, что, как выяснилось в начале XX века, система уравнений Максвелла полностью соответствует требованиям специальной теории относительности (см. главу VIII).

4. Гипотеза о токе смещения оказалась очень плодотворной. Например, она позволила Максвеллу предсказать теоретически существование электромагнитных волн в природе.

Необходимо отметить, что плотность тока проводимости  $\vec{j}$  и плотность тока смещения  $\vec{j}_{\text{смещ}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t}$  имеют различную природу, но вызывают одинаковое магнитное действие – вихрь магнитной напряженности –  $\text{rot}\vec{H}$ .

## § 5. Система уравнений Максвелла

Запишем систему уравнений Максвелла для среды, в левом столбце – в гауссовой системе единиц, в правом – в системе СИ:

Таблица 1

Гауссова система	Система СИ
$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$	$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$
$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
$div\vec{B} = 0$	$div\vec{B} = 0$
$div\vec{D} = 4\pi\rho$	$div\vec{D} = \rho$
Три уравнения связи	
$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$	$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$
$\vec{B} = \mu\vec{H}$	$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$
$\vec{j} = \lambda\vec{E}$	$\vec{j} = \lambda\vec{E}$

Запись уравнений в разных системах единиц, как это и должно быть, не изменяет их физического смысла. Последние три уравнения (для  $\vec{D}, \vec{B}, \vec{j}$ ) называются уравнениями связи и имеют некоторые ограничения, которые мы рассмотрим подробно в главе VI.

Отметим формальные свойства уравнений:

1) Система уравнений Максвелла – это система дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных, что соответствует концепции близкодействия.

2) Уравнения Максвелла – линейные, что соответствует принципу суперпозиции.

3) Уравнения Максвелла симметричны, что отражает свойства поля, и асимметричны, что отражает свойства вещества.

4) Уравнений Максвелла в данной форме четыре. Как известно из векторного анализа, для характеристики поля вектора  $\vec{a}$  необходимо знать  $div\vec{a}$  и  $rot\vec{a}$ . Но поскольку поле – электромагнитное, то в уравнениях поля должно быть две дивергенции ( $div\vec{D}$  и  $div\vec{B}$ ) и два ротора ( $rot\vec{E}$  и  $rot\vec{H}$ ). Для описания поля к системе уравнений Максвелла необходимо добавить три основных закона сохранения (см. § 4) и граничные условия.

## § 6. Закон сохранения и превращения энергии электромагнитного поля. Теорема Умова-Пойнтинга

В 1874 году русский физик Н.А. Умов защитил докторскую диссертацию на тему «Уравнения движения энергии в телах». В 1884 году английский физик Дж. Пойнтинг опубликовал работу «О переносе энергии в электромагнитном поле».

В дифференциальной форме уравнение Умова имеет вид:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{Y}$$

(сравните с уравнением непрерывности!), где  $w$  – объемная плотность данного вида энергии,  $\vec{Y}$  – вектор Умова – вектор плотности потока этой энергии.

В интегральной форме теорема Умова может быть записана в виде:

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = Q + \oint_S y_n dS. \quad (1.52)$$

Уравнение (1.52) означает, что изменение данного вида энергии  $W$  в объеме  $V$  может происходить за счет превращения в другой вид энергии с выделением тепла  $Q$  и за счет втекания или вытекания, т.е. потока данного вида энергии через поверхность  $S$ . Знаки выбраны так же, как и в (1.36) (см. § 4), чтобы правильно описывать физический процесс.

Докажем теорему Умова для электромагнитного поля и выясним вид  $W$  и  $\vec{Y}$  для поля. Для этого сначала запишем согласно теореме Умова количество тепла, выделившегося в объеме  $V$ :

$$Q = -\frac{\partial W}{\partial t} - \oint_S y_n dS. \quad (1.53)$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы для электромагнитного поля. Пусть в объеме  $V$ , содержащем поле и вещество, под действием поля выделилось некоторое количество тепла  $Q$  в единицу времени:

$$Q = \int_V \vec{j}\vec{E} dV, \quad (1.54)$$

где  $\vec{q} = \vec{j}\vec{E}$  – дифференциальная форма закона Джоуля–Ленца, известная из курса общей физики.

Наша «сверхзадача» – преобразовать (1.54) так, чтобы можно было сравнить его с (1.53).

Рассмотрим по этапам эти преобразования.

1) Выразим  $\vec{j}$  из 1-го уравнения Максвелла:

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \vec{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (1.55)$$

2) Подставим (1.55) в (1.54), сразу разбивая на два интеграла:

$$Q = \int_V \frac{c}{4\pi} \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} dV - \int_V \frac{1}{4\pi} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dV. \quad (1.56)$$

3) Используем тождество векторного анализа:  $\text{div}[\vec{a}\vec{b}] = \vec{b} \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \text{rot} \vec{b}$ . Пусть  $\vec{E} \equiv \vec{a}$ ;  $\vec{H} \equiv \vec{b}$ , тогда:

$$\text{div}[\vec{E}\vec{H}] = \vec{H} \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \text{rot} \vec{H}$$

Отсюда

$$\vec{E} \text{rot} \vec{H} = \vec{H} \text{rot} \vec{E} - \text{div}[\vec{E}\vec{H}].$$

Заменим  $\text{rot} \vec{E}$  из 2-го уравнения Максвелла на  $-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  и получим:

$$\vec{E} \text{rot} \vec{H} = -\frac{1}{c} \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \text{div}[\vec{E}\vec{H}]. \quad (1.57)$$

Это, как видно, преобразование для подынтегрального выражения в первом интеграле (1.56).

4) Подставим (1.57) в (1.56), сразу объединяя похожие члены с  $\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  и  $\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  в один интеграл:

$$Q = - \int_V \frac{1}{4\pi} \left( \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV - \int_V \frac{c}{4\pi} \text{div}[\vec{E}\vec{H}] dV. \quad (1.58)$$

5) В первом интеграле (1.58) имеем:

$$\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}). \quad (1.59)$$

Докажем это. Рассмотрим правую часть этого выражения и покажем, что получится левая:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}\varepsilon\vec{E} + \vec{H}\mu\vec{H}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \left( \varepsilon\vec{E} \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu\vec{H} \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \right) = \vec{E} \frac{\partial(\varepsilon\vec{E})}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial(\mu\vec{H})}{\partial t} = \vec{E} \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \end{aligned}$$

где использованы уравнения  $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu\vec{H}$ , что и требовалось доказать.

6) Подставим (1.59) в первый интеграл (1.58) и получим:

$$Q = - \int_V \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{8\pi} (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) dV - \int_V \operatorname{div} \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\vec{E}\vec{H}] dV. \quad (1.60)$$

7) Преобразуем снова первый интеграл. Считая объем  $V$  фиксированным (например, всё происходит в нашей аудитории), выносим  $\frac{\partial}{\partial t}$  из-под знака интеграла:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{8\pi} (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{8\pi} (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) dV.$$

8) Преобразуем второй интеграл, используя 1-ю теорему Остроградского–Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div} \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}] dV = \oint_S \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}]_n dS.$$

9) Подставим эти преобразованные интегралы в (1.60) и получим окончательно

$$Q = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{8\pi} (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) dV - \oint_S \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}]_n dS. \quad (1.61)$$

Сравниваем (1.61) с (1.53) и даем интерпретацию  $W$  и  $\vec{Y}$  для электромагнитного поля согласно (1.61):

$$W = \int_V \frac{1}{8\pi} (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) dV, \quad (1.62)$$

$$\vec{Y} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}], \quad (1.63)$$

где (1.62) – формула для энергии электромагнитного поля, (1.63) – формула для вектора плотности потока электромагнитной энергии, называемая вектором Умова–Пойнтинга.

Подведем итоги:

1. Доказана теорема Умова–Пойнтинга, т.е. выполнение закона сохранения и превращения энергии для электромагнитного поля.

2. Получены в явном виде формулы для энергии и вектора плотности потока энергии электромагнитного поля.

Обсудим подробнее эти формулы.

1) Энергия электромагнитного поля:

$$W = \int_V \frac{1}{8\pi} (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) dV.$$

Эта формула означает, что энергия поля распределена (иногда говорят «размазана») по всему объему, занятому полем, с объемной плотностью:

$$w = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}). \quad (1.64)$$

Объемная плотность электромагнитной энергии  $w \geq 0$ , но энергия всего поля всегда  $W > 0$  (положительна). При этом энергия поля и плотность энергии разделяется на электрическую

$$w_{\text{эл.}} = \frac{1}{8\pi} \vec{E}\vec{D}$$

и магнитную

$$w_{\text{м.}} = \frac{1}{8\pi} \vec{H}\vec{B}.$$

Энергия не аддитивна, так как есть еще энергия взаимодействия. Например, для двух полей плотность энергии

$$w = w_1 + w_2 + w_{\text{вз}}.$$

Покажем это. Пусть в некоторой точке согласно принципу суперпозиции

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Найдем

$$\vec{E}^2 = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 = \vec{E}_1^2 + 2\vec{E}_1\vec{E}_2 + \vec{E}_2^2.$$

Тогда

$$w = \frac{1}{8\pi} \varepsilon \vec{E}^2 = \frac{1}{8\pi} \varepsilon \vec{E}_1^2 + \frac{1}{8\pi} \varepsilon \vec{E}_2^2 + \frac{1}{8\pi} 2\varepsilon \vec{E}_1 \vec{E}_2 = w_1 + w_2 + w_{\varepsilon\varepsilon},$$

где  $w_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \vec{E}_1 \vec{E}_2$  – энергия взаимодействия, которая может быть положительной, отрицательной или равной нулю, но не превышает энергии поля. Покажем это.

Рассмотрим выражение

$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)^2 \geq 0$ , или  $\vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 - 2\vec{E}_1 \vec{E}_2 \geq 0$ , или  $\vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 \geq 2\vec{E}_1 \vec{E}_2$ , что соответствует

$$w_1 + w_2 \geq w_{\varepsilon\varepsilon}.$$

Это же свойство имеется и для магнитной энергии.

Вектор плотности потока электромагнитной энергии – вектор Умова–Пойнтинга

$$\vec{Y} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}]$$

означает, что энергия электромагнитного поля распространяется в пространстве. Материальным носителем энергии является электромагнитное поле. Вся жизнь на Земле обязана энергии Солнца, а доставляется она на Землю электромагнитными волнами!

П.Л. Капица в статье «Энергия и физика» (см. книгу «Эксперимент, теория, практика») отмечал большое значение теоремы Умова–Пойнтинга в связи с предлагаемыми проектами получения электромагнитной энергии. Незнание теоремы Умова–Пойнтинга превращало некоторые предлагаемые проекты в «прожекты», технически неосуществимые в масштабах страны.

## § 7. Граничные условия для нормальных и касательных составляющих векторов электромагнитного поля

### План

- I. Необходимость граничных условий. Переходный слой.
- II. Граничные условия для нормальных составляющих векторов электромагнитного поля.
- III. Граничные условия для касательных составляющих векторов электромагнитного поля.

I. Граничные условия в электродинамике играют двоякую роль.

1) Это дополнительные условия, так как при интегрировании уравнений Максвелла появляются произвольные постоянные интегрирования и введение дополнительных условий позволяет их определить для конкретного случая.

Аналогичная ситуация имеется и в классической механике. Вспомните, например, движение тела под действием силы тяжести. В зависимости от дополнительных условий, а в механике, как правило, это начальные значения положения и скорости тела, получается различное по характеру движение.

2) Это условия, позволяющие ограничивать область пространства, в которой рассматривается данное поле.

В электродинамике существует проблема – на границе между двумя средами может происходить скачок характеристик среды  $\epsilon, \mu, \lambda$ . Это может приводить к тому, что векторы поля на границе терпят разрыв. Чтобы обойти эту трудность сначала вместо границы выбирают переходный слой. В переходном слое характеристики среды меняются непрерывно от значений  $\epsilon_1, \mu_1, \lambda_1$ , до  $\epsilon_2, \mu_2, \lambda_2$ . Проведя необходимые преобразования, для перехода к границе высоту (толщину) переходного слоя устремляют к нулю и получают граничные условия.

В электродинамике используются два типа граничных условий – для нормальных составляющих, т.е. для проекций векторов на нормаль к поверхности, и для касательных составляющих, т.е. для проекций на касательное направление  $\vec{\tau}$ . При этом вектор нормали  $\vec{n}$  направлен в сторону перехода от 1-й среды ко 2-й (рис. 13).

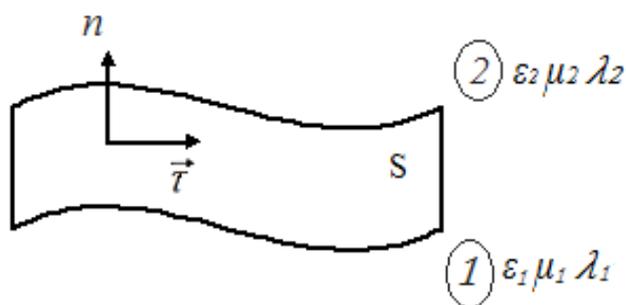


Рис. 13. Векторы  $\vec{n}$  и  $\vec{\tau}$  к поверхности раздела

II. а) Граничные условия для нормальных составляющих вектора электрической индукции.

Выберем в переходном слое цилиндр, частично заходящий в первую и вторую среды. Основания цилиндра  $S_1$  и  $S_2$  равны  $S_0$  – поверхности на границе  $S$  в окрестности некоторой точки (рис. 14).

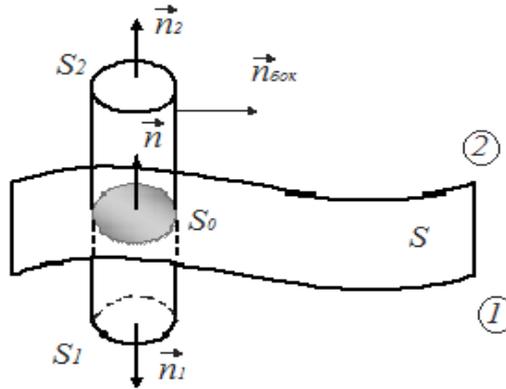


Рис. 14. Цилиндр в переходном слое

Нормали  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  и общая нормаль  $\vec{n}$  на границе  $S$  указаны на рисунке 14. Для любой точки поля внутри цилиндра записываем 4-е уравнение Максвелла:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho.$$

Интегрируем уравнение по объему цилиндра:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = 4\pi \int_V \rho dV.$$

По 1-й теореме Остроградского–Гаусса получаем:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \oint_S D_n dS,$$

при этом

$$\int_V \rho dV = q,$$

где  $q$  – заряд, находящийся внутри цилиндра.

Тогда

$$\oint_S D_n dS = 4\pi q. \quad (1.65)$$

Запишем подробно:

$$\oint_S D_n dS = \oint_{S_1} D_{n_1} dS + \oint_{S_2} D_{n_2} dS + \oint_{S_{бок}} D_{n_{бок}} dS.$$

Пусть  $S_1$  и  $S_2$  выбраны достаточно малыми, такими, чтобы на каждой из этих поверхностей значение  $\vec{D}$  было постоянным. Тогда

$$\oint_{S_1} D_{n_1} dS \approx D_{n_1} S_1,$$

$$\oint_{S_2} D_{n_2} dS \approx D_{n_2} S_2.$$

На боковой поверхности значение  $\vec{D}$  как раз и меняется. Однако по теореме о среднем можно записать:

$$\oint_{S_{\text{бок}}} D_{n_{\text{бок}}} dS \approx (D_{n_{\text{бок}}})_{\text{ср}} S_{\text{бок}}.$$

Рассмотрим проекции:  $D_{n_1} = D_1 \cos(\vec{D}_1, \vec{n}_1)$ , но поскольку  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}$  направлены противоположно, то

$$D_{n_1} = D_1 \cos(\vec{D}_1, \vec{n}_1) = -D_1 \cos(\vec{D}_1, \vec{n}) = -D_{1n}.$$

Для  $D_{n_2}$  получаем, учитывая, что  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}$  направлены в одну сторону,

$$D_{n_2} = D_{2n}.$$

Тогда

$$\oint_S D_n dS = -D_{1n} S_1 + D_{2n} S_2 + (D_{n_{\text{бок}}})_{\text{ср}} S_{\text{бок}}.$$

Подставим это выражение в (1.65) и получим:

$$-D_{1n} S_1 + D_{2n} S_2 + (D_{n_{\text{бок}}})_{\text{ср}} S_{\text{бок}} = 4\pi q. \quad (1.66)$$

Теперь переходим к границе, это значит, что  $S_1 \rightarrow S_0$ ,  $S_2 \rightarrow S_0$ ,  $S_{\text{бок}} \rightarrow 0$ . Тогда получим:

$$D_{2n} S_0 - D_{1n} S_0 = 4\pi q_{\text{пов}}.$$

Разделим на  $S_0$  и введем  $\sigma = \frac{q_{\text{пов}}}{S_0}$ , где  $\sigma$  – поверхностная плотность зарядов. Тогда окончательно получим:

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma. \quad (1.67)$$

Это и есть искомое граничное условие. Оно означает, что при переходе через границу двух сред нормальная составляющая вектора электрической индукции меняется скачком, если граница заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Величина скачка равна

$$\Delta D_n = D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma.$$

Она определяется только значением плотности зарядов на поверхности раздела двух сред и не зависит от свойств этих сред.

Если граница не заряжена с поверхностной плотностью, т.е.  $\sigma = 0$ , то скачка нет и нормальная составляющая  $\vec{D}$  непрерывна:

$$D_{2n} = D_{1n}. \quad (1.68)$$

**Задание № 1.** Написать граничные условия для нормальных составляющих вектора электрической напряженности, используя условие (1.67), уравнение связи  $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$  и предполагая, что  $q_1 \neq q_2$ .

II. б) Граничное условие для нормальных составляющих вектора магнитной индукции.

Для получения этого условия можно использовать рисунок 14. Затем, полагая, что во всех точках поля внутри цилиндра выполняется 3-е уравнение Максвелла  $\text{div}\vec{B} = 0$ , проводим аналогичные преобразования и получаем:

$$B_{2n} - B_{1n} = 0. \quad (1.69)$$

Условие (1.69) означает, что нормальная составляющая вектора магнитной индукции всегда непрерывна, т.е.  $B_{2n} = B_{1n}$ .

**Задание № 2.** Написать граничные условия для нормальных составляющих вектора магнитной напряженности, используя условие (1.69), уравнение связи  $\vec{B} = \mu\vec{H}$  и полагая, что  $\mu_1 \neq \mu_2$ .

III. а) Граничные условия для касательных составляющих вектора магнитной напряженности.

Выберем в переходном слое рамку со сторонами  $l_1, l_2, l_{\text{бок}}$ , причем  $l_1$  и  $l_2$  равны  $l_0$ , векторы  $\vec{l}_1$  и  $\vec{l}_2$  направлены так, как показано на рисунке 15.

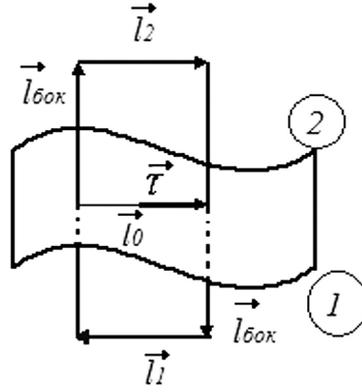


Рис. 15. Рамка в переходном слое

Для любой точки поля внутри рамки записываем 1-е уравнение Максвелла и проектируем его на нормаль  $\vec{n}$  к поверхности рамки:

$$\text{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t},$$

$$\text{rot}_n\vec{H} = \frac{4\pi}{c}j_n + \frac{1}{c}\frac{\partial D_n}{\partial t}.$$

Интегрируем по площади  $S$  поверхности рамки и получаем:

$$\int_S \text{rot}_n\vec{H} dS = \frac{4\pi}{c} \int_S j_n dS + \frac{1}{c} \int_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS. \quad (1.70)$$

Согласно теореме Стокса

$$\int_S \text{rot}_n\vec{H} dS = \oint_l \vec{H} d\vec{l}.$$

Разобьём интеграл по замкнутому контуру рамки на интегралы по ее сторонам:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \oint_{l_1} \vec{H} d\vec{l}_1 + \oint_{l_2} \vec{H} d\vec{l}_2 + \oint_{l_{бок}} \vec{H} d\vec{l}_{бок}.$$

Считая  $l_1$  и  $l_2$  достаточно малыми, получаем:

$$\oint_{l_1} \vec{H} d\vec{l}_1 \approx \vec{H}_1 \vec{l}_1,$$

$$\oint_{l_2} \vec{H} d\vec{l}_2 \approx \vec{H}_2 \vec{l}_2.$$

Рассмотрим скалярное произведение

$$\vec{H}_1 \vec{l}_1 = H_1 l_1 \cos(\vec{H}_1, \vec{l}_1) = -H_1 l_1 \cos(\vec{H}_1, \vec{\tau}) = -H_{1\tau} l_1,$$

при этом учтено, что векторы  $\vec{l}_1$  и  $\vec{\tau}$  направлены противоположно. Тогда:

$$\oint_{l_1} \vec{H} d\vec{l}_1 = -H_{1\tau} l_1.$$

Аналогично, учитывая, что  $\vec{l}_2$  и  $\vec{\tau}$  параллельны, получим:

$$\oint_{l_2} \vec{H} d\vec{l}_2 = H_{2\tau} l_2.$$

По теореме о среднем преобразуем следующий интеграл:

$$\oint_{l_{\text{бок}}} \vec{H} d\vec{l}_{\text{бок}} = (\vec{H})_{\text{ср}} \vec{l}_{\text{бок}}.$$

В правой части (1.70)

$$\int_S j_n dS = \mathcal{J},$$

где  $\mathcal{J}$  – это сила тока, текущего через площадь  $S$  рамки.

По теореме о среднем

$$\int_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS = \left( \frac{\partial D_n}{\partial t} \right)_{\text{ср}} S.$$

Тогда вместо (1.70) после всех преобразований получаем:

$$-H_{1\tau} l_1 + H_{2\tau} l_2 + (\vec{H})_{\text{ср}} \vec{l}_{\text{бок}} = \frac{4\pi}{c} \mathcal{J} + \frac{1}{c} \left( \frac{\partial D_n}{\partial t} \right)_{\text{ср}} S.$$

При переходе к границе  $l_1 \rightarrow l_0$ ,  $l_2 \rightarrow l_0$ ,  $l_{\text{бок}} \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}_{\text{пов}}$ ,  $S \rightarrow 0$ , остается:

$$H_{2\tau} l_0 - H_{1\tau} l_0 = \frac{4\pi}{c} \mathcal{J}_{\text{пов}}.$$

Разделим обе части этого уравнения на  $l_0$  и введём величину  $i = \frac{J_{\text{пов}}}{l_0}$ , где  $i$  – линейная плотность поверхностного тока. Окончательно получаем:

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i. \quad (1.71)$$

Это и есть искомое граничное условие для касательных составляющих  $\vec{H}$ .

Формула (1.71) означает, что если по границе раздела течет поверхностный ток с линейной плотностью  $i$ , то касательная составляющая  $\vec{H}$  меняется скачком, т.е.  $H_{2\tau} \neq H_{1\tau}$ . Величина скачка определяется только значением плотности  $i$ , т.е.

$$\Delta H_{\tau} = \frac{4\pi}{c} i.$$

Если по границе раздела поверхностный ток не течет, то скачка нет, касательная составляющая  $\vec{H}$  непрерывна, т.е.  $H_{2\tau} = H_{1\tau}$ . Это всегда имеет место на границе двух диэлектриков, или на границе диэлектрик-вакуум.

**Задание № 3.** Написать граничные условия для касательных составляющих вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ , используя (1.71) и уравнение связи  $\vec{B} = \mu\vec{H}$ , предполагая, что  $\mu_1 \neq \mu_2$ .

III. б) Граничное условие для касательной составляющей вектора электрической напряженности  $\vec{E}$ .

Используя рис. 15 и 2-е уравнение Максвелла  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , проводя преобразования по аналогии с III. а), получаем:

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0. \quad (1.72)$$

Условие (1.72) означает, что касательная составляющая вектора электрической напряженности всегда непрерывна, скачка нет, т.е.  $E_{2\tau} = E_{1\tau}$ .

**Задание № 4.** Написать граничные условия для касательных составляющих вектора электрической индукции, используя условие (1.72), уравнение связи  $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$  и полагая  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ .

**Задание № 5.** После выполнения заданий 1–4 составить таблицу всех граничных условий для нормальных и касательных составляющих векторов  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ .

## ГЛАВА II. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

### § 8. Основные уравнения. Основные задачи электростатики

Электростатика – раздел электродинамики, изучающий поле неподвижных электрических зарядов. Но электрические заряды неподвижны только в одной инерциальной системе отсчета (ИСО). Во всех других ИСО они движутся. Следовательно, все результаты электростатики применимы только к этой одной ИСО. Поскольку заряды неподвижны,  $\vec{j} = 0$ . Из уравнения непрерывности (1.40) с учетом того, что  $\text{div}\vec{j} = 0$ , следует  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , и  $\rho = \text{const}$ . Кроме того, в статике  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$ . Тогда уравнения Максвелла (см. §5) примут вид:

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{H} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} && \rightarrow \text{rot}\vec{H} = 0 \\ \text{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && \rightarrow \text{rot}\vec{E} = 0 \\ \text{div}\vec{B} &= 0 && \rightarrow \text{div}\vec{B} = 0 \\ \text{div}\vec{D} &= 4\pi\rho && \rightarrow \text{div}\vec{D} = 4\pi\rho. \end{aligned}$$

Эта система уравнений разбивается на две подсистемы, не связанные друг с другом, – на электрическую и магнитную:

Электрическая	Магнитная
$\text{rot}\vec{E} = 0,$	$\text{rot}\vec{H} = 0,$
$\text{div}\vec{D} = 4\pi\rho,$	$\text{div}\vec{B} = 0,$
$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}.$	$\vec{B} = \mu\vec{H}.$

Решение для магнитной системы с учетом граничных условий – тривиальное, т.е.  $\vec{B} = 0$ ,  $\vec{H} = 0$ . Это означает, что в данной ИСО магнитная компонента электромагнитного поля отсутствует. Однако электрическая компонента есть:  $\vec{D} \neq 0$ ,  $\vec{E} \neq 0$ . Это и есть электростатическое поле. Оно описывается уравнениями электрической подсистемы. Следовательно, основные уравнения электростатики:

$$\text{rot}\vec{E} = 0, \tag{2.1}$$

$$\text{div}\vec{D} = 4\pi\rho, \tag{2.2}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}. \quad (2.3)$$

Основные задачи электростатики:

1) Прямая задача – по  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  найти  $\rho$  и  $\sigma$ .

Решение находим из 4-го уравнения Максвелла (2.2):

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{D}$$

и граничного условия (1.67)

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} (D_{2n} - D_{1n}).$$

2) Обратная задача – по  $\rho$  и  $\sigma$  найти  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ . Решается интегрированием (см. § 10).

3) Найти механические силы, действующие на заряженные тела в электростатическом поле.

## § 9. Основные свойства поля. Скалярный потенциал, его связь с работой

Уравнение  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$  означает, что электростатическое поле безвихревое, имеет незамкнутые силовые линии, связано с зарядами. Силовые линии начинаются на положительных зарядах и кончаются на отрицательных.

Основные свойства поля обусловлены его безвихревым характером. Рассмотрим эти свойства.

1) Вычислим работу по перемещению заряда по замкнутому контуру, используя уравнение (2.1) и теорему Стокса:

$$A = \oint \delta A = \oint_l \vec{F} d\vec{l} = \oint_l q \vec{E} d\vec{l} = q \oint_l \vec{E} d\vec{l} = q \int_S \operatorname{rot}_n \vec{E} dS = 0.$$

Итак, работа по замкнутому контуру равна нулю:  $A = \oint \delta A = 0$ .

2) Покажем, что работа, совершаемая по перемещению заряда между двумя точками поля, не зависит от формы пути. На рисунке 16 это точки  $B$  и  $D$ .

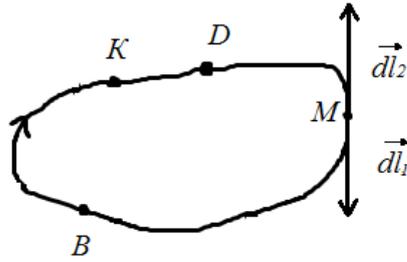


Рис. 16 Замкнутый путь

Указаны два разных пути – через точку  $K$  и через точку  $M$ . Требуется доказать, что работа в этом случае одинакова:

$$A_{(BKD)} = A_{(BMD)}.$$

Используем только что доказанное свойство 1), согласно которому работа по замкнутому контуру  $A_{(BKDMB)} = 0$ . Ее можно разбить на работу из точки  $B$  через  $K$  в точку  $D$  и работу из точки  $D$  через точку  $M$  в точку  $B$ :

$$A_{(BKDMB)} = A_{(BKD)} + A_{(DMB)} = 0.$$

Отсюда

$$A_{(BKD)} = -A_{(DMB)}.$$

Но работа

$$A_{(DMB)} = q \int \vec{E} d\vec{l}_1 = -q \int \vec{E} d\vec{l}_2,$$

т.к.  $d\vec{l}_2 = -d\vec{l}_1$  (см. рис. 16). А это есть работа

$$q \int \vec{E} d\vec{l}_2 = A_{(BMD)}.$$

Следовательно,

$$A_{(DMB)} = -A_{(BMD)}.$$

Рассматривая совместно (2.4) и (2.5), получаем:

$$A_{(BKD)} = A_{(BMD)},$$

что и требовалось доказать.

Итак, работа, совершаемая по перемещению заряда между двумя точками поля, не зависит от формы пути. Необходимо выяснить, от чего, от какой величины она зависит.

3) Сначала снова используем уравнение  $\text{rot}\vec{E} = 0$  и тождество векторного анализа  $\text{rot grad}\varphi \equiv 0$ . Уравнение (2.1) удовлетворяется, как видим, если положить:

$$\vec{E} = \pm \text{grad}\varphi.$$

Выберем знак. Для положительного точечного заряда согласно определениям вектора  $\vec{E}$  и градиента скаляра  $\varphi$  имеем в точке М (рис.17):

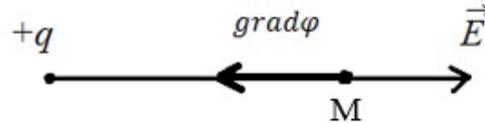


Рис. 17. К обоснованию выбора знака вектора электрической напряженности

Поэтому в дальнейшем в электродинамике всегда полагают:

$$\vec{E} = - \text{grad}\varphi. \quad (2.6)$$

Это основная формула, связывающая вектор  $\vec{E}$  и скаляр  $\varphi$ . Необходимо выяснить, что собой представляет введенный таким образом скаляр  $\varphi$ .

4) Для этого найдем элементарную работу, т.е. работу, совершаемую по перемещению единичного положительного заряда на бесконечно малом пути  $d\vec{l}$ :

$$\begin{aligned} \delta A &= \vec{F} d\vec{l} = q\vec{E} d\vec{l} = \vec{E} d\vec{l} = - \text{grad}\varphi \cdot d\vec{l} = \\ &= - \left( \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) (\vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz) = \\ &= - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = -d\varphi, \end{aligned}$$

при этом использовались выражения для  $\text{grad}\varphi$  и  $d\vec{l}$  в декартовых координатах.

Итак,

$$\delta A = -d\varphi. \quad (2.7)$$

Формула (2.7) означает, что в безвихревом поле элементарная работа по перемещению единичного положительного заряда есть полный дифференциал введенного нами скаляра  $\varphi$ .

5) Найдем, наконец, работу между двумя точками поля, например, точками 1 и 2:

$$A_{1,2} = \int_1^2 \delta A = -q \int_1^2 d\varphi = -q\varphi|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = -q(\varphi_2 - \varphi_1) = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Итак,

$$A_{1,2} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (2.8)$$

Согласно (2.8) работа зависит от разности значений скаляра  $\varphi$  в начале и в конце пути. Следствия 4) и 5) показывают, что скаляр  $\varphi$  характеризует способность поля совершать работу. Поэтому  $\varphi$  называется скалярным потенциалом поля или просто потенциалом.

В некоторых случаях, если в бесконечности  $\varphi_\infty = 0$ , можно получить простое определение потенциала. Пусть в формуле (2.8) вторая точка находится в бесконечности. Тогда  $A_{1,\infty} = q\varphi_1$ , откуда  $\varphi_1 = \frac{A_{1,\infty}}{q}$ ,

Если  $q = +1$ , то

$$\varphi_1 = A_{1,\infty}. \quad (2.9)$$

Это означает, что потенциал можно определить как работу, совершаемую полем по перемещению единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность. Подчеркнем, что такое определение возможно лишь в предположении, что в бесконечности  $\varphi = 0$ . Реально это соответствует случаям, когда заряженные объекты занимают конечную область пространства. В этом случае потенциал с увеличением расстояния убывает и можно положить, что в бесконечности он обращается в нуль.

## § 10. Дифференциальные уравнения для потенциала, их общие решения. Нормировка потенциала. Решение 2-й задачи электростатики

Найдем дифференциальные уравнения для потенциала. Для этого запишем 4-е уравнение Максвелла и уравнение связи:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}) = 4\pi\rho.$$

Используем тождество векторного анализа

$$\operatorname{div}(\varphi \vec{a}) \equiv \varphi \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} \varphi,$$

при этом полагая  $\vec{a} \equiv \vec{E}$ ,  $\varphi \equiv \varepsilon$ .

Тогда

$$\operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}) = \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} + \vec{E} \cdot \operatorname{grad} \varepsilon.$$

Подставим вместо  $\vec{E}$  из (2.6) выражение для  $\varphi$ :

$$\operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}) = -\varepsilon \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi - \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \varepsilon.$$

Согласно векторному анализу

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi \equiv \nabla^2 \varphi.$$

Тогда

$$\operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}) = -\varepsilon \nabla^2 \varphi - \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \varepsilon.$$

С учетом этих преобразований вместо 4-го уравнения Максвелла получаем уравнение для  $\varphi$ :

$$-\varepsilon \nabla^2 \varphi - \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \varepsilon = 4\pi \rho,$$

или, разделив обе части уравнения на  $(-\varepsilon)$ , получим:

$$\nabla^2 \varphi + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \varepsilon = -4\pi \frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (2.10)$$

Это дифференциальное уравнение для  $\varphi$  в неоднородной среде. Стандартного решения оно не имеет.

Для однородной среды  $\operatorname{grad} \varepsilon = 0$ . Тогда вместо уравнения (2.10) получаем:

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (2.11)$$

Это уравнение Пуассона для потенциала  $\varphi$ .

Если  $\rho = 0$ , то получается уравнение Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (2.12)$$

Уравнение Лапласа – однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка в частных производных. Оно описывает потенциал поля вне заряженного тела в однородной среде. Общее решение этого уравнения:

$$\varphi = C_1 + \frac{C_2}{r}. \quad (2.13)$$

Постоянную интегрирования  $C_2$  можно выбрать в виде  $C_2 = \frac{q}{\varepsilon}$ , где  $q$  – заряд тела (см. приложение IV). Тогда:

$$\varphi = C_1 + \frac{q}{\varepsilon r}. \quad (2.14)$$

Постоянную  $C_1$  определим из условия нормировки. Нормировка потенциала – процедура придания однозначности потенциалу. Иначе говоря, выбор определенного значения  $C_1$ , так как согласно (2.13) и (2.14)  $\varphi$  определяется неоднозначно.

Как видно из решений (2.13) и (2.14),  $\varphi$  убывает с ростом  $r$ . Вполне разумно потребовать, чтобы в бесконечности  $\varphi$  обращался в нуль: если  $r \rightarrow \infty$ , то  $\varphi_\infty = 0$ . Тогда для бесконечности имеем:

$$0 = C_1 + \frac{q}{\infty},$$

откуда  $C_1 = 0$ .

После нормировки общее решение запишется так:

$$\varphi = \frac{q}{\epsilon r}. \quad (2.15)$$

Формально оно совпадает с потенциалом поля точечного заряда, известного из курса общей физики.

Решение уравнения Пуассона найдем не строго, чисто качественно. Для этого разбиваем весь объем  $V$ , заряженный с объемной плотностью  $\rho$ , на элементарные объемы  $\Delta V_i$ . Причем  $\Delta V_i$  имеет заряд  $\Delta q_i = \rho_i \Delta V_i$  такой, чтобы его можно было считать точечным.

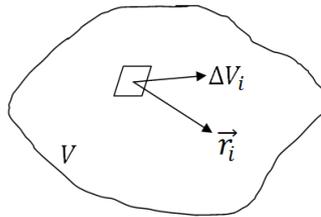


Рис. 18 Объем  $\Delta V_i$

Тогда можно применить полученное решение (2.15) для  $\Delta V_i$ :

$$\Delta \varphi_i = \frac{\rho_i \Delta V_i}{\epsilon r_i}.$$

Потенциал от всех элементов  $\Delta V_i$  объема  $V$  находим по принципу суперпозиции:

$$\varphi = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho_i \Delta V_i}{\epsilon r_i} = \int_V \frac{\rho dV}{\epsilon r}.$$

Итак,

$$\varphi = \int_V \frac{\rho dV}{\epsilon r}. \quad (2.16)$$

Это и есть искомое решение уравнения Пуассона, строго оно получается в курсе «Методы математической физики».

Решения (2.15) и (2.16) отличаются при  $r = 0$ . В самом деле, согласно (2.15)  $\varphi \rightarrow \infty$  при  $r = 0$ . Это означает, что применять решение (2.15) при  $r = 0$  нельзя, нарушается требование точечности заряда.

Решение (2.16) не расходится при  $r = 0$ . Рассмотрим решение для  $dV$ :

$$\varphi(dV) = \frac{\rho dV}{\epsilon r} \sim \frac{\rho r^2 dr}{\epsilon r} = \frac{\rho r dr}{\epsilon},$$

если  $\rho$  не уменьшается с уменьшением  $r$ . При этом  $\varphi$  может обращаться в нуль, либо быть постоянным. Так что (2.16) является более общим решением.

В электродинамике дискутируется проблема, обусловленная неоднозначностью потенциала. Существуют две точки зрения:

1)  $\varphi$  неоднозначен и поэтому является вспомогательной функцией, никакого физического смысла не имеет;

2)  $\varphi$  неоднозначен, но можно придать ему однозначность и физический смысл. Авторы придерживаются второй точки зрения.

Отметим, что неоднозначность потенциала не влияет на значение напряженности и работы. В самом деле:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\text{grad}\left(C_1 + \frac{q}{\epsilon r}\right) = -\text{grad}C_1 - \text{grad}\left(\frac{q}{\epsilon r}\right) = -\text{grad}\frac{q}{\epsilon r},$$

т.к.  $\text{grad}C_1 = 0$ .

Аналогично для работы находим:

$$A_{1,2} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q\left(C_1 + \frac{q_1}{\epsilon r_1} - C_1 - \frac{q_1}{\epsilon r_2}\right) = \frac{q_1 q}{\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Напряженность и работа имеют одно вполне определенное значение.

К этой проблеме мы будем возвращаться снова в последующих главах.

Теперь учтем все возможные случаи распределения заряда и запишем потенциал следующим образом:

$$\varphi = \sum_k \frac{q_k}{\epsilon r_k} + \int_V \frac{\rho dV}{\epsilon r} + \int_S \frac{\sigma dS}{\epsilon r}. \quad (2.17)$$

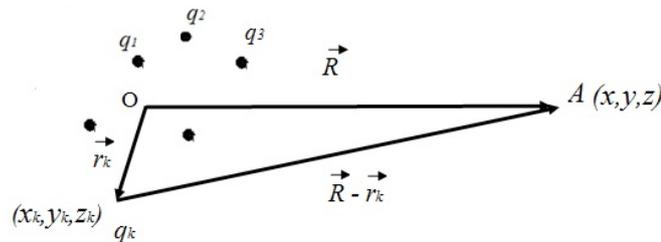
Тогда для электрической напряженности будем иметь:

$$\vec{E} = -grad\varphi = -grad\left(\sum_k \frac{q_k}{\epsilon r_k} + \int_V \frac{\rho dV}{\epsilon r} + \int_S \frac{\sigma dS}{\epsilon r}\right). \quad (2.18)$$

Это и есть решение 2-й задачи электростатики в общем виде.

### § 11. Разложение потенциала системы зарядов на больших расстояниях. Дипольное, квадрупольное, мультипольное приближения

Рассмотрим систему точечных зарядов  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k, \dots$  (рис. 19):



**Рис. 19. Система зарядов**

Запишем потенциал поля в вакууме для системы точечных зарядов:

$$\varphi = \sum_k \frac{q_k}{|\vec{R} - \vec{r}_k|}, \quad (2.19)$$

где  $\vec{r}_k$  – радиус-вектор заряда  $q_k$ ,  $\vec{R}$  – радиус-вектор точки наблюдения, отсчитываемые от точки 0, выбранной произвольно внутри системы зарядов.

Если  $r_k \ll R$ , то  $\varphi$  можно разложить в ряд:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n + \dots \quad (2.20)$$

Перед нами стоят две задачи:

- 1) доказать, что такое разложение возможно,
- 2) выяснить физический смысл членов разложения.

Сначала займемся первой задачей. В курсе высшей математики изучалось разложение в ряд Тейлора:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + \dots$$

Введем новые обозначения: вместо  $x \rightarrow x + \Delta x$ , где  $\Delta x \ll x$ ; вместо  $a \rightarrow x$ . Тогда  $x - a = x + \Delta x - x = \Delta x$  и получим разложение по степеням малой добавки  $\Delta x$ :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x)(\Delta x)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)(\Delta x)^n + \dots$$

Обобщим это разложение на функцию трех переменных  $x, y, z$  с малыми добавками  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ :

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = & \\ = f(x, y, z) + & \left[ \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \Delta z \right] \\ + \frac{1}{2!} & \left[ \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x \partial z} \Delta x \Delta z \right. \\ + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y \partial x} & \Delta y \Delta x + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y^2} (\Delta y)^2 + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y \partial z} \Delta y \Delta z \\ + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z \partial x} & \Delta z \Delta x + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z \partial y} \Delta z \Delta y + \left. \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2} (\Delta z)^2 \right] \\ + \dots & \end{aligned} \quad (2.21)$$

В этом разложении первый член называется нулевым приближением, так как добавки здесь в нулевой степени, следующие три члена – линейное приближение с добавками в первой степени, затем девять членов – квадратичное приближение с добавками во второй степени. Теперь понятно, что следующие приближения содержат катастрофически нарастающее число членов  $3^n$ . Мы пока ограничимся квадратичным приближением.

Применим написанное разложение (2.21) к (2.19). Введем обозначения:  $f(x, y, z) = \frac{1}{R}$ , так как  $R$  зависит от  $x, y, z$ , добавки  $\Delta x = -x$ ,  $\Delta y = -y$ ,  $\Delta z = -z$ , поскольку в формуле

$$\vec{r}_k \ll \vec{R} \text{ и } \vec{r}_k \text{ входит со знаком «минус»}$$

$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}_k|}$$

Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}_k|} &= \frac{1}{R} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R} \right) (-x_k) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{R} \right) (-y_k) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R} \right) (-z_k) \right] \\ &+ \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{R} \right) (x_k)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{1}{R} \right) (x_k y_k) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{1}{R} \right) (x_k z_k) \right. \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left( \frac{1}{R} \right) (y_k x_k) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{R} \right) (y_k)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left( \frac{1}{R} \right) (y_k z_k) \\ &\left. + \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left( \frac{1}{R} \right) (z_k x_k) + \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \left( \frac{1}{R} \right) (z_k y_k) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{R} \right) (z_k)^2 \right] + \dots \end{aligned}$$

Подставим это разложение в (2.19), сразу учитывая  $\sum_k q_k$  и разбивая на соответствующие члены приближения:

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_k \frac{q_k}{R} + \left[ \left( -\sum_k q_k x_k \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R} \right) + \left( -\sum_k q_k y_k \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{R} \right) \right. \\ &\left. + \left( -\sum_k q_k z_k \right) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \left( \sum_k q_k x_k^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{R} \right) + \left( \sum_k q_k x_k y_k \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{1}{R} \right) \right. \\ &+ \left( \sum_k q_k x_k z_k \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{1}{R} \right) + \left( \sum_k q_k y_k x_k \right) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left( \frac{1}{R} \right) \\ &+ \left( \sum_k q_k y_k^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{R} \right) + \left( \sum_k q_k y_k z_k \right) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left( \frac{1}{R} \right) \\ &+ \left( \sum_k q_k z_k x_k \right) \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left( \frac{1}{R} \right) + \left( \sum_k q_k z_k y_k \right) \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \left( \frac{1}{R} \right) \\ &\left. + \left( \sum_k q_k z_k^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{R} \right) \right] + \dots = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots \quad (2.22) \end{aligned}$$

Выражение (2.22) означает, что мы доказали возможность разложения (2.21). Первая задача формально решена. Но уже в разложении (2.22) видно его преимущество по сравнению с исходным выражением (2.19). В самом деле, согласно (2.19) каждый заряд «сам за себя» дает вклад в потенциал в точке наблюдения А. При решении задач по этому методу пришлось бы учитывать взаимное расстояние каждого заряда до точки А. В разложении (2.22) имеется явное преимущество: отдельными сомножителями

лями входят величины, характеризующие систему зарядов, т.е. заряды  $q_k$  и их местоположение, и отдельный множитель, который независимо от зарядов характеризует местоположение точки наблюдения.

Теперь переходим ко второй задаче – выяснению физического смысла членов разложения (2.22).

Найдем нулевое приближение:

$$\varphi_0 = \sum_k q_k \frac{1}{R} = \frac{\sum_k q_k}{R} = \frac{q}{R},$$

где

$$q = \sum_k q_k.$$

Итак,

$$\varphi_0 = \frac{q}{R}. \quad (2.23)$$

Выражение (2.23) формально совпадает с потенциалом точечного заряда. Поэтому  $\varphi_0$  называют приближением точечного заряда. В нулевом приближении произвольная система зарядов ведет себя как точечный заряд, если  $\sum_k q_k \neq 0$ , т.е. система зарядов неэлектронейтральна. При этом суммарный заряд системы как будто находится в точке  $O$ , выбранной произвольно.

Рассмотрим линейное приближение:

$$\varphi_1 = - \left[ \left( \sum_k q_k x_k \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R} \right) + \left( \sum_k q_k y_k \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{R} \right) + \left( \sum_k q_k z_k \right) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R} \right) \right].$$

В этом приближении система зарядов характеризуется вектором с проекциями

$$p_x = \sum_k q_k x_k, \quad p_y = \sum_k q_k y_k, \quad p_z = \sum_k q_k z_k.$$

$$\vec{p} = \sum_k q_k \vec{r}_k$$

Вектор  $\vec{p}$  называется электрическим дипольным моментом системы. Это момент первого порядка по координатам зарядов.

Запишем производные:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R} \right) = \text{grad}_x \left( \frac{1}{R} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{R} \right) = \text{grad}_y \left( \frac{1}{R} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R} \right) = \text{grad}_z \left( \frac{1}{R} \right).$$

С учетом сделанных обозначений и введенных понятий получаем:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= -\left(p_x \operatorname{grad}_x \left(\frac{1}{R}\right) + p_y \operatorname{grad}_y \left(\frac{1}{R}\right) + p_z \operatorname{grad}_z \left(\frac{1}{R}\right)\right) = -\vec{p} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{1}{R}\right) \\ &= \frac{\vec{p} \vec{R}}{R^3},\end{aligned}$$

где использован известный из векторного анализа результат

$$\operatorname{grad}_a \left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\vec{R}}{R^3}.$$

Итак,

$$\varphi_1 = \frac{\vec{p} \vec{R}}{R^3}. \quad (2.24)$$

Формально (2.24) совпадает с потенциалом поля диполя, и называется поэтому дипольным приближением. В дипольном приближении система зарядов ведет себя как диполь с дипольным моментом

$$\vec{p} = \sum_k q_k r_k,$$

при этом дипольный момент системы  $\vec{p}$  как будто расположен в точке 0.

Рассмотрим квадратичное приближение:

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \frac{1}{2} \left[ \left( \sum_k q_k x_k^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R}\right) + \left( \sum_k q_k x_k y_k \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{R}\right) \right. \\ &\quad + \left( \sum_k q_k x_k z_k \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{1}{R}\right) + \left( \sum_k q_k y_k x_k \right) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(\frac{1}{R}\right) \\ &\quad + \left( \sum_k q_k y_k^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{R}\right) + \left( \sum_k q_k y_k z_k \right) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{1}{R}\right) \\ &\quad + \left( \sum_k q_k z_k x_k \right) \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left(\frac{1}{R}\right) + \left( \sum_k q_k z_k y_k \right) \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \left(\frac{1}{R}\right) \\ &\quad \left. + \left( \sum_k q_k z_k^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{R}\right) \right].\end{aligned}$$

В этом приближении система зарядов характеризуется более сложной величиной – моментом второго порядка, причем этот момент имеет 9 компонент (это первые со-

множители в формуле для  $\varphi_2$ ). Эти 9 компонент образуют тензор второго ранга, который называется электрическим квадрупольным моментом.

Квадрупольный момент можно записать в виде:

$$D_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

где

$$\begin{aligned} D_{xx} &= \sum_k q_k x_k^2, D_{xy} = \sum_k q_k x_k y_k, D_{xz} = \sum_k q_k x_k z_k, \\ D_{yx} &= \sum_k q_k y_k x_k, D_{yy} = \sum_k q_k y_k^2, D_{yz} = \sum_k q_k y_k z_k, \\ D_{zx} &= \sum_k q_k z_k x_k, D_{zy} = \sum_k q_k z_k y_k, D_{zz} = \sum_k q_k z_k^2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Из (2.26) видно, что тензор квадрупольного момента является симметричным:

$$D_{xy} = D_{yx}, D_{xz} = D_{zx}, D_{yz} = D_{zy}$$

и имеет 6 разных компонент. В конце темы мы покажем, что можно уменьшить число компонент до 5 – число независимых компонент.

Теперь перейдем к рассмотрению вторых сомножителей в формуле для  $\varphi_2$ . Вычислим, например, такую производную:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \text{grad}_z \left( \frac{1}{R} \right) \right]$$

Поскольку

$$\text{grad} \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{\vec{R}}{R^3},$$

то

$$\text{grad}_z \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{z}{R^3}.$$

Подставим в производную:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{z}{R^3} \right) = -z \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R^3} \right) - \frac{1}{R^3} \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R^3} \right) = \text{grad}_x \left( \frac{1}{R^3} \right), \text{grad} \left( \frac{1}{R^3} \right) = -\frac{3\vec{R}}{R^5}, \text{grad}_x \left( \frac{1}{R^3} \right) = -\frac{3x}{R^5},$$

тогда

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R^3} \right) = -\frac{3x}{R^5}.$$

Оставим временно член с  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и запишем:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{3xz}{R^5} - \frac{1}{R^3} \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Аналогично получаются остальные производные.

Обобщим эту формулу:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{3x_\alpha x_\beta}{R^5} - \frac{1}{R^3} \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha},$$

где  $x_\alpha, x_\beta$  означают  $x, y, z$ ;  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ;  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ .

Введем следующее обозначение:

$$\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} = \delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = \beta \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

где  $\delta_\alpha^\beta$  — единичный тензор, равный

$$\delta_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда окончательно будем иметь:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{3x_\alpha x_\beta}{R^5} - \frac{1}{R^3} \delta_\alpha^\beta. \quad (2.27)$$

С учетом (2.25) и (2.27)  $\varphi_2$  можно компактно записать так:

$$\varphi_2 = \frac{1}{2!} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 D_{\alpha\beta} \left( \frac{3x_\alpha x_\beta}{R^5} - \frac{1}{R^3} \delta_\alpha^\beta \right). \quad (2.28)$$

$\varphi_2$  называется квадрупольным приближением.

Проведем тождественное преобразование, которое уменьшает число компонент тензора  $D_{\alpha\beta}$  до пяти независимых. Для этого сначала раскроем (2.28), удваивая компоненты согласно свойству тензора:

$$\begin{aligned} \varphi_2 = \frac{1}{2} & \left[ \left( \sum_k q_k x_k^2 \right) \left( \frac{3x^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \right) + 2 \left( \sum_k q_k x_k y_k \right) \frac{3xy}{R^5} \right. \\ & + 2 \left( \sum_k q_k x_k z_k \right) \frac{3xz}{R^5} + \left( \sum_k q_k y_k^2 \right) \left( \frac{3y^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \right) \\ & + 2 \left( \sum_k q_k y_k z_k \right) \frac{3yz}{R^5} \\ & \left. + \left( \sum_k q_k z_k^2 \right) \left( \frac{3z^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Из выражения в квадратных скобках вычтем выражение, тождественно равное нулю:

$$\sum_k q_k \frac{r_k^2}{3} \left( \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{R^5} - \frac{3}{R^3} \right) \equiv 0. \quad (2.30)$$

В самом деле, (2.30) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{R^5} - \frac{3}{R^3} = \frac{3}{R^3} \left( \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{R^2} - 1 \right) \equiv 0.$$

С другой стороны, (2.30) можно записать так:

$$\sum_k q_k \frac{r_k^2}{3} \left[ \left( \frac{3x^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \right) + \left( \frac{3y^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \right) + \left( \frac{3z^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \right) \right].$$

Сгруппируем с (2.29), в итоге получаем

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \left[ \sum_k q_k \left( x_k^2 - \frac{r_k^2}{3} \right) \left( \frac{3x^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \right) + 2 \sum_k q_k x_k y_k \frac{3xy}{R^5} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +2 \sum_k q_k x_k z_k \frac{3xz}{R^5} + \sum_k q_k \left( y_k^2 - \frac{r_k^2}{3} \right) \left( \frac{3y^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \right) + 2 \sum_k q_k y_k z_k \frac{3yz}{R^5} \\
& \quad + \sum_k q_k \left( z_k^2 - \frac{r_k^2}{3} \right) \left( \frac{3z^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \right) \cdot \left. \right] \quad (2.31)
\end{aligned}$$

В результате этого преобразования диагональные компоненты тензора связаны простым соотношением, а именно:

$$D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = \sum_k q_k \left( x_k^2 - \frac{r_k^2}{3} + y_k^2 - \frac{r_k^2}{3} + z_k^2 - \frac{r_k^2}{3} \right) = 0,$$

т.е.

$$D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0. \quad (2.32)$$

Это означает, что одна из диагональных компонент выражается через сумму двух других, взятую со знаком «минус», например:

$$D_{zz} = -(D_{xx} + D_{yy}).$$

Поэтому остается вычислять только пять независимых компонент тензора. Примеры решения задач на квадрупольное приближение приведены в Приложении IV.5.

Определение компонент квадрупольного момента играет большую роль в ядерной физике, так как по их значению можно определить форму ядра. Если ядро имеет сферически-симметричную форму, то все компоненты  $D_{\alpha\beta} = 0$ . Если есть отклонения от сферической симметрии, то некоторые компоненты  $D_{\alpha\beta} \neq 0$  (см. приложение IV.5).

Моменты более высокого порядка называется мультипольными. Соответственно всё разложение для потенциала называется разложением по мультипольным моментам.

Отметим, что уже начиная с квадрупольного приближения разложение в декартовых координатах является неэффективным. В самом деле, нам сначала пришлось записывать девять членов в  $\varphi_2$ , но оказалось, что только пять из них независимы. Если проводить такое разложение в кубическом приближении – октупольном, то в декартовых координатах сначала пришлось бы записать 27 членов, тогда как анализ показывает, что только 7 из них независимы.

Имеется более рациональное выражение для  $\varphi$  – в сферических координатах (см., напр., [7]). Согласно [17] запишем разложение для  $\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}_k|}$  в форме:

$$\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}_k|} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + r_k^2 - 2Rr_k \cos\gamma_k}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_k^n}{R^{n+1}} P_n(\cos\gamma_k), \quad (2.33)$$

где  $\gamma_k$  – угол между  $\vec{R}$  и  $\vec{r}_k$ ,  $P_n(\cos\gamma_k)$  – полином Лежандра.

Если ввести независимые сферические координаты – углы  $\theta$  и  $\theta_k$ ,  $\psi$  и  $\psi_k$  (индекс  $k$  относится к заряду) то по теореме сложения полиномов Лежандра [17] запишем:

$$P_n(\cos\gamma_k) = \sum_{m=0}^n \frac{(n-m)! 2}{(n+m)! \delta_m} P_{n,m}(\cos\theta_k) P_{n,m}(\cos\theta) * \cos(\psi_k - \psi), \quad (2.34)$$

где  $\delta_m = 2$  при  $m = 0$ ,  $\delta_m = 1$  при  $m > 0$ . При этом полином Лежандра определяется следующим образом:

$$P_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n,$$

а присоединенный полином Лежандра:

$$P_{n,m}(x) = \frac{1}{n! 2^n} (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2 - 1)^n.$$

С учетом (2.33) и (2.34) потенциал  $\varphi$  можно записать в виде:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^{n+1}} \sum_k q_k r_k^n \sum_{m=0}^n \frac{(n-m)! 2}{(n+m)! \delta_m} * P_{n,m}(\cos\theta_k) P_{n,m}(\cos\theta) \cos(\psi_k - \psi). \quad (2.35)$$

Это и есть наиболее рациональное выражение для разложения потенциала по мультипольным моментам. В самом деле, формула (2.35) сразу показывает явную зависимость потенциала от расстояния  $R$  до точки наблюдения, момент соответствующего порядка и число независимых членов в соответствующем приближении (см. табл. 2):

Таблица 2

Приближение, $n$	Потенциал, зависимость от $R$	Характеристика системы зарядов	Число независимых членов
$n = 0$	$\varphi_0 \sim \frac{1}{R}$	$q = \sum_k q_k$	1
$n = 1$	$\varphi_1 \sim \frac{1}{R^2}$	$p \sim \sum_k q_k r_k$	3
$n = 2$	$\varphi_2 \sim \frac{1}{R^3}$	$D_{\alpha\beta} \sim \sum_k q_k r_k^2$	5
$n = 3$ ...	$\varphi_3 \sim \frac{1}{R^4}$ ...	$D_{\alpha\beta\gamma} \sim \sum_k q_k r_k^3$ ...	7 ...

Из приведенных примеров членов разложения видно, что на больших расстояниях основной вклад в потенциал дает  $\varphi_0$  – приближение точечного заряда, это и есть обоснование возможности применения в электродинамике понятия точечного заряда к описанию произвольной системы зарядов, если, конечно,  $\sum_k q_k \neq 0$ , т.е. система зарядов неэлектронейтральна!

## § 12. Проводники в электростатическом поле

Проводники имеют свободные, не связанные электрические заряды, т.е. свободные заряженные частицы. Под действием электростатического поля происходит перемещение зарядов на поверхность проводника. Макроскопическое описание дает следующие свойства проводника:

1) Так как в электростатике  $\vec{j} = 0$ , то по закону Ома

$$\vec{j} = \lambda \vec{E}$$

для проводника при  $\lambda \neq 0$  внутри проводника  $\vec{E} = 0$ . Вспомните клетку Фарадея!

2) Соответственно так же  $\vec{D} = 0$  и из 4-го уравнения Максвелла

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{D},$$

т.е.  $\rho = 0$ .

3) Поскольку  $\vec{E} = -grad\varphi$ , но внутри  $\vec{E} = 0$ , то  $grad\varphi = 0$ .

Весь проводник характеризуется одним значением потенциала  $\varphi$ . Поверхность проводника является первой эквипотенциальной поверхностью.

4) Заряды располагаются на поверхности проводника, т.е.  $\sigma \neq 0$ .

5) Из граничного условия  $D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma$ , где  $D_{1n} = 0$ , внутри проводника получаем  $D_{2n} = 4\pi\sigma$  и  $E_{2n} = 4\pi\frac{\sigma}{\epsilon}$ , т.е. внешняя напряженность вблизи поверхности проводника направлена по нормали к поверхности проводника  $\vec{E}_2 = 4\pi\frac{\sigma}{\epsilon}\vec{n}$ . При этом учтено, что касательная составляющая внешней напряженности  $E_{2\tau} = 0$  согласно граничному условию  $E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$  и  $E_{1\tau} = 0$ .

Достаточно полное описание свойств проводника содержится в книге И.Е.Тамма [18].

Для уединенного проводника заряд на его поверхности может быть записан в виде:

$$q = C\varphi, \quad (2.36)$$

где  $C$  – емкостный коэффициент или просто емкость. Если имеется несколько проводников, то заряд на одном из них, например  $q_k$ , равен

$$q_k = \sum_k C_{kn} \varphi_n, \quad (2.37)$$

где  $C_{kn}$  при  $k = n$  – емкостный коэффициент,  $C_{kn}$  при  $k \neq n$  – коэффициент индукции (влияния). Например, для двух проводников согласно (2.37) можно записать:

$$\begin{aligned} q_1 &= C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2, \\ q_2 &= C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2. \end{aligned}$$

Если  $q_1 = q$ ,  $q_2 = -q$ , например, для конденсатора, можно записать

$$\begin{aligned} q &= C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2, \\ -q &= C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2. \end{aligned}$$

Пусть  $\varphi_1 = 0$ . Складывая эти уравнения при  $\varphi_1 = 0$ , получаем

$$0 = \varphi_2 (C_{12} + C_{22}),$$

откуда при  $\varphi_2 \neq 0$  следует:  $C_{22} = -C_{12}$ .

Пусть теперь  $\varphi_2 = 0$ , складывая уравнения, получаем:

$$0 = \varphi_1 (C_{11} + C_{21}).$$

При  $\varphi_1 \neq 0$  отсюда следует, что  $C_{11} = -C_{21}$ . Но  $C_{12} = -C_{21}$ , поэтому

$$C_{11} = C_{22} \equiv C,$$

где  $C$  – емкость конденсатора. Величину  $C$  можно найти из первого уравнения, например,  $q = C(\varphi_1 - \varphi_2)$ . Тогда получаем:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (2.38)$$

Емкость конденсатора, как известно из курса общей физики, зависит только от свойств самого конденсатора.

### § 13. Диэлектрики в электростатическом поле

#### План

- I. Диполь. Потенциал поля диполя.
- II. Поляризация диэлектрика. Вектор поляризации.
- III. Связь вектора поляризации с плотностью связанных зарядов.

I. Диэлектрики, в отличие от проводников, имеют связанные заряды. Формально диэлектрик можно представить как совокупность диполей – уже «готовых», т.е. существующих и в отсутствии внешнего поля ( $\vec{E} = 0$ ) или наведенных – индуцированных внешним полем. В макроскопической электродинамике отвлекаются от этих деталей. Просто полагают, как мы уже в начале отметили, что диэлектрик состоит из диполей. Поэтому сначала вычислим потенциал поля диполя. Как известно, диполем называется система из двух разноименных, одинаковых по величине зарядов. Причем эти заряды расположены компактно, т.е. достаточно близко друг к другу, на расстоянии  $l$ . При этом вектор  $\vec{l}$  направлен от  $-q$  к  $+q$  (рис. 20).

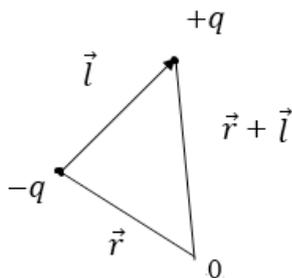


Рис. 20. Диполь. К расчету дипольного момента  $\vec{p}$

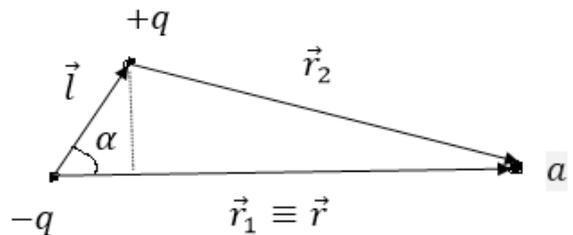


Рис. 21. Диполь. К расчету потенциала  $\varphi$

Согласно общему определению дипольный момент

$$\vec{p} = \sum_k q_k \vec{r}_k = q_1 \vec{r}_1 + q_2 \vec{r}_2 = -q\vec{r} + q(\vec{r} + \vec{l}) = q\vec{l},$$

где  $q_1 = -q$  и  $q_2 = q$ .

Итак, для диполя

$$\vec{p} = q\vec{l}$$

От выбора начала отсчета (точка O)  $\vec{p}$  не зависит, так как т. O выбрана произвольно.

Вычислим потенциал поля диполя в точке наблюдения  $a$  при  $l \ll r$ .

Согласно рис. 21 имеем для диполя:

$$\varphi = \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} = -\frac{q}{r_1} + \frac{q}{r_2} = q \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}.$$

Сделаем приближения: так как  $l \ll r$ , то предположим, что  $r_1 \cong r$ , в знаменателе  $r_1 r_2 \cong r^2$ , в числителе  $r_1 - r_2 \cong l \cos \alpha$  (см. рис. 21). Тогда

$$\varphi = \frac{ql \cos \alpha}{r^2} = \frac{p \cos \alpha}{r^2} \cdot \frac{r}{r} = \frac{\vec{p} \vec{r}}{r^3}.$$

Итак, потенциал поля диполя равен:

$$\varphi = \frac{\vec{p} \vec{r}}{r^3}. \quad (2.39)$$

Формула (2.39) в самом деле совпадает с формулой (2.24) для  $\varphi_1$  из разложения для потенциала системы зарядов (см. §11).

II. Рассмотрим поведение диэлектрика во внешнем поле. При  $\vec{E} \neq 0$  диэлектрик поляризуется. Это значит, что объем  $dV$  диэлектрика приобретает дипольный момент  $d\vec{p}$ , который можно записать в виде:

$$d\vec{p} = \vec{P} dV, \quad (2.40)$$

где  $\vec{P}$  – вектор, характеризующий поляризацию диэлектрика и называемый вектором поляризации. Вектор поляризации определяется как дипольный момент единицы объема и равен:

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}. \quad (2.41)$$

Для дискретного распределения дипольных моментов  $\vec{p}_k$  вектор поляризации определяется следующим образом:

$$\vec{P} = \frac{\sum_k \vec{p}_k}{V}. \quad (2.42)$$

Эксперименты показывают, что

$$\vec{P} = \alpha \vec{E}, \quad (2.43)$$

где  $\alpha$  – коэффициент поляризации данного диэлектрика.

III. Мы ввели два разных подхода к описанию диэлектрика:

1) с помощью связанных зарядов, которые можно охарактеризовать объемной плотностью связанных зарядов  $\rho_{\text{связ}}$  и поверхностной плотностью связанных зарядов

$\sigma_{\text{связ}}$ ,  
2) с помощью вектора поляризации  $\vec{P}$ .

Необходимо связать между собой эти введенные величины.

Сначала предположим, что потенциал поля при наличии диэлектрика можно представить в виде:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_{\text{доб}},$$

где  $\varphi_0$  – потенциал внешнего поля в вакууме,  $\varphi_{\text{доб}}$  – потенциал поля за счет поляризации диэлектрика. При этом

$$\varphi_0 = \int_V \frac{\rho dV}{r} + \int_S \frac{\sigma dS}{r}$$

и аналогично

$$\varphi_{\text{доб}} = \int_V \frac{\rho_{\text{связ}} dV}{r} + \int_S \frac{\sigma_{\text{связ}} dS}{r}. \quad (2.44)$$

С другой стороны, выразим  $\varphi_{\text{доб}}$  через поляризацию  $\vec{P}$ . Для этого сначала запишем потенциал от элемента объема  $dV$  как потенциал поля диполя с дипольным моментом  $d\vec{p}$ , а затем введем вместо  $d\vec{p}$  вектор поляризации согласно (2.40):

$$d\varphi = \frac{d\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{P} dV \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{P} \vec{r}}{r^3} dV.$$

Тогда для всего объема диэлектрика получаем:

$$\varphi_{\text{доб}} = \int_V \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} dV. \quad (2.45)$$

Преобразуем подынтегральное выражение в (2.45):

$$\frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} = \vec{P} \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{P} \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right),$$

причем градиент берется по точке источника. Далее используем тождество векторного анализа:

$$\text{div}(\varphi \vec{a}) \equiv \varphi \text{div} \vec{a} + \vec{a} \text{grad} \varphi,$$

полагая  $\vec{a} \equiv \vec{P}$ ,  $\varphi = \frac{1}{r}$ .

Тогда получим тождество для  $\vec{P}$  и  $r$ :

$$\text{div} \left( \frac{\vec{P}}{r} \right) \equiv \frac{1}{r} \text{div} \vec{P} + \vec{P} \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right),$$

откуда следует подынтегральное выражение:

$$\frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} = \vec{P} \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = \text{div} \left( \frac{\vec{P}}{r} \right) - \frac{1}{r} \text{div} \vec{P}.$$

Подставим это выражение в (2.45), сразу разбивая на два интеграла:

$$\varphi_{\text{доб}} = \int_V \frac{-\text{div} \vec{P} dV}{r} + \int_V \text{div} \left( \frac{\vec{P}}{r} \right) dV. \quad (2.46)$$

Займемся вторым интегралом в (2.46). Преобразуем его по 1-й теореме Остроградского-Гаусса:

$$\int_V \text{div} \left( \frac{\vec{P}}{r} \right) dV = \oint_S \frac{P_n}{r} dS. \quad (2.47)$$

Но это преобразование возможно, если внутри объема  $V$  нет поверхностей разрыва  $P_n$ . Рассмотрим разные случаи.

1. Во всем пространстве, занятом полем, нет поверхностей разрыва  $P_n$ . Тогда можно применить (2.47). Устремим поверхность  $S$  к  $S_0$ , охватывающей полное поле. Это

означает, что на поверхности  $S$  поле  $\vec{E}_0 = 0$  и соответственно  $\vec{P} = 0$ . Это возможно, если заряды расположены в конечной области пространства. В самом деле, разложение потенциала системы зарядов показывает, что самое медленное убывание с расстоянием дает приближение точечного заряда

$$\varphi_0 = \frac{q}{r} .$$

Соответственно, напряженность поля

$$E_0 = -grad \varphi_0 ,$$

т.е.

$$E_0 \sim \frac{1}{r^2}$$

и при  $r \rightarrow \infty$   $E_0 \rightarrow 0$ . Надо, конечно, учесть, что элемент поверхности  $dS \sim r^2$ . Тогда

$$\frac{P_n dS}{r} \sim \frac{1}{r^2 r} r^2 \sim \frac{1}{r} \rightarrow 0$$

при  $r \rightarrow \infty$ .

Здесь учтено, что

$$P_n \sim E_0 \sim \frac{1}{r^2}.$$

Для других приближений будет более быстрое убывание с увеличением расстояния. Поэтому можно положить:

$$\int_V div \left( \frac{\vec{P}}{r} \right) dV \rightarrow \oint_{S_0} \frac{P_n}{r} dS \rightarrow 0.$$

Тогда

$$\varphi_{доб} = \int_V \frac{-div \vec{P}}{r} dV. \quad (2.48)$$

Сравнивая (2.48) с первым интегралом в (2.46), получаем:

$$\rho_{связ} = -div \vec{P}. \quad (2.49)$$

2. Пусть внутри объема  $V$  есть хотя бы одна поверхность разрыва  $S_{разр}$ , на которой  $P_{2n} - P_{1n} \neq 0$ . На внешней поверхности  $S$ , окружающей выбранный объем  $V$ , разрыва нет, как и во всем остальном пространстве, занятом полем. Все «неприятности» сосредоточены внутри данного объема  $V$ .

Применим метод, который успешно используется в электростатике и магнитостатике. Окружаем поверхность разрыва  $S_{\text{разр}}$  замкнутой поверхностью  $S'$ , на которой  $P_n$  непрерывна. При этом поверхность  $S'$  подходит достаточно близко к  $S_{\text{разр}}$  (рис. 22). Нормаль  $\vec{n}$  к  $S_{\text{разр}}$  направлена от первой ко второй среде. Нормали  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  направлены перпендикулярно элементам  $dS_1$  и  $dS_2$ . При этом  $S_1$  и  $S_2$  – части поверхности  $S'$ , которые находятся в 1-й и 2-й среде соответственно, как указано на рисунке 22.

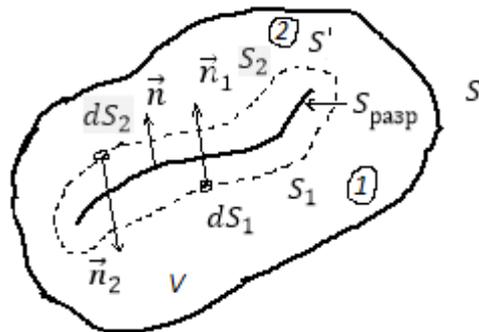


Рис. 22. Поверхности  $S, S_{\text{разр}}, S', S_1, S_2$

Тогда по 1-й теореме Остроградского-Гаусса можно записать:

$$\int_V \operatorname{div} \left( \frac{\vec{P}}{r} \right) dV = \oint_S \frac{P_n}{r} dS + \oint_{S'} \frac{P_n}{r} dS.$$

Первый интеграл

$$\oint_S \frac{P_n}{r} dS \rightarrow \oint_{S_0} \frac{P_n}{r} dS \rightarrow 0,$$

как в случае 1, так как все «неприятности», повторимся, содержатся во втором интеграле.

Запишем отдельно второй интеграл:

$$\oint_{S'} \frac{P_n}{r} dS \cong \int_{S_1} \frac{P_{n_1}}{r} dS + \int_{S_2} \frac{P_{n_2}}{r} dS.$$

Мы при этом пренебрегли потоком через боковую поверхность, которая мала, так как  $S'$  достаточно близко подходит к  $S_{\text{разр}}$ . Из рисунка 22 видно, что нормаль  $\vec{n}_1$  параллельна нормали  $\vec{n}$ , следовательно  $P_{n_1} = P_{1n}$ .

Нормаль  $\vec{n}_2$  антипараллельна  $\vec{n}$ , следовательно  $P_{n_2} = -P_{2n}$ . Устремляя  $S_1 \rightarrow S_{\text{разр}}$ ,  $S_2 \rightarrow S_{\text{разр}}$ , получаем:

$$\oint_{S'} \frac{P_n}{r} dS \cong \int_{S_{\text{разр}}} \frac{P_{1n} - P_{2n}}{r} dS.$$

Тогда

$$\int_V \operatorname{div} \left( \frac{\vec{P}}{r} \right) dV = \int_{S_{\text{разр}}} \frac{P_{1n} - P_{2n}}{r} dS \equiv \int_S \frac{P_{1n} - P_{2n}}{r} dS.$$

Здесь мы опустили слово «разрыв», считая, что  $S$  это и есть поверхность, на которой  $P_{1n} \neq P_{2n}$ . Подставим этот результат в (2.46):

$$\varphi_{\text{доб}} = \int_V \frac{-\operatorname{div} \vec{P}}{r} dV + \int_S \frac{P_{1n} - P_{2n}}{r} dS.$$

Сравнивая с  $\varphi_{\text{доб}}$  (2.44), получаем:

$$\rho_{\text{связ}} = -\operatorname{div} \vec{P}, \quad (2.50)$$

$$\sigma_{\text{связ}} = P_{1n} - P_{2n}. \quad (2.51)$$

Итак, мы нашли связь вектора поляризации с объемной ( $\rho_{\text{связ}}$ ) и поверхностной ( $\sigma_{\text{связ}}$ ) плотностью связанных зарядов. Обсудим полученные результаты,

1) Согласно (2.50),  $\rho_{\text{связ}} \neq 0$  если  $\operatorname{div} \vec{P} \neq 0$  т.е. если поляризация неоднородна. Это возможно, если внешнее поле неоднородно, если диэлектрик неоднороден, если неоднородный диэлектрик находится в однородном поле.

2) Если  $\operatorname{div} \vec{P} = 0$  – однородный диэлектрик в однородном поле, то  $\rho_{\text{связ}} = 0$ .

3) Согласно (2.51)  $\sigma_{\text{связ}} \neq 0$  на поверхности  $S$  при  $P_{1n} \neq P_{2n}$ .

4) Если нет скачка  $P_n$ , т.е.  $P_{1n} = P_{2n}$ , то  $\sigma_{\text{связ}} = 0$ .

Это феноменологическое описание, конечно, не раскрывает все многообразие диэлектриков и их поведение во внешнем поле. Для этого необходим более строгий подход – микроскопическое описание.

## § 14. Энергия в электростатике

### План

- I. Энергия электростатического поля.
- II. Энергия зарядов, распределенных с объемной и поверхностной плотностью в поле.
- III. Энергия системы точечных зарядов в поле.
- IV. Энергия диполя в поле.
- V. Энергия диполь-дипольного взаимодействия.
- VI. Энергия системы точечных зарядов: собственная энергия и энергия взаимодействия.
- VII. Классический радиус электрона.

I. По теореме Умова-Пойнтинга энергия электромагнитного поля равна:

$$W = \int_V \frac{1}{8\pi} (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) dV,$$

отсюда энергия электростатического поля:

$$W = \int_V \frac{1}{8\pi} \vec{E}\vec{D} dV. \quad (2.52)$$

Формула (2.52) означает, что энергия поля «размазана» по объему  $V$  с объемной плотностью

$$w = \frac{1}{8\pi} \vec{E}\vec{D} \geq 0.$$

Вся энергия поля согласно (2.52) всегда положительна. Этот вопрос обсуждался в § 6.

II. Получим энергию зарядов в поле. Учтем, что

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi.$$

Тогда, подставив эту формулу в (2.52), получим:

$$W = - \int_V \frac{1}{8\pi} \vec{D} \text{grad}\varphi dV.$$

Преобразуем  $\vec{D} \text{grad}\varphi$  согласно тождеству векторного анализа:

$$\text{div}(\varphi\vec{D}) \equiv \varphi \text{div}\vec{D} + \vec{D} \text{grad}\varphi,$$

откуда

$$\vec{D} \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{div}(\varphi \vec{D}) - \varphi \operatorname{div} \vec{D}.$$

Заменяя  $\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho$  согласно 4-му уравнению Максвелла, получим:

$$\vec{D} \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{div}(\varphi \vec{D}) - 4\pi\rho$$

Подставив это выражение в формулу для энергии и сразу разбивая на два интеграла, получаем:

$$\begin{aligned} W &= - \int_V \frac{1}{8\pi} \operatorname{div}(\varphi \vec{D}) dV + \int_V \frac{1}{8\pi} 4\pi\rho\varphi dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dV - \frac{1}{8\pi} \int_V \operatorname{div}(\varphi \vec{D}) dV. \end{aligned}$$

На этом этапе вычислений энергия имеет вид:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dV - \frac{1}{8\pi} \int_V \operatorname{div}(\varphi \vec{D}) dV. \quad (2.53)$$

Второй интеграл в (2.53) можно преобразовать по 1-й теореме Остроградского–Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div}(\varphi \vec{D}) dV = \oint_S \varphi D_n dS.$$

Но так же, как и в §13, отметим, что применение этой теоремы возможно только в случае, если нет поверхностей разрыва подынтегральных функций, т.е.  $\varphi$  и  $D_n$ .

Рассмотрим два возможных случая.

1. Во всем пространстве, занятом полем, нет поверхностей разрыва  $D_n$  и  $\varphi$ .

Тогда

$$\oint_S \varphi D_n dS \rightarrow \int_{S_0} \varphi D_n dS \rightarrow 0,$$

где  $S_0$  – поверхность, охватывающая полное поле. При этом  $\varphi D_n dS \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ . Это возможно, если заряды находятся в конечной области пространства. Подробный анализ аналогичных выражений мы уже проводили в § 13. Учтем этот результат и получим вместо (2.53) выражение для энергии:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dV. \quad (2.54)$$

2. Есть одна поверхность разрыва нормальной составляющей вектора электрической индукции, на которой выполняется граничное условие (1.67):

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma.$$

Скалярный потенциал терпит разрыв при переходе через двойной электрический слой (см. например, учебник И.Е. Тамма [18]). Но двойные электрические слои встречаются крайне редко, поэтому в дальнейшем всегда будем считать  $\varphi$  всюду непрерывным.

Снова, как и в § 13, применим тот же рисунок 22. Тогда запишем:

$$\int_V \operatorname{div}(\varphi \vec{D}) dV = \oint_S \varphi D_n dS + \oint_{S'} \varphi D_n dS.$$

При этом с интегралом по внешней поверхности  $S$  можно поступить, как в случае 1, а именно:

$$\oint_S \varphi D_n dS \rightarrow \oint_{S_0} \varphi D_n dS \rightarrow 0.$$

Поэтому остается интеграл по «внутренней» поверхности  $S'$ , который приближенно можно записать в виде суммы двух интегралов – по  $S_1$  и  $S_2$ :

$$\oint_{S'} \varphi D_n dS \simeq \int_{S_1} \varphi D_{n_1} dS + \int_{S_2} \varphi D_{n_2} dS.$$

Поскольку  $D_{n_1} = D_{1n}$ , так как нормали  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}$  параллельны, а  $D_{n_2} = -D_{2n}$ , так как нормали  $\vec{n}_2$  и  $\vec{n}$  антипараллельны, то после устремления  $S_1 \rightarrow S_{\text{разр}}$  и  $S_2 \rightarrow S_{\text{разр}}$  получаем:

$$\int_V \operatorname{div}(\varphi \vec{D}) dV \simeq \int_{S_{\text{разр}}} \varphi (D_{1n} - D_{2n}) dS.$$

Используем граничное условие (1.67) и записываем:

$$\int_V \operatorname{div}(\varphi \vec{D}) dV = -4\pi \int_S \sigma \varphi dS,$$

где снова опущено слово «разрыв» для поверхности, на которой  $D_{1n} \neq D_{2n}$ .

Подставим этот результат в (2.53) и получим:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS. \quad (2.55)$$

Формула (2.55) описывает энергию зарядов, распределенных с объемной ( $\rho$ ) и поверхностной ( $\sigma$ ) плотностью, в электростатическом поле. Это потенциальная энергия заряженного вещества в поле. Вещество в (2.55) «представлено» плотностями зарядов  $\rho$  и  $\sigma$ , а поле – потенциалом  $\varphi$ . Формула (2.55) ограничена по сравнению с исходной (2.52). В самом деле, согласно (2.55) энергией обладают только области пространства, в которых находится заряженное вещество. А если вещество не заряжено или его вообще нет, то энергия согласно (2.55) равна нулю! Тогда как согласно (2.52) энергия есть и там, где вещества нет, а поле есть!

И последнее замечание. Согласно (2.55) энергия зависит от значения потенциала в некоторой точке. Это снова подтверждает точку зрения 2 (и авторов) – наличие физического смысла потенциала. Потенциал, таким образом, является энергетической характеристикой поля.

III. Перейдем теперь к нахождению энергии системы точечных зарядов в поле.

а) Покажем, что для точечных зарядов можно ввести понятие объемной плотности.

Объемная плотность заряда в самом простом случае (равномерное распределение по объему) равна

$$\rho = \frac{q}{V}$$

Для точечного заряда  $\rho$  ведет себя «своеобразно», а именно:

$$\rho = \begin{cases} \infty, & \text{в точке, где находится заряд, так как } V=0, \\ 0, & \text{во всех остальных точках, так как в них } q=0. \end{cases} \quad (2.56)$$

Дирак предложил использовать для описания с дельта-функцию. Дельта-функция Дирака определяется следующим образом (рис. 23):

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0, \end{cases} \quad (2.57)$$

и

$$\delta(x - a) = \begin{cases} \infty, & x - a = 0, x = a \\ 0, & x - a \neq 0, x \neq a. \end{cases} \quad (2.57)$$

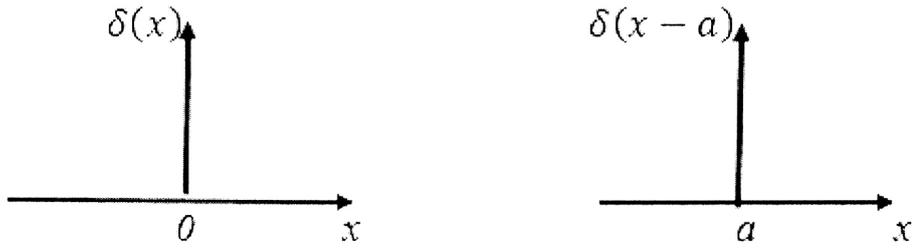


Рис. 23. Дельта – функция Дирака

Нормировка дельта-функции проводится на единицу, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1,$$

и аналогично

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) dx = 1.$$

Если под знаком интеграла кроме  $\delta(x)$  или  $\delta(x - a)$  находится непрерывная функция  $f(x)$ , то интегралы вычисляются очень просто:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a). \quad (2.59)$$

Есть функции, которые ведут себя дельта-образно – если они имеют острый максимум, для них можно использовать (2.59).

С учетом свойств дельта-функции Дирака можно ввести понятие объемной плотности зарядов для системы точечных зарядов:

$$\rho = \sum_k q_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k) = \begin{cases} \infty, & \vec{r} = \vec{r}_k \\ 0, & \vec{r} \neq \vec{r}_k, \end{cases}$$

где  $\vec{r}$  характеризует положение заряда  $q_k$ ,  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_k)$  – обобщение дельта-функции Дирака на трехмерный случай:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_k) = \delta(x - x_k) \cdot \delta(y - y_k) \cdot \delta(z - z_k).$$

Проверим, правильно ли мы ввели  $\rho$  согласно (2.60). Вычислим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho dV = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_k q_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k) dV = \sum_k q_k \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\vec{r} - \vec{r}_k) dV = \sum_k q_k \equiv q.$$

Как и следовало ожидать, получился заряд всей системы зарядов. При этом использовалась нормировка обобщенной дельта-функции Дирака.

Итак, можно формально описывать систему точечных зарядов с помощью объемной плотности, но, в конце концов, бесконечность все-таки появится!

б) Найдем энергию системы точечных зарядов в поле. Для этого используем формулу для энергии (2.54), содержащую плотность заряда  $\rho$ , определенную в (2.60), и свойство (2.59):

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \sum_k q_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k) \varphi(\vec{r}) dV \\ &= \frac{1}{2} \sum_k q_k \int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_k) \varphi(\vec{r}) dV \\ &= \frac{1}{2} \sum_k q_k \varphi(\vec{r}_k) \equiv \frac{1}{2} \sum_k q_k \varphi_k, \quad \varphi_k \equiv \varphi(\vec{r}_k), \end{aligned}$$

где использовано свойство (2.59) для трехмерного случая:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\vec{r} - \vec{r}_k) \varphi(\vec{r}) dV = \varphi(\vec{r}_k).$$

Интегрирование ведется по всему пространству.

Итак,

$$W = \frac{1}{2} \sum_k q_k \varphi_k. \quad (2.61)$$

Это потенциальная энергия системы точечных зарядов в поле. При этом поле характеризуется потенциалом  $\varphi_k$  в той же точке, в которой находится заряд  $q_k$ . Конечно, эта формула так же ограничена по сравнению с формулой для энергии поля.

IV. Найдем «полезную» формулу для энергии диполя во внешнем поле (рис. 24).

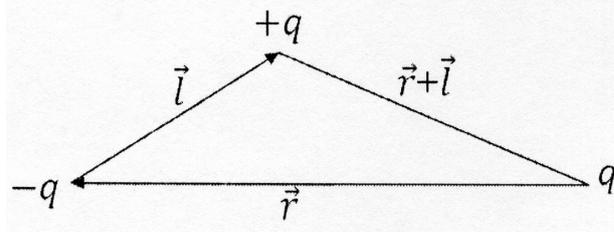


Рис. 24. Диполь во внешнем поле

В точке  $q$  находится источник поля. На заряде  $-q$  потенциал  $\varphi(\vec{r})$ , на заряде  $+q$  потенциал  $\varphi(\vec{r} + \vec{l})$ . Энергия этих зарядов в поле имеет вид:

$$W = -q\varphi(\vec{r}) + q\varphi(\vec{r} + \vec{l}).$$

Разложим  $\varphi(\vec{r} + \vec{l})$  в ряд, считая  $l \ll r$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r} + \vec{l}) &\simeq \varphi(\vec{r}) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} l_z \\ &= \varphi(\vec{r}) + l_x \text{grad}_x \varphi + l_y \text{grad}_y \varphi + l_z \text{grad}_z \varphi = \varphi(\vec{r}) + \vec{l} \text{grad} \varphi \\ &= \varphi(\vec{r}) - \vec{l} \vec{E} \end{aligned}$$

и подставим в энергию:

$$W = -q\varphi(\vec{r}) + q\varphi(\vec{r}) - q\vec{l}\vec{E} = -\vec{p}\vec{E}, \quad (\vec{p} = q\vec{l}).$$

Итак, энергия диполя  $\vec{p}$  во внешнем поле  $\vec{E}$  есть скалярное произведение:

$$W = -(\vec{p} \cdot \vec{E}). \quad (2.62)$$

Эта формула используется в физике для описания поведения диэлектриков в электрическом поле.

V. Найдем энергию диполь-дипольного взаимодействия, т.е. энергию двух диполей с моментами  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$ . Для этого используем (2.62), предполагая, что диполь с моментом  $\vec{p}_1$  находится в поле диполя с моментом  $\vec{p}_2$ .

Сначала найдем напряженность поля диполя. Пусть

$$\vec{E}_{\text{дип}} = -\text{grad} \varphi_{\text{дип}} = -\text{grad} \left( \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = -\frac{1}{r^3} \text{grad}(\vec{p}\vec{r}) - (\vec{p}\vec{r}) \text{grad} \left( \frac{1}{r^3} \right).$$

При этом мы использовали тождество векторного анализа

$$\text{grad}(\varphi\psi) \equiv \varphi \text{grad}\psi + \psi \text{grad}\varphi,$$

полагая

$$\varphi = \frac{1}{r^3}, \quad \psi = (\vec{p}\vec{r}), \quad \text{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3\vec{r}}{r^5}.$$

Отдельно найдем:

$$\text{grad}(\vec{p}\vec{r}) = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} (\vec{p}\vec{r}) + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} (\vec{p}\vec{r}) + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} (\vec{p}\vec{r}) = \vec{i}p_x + \vec{j}p_y + \vec{k}p_z = \vec{p},$$

так как  $\vec{p}\vec{r} = p_x x + p_y y + p_z z$  и  $\vec{p}$  не зависит от координат  $(x, y, z)$  точки наблюдения. Тогда напряженность поля диполя равна:

$$\vec{E}_{\text{дип}} = \frac{3\vec{r}(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}. \quad (2.63)$$

Подставим (2.63) в формулу (2.62) и получим:

$$W = -\vec{p}_1 \vec{E}(\vec{p}_2) = -\vec{p}_1 \left( \frac{3\vec{r}(\vec{p}_2 \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{p}_2}{r^3} \right) = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{r^3} - \frac{3(\vec{p}_1 \cdot \vec{r})(\vec{p}_2 \cdot \vec{r})}{r^5}.$$

Итак,

$$W = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{r^3} - \frac{3(\vec{p}_1 \cdot \vec{r})(\vec{p}_2 \cdot \vec{r})}{r^5}. \quad (2.64)$$

Это и есть энергия диполь-дипольного взаимодействия.

VI. Определим энергию системы точечных зарядов. Для этого используем формулу (2.61), считая, что потенциал  $\varphi_k$  на заряде  $q_k$  создается той же системой точечных зарядов. На рисунке 25 представлена выделенная пара зарядов  $q_k$  и  $q_n$ :

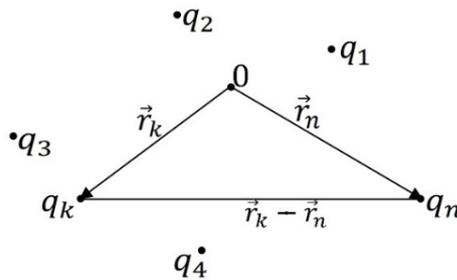


Рис. 25. Система зарядов

Тогда

$$\varphi_k = \sum_n \frac{q_n}{|\vec{r}_k - \vec{r}_n|}.$$

Энергия всех зарядов получится в виде:

$$W = \frac{1}{2} \sum_k \sum_n \frac{q_k q_n}{|\vec{r}_k - \vec{r}_n|}.$$

В этих суммах можно выделить отдельно суммы при  $k = n$  и  $k \neq n$ :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=n} \sum_n \frac{q_k q_n}{|\vec{r}_k - \vec{r}_n|} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq n} \sum_n \frac{q_k q_n}{|\vec{r}_k - \vec{r}_n|} = W_{\text{собств}} + W_{\text{вз}}, \quad (2.65)$$

где

$$W_{\text{собств}} = \frac{1}{2} \sum_{k=n} \sum_n \frac{q_k q_n}{|\vec{r}_k - \vec{r}_n|} \rightarrow \infty,$$

это собственная энергия системы точечных зарядов. Она, как видно из последнего выражения, бесконечна. Вот бесконечность и «вылезла», хотя мы в начале «запрятали» ее в объемную плотность  $\rho$ .

Второй член в (2.65) равен конечному значению:

$$W_{\text{вз}} = \frac{1}{2} \sum_{k \neq n} \sum_n \frac{q_k q_n}{|\vec{r}_k - \vec{r}_n|}. \quad (2.66)$$

Это энергия взаимодействия. Причем, если  $W_{\text{вз}} > 0$ , то заряды отталкиваются (одноименные), если  $W_{\text{вз}} < 0$ , то заряды притягиваются.

В общем, согласно (2.65), энергия системы точечных зарядов бесконечна, но в ней есть конечное значение – энергия взаимодействия.

## VII. Классический радиус электрона.

В современной теоретической физике существует проблема, связанная с энергией элементарных частиц. Наименьшей частицей вещества является электрон. Поскольку электрон заряжен, то его собственная энергия

$$W \sim \frac{e^2}{a},$$

где  $a$  – радиус электрона. Можно непосредственными вычислениями показать, что собственная электростатическая энергия шара, равномерно заряженного по объему, равна

$$W = \frac{3e^2}{5a}. \quad (2.67)$$

Если электрон – точечная частица, то его собственная энергия бесконечна, так как  $a \rightarrow 0$ . Однако согласно специальной теории относительности (СТО) энергия  $W = m_0 c^2$ , где  $m_0$  – масса покоя электрона. Эта энергия конечна! Следовательно, возникает противоречие электродинамики и СТО.

Если электрон – протяженная частица радиуса  $a$ , то его собственная электростатическая энергия согласно (2.67) является конечной. Но снова возникает противоречие с СТО. Формула (2.67) получается в предположении, что шарик (электрон) – абсолютно твердое тело, но согласно СТО таких тел быть не может, иначе это означало бы передачу взаимодействия с бесконечной скоростью. Согласно СТО предельной скоростью физического взаимодействия является  $c$  – скорость света в вакууме. Необходимо отметить, что проблема взаимодействия протяженных элементарных частиц до сих пор не решена.

Чтобы «примирить» электродинамику с СТО, в настоящее время предполагают, что элементарные частицы, в том числе электрон, точечные. При этом вводится фундаментальная константа с размерностью длины, представляющая собой нижнюю границу применимости электродинамики, на которой она еще не противоречит СТО. Эта нижняя граница получила название «классический радиус электрона», хотя никаким радиусом электрона она не является. Находится классический радиус следующим образом: предполагается равенство электростатической энергии (энергии шара с зарядом  $e$ , распределённым сферически-симметрично) и энергии покоя электрона:

$$\frac{e^2}{a_e} \sim m_0 c^2,$$

отсюда

$$a_e = \frac{e^2}{m_0 c^2},$$

где  $a_e$  – классический радиус электрона, равный:

$$a_e \approx 2,5 \cdot 10^{-13} \text{ см.} \quad (2.68)$$

## § 15. Механические силы в электростатике

Из определения вектора электрической напряженности  $\vec{E}$  следует, что сила, действующая на точечный заряд  $q$ , равна:

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (2.69)$$

Если заряд распределен по объему  $v$  с плотностью  $\rho$ , то применяя (2.69) к элементу объема  $dV$  с зарядом  $dq$ , можно записать:

$$d\vec{F} = dq\vec{E} = \rho dV\vec{E},$$

где  $\vec{f} = \rho\vec{E}$  – объемная плотность силы. В итоге, сила, действующая на объем  $V$ , равна:

$$\vec{F} = \int_V \rho\vec{E} dV. \quad (2.70)$$

В случае поверхностного распределения зарядов с плотностью  $\sigma$  дело несколько усложняется, так как на поверхности  $dS$  в силу граничных условий вектор  $\vec{E}$  неопределён.

Для одного уединенного проводника возникает эффект растяжения его поверхности, это объясняется тем, что элементы поверхности заряжены одноименно и отталкиваются, но покинуть проводник не могут.

Для проводника, помещенного во внешнее поле, возникает аналогичный эффект. В самом деле, выберем элемент поверхности проводника  $dS$ , на котором находятся заряды с плотностью  $\sigma dS$  (рис. 26). Внешнее поле  $\vec{E}$  вблизи поверхности  $dS$  направлено по нормали  $\vec{n}$  (см. § 12), поле  $\vec{E}'$  от заряда  $\sigma dS$  направлено вверх и вниз, поле  $\vec{E}''$  – от всех остальных элементов поверхности направлено вверх. Все эти векторы находятся, конечно, вблизи  $dS$  и в одной точке.

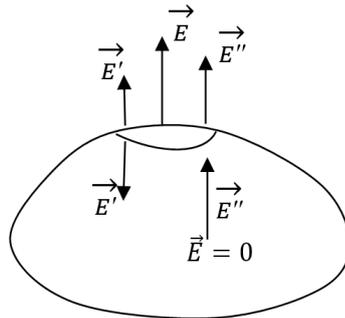


Рис. 26. Проводник во внешнем поле

При этом  $\vec{E} = 4\pi\sigma\vec{n}$  и  $E = E' + E''$  – вне проводника,  $E = E' - E'' = 0$  – внутри проводника. Отсюда

$$E' = E'' = \frac{E}{2} = 2\pi\sigma.$$

Тогда сила, действующая на элемент  $dS$ :

$$d\vec{F} = \sigma dS E'' = 2\pi\sigma^2 dS,$$

где

$$f_{\text{пов}} = 2\pi\sigma^2 = \frac{1}{8\pi}E^2.$$

При этом  $\vec{f}_{\text{пов}} = \frac{1}{8\pi}E^2\vec{n}$  – это поверхностная плотность механических сил, равная объемной плотности энергии электростатического поля. Она действует по нормали к каждому элементу  $dS$ . Тогда вся сила может быть написана так:

$$\vec{F} = \int_S \frac{1}{8\pi}E^2\vec{n}dS. \quad (2.71)$$

Найдем силу, действующую на диполь в поле. Согласно рисунку 27 в точке, где находится заряд  $-q$  напряженность поля  $\vec{E}(\vec{r})$ ; в точке, где находится заряд  $+q$ , напряженность  $\vec{E}(\vec{r} + \vec{l})$ . Находим результирующую силу:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -q\vec{E}(\vec{r}) + q\vec{E}(\vec{r} + \vec{l})$$

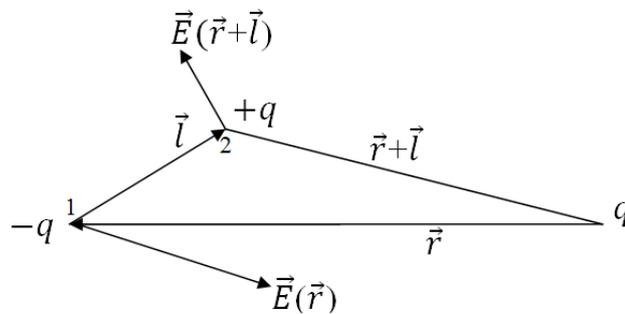


Рис. 27. Диполь во внешнем поле

Разложим  $\vec{E}(\vec{r} + \vec{l})$  в ряд, считая  $l \ll r$ :

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r} + \vec{l}) &\simeq \vec{E}(\vec{r}) + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} l_x + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} l_y + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} l_z = \vec{E}(\vec{r}) + \left( l_x \frac{\partial}{\partial x} + l_y \frac{\partial}{\partial y} + l_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{E}(\vec{r}) \\ &= \vec{E}(\vec{r}) + (\vec{l} \nabla) \vec{E}(\vec{r}).\end{aligned}$$

Подставим это разложение в силу  $\vec{F}$  и получаем:

$$\vec{F} = -q\vec{E}(\vec{r}) + q\vec{E}(\vec{r}) + q(\vec{l} \nabla) \vec{E}(\vec{r}) = (q\vec{l} \nabla) \vec{E} = (\vec{p} \nabla) \vec{E}.$$

Итак, сила, действующая на диполь, равна:

$$\vec{F} = (\vec{p} \nabla) \vec{E}, \quad (2.72)$$

где оператор  $(\vec{p} \nabla) = p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}$ .

Согласно (2.72) сила действует на диполь в неоднородном поле в сторону увеличения  $\vec{E}$ . В однородном поле сила  $\vec{F}$  равна нулю, но действует момент пары сил, численно равных, но направленных в разные стороны. Вычислим этот момент:

$$\vec{N} = [\vec{r}_1 \vec{F}_1] + [\vec{r}_2 \vec{F}_2] = [\vec{r}(-q\vec{E})] + [(\vec{r} + \vec{l})q\vec{E}] = [q\vec{l}\vec{E}] = [\vec{p}\vec{E}].$$

Итак,

$$\vec{N} = [\vec{p}\vec{E}]. \quad (2.73)$$

Момент  $N$  стремится повернуть диполь так, чтобы  $\vec{p}$  совпадало с  $\vec{E}$ .

Совместным действием момента  $\vec{N}$  и силы  $\vec{F}$  и объясняется притяжение легких тел (бумажек, пылинок и т.п.) к наэлектризованным телам. Этим объясняются эффектные опыты, которые демонстрирует школьный учитель в самом начале преподавания раздела «Электростатика».

## ГЛАВА III. СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ. МАГНИТОСТАТИКА

### § 16. Основные уравнения. Основные задачи теории стационарного поля

Стационарное электромагнитное поле создается вокруг проводника, по которому течет постоянный ток, или вокруг заряда, движущегося с постоянной скоростью. При этом  $\vec{j} \neq 0$ , но  $\vec{j} = const$ ,  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial q}{\partial t} = 0$ . Система уравнений Максвелла принимает следующий вид:

$$rot \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad rot \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$rot \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad rot \vec{E} = 0$$

$$div \vec{B} = 0 \quad \rightarrow \quad div \vec{B} = 0$$

$$div \vec{D} = 4\pi\rho \quad \rightarrow \quad div \vec{D} = 4\pi\rho .$$

Можно выделить две подсистемы – электрическую и магнитную:

Электрическая

$$rot \vec{E} = 0,$$

$$div \vec{D} = 4\pi\rho,$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}.$$

Магнитная

$$rot \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j},$$

$$div \vec{B} = 0,$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H},$$

(3.1)

но они связаны между собой обобщенным законом Ома:

$$\vec{j} = \lambda (\vec{E} + \vec{E}^{стоп}). \quad (3.2)$$

Основные задачи теории:

1. По  $\vec{E}^{стоп}$  найти скалярный потенциал  $\varphi$  и напряженность  $\vec{E}$ .
2. По плотности тока  $\vec{j}$  найти векторы магнитной индукции  $\vec{B}$  и магнитной напряженности  $\vec{H}$ .
3. Найти механические силы, действующие на движущиеся заряды или проводники с токами в стационарном поле.

В §17 последовательно приводится решение первой задачи. Вторая задача – задача магнитостатики – решается в общем виде в § 20.

## § 17. Электрическое стационарное поле

### План

1. Основные уравнения, основные свойства электрического стационарного поля.
2. Обобщенный закон Ома, сторонние ЭДС.
3. Условия существования постоянного электрического тока.
4. Нахождение потенциала и электрической напряженности по сторонней напряженности.

1. Стационарное электрическое поле – это поле постоянного электрического тока. При этом, несмотря на движение зарядов, объемная плотность  $\rho = const$ , но  $\vec{j} \neq 0$ . Тогда, учитывая, что все производные в уравнениях Максвелла равны нулю, т.е.  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ , а  $\vec{j} \neq 0$ , получаем две подсистемы уравнений (3.1) для электрического и магнитного полей. Они связаны обобщенным законом Ома (3.2).

Таким образом, электрическое стационарное поле описывается основными уравнениями, по форме совпадающими с основными уравнениями электростатики:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho. \end{cases} \quad (3.3)$$

Однако эти уравнения описывают электрическое поле постоянного тока. Основные свойства поля такие же, как и в электростатике. Поскольку  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ , то электрическое стационарное поле – безвихревое или потенциальное. Для его характеристики вводится скалярный потенциал  $\varphi$ , так же как и в электростатике, связанный с электрической напряженностью соотношением  $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ . При этом тождественно удовлетворяется уравнение  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ , так как  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$ .

Основной задачей является нахождение потенциала и электрической напряженности по сторонней напряженности. Но прежде чем решать эту задачу, покажем, что в случае постоянного тока закон Ома имеет вид (3.2).

2. Из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}$$

для постоянного тока следует, что поскольку  $\rho = const$ ,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , то

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Это означает, что линии тока  $\vec{j}$  должны быть замкнутыми. Вычислим циркуляцию вектора  $\vec{j}$  вдоль замкнутого контура  $l$ , полагая что  $\vec{j} = \lambda \vec{E}$ , т.е. в законе Ома нет до-

бавки в виде  $\lambda \vec{E}^{\text{стор}}$ . Подставляя вместо  $\vec{j}$  указанное значение через электрическую напряженность и вынося затем из-под знака интеграла коэффициент удельной электропроводности  $\lambda$ , применяем теорему Стокса:

$$\oint_l \vec{j} d\vec{l} = \oint_l \lambda \vec{E} d\vec{l} = \lambda \oint_l \vec{E} d\vec{l} = \lambda \int_s \text{rot}_n \vec{E} dS.$$

Но так как поле безвихревое, то последний интеграл равен нулю:

$$\int_s \text{rot}_n \vec{E} dS = 0.$$

Следовательно, циркуляция вектора  $\vec{j}$  вдоль контура  $l$  равна нулю:

$$\oint_l \vec{j} d\vec{l} = 0. \quad (3.5)$$

Поскольку линия тока  $\vec{j}$  замкнута, то вектор  $\vec{j}$  нигде по контуру не меняет свой знак в проекции на элемент  $d\vec{l}$ . Тогда циркуляция  $\vec{j}$  равна нулю только вследствие того, что  $\vec{j} = 0$ . Следовательно, если закон Ома имеет вид только  $\vec{j} = \lambda \vec{E}$ , то ток по проводнику идти не может. Это означает, что под действием только одной электрической напряженности безвихревого характера постоянный электрический ток в цепи не идет. Необходимо действие сил или напряженности не электрического происхождения, которая «двигала» бы заряды по проводнику длительное время. По предложению И.Е. Тамма такие напряженности и ЭДС стали называть сторонними, подчеркивая их неэлектрическое происхождение.

Покажем, что если закон Ома имеет вид (3.2), то постоянный ток в цепи возможен при определенных свойствах  $\vec{E}^{\text{стор}}$ . Проведем преобразования, применяя снова теорему Стокса для двух интегралов:

$$\begin{aligned} \oint_l \vec{j} d\vec{l} &= \oint_l \lambda (\vec{E} + \vec{E}^{\text{стор}}) d\vec{l} = \lambda \oint_l \vec{E} d\vec{l} + \lambda \oint_l \vec{E}^{\text{стор}} d\vec{l} = \lambda \int_s \text{rot}_n \vec{E} dS \\ &+ \lambda \int_s \text{rot}_n \vec{E}^{\text{стор}} dS. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Первый интеграл в (3.6) по-прежнему равен нулю. Значит, для того чтобы

$$\oint_l \vec{j} d\vec{l} \neq 0 \text{ и } \vec{j} \neq 0,$$

необходимо, чтобы второй интеграл в (3.6) был отличен от нуля, т.е.

$$\int_S \text{rot}_n \vec{E}^{\text{стор}} dS \neq 0. \quad (3.7)$$

Выясним физический смысл (3.7). Для этого вернемся по теореме Стокса к виду:

$$\int_S \text{rot}_n \vec{E}^{\text{стор}} dS = \oint_l \vec{E}^{\text{стор}} d\vec{l}.$$

Вспомним, что в теории электричества  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Поэтому  $\vec{E}^{\text{стор}}$  можно интерпретировать как силу, действующую на единичный положительный заряд со стороны некоторого поля – поля сторонних сил. Тогда интеграл

$$\oint_l \vec{E}^{\text{стор}} d\vec{l} = \varepsilon^{\text{стор}}, \quad (3.8)$$

где  $\varepsilon^{\text{стор}}$  – сторонняя ЭДС, т.е. работа, совершаемая сторонними силами по перемещению единичного положительного заряда вдоль контура  $l$ .

Рассмотрим теперь условия существования постоянного тока. Они уже фигурировали в пунктах 1 и 2. Условий всего три. Они действуют совместно. Нарушение хотя бы одного из трех приводит к тому, что постоянный ток по проводнику не пойдет. Итак, эти условия следующие:

1) Из уравнения непрерывности согласно (3.4)  $\text{div} \vec{j} = 0$ . Это условие означает практически, что цепь постоянного тока должна быть замкнутой.

2) Совместное рассмотрение (3.7) и (3.8) дает условие  $\varepsilon^{\text{стор}} \neq 0$ . Оно означает, что в цепи постоянного тока должен быть источник постоянного тока.

3) Из свойств безвихревого поля следует условие  $\vec{E} = -\text{grad} \varphi \neq 0$ . Это значит, что на внешнем участке цепи заряды движутся только в том случае, если  $\text{grad} \varphi \neq 0$ , т.е. есть падение напряжения.

4. Перейдем к нахождению потенциала и напряженности по сторонней напряженности. Используем первое условие  $\text{div} \vec{j} = 0$  и закон Ома (3.2):

$$\text{div} \vec{j} = 0, \quad \text{div} \lambda (\vec{E} + \vec{E}^{\text{стор}}) = 0, \quad \lambda \text{div} (\vec{E} + \vec{E}^{\text{стор}}) = 0, \quad \lambda \neq 0.$$

Откуда следует, что  $\text{div} \vec{E} = -\text{div} \vec{E}^{\text{стор}}$ . Подставляя вместо  $\vec{E} = -\text{grad} \varphi$ , согласно условию 3), получаем уравнение для  $\varphi$ :

$$\text{div}(-\text{grad} \varphi) = -\text{div} \vec{E}^{\text{стор}}.$$

Так как  $div grad \varphi \equiv \nabla^2 \varphi$ , то окончательно находим:

$$\nabla^2 \varphi = div \vec{E}^{стоп}. \quad (3.9)$$

Это тоже уравнение Пуассона. В электростатике мы уже находили решение уравнения Пуассона:

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (3.10)$$

в виде

$$\varphi = \int \frac{\rho dV}{\varepsilon r}.$$

Если правую часть (3.9) домножить и разделить на  $(-4\pi)$ , то уравнение (3.9) становится похожим на (3.10) и можно по аналогии написать его решение, т.е.:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= -4\pi \left( -\frac{1}{4\pi} div \vec{E}^{стоп} \right), \\ \varphi &= -\frac{1}{4\pi} \int \frac{div \vec{E}^{стоп} dV}{r}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Затем находим электрическую напряженность:

$$\vec{E} = -grad \varphi = \frac{1}{4\pi} grad \int \frac{div \vec{E}^{стоп} dV}{r}. \quad (3.12)$$

Формулы (3.11) и (3.12) и есть решение основной задачи теории электрического стационарного поля. Сравнение (3.11) и (3.10) дает для  $\rho$ :

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} div \vec{E}^{стоп}. \quad (3.13)$$

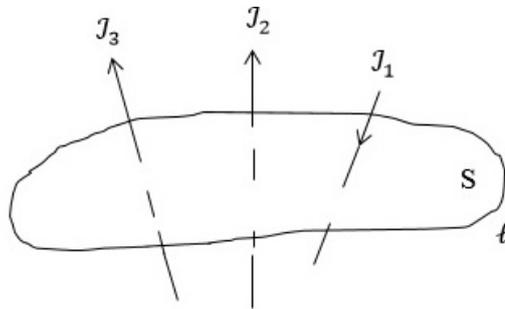
Условие  $div \vec{E} = -div \vec{E}^{стоп}$  означает, что на внутреннем участке цепи, т.е. внутри источника тока линии вектора  $\vec{E}^{стоп}$  направлены против линий  $\vec{E}$ . Заряды на внутреннем участке цепи движутся под действием  $\vec{E}^{стоп}$  против вектора  $\vec{E}$ .

**§ 18. Основные уравнения магнитостатики.  
Вихревой характер магнитного поля.  
Циркуляция магнитной напряженности**

Основные уравнения, описывающие магнитостатическое поле:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \vec{B} &= \mu \vec{H}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Уравнения показывают, что магнитостатическое поле – вихревое, имеет замкнутые силовые линии. Они замыкаются вокруг проводника, по которому течет постоянный ток. Вычислим циркуляцию магнитной напряженности по контуру  $l$ , охватывающему поверхность  $S$ , которая пронизывается несколькими проводниками с током (рис. 28).



**Рис. 28. Поверхность  $S$ , пронизываемая тремя проводниками**

При вычислении циркуляции используем теорему Стокса, а затем первое уравнение Максвелла системы (3.14).  $\sum J_k$  вычисляется как алгебраическая сумма сил токов, которым приписываются разные знаки в зависимости от направления тока:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot}_n \vec{H} dS = \frac{4\pi}{c} \int_S j_n dS = \frac{4\pi}{c} J = \frac{4\pi}{c} \sum_k J_k.$$

Итак,

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S j_n dS = \frac{4\pi}{c} J = \frac{4\pi}{c} \sum_k J_k. \quad (3.15)$$

Выражение (3.15) показывает, что в общем  $\oint_l \vec{H} d\vec{l} \neq 0$ , если  $\int_s j_n dS \neq 0$ , или  $\mathcal{J} \neq 0$ , или  $\sum_k \mathcal{J}_k \neq 0$ . В этом принципиальное отличие магнитного поля от электростатического, для которого всегда  $\int_l \vec{E} d\vec{l} = 0$ , так как  $\text{rot} \vec{E} = 0$ . Полученный результат (3.15) иногда называют законом полного тока. Он позволяет очень просто решать многие задачи магнитостатики (см. приложение V).

## § 19. Вектор-потенциал магнитного поля.

### Градиентная или калибровочная инвариантность поля.

#### Калибровка вектор-потенциала

Магнитное поле – вихревое, т.е.  $\text{rot} \vec{H} \neq 0$ . Поэтому нельзя по аналогии с электростатикой вводить скалярный магнитный потенциал. Однако можно поступить иначе. Третье уравнение Максвелла  $\text{div} \vec{B} = 0$  удовлетворяется согласно тождеству векторного анализа  $\text{div} \text{rot} \vec{a} \equiv 0$ , если выбрать:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}. \quad (3.16)$$

Вектор  $\vec{A}$  называется векторным потенциалом или просто вектор-потенциалом. Вектор-потенциал  $\vec{A}$  в некоторой точке, так же как и скалярный потенциал  $\phi$ , определен неоднозначно. Но эта неоднозначность не влияет на значение вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  в данной точке. В самом деле, пусть в точке  $M$  имеются два вектор – потенциала  $\vec{A}$  и  $\vec{A}_1$ . Направлены они в разные стороны, имеют разную длину (см. рис. 29), т.е.  $\vec{A} \neq \vec{A}_1$ .

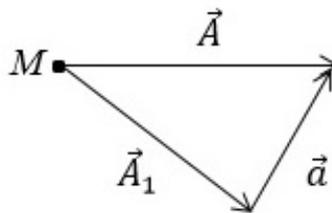


Рис. 29. Разные вектор-потенциалы в точке  $M$

Из рис. 29 видно, что  $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{a}$ . Пусть  $\vec{a} = \text{grad} f$ , тогда:  
 $\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \text{rot}(\vec{A}_1 + \vec{a}) = \text{rot}(\vec{A}_1 + \text{grad} f) = \text{rot} \vec{A}_1 + \text{rot} \text{grad} f = \text{rot} \vec{A}_1 = \vec{B}_1.$

Здесь использовалось тождество векторного анализа  $rot grad f \equiv 0$ .

Итак, мы получили, что  $\vec{B} = \vec{B}_1$  при  $\vec{A} \neq \vec{A}_1$ . Аналогичный результат получится и при  $\vec{A} = \vec{A}_1 - grad f$ .

Это свойство поля называется градиентной или калибровочной инвариантностью. Оно означает, что вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  инвариантен (неизменен) относительно градиентного преобразования вектор-потенциала. Неоднозначность вектор-потенциала также явилась предметом дискуссии, как и неоднозначность  $\varphi$ .

Градиентная или калибровочная инвариантность поля позволяет налагать на вектор-потенциал дополнительное условие, называемое условием калибровки или просто калибровкой вектор-потенциала.

В магнитостатике эта калибровка имеет вид:

$$div \vec{A} = 0. \quad (3.17)$$

Покажем, что такое условие возможно, т.е. можно подобрать такой вектор-потенциал  $\vec{A}$ , чтобы удовлетворялось условие (3.17).

Пусть нам «попался» в данной точке такой  $\vec{A}_1$ , у которого  $div \vec{A}_1 \neq 0$ . Выберем

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + grad f \quad (3.18)$$

и найдем:

$$div \vec{A} = div(\vec{A}_1 + grad f) = div \vec{A}_1 + div grad f = div \vec{A}_1 + \nabla^2 f,$$

где использовалось тождество векторного анализа  $div grad f \equiv \nabla^2 f$ .

Но поскольку требуется, чтобы  $div \vec{A} = 0$ , то получаем  $div \vec{A}_1 + \nabla^2 f = 0$ .

Отсюда получается уравнение Пуассона для неизвестной функции  $f$ :

$$\nabla^2 f = -div \vec{A}_1.$$

Решение этого уравнения дает искомую функцию:

$$f = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{div \vec{A}_1}{r} dV.$$

При этом значение магнитной индукции в данной точке остается неизменным.

Калибровка вектор – потенциала существенно упрощает дифференциальные уравнения для  $\vec{A}$ , приводя их к стандартной форме.

## § 20. Дифференциальные уравнения для вектор-потенциала, их общие решения

Рассмотрим однородную среду ( $\mu = \text{const}$ ). Умножим первое уравнение Максвелла системы (3.14) на  $\mu$ :

$$\mu \text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \mu \vec{j} \quad (3.19)$$

и преобразуем с учетом (3.16) правую часть:

$$\mu \text{rot} \vec{H} = \text{rot}(\mu \vec{H}) = \text{rot} \vec{B} = \text{rot} \text{rot} \vec{A}.$$

Согласно тождеству векторного анализа

$$\text{rot} \text{rot} \vec{a} \equiv \text{grad} \text{div} \vec{a} - \nabla^2 \vec{a}$$

Тогда получаем, что

$$\mu \text{rot} \vec{H} = \text{grad} \text{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}.$$

Подставляем это выражение в уравнение (3.19):

$$\text{grad} \text{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \mu \vec{j}.$$

Данное уравнение можно упростить, выбрав такой  $\vec{A}$ , чтобы  $\text{div} \vec{A} = 0$ . Тогда получаем более простое уравнение:

$$\nabla^2 \vec{A} = -4\pi \frac{\mu \vec{j}}{c}. \quad (3.20)$$

Это тоже уравнение Пуассона, только для векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{j}$ . Покажем, как можно найти его решение.

Уравнение (3.20) на самом деле не одно, а три – для проекций  $A_x, A_y, A_z$  и соответственно  $j_x, j_y, j_z$ . Запишем эти уравнения:

$$\nabla^2 A_x = -4\pi \frac{\mu j_x}{c},$$

$$\nabla^2 A_y = -4\pi \frac{\mu j_y}{c},$$

$$\nabla^2 A_z = -4\pi \frac{\mu j_z}{c}.$$

Это уравнения Пуассона, такие же, как в электростатике для скаляра  $\varphi$ . Поэтому можем сразу написать решение:

$$A_x = \int_v \frac{\mu j_x}{cr} dV, \quad (3.21a)$$

$$A_y = \int_v \frac{\mu j_y}{cr} dV, \quad (3.21б)$$

$$A_z = \int_v \frac{\mu j_z}{cr} dV. \quad (3.21в)$$

Умножая левую и правую части на  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  соответственно и складывая, получаем:

$$\vec{A} = \int_v \frac{\mu \vec{j}}{cr} dV. \quad (3.22)$$

Это и есть искомое решение уравнения (3.20).

Напишем теперь решение 2-й задачи в общем виде:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \text{rot} \int_v \frac{\mu \vec{j}}{cr} dV. \quad (3.23)$$

## § 21. Закон Био–Савара–Лапласа для объемных и линейных токов

Сначала рассмотрим случай объемного тока. Для этого используем (3.23). Учтём, что ротор берется по координатам точек наблюдения, а интегрирование проводится по точкам источника. Тогда можно внести  $\text{rot}_a$  под знак интеграла:

$$\vec{B} = \text{rot}_a \vec{A} = \text{rot}_a \int_{V_q} \frac{\mu \vec{j}_q}{cr_{aq}} dV_q = \frac{\mu}{c} \int_{V_q} \text{rot}_a \left( \frac{\vec{j}_q}{r_{aq}} \right) dV_q.$$

Преобразуем подынтегральное выражение, используя тождество векторного анализа:

$$\text{rot}(\varphi \vec{a}) \equiv \varphi \text{rot} \vec{a} + [\text{grad} \varphi \cdot \vec{a}].$$

Полагаем:

$$\varphi \equiv \frac{1}{r_{aq}}, \vec{a} \equiv \vec{j}_q.$$

Тогда

$$\text{rot}_a \left( \frac{\vec{j}_q}{r_{aq}} \right) = \frac{1}{r_{aq}} \text{rot} \vec{j}_q + \left[ \text{grad}_a \left( \frac{1}{r_{aq}} \right) \vec{j}_q \right]. \quad (3.25)$$

Поскольку плотность тока  $\vec{j}_q$  в проводнике не зависит от координат точки наблюдения, то в первом члене (3.25)  $\text{rot}_a \vec{j}_q = 0$ . Остается преобразовать второй член. Из векторного анализа известно, что

$$\text{grad}_a \left( \frac{1}{r_{aq}} \right) = -\frac{\vec{r}_{aq}}{r_{aq}^3} \equiv -\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Тогда

$$\text{rot}_a \left( \frac{\vec{j}_q}{r_{aq}} \right) = \left[ -\frac{\vec{r}}{r^3} \vec{j} \right] = \frac{[\vec{j} \cdot \vec{r}]}{r^3}.$$

Подставив этот результат в (3.24), окончательно получим:

$$\vec{B} = \frac{\mu}{c} \int_V \frac{[\vec{j} \cdot \vec{r}]}{r^3} dV \quad (3.26)$$

и

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \int_V \frac{[\vec{j} \cdot \vec{r}]}{r^3} dV. \quad (3.27)$$

По формулам (3.26) и (3.27) можно вычислять  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  как вне, так и внутри проводника, по которому течет ток. Это и есть закон Био–Савара–Лапласа для объемного тока. Она имеет более общий характер, нежели закон для линейного тока, который мы получим ниже.

Перейдем к написанию закона Био–Савара–Лапласа для линейного тока. Понятие «линейный ток» такая же абстракция, как понятие «точечный заряд». Можно считать линейным ток, текущий по проводнику, размеры поперечного сечения которого намного меньше расстояния до точки наблюдения. Переход от объемного тока к линейному и наоборот осуществляется заменой:

$$\vec{j}dV \rightleftharpoons \mathcal{J}d\vec{l}.$$

Покажем это. Выберем участок проводника (элемент проводника) длиной  $d\vec{l}$ , причем  $d\vec{l}$  совпадает по направлению с  $\vec{j}$  (см. рис. 30):

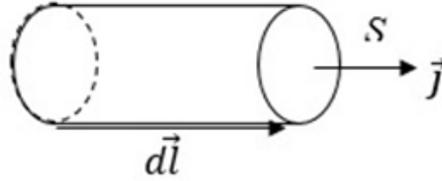


Рис. 30. Элемент проводника, по которому течет ток  $\vec{j}$

Записываем:

$$jdV = jSdl = \mathcal{J}dl, \text{ так как } \mathcal{J} = jS.$$

Поскольку  $\vec{j}$  и  $d\vec{l}$  совпадают по направлению, можно записать:

$$\vec{j}dV = \mathcal{J}d\vec{l}. \quad (3.28)$$

Подставляем (3.28) в (3.26) и учитываем, что вместо интеграла по объему теперь надо брать интеграл по всей замкнутой цепи:

$$\vec{B} = \frac{\mu}{c} \int_v \frac{[\vec{j}dV\vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu}{c} \oint_l \frac{[\mathcal{J}d\vec{l}\vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu\mathcal{J}}{c} \oint_l \frac{[d\vec{l}\vec{r}]}{r^3}.$$

При этом использовалось свойство цепи постоянного тока – сила тока  $\mathcal{J}$  во всей цепи одинакова.

Итак,

$$\vec{B} = \frac{\mu\mathcal{J}}{c} \oint_l \frac{[d\vec{l}\vec{r}]}{r^3}, \quad (3.29)$$

$$\vec{H} = \frac{\mathcal{J}}{c} \oint_l \frac{[d\vec{l} \cdot \vec{r}]}{r^3}. \quad (3.30)$$

Это и есть закон Био–Савара–Лапласа для линейных токов. Применять его можно только для расчета поля вне проводников.

Полученные формулы (3.29) и (3.30) для линейного тока являются обоснованием правила буравчика. Вместо вращения буравчика надо просто применять правило векторного произведения для  $[\vec{dl} \cdot \vec{r}]$ . Оно и определяет направление вектора  $\vec{B}$ . Рассмотрим рисунок 31.

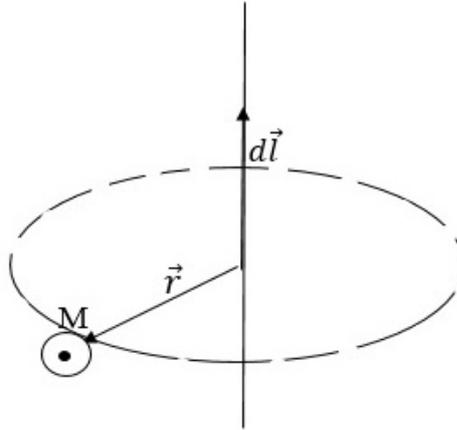


Рис. 31. Определение направления вектора  $\vec{B}$

Ток по проводнику течет вверх, значит вектор  $\vec{dl}$  направлен вверх. Вектор  $\vec{r}$  направлен от проводника в точку М, в которой мы определяем вектор  $\vec{B}$ . Поворачиваем вектор  $\vec{dl}$  на  $\vec{r}$  так, чтобы увидеть поворот против часовой стрелки. Рисунок 31 показывает, что в точке М вектор направлен к нам, перпендикулярно плоскости листа. Как известно, это направление изображается так:  $\odot$ .

## § 22. Разложение вектор-потенциала тока на больших расстояниях в магнитном дипольном приближении. Магнитный момент тока. Магнитомеханическое отношение

На больших расстояниях можно ток считать линейным. Разложим вектор-потенциал, ограничиваясь линейным, то есть дипольным приближением.

Сначала запишем вектор-потенциал для объемного тока, затем перейдем к линейному току, проведя замену  $\vec{j}dV = Jd\vec{l}$ . Для простоты положим  $\mu = 1$ :

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j} dV}{r} = \frac{J}{c} \oint \frac{d\vec{l}}{r}. \quad (3.31)$$

В этой формуле  $r$  – расстояние между элементом тока  $d\vec{l}$  и точкой наблюдения. Используем метод, развитый в §11. Но переобозначим  $r \rightarrow |\vec{R} - \vec{r}|$ ,  $d\vec{l} \equiv d\vec{r}$ . Теперь  $\vec{R}$  – расстояние до точки наблюдения от выбранного начала отсчета,  $\vec{r}$  – расстояние элемента тока от этой же точки. Тогда при  $r \ll R$  можно записать:

$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|} = \frac{1}{R} - \vec{r} \nabla \left( \frac{1}{R} \right) + \dots, \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \equiv \text{grad} \left( \frac{1}{R} \right).$$

Ограничимся только линейным по  $\vec{r}$  приближением и запишем вектор-потенциал, сразу разбивая на два интеграла:

$$\vec{A} = \frac{J}{cR} \oint d\vec{r} - \frac{J}{c} \oint \vec{r} \nabla \left( \frac{1}{R} \right) d\vec{r}. \quad (3.32)$$

Учтём, что

$$\oint d\vec{r} = 0,$$

так как цепь замкнута. Тогда остается:

$$\vec{A} = -\frac{J}{c} \oint \left( \vec{r} \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \right) d\vec{r}. \quad (3.33)$$

Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\begin{aligned} d\vec{r} \left( \vec{r} \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \right) &= \frac{1}{2} \left\{ d\vec{r} \left( \vec{r} \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \right) + \vec{r} \left( d\vec{r} \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \right) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ d\vec{r} \left( \vec{r} \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \right) - \vec{r} \left( d\vec{r} \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} d \left\{ \vec{r} \left( \vec{r} \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \right) \right\} - \frac{1}{2} \left[ \nabla \left( \frac{1}{R} \right) [\vec{r} d\vec{r}] \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

Первый член – полный дифференциал – получен из первой фигурной скобки. Второй член – двойное векторное произведение – получен из второй фигурной скобки. Таким образом,

$$d\vec{r} \left( \vec{r} \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \right) = \frac{1}{2} d \left\{ \vec{r} \left( \vec{r} \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \right) \right\} - \frac{1}{2} \left[ \nabla \left( \frac{1}{R} \right) [\vec{r} d\vec{r}] \right]. \quad (3.35)$$

Подставляя (3.35) в (3.33), получаем следующее выражение для  $\vec{A}$ , которое удобно представить в виде двух интегралов:

$$\vec{A} = -\frac{J}{2c} \oint d \left\{ \vec{r} \left( \vec{r} \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \right) \right\} - \frac{J}{2c} \oint \left[ [\vec{r} d\vec{r}] \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \right]. \quad (3.36)$$

Первый интеграл от полного дифференциала опять обращается в нуль. Остается второй интеграл. Используем свойство векторного произведения:

$$\sum_k [\vec{a}_k \vec{c}] = \left[ \left( \sum_k \vec{a}_k \right) \vec{c} \right].$$

Вместо суммы запишем интеграл и получим:

$$\frac{J}{2c} \oint \left[ [\vec{r} d\vec{r}] \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \right] = \left[ \left( \frac{J}{2c} \oint [\vec{r} d\vec{r}] \right) \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \right].$$

Введем обозначение:

$$\vec{M} = \frac{J}{2c} \oint [\vec{r} d\vec{r}], \quad (3.37)$$

где  $\vec{M}$  – магнитный момент тока. Тогда вектор – потенциал равен:

$$\vec{A} = - \left[ \vec{M} \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \right].$$

Учтем, что

$$\nabla \left( \frac{1}{R} \right) \equiv \text{grad} \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{\vec{R}}{R^3},$$

тогда окончательно получим

$$\vec{A} = \frac{[\vec{M} \vec{R}]}{R^3}. \quad (3.38)$$

При этом в выражении для  $\vec{M}$

$$\oint \frac{1}{2} [\vec{r} d\vec{r}] = \vec{S} = S \vec{n},$$

где  $S = \pi r^2$  – площадь, обтекаемая током (см. рис. 32).

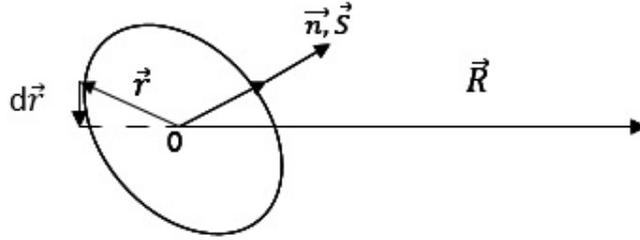


Рис. 32. Замкнутый линейный ток

Тогда получим следующую формулу для магнитного момента тока:

$$\vec{M} = \frac{1}{c} \mathcal{J} \vec{S}, \quad (3.39)$$

что согласуется с гипотезой Ампера.

Для объемного тока, введя замену  $\vec{j} dV = \mathcal{J} d\vec{l}$ , получаем:

$$\vec{M} = \frac{1}{2c} \int [\vec{r} \vec{j}] dV. \quad (3.40)$$

Вектор магнитной индукции согласно (3.16) имеет вид

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \text{rot} \frac{[\vec{M} \vec{R}]}{R^3}.$$

Преобразование  $\text{rot} \vec{A}$  проведено в Приложении V.4. В итоге получаем:

$$\vec{B} = \frac{3(\vec{M} \vec{R}) \vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{M}}{R^3}. \quad (3.41)$$

Сравнивая формулу (3.41) для  $\vec{B}$  и формулу (2.63) для  $\vec{E}$ , мы видим, что они имеют сходную структуру, эти два вектора одинаково выражаются через дипольные моменты – магнитный и электрический, соответственно. Это означает, что на больших расстояниях картины полей одинаковы. Но только на больших расстояниях. На малых расстояниях силовые линии вектора  $\vec{B}$  замкнуты, а для вектора  $\vec{E}$  поля диполя – начинаются и заканчиваются на соответствующих электрических зарядах.

Отметим также, что скалярный потенциал образуется из скалярного произведения  $(\vec{P} \vec{R})$ , а вектор – потенциал из векторного произведения  $[\vec{M} \vec{R}]$ . Но эти потенциалы в линейном приближении одинаково зависят от расстояния как  $\sim \frac{1}{R^2}$ .

Найдем связь между магнитным моментом и механическим моментом. Для простоты рассмотрим движение одной заряженной частицы по некоторой орбите (см. рис. 33).

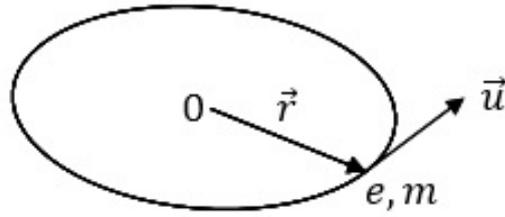


Рис. 33. Движение заряженной частицы по орбите

Здесь  $\vec{r}$  – радиус орбиты,  $\vec{u}$  – скорость движения частицы,  $m$  – масса частицы  $e$  – заряд частицы.

В классической механике момент количества движения частицы определяет перенос массы частицы со скоростью  $\vec{u}$  и равен:

$$\vec{K} = [\vec{r}m\vec{u}]. \quad (3.42)$$

Магнитный момент для одной частицы можно записать так:

$$\vec{M} = \frac{1}{2c} e[\vec{r}\vec{u}]. \quad (3.42)$$

Выразим из (3.42) векторное произведение  $[\vec{r}\vec{u}] = \vec{K}/m$  и подставим в (3.43). Тогда получим:

$$\vec{M} = \frac{e}{2mc} \vec{K} = \gamma \vec{K}, \quad (3.44)$$

где  $\gamma = \frac{e}{2mc}$  – магнитомеханическое отношение, то есть отношение магнитного момента к механическому, равно

$$\frac{M}{K} = \gamma = \frac{e}{2mc}. \quad (3.45)$$

Эта связь магнитного и механического момента зависит, как видно из (3.45), от знака заряда и его величины, а также от массы частицы. Эта связь обуславливает известные из курса общей физики гиромангнитные эффекты. Например, для электрона вследствие того, что его заряд отрицателен, магнитный момент направлен противоположно механическому:  $\vec{M} \uparrow \downarrow \vec{K}$ . Это обуславливает определенные магнитные свойства вещества.

## § 23. Магнетики в магнитном поле

### План

- I. Намагничивание магнетиков. Вектор намагничения.
- II. Современная классификация магнетиков.

I. Все вещества, помещенные в магнитное поле, намагничиваются. Намагничивание вещества зависит от его природы. В макроскопической электродинамике намагничивание характеризуется вектором намагничения или намагничивания  $\vec{M}$ . Рассмотрим, как вводится это понятие. Пусть под действием внешнего магнитного поля  $\vec{H} \neq 0$  элемент объёма вещества  $dV$  намагничивается, т.е. приобретает магнитный момент  $d\vec{\mu}$ , равный

$$d\vec{\mu} = \vec{M} dV. \quad (3.46)$$

Тогда можно определить  $\vec{M}$  как

$$\vec{M} = \frac{d\vec{\mu}}{dV}. \quad (3.47)$$

Если магнитные моменты частиц вещества распределены дискретно, тогда вектор  $\vec{M}$  определяется следующим образом:

$$\vec{M} = \frac{\sum_k \vec{\mu}_k}{V}. \quad (3.48)$$

Формулы (3.47) и (3.48) показывают, что вектор  $\vec{M}$  есть средний магнитный момент единицы объёма вещества. Это и есть вектор намагничения  $\vec{M}$ . Из опытов известно, что намагничение вещества пропорционально приложенному полю, т.е.

$$\vec{M} = \chi \vec{H}. \quad (3.49)$$

Здесь  $\chi$  – магнитная восприимчивость вещества, которая может иметь как положительное, так и отрицательное значения. По значению магнитной восприимчивости Фарадей все вещества разбил на три группы:

- если  $\chi > 0$ , но  $\chi \ll 1$ , то такое вещество – парамагнетик;
- если  $\chi > 0$ , но  $\chi \gg 1$ , то такое вещество – ферромагнетик;
- если  $\chi < 0$ , то такое вещество – диамагнетик.

Необходимо отметить, что эта классификация является устаревшей, так как не учитывает многообразия магнетиков, обнаруженных в настоящее время. К тому же эта классификация основана на феноменологической величине  $\chi$ , определяемой из опыта, и не учитывает микроструктуру вещества.

II. Современная классификация магнетиков исходит из внутренней природы вещества. В ее основу положено понятие магнитного порядка. Магнитный порядок – это определенная взаимная ориентация друг по отношению к другу магнитных моментов атомов, молекул, ионов или электронов. Используя это понятие, разобьем все магнетики на две большие группы:

1. Магнитонеупорядоченные.

2. Магнитоупорядоченные.

К 1-й группе относятся вещества, у которых в отсутствие внешнего магнитного поля нет магнитного порядка. Ко 2-й относятся вещества, у которых в отсутствие внешнего магнитного поля имеется определённый магнитный порядок. Рассмотрим подробнее каждую группу.

1. Магнитонеупорядоченные вещества делятся на две группы: диамагнетики и парамагнетики.

Диамагнетики. Это вещества, частицы которых (атомы, молекулы, ионы) в отсутствие внешнего магнитного поля не имеют магнитных моментов. Понятно, что и никакого магнитного порядка в этих веществах быть не может, если  $\vec{H} = 0$ . Классическими диамагнетиками являются инертные газы (He, Ne, Ar, Kr, Xe), органические соединения, вода, висмут графит, сурьма, ионы типа  $F^-$ ,  $Cl^- \dots$  и  $Li^+$ ,  $Na^+ \dots$ . Это обширная группа веществ.

Парамагнетики. Это вещества, частицы которых в отсутствие внешнего магнитного поля имеют готовые магнитные моменты  $\vec{\mu}$ . Но эти моменты распределены хаотично и нет определенного магнитного порядка. К парамагнетикам относятся:

а) все атомы и молекулы, имеющие нечетное число электронов, поскольку в этом случае полный спин системы, определяющий магнитный момент атома или молекулы, не равен нулю. Это, например, атомы натрия, газообразная окись азота NO, органические свободные радикалы;

б) все свободные атомы и ионы с незаполненной внутренней оболочкой – элементы переходных групп, изоэлектронные ионы, содержащие эти элементы, редкие земли, актиниды;

в) некоторые смешанные соединения, включая молекулярный кислород и органические бирадикалы;

г) металлы;

д) все вещества 2-й группы выше критической температуры.

2. Магнитоупорядоченные вещества. В настоящее время известно много различных видов магнитного порядка, которые обнаруживаются с помощью метода магнитной нейтронографии. Вещества 2-й группы можно разделить на следующие виды:

а) Ферромагнетики. Имеют самопроизвольный магнитный момент, т.е. имеют магнитный момент в отсутствие внешнего магнитного поля. Он обусловлен параллельным упорядочением магнитных моментов атомов внутри домена (рис. 34).

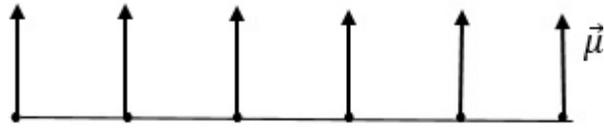


Рис. 34. Ферромагнитный порядок

При нагревании выше критической температуры  $T_c$ , называемой точкой Кюри, магнитный порядок разрушается и самопроизвольная намагниченность исчезает. К ферромагнетикам относятся триады переходных элементов Fe, Co, Ni, а также различные сплавы на их основе.

б) Антиферромагнетики. Имеют антипараллельное упорядочение магнитных моментов соседних атомов в отсутствие внешнего магнитного поля.

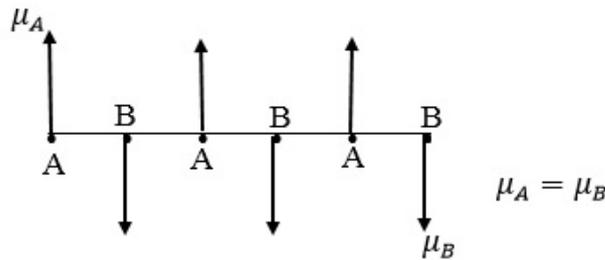


Рис. 35. Антиферромагнитный порядок

Вследствие антипараллельной ориентации магнитные моменты компенсируют друг друга. Выше критической температуры, называемой точкой Нееля, антиферромагнитный порядок разрушается. К антиферромагнетикам относятся элементы Cr, Mn, а также многочисленные их соли и окислы.

в) Ферримагнетики. Имеют так же, как и антиферромагнетики, антипараллельное упорядочение. Однако магнитные моменты ближайших соседей по величине различны и поэтому не компенсируют друг друга. Так что эти вещества похожи и на ферромагнетики, и на антиферромагнетики. (рис. 36).

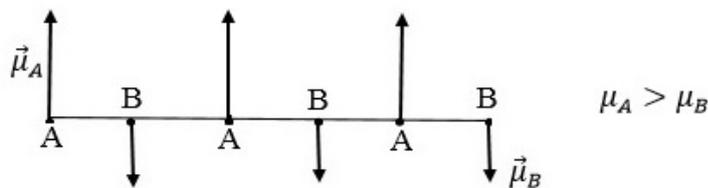


Рис. 36. Ферримагнитный порядок

Иначе ферримагнетики называют ферритами по названию феррита  $FeO \cdot Fe_2 O_3$ . В общем к ферритам относятся порошкообразные соединения типа  $MO \cdot Fe_2 O_3$ , где М –

двухвалентный металл. Для ферритов характерна точка Кюри, выше которой магнитный порядок исчезает. В настоящее время ферриты нашли широкое применение в технике.

Эти три вида веществ вместе называются коллинеарными магнетиками.

г) Неколлинеарные магнетики. Сложное неколлинеарное упорядочение обнаружено в редкоземельных элементах: спиральная (геликоидальная) или зонтичная (циклоидальная) магнитные структуры. В ферромагнитной области ниже точки  $\theta_1$  магнитные моменты лежат в базисных плоскостях и параллельны друг другу (см. рис. 37 а) В антиферромагнитном состоянии в области температур между точками  $\theta_1$  и  $\theta_2$  результирующий момент каждой базисной плоскости повернут на некоторый угол  $\alpha_0$ , но отношение к направлению момента соседней базисной плоскости (см. рис. 37 б). Это антиферромагнитный геликоид (спираль). Такие структуры наблюдаются в диспрозии, гольмии, тербии. В гольмии ниже точки  $\theta_1$  в ферромагнитном состоянии имеется составляющая магнитного момента вдоль гексагональной оси. Составляющая магнитного момента в базисной плоскости упорядочивается геликоидально с углом  $\alpha_0$ , т.е. «крутится» от одной базисной плоскости к другой и не дает результирующего магнитного момента (см. рис. 36 в). Еще более сложная структура наблюдается в эрбии в антиферромагнитной области (см. рис. 36 г). Это циклоидальное или зонтичное упорядочение. При этом величина и направление составляющей магнитного момента вдоль гексагональной оси  $C$  периодически меняются с переходом от слоя к слою по синусоиде («синусоидальная» структура). Геликоидальные магнитные структуры наблюдаются не только в редкоземельных элементах. Они были обнаружены в сплаве  $MnAu_2$ , двуокиси марганца  $MnO_2$ , в некоторых составах сплава  $M_{2-x}Cr_xSb$ , эрбиевом феррите – гранате, хромите марганца, соединении  $MnJ_2$  и т.д.

Объяснение природы магнитного упорядочения дается на основе квантовой механики и не рассматривается в курсе электродинамики.

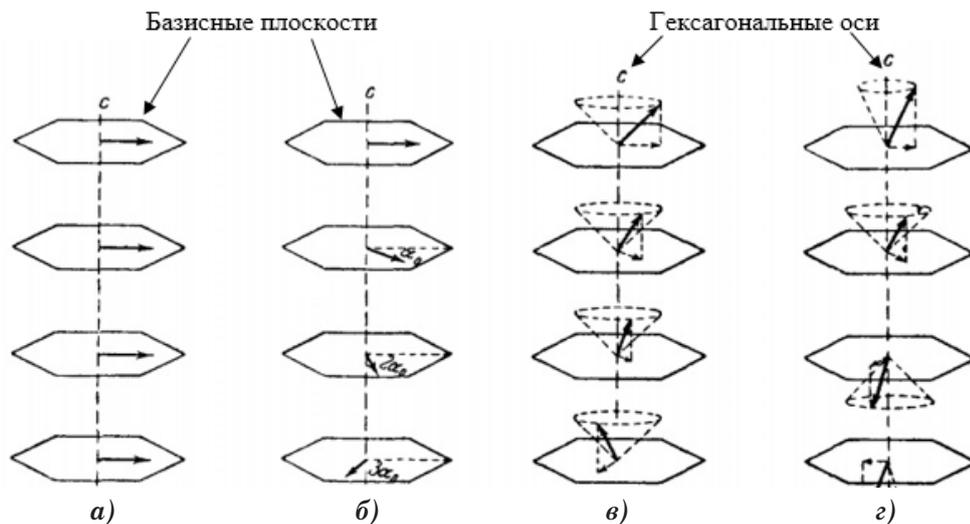


Рис. 37. Магнитные структуры редкоземельных элементов

- а) ферромагнитная структура диспрозия – коллинеарное упорядочение;
- б) антиферромагнитная структура диспрозия, гольмия, тербия – антиферромагнитный геликоид;
- в) ферромагнитная структура гольмия и эрбия – ферромагнитный геликоид;
- г) антиферромагнитная структура эрбия – циклоидальное упорядочение.

Необходимо отметить, что указанная классификация является упрощенной. Эту классификацию учитель физики может давать школьникам, не обсуждая тонкости неколлинеарного упорядочения. Особое внимание необходимо обратить на свойства ферромагнетиков и ферритов, имеющих широкое применение в технике.

В курсе «Электронная теория вещества» («Физика твердого тела») [15,16] будет рассмотрена природа упорядочения и основные свойства диа-, пара-, ферро- и антиферромагнетиков.

## § 24. Связь вектора намагничивания с плотностью молекулярных токов

Первое научное объяснение магнитных свойств вещества было дано Ампером. Ампер выдвинул гипотезу: в веществах существуют микроскопические (молекулярные) замкнутые токи, которые обладают соответствующим магнитным моментом. Под действием внешнего магнитного поля эти магнитные моменты определенным образом ориентируются и вещество намагничивается, т.е. появляется магнитный момент единицы объема вещества. Подробнее с расчетами по гипотезе Ампера можно ознакомиться по книге И.Е. Тамма «Основы теории электричества». Нам в данной теме достаточно учесть наличие молекулярных токов в веществе и установить их связь с вектором намагничивания. Применим метод, аналогичный рассмотрению вопроса о связи вектора поляризации диэлектриков с плотностью связанных зарядов в электростатике.

Рассмотрим вектор-потенциал при наличии магнетиков. Из решения уравнения Пауссона для вектор-потенциала следует:

$$\vec{A} = \int_V \frac{\mu \vec{j}}{cr} dV, \quad (3.50)$$

где  $\mu$  – магнитная проницаемость вещества. Однако вектор-потенциал можно представить и другим образом, а именно, в виде суммы двух членов:

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{A}_{\text{доб.}}, \quad (3.51)$$

где

$$\vec{A}_0 = \int_V \frac{\vec{j}}{cr} dV,$$

$\vec{A}_0$  – вектор-потенциал тока, создающего магнитное поле в вакууме;  $\vec{A}_{\text{доб}}$  – вектор-потенциал магнитного поля, обусловленного намагничиванием вещества. По аналогии с  $\vec{A}_0$ ,  $\vec{A}_{\text{доб}}$  можно записать в виде:

$$\vec{A}_{\text{доб}} = \int_V \frac{\vec{J}_{\text{молек.}}}{cr} dV, \quad (3.52)$$

где  $\vec{J}_{\text{молек.}}$  – объемная плотность молекулярных токов согласно гипотезе Ампера. С другой стороны,  $\vec{A}_{\text{доб}}$  можно записать через вектор намагничивания, используя формулу для вектор-потенциала системы движущихся зарядов или токов. Под действием внешнего магнитного поля элемент объема вещества приобретает магнитный момент  $d\vec{\mu} = \vec{M}dV$ , которому соответствует вектор-потенциал

$$\vec{A}_{(dV)} = \frac{[d\vec{\mu} \cdot \vec{r}]}{r^3} = \frac{[\vec{M} \vec{r}]dV}{r^3}. \quad (3.53)$$

Проинтегрировав (3.53) по всему объему вещества, получим добавочный вектор-потенциал, выраженный через вектор намагничивания  $\vec{M}$ :

$$\vec{A}_{\text{доб}} = \int_V \frac{[\vec{M} \vec{r}]dV}{r^3}. \quad (3.54)$$

Просто так сравнивать формулы (3.52) и (3.54) нельзя, так как знаменатели содержат  $r$  в различной степени. Поэтому сначала преобразуем подынтегральное выражение в (3.54):

$$\frac{[\vec{M} \vec{r}]}{r^3} = \left[ \vec{M} \frac{\vec{r}}{r^3} \right] = \left[ \vec{M} \text{grad}_q \left( \frac{1}{r} \right) \right] = - \left[ \text{grad}_q \left( \frac{1}{r} \right) \vec{M} \right], \quad (3.55)$$

где учтено, что  $\frac{\vec{r}}{r^3} = \text{grad}_q \left( \frac{1}{r} \right)$  – градиент от  $\frac{1}{r}$  по точке источника. В дальнейших формулах индекс  $q$  опускаем. В векторном анализе есть тождество:

$$\text{rot}(\varphi \vec{a}) \equiv \varphi \text{rot} \vec{a} + [\text{grad} \varphi \cdot \vec{a}]. \quad (3.56)$$

Полагая  $\varphi = \frac{1}{r}$ ,  $\vec{a} = \vec{M}$ , применяем тождество:

$$\text{rot} \left( \frac{1}{r} \vec{M} \right) = \frac{1}{r} \text{rot} \vec{M} + \left[ \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{M} \right]. \quad (3.57)$$

Из (3.57) находим, что

$$\left[ \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) \vec{M} \right] = \text{rot} \left( \frac{\vec{M}}{r} \right) - \frac{1}{r} \text{rot} \vec{M}.$$

Тогда, учитывая знак минус перед  $\left[\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{M}\right]$ , получим вместо (3.55):

$$\frac{[\vec{M}\vec{r}]}{r^3} = \frac{1}{r} \text{rot } \vec{M} - \text{rot}\left(\frac{\vec{M}}{r}\right). \quad (3.58)$$

Подставляем (3.58) в формулу для добавочного вектор-потенциала (3.54) и сразу разбиваем выражение на два интеграла:

$$\vec{A}_{\text{доб}} = \int_V \frac{1}{r} \text{rot } \vec{M} dV - \int_V \text{rot}\left(\frac{\vec{M}}{r}\right) dV. \quad (3.59)$$

Докажем вспомогательную теорему:

$$\int_V \text{rot } \vec{a} dV = \oint_S [\vec{n} \vec{a}] dS, \quad (3.60)$$

где  $\vec{n}$  – вектор нормали к элементу поверхности  $dS$ .

Для доказательства умножим скалярно интеграл  $\int_V \text{rot } \vec{a} dV$  на постоянный вектор  $\vec{c}$  и внесем вектор  $\vec{c}$  под знак интеграла:

$$\vec{c} \int_V \text{rot } \vec{a} dV = \int_V \vec{c} \text{rot } \vec{a} dV. \quad (3.61)$$

Для преобразования подынтегрального выражения, содержащегося в правой части (3.61), используем тождество векторного анализа:

$$\text{div}[\vec{a} \cdot \vec{c}] \equiv \vec{c} \cdot \text{rot } \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot } \vec{c}.$$

Но  $\vec{c} = \overline{\text{const}}$  (постоянный вектор), следовательно  $\text{rot } \vec{c} = 0$ , и тогда

$$\vec{c} \cdot \text{rot } \vec{a} = \text{div}[\vec{a} \cdot \vec{c}] \quad (3.62)$$

Подставляем этот результат в интеграл (3.61), а затем к вектору  $[\vec{a} \cdot \vec{c}]$  применяем известную в векторном анализе теорему Гаусса:

$$\int_V \vec{c} \cdot \text{rot } \vec{a} dV = \int_V \text{div}[\vec{a} \cdot \vec{c}] dV = \oint_S [\vec{a} \cdot \vec{c}]_n dS = \oint_S [\vec{a} \cdot \vec{c}] \cdot \vec{n} dS.$$

Сделаем циклическую перестановку векторов:  $[\vec{a} \cdot \vec{c}] \cdot \vec{n} = \vec{c}[\vec{n}\vec{a}]$  и подставим в интеграл:

$$\int_V \vec{c} \cdot \text{rot } \vec{a} dV = \oint_S \vec{c}[\vec{n}\vec{a}] dS. \quad (3.63)$$

Тогда приравниваем (3.61) и (3.63):

$$\vec{c} \int_V \operatorname{rot} \vec{a} dV = \vec{c} \oint_S [\vec{n} \vec{a}] dS.$$

Поскольку  $\vec{c}$  – постоянный и произвольный вектор, то равенство выполняется, если равны интегралы:

$$\int_V \operatorname{rot} \vec{a} dV = \oint_S [\vec{n} \vec{a}] dS,$$

что и требовалось доказать. (При ответе на этот вопрос студенту не надо доказывать данную теорему, а сразу применять ее.)

Применим доказанную теорему ко второму интегралу в (3.59). Тогда

$$\int_V \operatorname{rot} \left( \frac{\vec{M}}{r} \right) dV = \oint_S \left[ \vec{n} \frac{\vec{M}}{r} \right] dS = \oint_S \left[ \frac{\vec{n} \vec{M}}{r} \right] dS.$$

Рассмотрим два случая.

а) Во всем пространстве, занятом веществом, нет поверхностей разрыва вектора  $\vec{M}$ . Тогда интеграл по поверхности  $S$ , ограничивающей рассматриваемый объем  $V$ , можно заменить интегралом по поверхности  $S_0$ , охватывающей полное поле, т.е. по такой поверхности, на которой  $\vec{M} = 0$ .

Следовательно, весь интеграл обращается в нуль (аналогичный метод применяется в электростатике). Тогда:

$$\vec{A}_{\text{доб}} = \int_V \frac{\operatorname{rot} \vec{M}}{r} dV. \quad (3.65)$$

Сравнивая (3.65) и (3.52), получаем:

$$\vec{j}_{\text{молек.}} = c \cdot \operatorname{rot} \vec{M}. \quad (3.66)$$

Формула (3.66) связывает объёмную плотность молекулярных токов  $\vec{j}_{\text{молек.}}$  с вектором намагничивания  $\vec{M}$ .

б) Имеется одна поверхность разрыва вектора  $\vec{M}$ , т.е. поверхность, на которой  $\vec{M}_1 \neq \vec{M}_2$ . Применим метод электростатики. Окружаем поверхность разрыва  $S_{\text{разр.}}$  поверхностью  $S'$ , на которой вектор  $\vec{M}$  непрерывен. Поверхность  $S'$  достаточно близко подходит к поверхности  $S_{\text{разр.}}$ . При этом  $S' \cong S_1 + S_2 + S_{\text{бок.}}$ , где  $S_1$  – поверхность в I-й среде,  $\vec{n}_1$  – нормаль к элементу поверхности  $S_1$ ,  $\vec{n}_2$  – нормаль к элементу поверхности  $S_2$ ;  $\vec{n}$  – нормаль к поверхности разрыва (см. рис. 38). На внешней поверхности  $S_{\text{внеш.}}$  вектор  $\vec{M}$  непрерывен, как и во всем остальном пространстве.

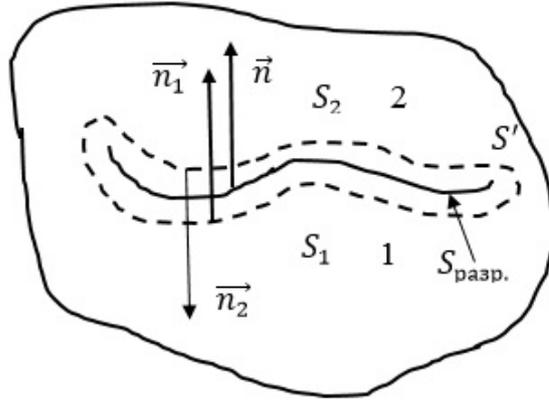


Рис. 38. Поверхности в окрестности  $\vec{n}$

Тогда (3.64) можно представить в виде суммы интегралов по поверхностям  $S_{\text{внеш.}}$  и  $S'$ :

$$\int_V \text{rot} \left( \frac{\vec{M}}{r} \right) dV = \int_{S_{\text{внеш.}}} \frac{[\vec{n}\vec{M}]}{r} dS + \int_{S'} \frac{[\vec{n}\vec{M}]}{r} dS. \quad (3.67)$$

Первый интеграл – по внешней поверхности заменяем, как и в случае а), интегралом по поверхности, охватывающей полное поле, при этом  $\vec{M} = 0$ . Тогда первый интеграл обращается в нуль. Вместо (3.67) имеем:

$$\oint_{S'} \frac{[\vec{n}\vec{M}]}{r} dS \cong \oint_{S_1} \frac{[\vec{n}_1\vec{M}_1]}{r} dS + \oint_{S_2} \frac{[\vec{n}_2\vec{M}_2]}{r} dS. \quad (3.68)$$

Потоком через боковую поверхность можно пренебречь, так как он очень мал вследствие близости поверхности  $S'$  к  $S_{\text{разр.}}$ . Устремляем поверхности  $S_1 \rightarrow S_{\text{разр.}}$  и  $S_2 = S_{\text{разр.}}$  и учитываем, что  $\vec{n}_1 = \vec{n}$  и  $\vec{n}_2 = -\vec{n}$ . Тогда

$$\oint_{S'} \frac{[\vec{n}\vec{M}]}{r} dS \cong \int_{S_{\text{разр.}}} \frac{[\vec{n}\vec{M}_1] - [\vec{n}\vec{M}_2]}{r} dS = \int_S \frac{[\vec{n}(\vec{M}_1 - \vec{M}_2)]}{r} dS. \\ (S_{\text{разр.}} = S).$$

Подставляем (3.68) вместо второго интеграла в (3.59), учитывая знак « $\leftrightarrow$ », и получаем:

$$\vec{A}_{\text{доб}} = \int_V \frac{\text{rot}\vec{M}dV}{r} + \int_S \frac{[\vec{n}(\vec{M}_2 - \vec{M}_1)]}{r} dS. \quad (3.69)$$

Для сравнения в формулу (3.52) для  $\vec{A}_{\text{доб.}}$  добавим интеграл по поверхности, по которой течет поверхностный ток с линейной плотностью  $\vec{i}_{\text{молек.}}$ :

$$\vec{A}_{\text{доб.}} = \int_V \frac{\vec{J}_{\text{молек.}} dV}{cr} + \int_S \frac{\vec{i}_{\text{молек.}} dS}{cr}. \quad (3.70)$$

Сравниваем в (3.71) и (3.70) по отдельности интегралы по объему и по поверхности. Из сравнения получаем:

$$\vec{J}_{\text{молек.}} = c \text{rot } \vec{M}, \quad (3.71a)$$

$$\vec{i}_{\text{молек.}} = c [\vec{n} (\vec{M}_2 - \vec{M}_1)]. \quad (3.71б)$$

Формулы (3.71) устанавливают искомую связь вектора намагничивания  $\vec{M}$  с поверхностной плотностью объемного молекулярного тока  $\vec{J}_{\text{молек.}}$  и с линейной плотностью поверхностного молекулярного тока  $\vec{i}_{\text{молек.}}$ .

В качестве примера рассмотрим согласно И.Е. Тамму цилиндрический магнит, равномерно намагниченный по всему объему параллельно своей оси. Так как  $\vec{M} = \text{const}$ , то  $\text{rot } \vec{M} = 0$  и согласно (3.71a)  $\vec{J}_{\text{молек.}} = 0$ . На основаниях цилиндра поверхностных токов тоже не будет, так как нормаль к основаниям параллельна  $\vec{M}$  и  $[\vec{n} \vec{M}] = 0$ . При этом мы предполагаем, что внешняя среда не намагничена, т.е.  $\vec{M}_2 = 0$ , а  $\vec{M}_1 = \vec{M}$ .

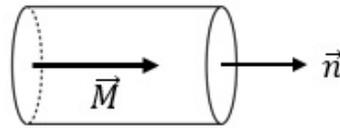


Рис. 39. Вектор  $\vec{M}$

Поэтому плотность поверхностных токов по боковой поверхности не равна нулю и равна согласно (3.71 б):

$$i_{\text{молек.}} = c M.$$

Эти замкнутые круговые поверхностные токи составляют правовинтовую систему с  $\vec{M}$ . Таким образом, магнит эквивалентен цилиндрическому соленоидальному току ( $\vec{n}$  – число витков соленоида на единицу длины):

$$i = nJ = cM.$$

Образование поверхностных токов на границе магнетика можно объяснить следующим образом. Представим, что в магнетике имеются одинаковые молекулярные токи, текущие в одном направлении, например, против часовой стрелки. Внутри магнита смежные токи взаимно компенсируются и остаются только части, выходящие на поверхность. На поверхности они складываются в круговой ток, обтекающий магнит по окружности (см. рис. 40).

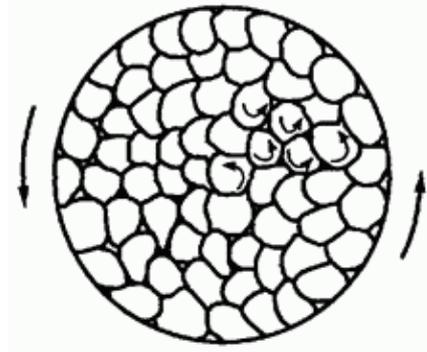


Рис. 40. Круговой ток на поверхности

## § 25. Энергия в магнитостатике

### План

- I. Энергия магнитного поля.
- II. Энергия объемного и линейного тока в магнитном поле.
- III. Энергия системы объемных и линейных токов. Коэффициенты индукции.
- IV. Магнитный поток системы токов.
- V. Энергия магнитного момента в магнитном поле. Энергия взаимодействия магнитных моментов.

I. Из теоремы Умова–Пойнтинга следует, что энергия магнитного поля

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V \vec{H} \vec{B} dV.$$

При этом подынтегральное выражение есть объемная плотность магнитной энергии:

$$w_M = \frac{1}{8\pi} \vec{H} \vec{B} = \frac{\mu}{8\pi} H^2 \geq 0. \quad (3.73)$$

Формула (3.72) означает, что энергия «размазана» по всему объему, занятому магнитным полем, при этом энергия всего поля всегда положительна.

II. Найдем теперь энергию токов в магнитном поле. Учитывая, что  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ , получим из (3.72):

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{A} dV. \quad (3.74)$$

Используем тождество векторного анализа:

$$\text{div}[\vec{a} \vec{b}] = \vec{b} \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \text{rot} \vec{b}.$$

Тогда

$$\text{div}[\vec{A} \vec{H}] = \vec{H} \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \text{rot} \vec{H},$$

откуда следует, что

$$\vec{H} \text{rot} \vec{A} = \vec{A} \text{rot} \vec{H} + \text{div}[\vec{A} \vec{H}].$$

Согласно I уравнению Максвелла в случае постоянного тока  $\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$ , поэтому

$$\vec{H} \text{rot} \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{A} \vec{j} + \text{div}[\vec{A} \vec{H}].$$

Подставим это выражение в (3.74), разбивая на два интеграла:

$$W = \frac{4\pi}{8\pi c} \int_V \vec{A} \vec{j} dV + \frac{1}{8\pi} \int_V \text{div}[\vec{A} \vec{H}] dV.$$

Рассмотрим второй интеграл в этой сумме, который можно преобразовать по теореме Остроградского–Гаусса к интегралу по замкнутой поверхности, если нет поверхностей разрыва  $\vec{A}$  и  $\vec{H}$ :

$$\int_V \text{div}[\vec{A} \vec{H}] dV = \oint_S [\vec{A} \vec{H}]_n dS.$$

Заменяя, как в электростатике, поверхность  $S$  на поверхность  $S_0$ , охватывающей полное поле, на которой  $\vec{H} = 0, \vec{A} = 0$ , получаем, что энергия равна:

$$W = \frac{1}{2c} \int_V \vec{A} \vec{j} dV. \quad (3.75)$$

Случай разрыва  $\vec{H}$  предоставляется рассмотреть самостоятельно.

Итак, получена энергия для объемного тока в магнитном поле. При этом согласно (3.75) магнитное поле «представлено» вектор – потенциалом  $\vec{A}$ , а ток – плотностью  $\vec{j}$ . Выражение (3.75) является менее общим по сравнению с (3.72), так как оно означает, что энергией обладают только те области пространства, в которых течет ток с плотностью  $\vec{j}$ .

Найдем теперь энергию линейного тока в магнитном поле, проведя замену  $\vec{j}dV = Jd\vec{l}$  в (3.75):

$$W = \frac{1}{2c} \int_V \vec{A} \vec{j} dV = \frac{1}{2c} \oint_l \vec{A} J d\vec{l} = \frac{J}{2c} \oint_l \vec{A} d\vec{l} = \frac{J}{2c} \int_S \text{rot}_n \vec{A} dS.$$

В последнем равенстве использована теорема Стокса. Затем продолжим преобразования:

$$W = \frac{J}{2c} \int_S \text{rot}_n \vec{A} dS = \frac{1}{2c} J \int_S B_n dS = \frac{1}{2c} J \Phi,$$

где

$$\Phi = \int_S B_n dS,$$

магнитный поток.

Итак, энергия линейного тока в магнитном поле определяется равенством

$$W = \frac{1}{2c} J \Phi. \quad (3.76)$$

Согласно (3.76) магнитное поле «представляет» магнитный поток  $\Phi$ , а ток – сила тока. Эта формула так же означает, что энергией обладают только те области пространства, в которых течет ток. В этом ее отличие от наиболее общей формулы (3.72).

III. Перейдем теперь к получению энергии системы токов. Сначала обобщим формулу (3.75) на случай одного тока  $\vec{j}_k$  в системе токов:

$$W_k = \frac{1}{2c} \int_{V_k} A_k \vec{j}_k dV_k.$$

Для вектор-потенциала  $A_k$  будем иметь

$$A_k = \sum_n \int_{V_n} \frac{\mu \vec{j}_n}{cr_{kn}} dV_n,$$

где  $r_{kn} = |\vec{r}_k - \vec{r}_n|$ . Подставим это выражение в энергию:

$$W_k = \frac{1}{2c^2} \sum_n \int_{V_k} \int_{V_n} \frac{\mu \vec{j}_k \vec{j}_n dV_k dV_n}{r_{kn}}.$$

Чтобы получить энергию системы токов, надо еще просуммировать по  $k$ :

$$W = \frac{1}{2c^2} \sum_k \sum_n \int_{V_k} \int_{V_n} \frac{\mu \vec{j}_k \vec{j}_n dV_k dV_n}{r_{kn}}.$$

Умножим и разделим это выражение на  $J_k J_n$  и получим:

$$W = \frac{1}{2c^2} \sum_k \sum_n \int_{V_k} \int_{V_n} \frac{\mu \vec{j}_k \vec{j}_n dV_k dV_n}{J_k J_n r_{kn}} J_k J_n.$$

В этом выражении выделим коэффициенты  $L_{kn}$ :

$$L_{kn} = \int_{V_k} \int_{V_n} \frac{\mu \vec{j}_k \vec{j}_n dV_k dV_n}{J_k J_n r_{kn}}. \quad (3.77)$$

Формула (3.77) показывает, что  $L_{kn}$  не зависит от пропускаемой силы тока  $J_k$  и  $J_n$ . Коэффициенты  $L_{kn}$  называются коэффициентами индукции. При  $k = n$  это коэффициенты самоиндукции, при  $k \neq n$  – коэффициенты взаимной индукции. В СИ единицей измерения этих коэффициентов является Генри, а в гауссовой системе – единица длины, см.

С учетом (3.77) энергия системы токов равна:

$$W = \frac{1}{2c^2} \sum_k \sum_n L_{kn} J_k J_n. \quad (3.78)$$

Коэффициенты индукции для объемных токов можно теоретически вычислять согласно (3.77) и (3.78), а также вычислять по результатам эксперимента, что будет показано ниже на примере системы двух токов.

Для системы линейных токов проведем замену

$$\vec{j}_k dV_k = J_k d\vec{l}_k, \quad \vec{j}_n dV_n = J_n d\vec{l}_n.$$

После подстановки в формулу для энергии получим:

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2c^2} \sum_k \sum_n \int_{V_k} \int_{V_n} \frac{\mu \vec{j}_k \vec{j}_n dV_k dV_n}{r_{kn}} = \frac{1}{2c^2} \sum_k \sum_n \mu \oint_{l_k} \oint_{l_n} \frac{J_k d\vec{l}_k J_n d\vec{l}_n}{r_{kn}} \\
&= \frac{1}{2c^2} \sum_k \sum_n \left( \mu \oint_{l_k} \oint_{l_n} \frac{d\vec{l}_k d\vec{l}_n}{r_{kn}} \right) J_k J_n = \frac{1}{2c^2} \sum_k \sum_n L_{kn} J_k J_n,
\end{aligned}$$

где введены коэффициенты индукции:

$$L_{kn} = \mu \oint_{l_k} \oint_{l_n} \frac{d\vec{l}_k d\vec{l}_n}{r_{kn}}. \quad (3.79)$$

Но по формуле (3.79) можно теоретически вычислять только коэффициенты взаимной индукции, т.е. при  $k \neq n$ . При  $k = n$  для коэффициентов самоиндукции  $r_{kn} = 0$  и  $L_{nn} \rightarrow \infty$ . Однако можно определять коэффициенты индукции из выражения для энергии. Видно, что и для объемных и для линейных токов формулы для энергии одинаковы.

Покажем на простом примере системы 2-х электрических цепей, как можно из экспериментов определять коэффициенты индукции. Согласно (3.78) получаем:

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2c^2} (L_{11} J_1^2 + L_{12} J_1 J_2 + L_{21} J_2 J_1 + L_{22} J_2^2) \\
&= \frac{1}{2c^2} (L_{11} J_1^2 + 2L_{12} J_1 J_2 + L_{22} J_2^2),
\end{aligned}$$

где  $L_{12} = L_{21}$  – коэффициенты взаимной индукции;

$L_{11}$  – коэффициент самоиндукции первой цепи;

$L_{22}$  – коэффициент самоиндукции второй цепи.

Рассмотрим три случая:

1. Отключим ток во второй цепи, т.е.  $J_2 = 0$ . Тогда энергия будет равна:

$$W = \frac{1}{2c^2} L_{11} J_1^2.$$

Измеряя силу тока  $J_1$  по амперметру, потребляемую энергию по ваттметру, находим вычислением  $L_{11}$ .

2. Отключим ток в первой цепи, т.е.  $J_1 = 0$ . Тогда энергия будет равна:

$$W = \frac{1}{2c^2} L_{22} J_2^2.$$

Проводя измерения, аналогично первому случаю, находим самоиндукцию второй цепи  $L_{22}$ .

3. Включаем токи в обеих цепях, т.е.  $J_1 \neq 0, J_2 \neq 0$ . Тогда энергия будет равна:

$$W = L_{11}J_1^2 + 2L_{12}J_1J_2 + L_{22}J_2^2.$$

Измеряя  $J_1, J_2$  и  $W$ , зная уже  $L_{11}$  и  $L_{22}$ , вычисляем коэффициент взаимной индукции  $L_{12}$ .

IV. Получим выражение для магнитного потока токов, используя (3.78) и обобщая (3.76):

$$W = \frac{1}{2c} \sum_k J_k \Phi_k = \frac{1}{2c^2} \sum_k \sum_n L_{kn} J_k J_n = \frac{1}{2} \sum_k J_k \left( \frac{1}{c} \sum_n L_{kn} J_n \right).$$

Тогда магнитный поток:

$$\Phi_k = \frac{1}{c} \sum_n L_{kn} J_n. \quad (3.80)$$

Это магнитный поток, пронизывающий  $k$ -тую цепь системы. Например, для системы двух цепей:

$$\Phi_1 = \frac{1}{c} (L_{11}J_1 + L_{12}J_2),$$

магнитный поток в первой цепи получается за счет явления самоиндукции в первой цепи с  $L_{11}$  и влияния второй цепи с  $L_{12}$ ;

$$\Phi_2 = \frac{1}{c} (L_{12}J_1 + L_{22}J_2),$$

аналогично магнитный поток во второй цепи получается за счет влияния первой цепи с  $L_{12}$  и самоиндукции  $L_{22}$  во второй цепи.

V. Энергию магнитного момента  $\vec{\mu}$  в магнитном поле можно записать по аналогии с энергией электрического диполя с моментом  $\vec{p}$  в электрическом поле:

$$W = -(\vec{\mu} \cdot \vec{H}) \quad (3.81)$$

(см., напр., учебник С.В. Измайлова [4], с. 89).

Поставляя вычисленное значение  $\vec{H}$  вместо  $\vec{E}$  для магнитного момента согласно (3.41), получаем энергию магнитного диполь – дипольного взаимодействия, по

форме аналогичную энергии электрического диполь – дипольного взаимодействия:

$$W = \frac{\vec{\mu}_1 \vec{\mu}_2}{R^3} - \frac{3(\vec{\mu}_1 \vec{R})(\vec{\mu}_2 \vec{R})}{R^5}. \quad (3.82)$$

Формулы (3.81) и (3.82) широко применяются в теории магнетизма вещества.

## § 26. Механические силы в магнитоэлектростатике

### План

- I. Сила Лоренца.
- II. Сила, действующая на ток в магнитном поле.
- III. Сила взаимодействия токов.

I. На заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле, действует сила Лоренца, равная

$$\vec{F} = \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{B}]. \quad (3.83)$$

Формула (3.83) означает, что сила действует перпендикулярно скорости частицы и поэтому не совершает работы по её перемещению. Однако движение частицы под действием силы Лоренца становится финитным. Действием силы Лоренца объясняются многие явления природы.

II. Найдем силу, действующую на ток в магнитном поле, используя (3.83) для элемента заряда  $dq = \rho dV$ :

$$d\vec{F} = \frac{\rho dV}{c} [\vec{v} \vec{B}] = \frac{1}{c} [\rho \vec{v} \vec{B}] dV = \frac{1}{c} [\vec{j} \vec{B}] dV.$$

Тогда сила равна:

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int_V [\vec{j} \vec{B}] dV. \quad (3.84)$$

Формула (3.84) показывает, что согласно свойству векторного произведения,  $\vec{F} \perp \vec{j}$  и  $\vec{F} \perp \vec{B}$ , и даёт обоснование правила левой руки.

Для линейного тока, проведя обычную замену  $\vec{j} dV = \mathcal{I} d\vec{l}$ , получаем:

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \oint_l [J d\vec{l} \cdot \vec{B}] = \frac{J}{c} \oint_l [d\vec{l} \cdot \vec{B}].$$

Итак,

$$\vec{F} = \frac{J}{c} \oint_l [d\vec{l} \cdot \vec{B}]. \quad (3.85)$$

III. Найдем силу взаимодействия проводников с токами.

Пусть два элемента тока  $J_1 d\vec{l}_1$  и  $J_2 d\vec{l}_2$  находятся на расстоянии  $\vec{R}_{12}$  ( $R_{12}$  идет от  $d\vec{l}_1$  к  $d\vec{l}_2$ ). Найдем силу их взаимодействия. Используем (3.85) для  $J_2 d\vec{l}_2$ :

$$d\vec{F}_{12} = \frac{J_2}{c} [d\vec{l}_2 \cdot \vec{B}_2].$$

Подставляем  $\vec{B}_2$  по закону Био–Савара–Лапласа от элемента  $J_1 d\vec{l}_1$ , тогда получим:

$$d\vec{F}_{12} = \frac{J_1 J_2}{c^2} [d\vec{l}_2 [d\vec{l}_1 \cdot \vec{R}_{12}]]. \quad (3.86)$$

Это сила, действующая на элемент тока  $J_2 d\vec{l}_2$  со стороны элемента  $J_1 d\vec{l}_1$ . Аналогично сила, действующая на элемент  $J_1 d\vec{l}_1$  со стороны элемента тока  $J_2 d\vec{l}_2$ , равна:

$$d\vec{F}_{21} = \frac{J_1 J_2}{c^2} [d\vec{l}_1 [d\vec{l}_2 \cdot \vec{R}_{21}]]. \quad (3.87)$$

Задание для самостоятельной работы

Рассмотреть три случая:

- 1) параллельные токи;
- 2) антипараллельные токи;
- 3) случай, когда, например,  $d\vec{l}_1$  направлен по  $\vec{R}_{12}$ , а  $d\vec{l}_2$  перпендикулярен  $\vec{R}_{12}$ .

Указание: использовать учебник И.Е.Тамма [18], § 43.

Отметим, что два первых случая объясняют экспериментально наблюдаемые эффекты притяжения и отталкивания параллельных и антипараллельных токов. В последнем случае имеет место нарушение третьего закона Ньютона.

## ГЛАВА IV. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

### § 27. Основные уравнения квазистационарного поля.

#### Условие квазистационарности

Квазистационарным называется электромагнитное поле, меняющееся достаточно медленно. Это, например, поле переменного тока промышленной частоты. Отметим, что область квазистационарных явлений имеет очень широкое применение в промышленности, технике, сельском хозяйстве, в быту. В этой главе будут рассмотрены только принципиальные вопросы теории.

Сначала получим условие квазистационарности. Квазистационарное поле характеризуется меняющимися во времени векторами поля. Это значит, что

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$$

и, кроме того,

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \neq 0.$$

Запишем 1-е уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Составим отношение

$$a = \frac{\frac{4\pi}{c} |\vec{j}|}{\frac{1}{c} \left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right|}. \quad (4.1)$$

Запишем закон Ома для некоторого проводника:

$$\vec{j} = \lambda \vec{E}, \quad |\vec{j}| = \lambda |\vec{E}|.$$

Далее находим:

$$\left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \vec{E} \right| = \varepsilon \left| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right|.$$

Переменное значение  $\vec{E}$  запишем в виде:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Тогда

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}, \quad \left| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right| = |i\omega \vec{E}| = \omega |\vec{E}|.$$

Подставим эти результаты в (4.1):

$$a = \frac{4\pi\lambda |\vec{E}|}{\varepsilon\omega |E|} = \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon\omega}.$$

Полагая  $\omega = 2\pi\nu$ , получим:

$$a = \frac{2\lambda}{\varepsilon\nu}. \quad (4.2)$$

В проводнике  $\varepsilon \sim 1$ . Частота промышленного тока  $\nu = 50 \text{ с}^{-1}$ . Электропроводность проводников  $\lambda \sim 10^{17}$ . Тогда

$$a \sim \frac{10^{17}}{50} \sim 10^{15}.$$

Это означает, что в области промышленной частоты в проводниках ток проводимости намного больше тока смещения и им можно пренебречь.

Итак,

$$|\vec{j}| \gg \left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right|.$$

Это и есть условие квазистационарности. В главе V будет получено ещё одно условие квазистационарности.

С учётом этого условия первое уравнение Максвелла можно записать в виде:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Тогда полная система уравнений Максвелла запишется так:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \\ \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \\ \text{div} \vec{B} = 0. \\ \text{div} \vec{D} = 4\pi\rho. \end{cases} \quad (4.3)$$

Система уравнений (4.3) показывает, что квазистационарное поле – вихревое, имеет замкнутые силовые линии и не распадается на независимые электрическое и магнитное поля.

## § 28. Потенциалы, их связь с векторами $\vec{B}$ и $\vec{E}$

Для характеристики квазистационарного поля можно вводить потенциалы — векторный потенциал  $\vec{A}$  и скалярный потенциал  $\varphi$ . Чтобы удовлетворялось тождественно третье уравнение Максвелла  $\text{div}\vec{B} = 0$  вводится вектор-потенциал  $\vec{A}$  так же, как в магнитостатике:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}. \quad (4.4)$$

Но вводить  $\varphi$  как в электростатике нельзя, так как  $\text{rot}\vec{E} \neq 0$ . Однако можно ввести потенциалы  $\vec{A}$  и  $\varphi$  так, чтобы удовлетворялось и второе уравнение Максвелла системы (4.3). Для этого в правую часть 2-го уравнения Максвелла вместо вектора  $\vec{B}$  поставим  $\text{rot}\vec{A}$  согласно (4.4):

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot}\vec{A}).$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot}\vec{A} = \text{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

то

$$\text{rot}\vec{E} = -\text{rot} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right),$$

или

$$\text{rot}\vec{E} + \text{rot} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

и

$$\text{rot} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Тогда можно использовать тождество векторного анализа  $\text{rot grad}\varphi \equiv 0$  и положить, что

$$\text{rot} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \pm \text{rot grad}\varphi,$$

т.е.

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \pm \text{grad}\varphi.$$

Для преемственности с электростатикой выберем знак минус:

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad}\varphi,$$

откуда получаем следующее выражение

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (4.5)$$

В случае электростатики или стационарного поля, когда  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$ , это соотношение переходит в  $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ , что было получено в предыдущих главах.

Потенциалы  $\vec{A}$  и  $\varphi$  так же, как в электростатике и магнитостатике, определены неоднозначно. Однако их неоднозначность не влияет на значения векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{E}$  в данной точке поля, т.е. векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{E}$  определяются однозначно. Это свойство, как уже отмечалось в главе III, называется градиентной или калибровочной инвариантностью. Доказательство этого свойства мы проведем в главе V «Переменное поле». Свойство градиентной или калибровочной инвариантности позволяет проводить калибровку потенциалов, т.е. налагать на них дополнительные условия, которые существенно упрощают дифференциальные уравнения, приводя их к стандартной форме.

## § 29. Дифференциальные уравнения для потенциалов, объёмной плотности зарядов, их общие решения

Получим дифференциальные уравнения для потенциалов в однородной среде.

1. Дифференциальное уравнение для вектор-потенциала.

Для получения дифференциального уравнения для  $\vec{A}$  умножим первое уравнение Максвелла системы (4.3) на  $\mu$ :

$$\mu \cdot \text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \mu \vec{j}.$$

Левая часть уравнения с учетом  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  и (4.4) преобразуется так:

$$\mu \cdot \text{rot} \vec{H} = \text{rot}(\mu \vec{H}) = \text{rot} \vec{B} = \text{rot} \text{rot} \vec{A} = \text{grad} \text{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}.$$

В последнем равенстве использовалось тождество векторного анализа. Тогда:

$$\text{grad} \text{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \mu \vec{j}.$$

Выберем калибровку  $div\vec{A} = 0$  и получим:

$$-\nabla^2\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\mu\vec{j},$$

или

$$\nabla^2\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\mu\vec{j}. \quad (4.6)$$

Формально уравнение (4.6) совпадает с аналогичным уравнением Пуассона для  $\vec{A}$  в магнитостатике. Поэтому решение уравнения (4.6) запишем в виде

$$\vec{A} = \int_v \frac{\mu\vec{j}}{cr} dV.$$

Однако для квазистационарного тока  $\vec{j} = \vec{j}(t)$ , тогда

$$\vec{A}(t) = \int_v \frac{\mu\vec{j}(t)dV}{cr}. \quad (4.7)$$

Это и есть искомое решение уравнения (4.6). Оно означает, что даже на расстоянии  $r$  от проводника вектор-потенциал меняется в такт, в той же фазе, что и плотность тока  $\vec{j}$  в проводнике. В главе V будет рассмотрен более общий случай и показана ограниченность решения (4.7).

## 2. Дифференциальное уравнение для $\varphi$ .

Используем 4-е уравнение Максвелла системы (4.3), уравнение связи, а также (4.5) и получаем:

$$\begin{aligned} div\vec{D} &= 4\pi\rho, \\ div\vec{D} &= div(\varepsilon\vec{E}) = \varepsilon div\left(-grad\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = -\varepsilon div grad\varphi - \frac{\varepsilon}{c} div\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ &= -\varepsilon\nabla^2\varphi - \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t} div\vec{A}. \end{aligned}$$

Полагая, как и в случае 1,  $div\vec{A} = 0$  что , получаем, что

$$-\varepsilon\nabla^2\varphi = 4\pi\rho.$$

Тогда

$$-\nabla^2\varphi = 4\pi\frac{\rho}{\varepsilon},$$

или

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (4.8)$$

Формально это уравнение Пуассона для  $\varphi$ . Однако, чтобы написать его решение, учтем, что  $\rho = \rho(t)$ . Тогда

$$\varphi(t) = \int_V \frac{\rho(t)}{\varepsilon r} dV. \quad (4.9)$$

Выражение (4.9) показывает, что так же, как и  $\vec{A}$ , скалярный потенциал  $\varphi$  в точке наблюдения меняется в такт, в одной фазе с изменением плотности заряда в источнике поля. Ограниченность этого решения будет обсуждена в главе V.

3. Дифференциальное уравнение для плотности зарядов и его решение.  
Сначала запишем уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}.$$

Поскольку в проводнике  $\vec{j} = \lambda \vec{E}$ , получаем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\lambda \vec{E}).$$

Для однородного проводника  $\lambda = \text{const}$  и  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\lambda \operatorname{div} \vec{E}$ .

Так как  $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho/\varepsilon$  согласно четвертому уравнению Максвелла для однородной среды, то

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} \rho.$$

Разделяя переменные, получим уравнение:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} dt.$$

Интегрирование дает:

$$\ln \rho = \ln a - \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} t.$$

После потенцирования получаем:

$$\rho = a e^{-\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} t}.$$

Постоянная интегрирования находится из условия, что при  $t = 0$  плотность электрического заряда  $\rho(t = 0) = \rho_0$ . Следовательно,  $a = \rho_0$ . Тогда получаем решение в виде:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} t}. \quad (4.10)$$

Формула (4.10) показывает, что объемная плотность заряда  $\rho$  в проводнике экспоненциально убывает со временем и при  $t \rightarrow \infty$   $\rho \rightarrow 0$ . Но ждать бесконечно долго не обязательно. Введем время релаксации  $\tau$ , полагая, что при  $t = \tau$

$$\rho(\tau) = \rho_0 e^{-1}.$$

Тогда согласно (4.10) получим:

$$\rho(\tau) = \rho_0 e^{-\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} \tau} = \rho_0 e^{-1}$$

что дает

$$\frac{4\pi\lambda\tau}{\varepsilon} = 1,$$

откуда

$$\tau = \frac{\varepsilon}{4\pi\lambda}.$$

Поскольку в проводнике  $\lambda \sim 10^{17}$ , то  $\tau \sim 10^{-17}$ . Следовательно, реальное время пропускания тока всегда много больше:  $t \gg \tau$  и можно считать, что  $\rho \rightarrow 0$ .

В дальнейшем будем считать, что в проводнике при пропускании тока  $\rho \rightarrow 0$  (см. рис. 41).

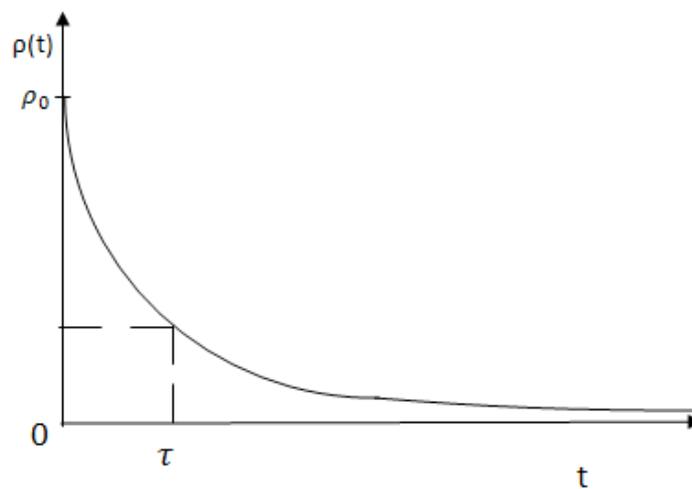


Рис. 41. График убывания плотности заряда в проводнике

### § 30. Скин-эффект. Элементарная теория скин-эффекта

Скин-эффект заключается в перераспределении переменного тока по сечению проводника. Постоянный ток в основном концентрируется в небольшом слое вблизи поверхности проводника. Этот слой называется скин-слоем. А эффект – скин-эффектом (в переводе с английского skin – это кожа).

Рассмотрим элементарную теорию скин-эффекта. Наша «сверхзадача» заключается в том, чтобы найти плотность тока  $\vec{j}(t, \vec{r})$ . Для этого достаточно найти  $\vec{E}(t, \vec{r})$  в проводнике как решение соответствующего дифференциального уравнения, а затем использовать закон Ома в дифференциальной форме  $\vec{j} = \lambda \vec{E}$ .

Итак, сначала напишем дифференциальное уравнение для  $\vec{E}$ . Для этого образуем ротор от второго уравнения Максвелла:

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{rot} \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right). \quad (4.11)$$

Но

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}.$$

Из 4-го уравнения Максвелла

$$\text{div } \vec{E} = \frac{4\pi\rho}{\epsilon},$$

но  $\rho \rightarrow 0$ , как показано в §29, поэтому  $\text{div } \vec{E} = 0$ , откуда следует, что

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}.$$

Преобразуем правую часть (4.11), считая  $\mu = \text{const}$  и используя 1-е уравнение Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{rot} \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}(\mu \vec{H}) = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H} \\ &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{4\pi}{c} \vec{j} \right) = -\frac{4\pi\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -\frac{4\pi\mu}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\lambda \vec{E}) = -\frac{4\pi\mu\lambda}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Тогда вместо (4.11) получаем уравнение:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{4\pi\mu\lambda}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4.12)$$

Решение (4.12) проведем для модели проводника. Вместо реального проводника, обычно очень длинного и цилиндрической формы, рассмотрим полубесконечную мо-

дель: проводник занимает все полубесконечное пространство  $z > 0$  (см. рис. 42). При этом плотность тока  $\vec{j}$  направлена так, как показано на рисунке. Поскольку поле меняется медленно, можно считать, что оно не зависит от  $x$  и  $y$ . Следовательно,  $\vec{j} = \vec{j}(t, z)$ .

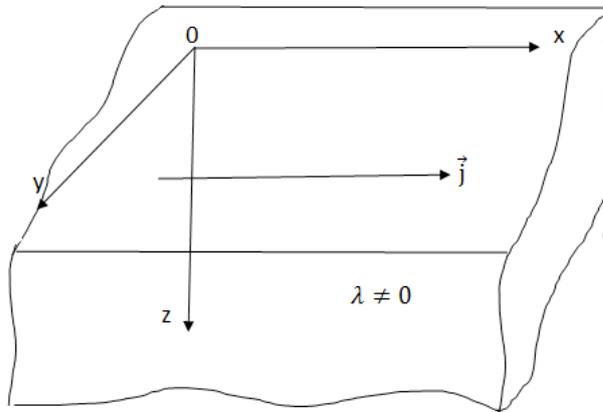


Рис. 42. Модель проводника

Выберем зависимость от  $t$  в виде

$$\vec{j} = \vec{j}(z)e^{i\omega t}$$

и

$$E(z, t) = E(z)e^{i\omega t} \quad (4.13)$$

Вместо уравнения (4.12) запишем уравнение для (4.13):

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{E}(z)e^{i\omega t} = \frac{4\pi\mu\lambda}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(z)e^{i\omega t}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} e^{i\omega t} &= i\omega e^{i\omega t}, \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} E(z)e^{i\omega t} &= e^{i\omega t} \frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2}, \end{aligned}$$

то сокращая на  $e^{i\omega t}$ , получаем уравнение для  $E(z)$  в виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E(z) = i \frac{4\pi\mu\lambda\omega}{c^2} E(z). \quad (4.14)$$

Выберем «затравочное» решение (4.14) в виде:

$$E(z) \sim e^{kz}.$$

Учитываем, что

$$\frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} e^{kz} = k^2 e^{kz}$$

и подставляем в (4.14):

$$k^2 e^{kz} = i \frac{4\pi\mu\lambda\omega}{c^2} e^{kz},$$

откуда получаем характеристическое уравнение для  $k^2$ :

$$k^2 = i \frac{4\pi\mu\lambda\omega}{c^2}.$$

Или

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{i \frac{4\pi\mu\lambda\omega}{c^2}}.$$

Выделяя действительную и комплексную части, получим:

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2\pi\mu\lambda\omega}{c^2}} \sqrt{2i} = \pm p(1+i), \quad (4.15)$$

где

$$p = \sqrt{\frac{2\pi\mu\lambda\omega}{c^2}}, \quad (4.16)$$

а  $\sqrt{2i} = 1+i$ , в чем можно убедиться, возведя в квадрат:

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i.$$

Тогда решение для  $E(z)$  получаем в виде двух решений:

$$E(z) = A_1 e^{k_1 z} + A_2 e^{k_2 z}, \quad (4.17)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  постоянные интегрирования. Рассмотрим эти решения. Пусть сначала

$$E(z) = A_1 e^{k_1 z},$$

где  $k_1 = p(1 + i)$ . Тогда

$$E(z) = A_1 e^{p(1+i)z} = A_1 e^{pz} e^{ipz},$$

причем  $e^{ipz}$  – гармоническая функция  $z$ , а  $A_1 e^{pz}$  при  $z \rightarrow \infty$  означает, что  $E(\infty) \rightarrow \infty$ , т.е. решение первого типа расходится. Но это «плохое» решение означает нарушение закона сохранения и превращения энергии. В самом деле,  $E(z) \rightarrow \infty$  дает плотность электрической энергии

$$W = \frac{\varepsilon}{8\pi} E^2(z) \rightarrow \infty.$$

Выходит, что в глубине проводника бесконечная энергия! А за счет чего? Ведь чтобы в проводнике шел ток, его надо выработать на электростанции. И вот конечное значение энергии, затраченной на выработку тока на электростанции, превращается якобы в бесконечную энергию тока в проводнике! Чтобы этого не происходило, т.е. нарушения закона сохранения и превращения энергии, выберем  $A_1 = 0$ . Тогда решение первого типа в (4.17) будет отсутствовать. Остается решение второго типа:

$$E(z) = A_2 e^{k_2 z},$$

где  $k_2 = -p(1 + i)$  и  $E(z) = A_2 e^{-pz} e^{-ipz}$ , причем  $e^{-ipz}$  – гармоническая функция от  $z$ , а вот  $A_2 e^{-pz}$  означает, что при  $z \rightarrow \infty$   $E \rightarrow 0$ . Это решение нам подходит, оно не приводит к нарушению закона сохранения и превращения энергии. Определим  $A_2$ , считая, что при  $z = 0$   $E(0) = E_0$ . Тогда  $A_2 = E_0$ . В итоге получаем:

$$E(z) = E_0 e^{-pz} e^{-ipz}.$$

Подставим результат в (4.13):

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-pz} e^{-ipz} e^{i\omega t} = \vec{E}_0 e^{-pz} e^{i(\omega t - pz)}.$$

Итак,

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-pz} e^{i(\omega t - pz)}, \quad (4.18)$$

$$\vec{j} = \lambda \vec{E}_0 e^{-pz} e^{i(\omega t - pz)}. \quad (4.19)$$

Решения (4.18) и (4.19) означают, что с увеличением  $z$ , т.е. по мере проникновения вглубь проводника поле  $\vec{E}$  и плотность тока  $\vec{j}$  убывают по экспоненциальному закону. График для амплитуды  $E_0 e^{-pz}$  представлен на рисунке 43.

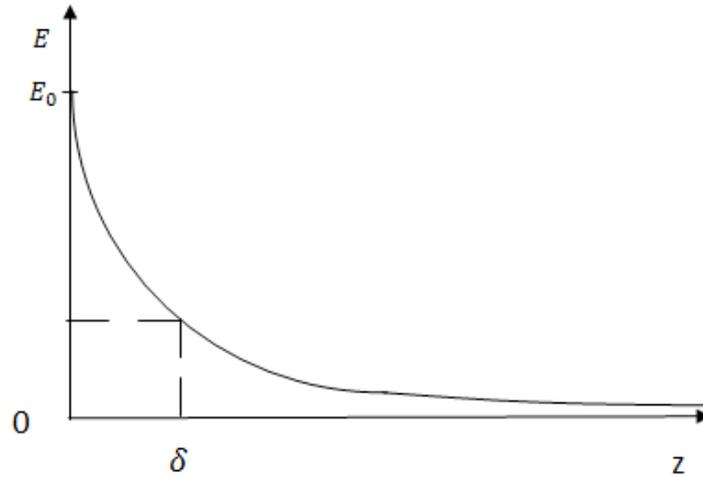


Рис. 43. График убывания поля

Таким образом, происходит перераспределение плотности тока по сечению проводника: у поверхности плотность тока максимальна, а в глубине убывает. Это и есть скин-эффект.

Введем понятие толщины скин-слоя  $\delta$ . Это такая величина  $z = \delta$ , на которой  $E(\delta)$  убывает в  $e$  раз по сравнению со значением  $E_0$  на поверхности проводника, т.е.

$$E(\delta) = E_0 e^{-1}.$$

С другой стороны,

$$E(\delta) = E_0 e^{-p\delta}.$$

Тогда из равенства

$$E_0 e^{-p\delta} = E_0 e^{-1}$$

получаем, что  $p\delta = 1$  и  $\delta = \frac{1}{p}$ . Учитывая (4.16), получаем:

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\lambda\omega}}. \quad (4.20)$$

Формула (4.20) показывает, что  $\delta \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$  и  $\delta \sim \frac{1}{\sqrt{\omega}}$ , т.е. чем «лучше» проводник, иначе, чем выше его электропроводность, тем «хуже» он проводит ток, т.е. тем меньше толщина скин-слоя, по которой идет ток. Так же получается, что с увеличением частоты

уменьшается толщина скин-слоя и наоборот, если  $\omega = 0$  – постоянный ток, то  $\delta \rightarrow \infty$  – ток течет по всему сечению проводника.

Оценим толщину скин-слоя для медного проводника, полагая, что для меди  $\lambda = 5 \cdot 10^{17}$ ,  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $\nu = 50 \text{ сек}^{-1}$ ,  $c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{с}}$ ,  $\mu \approx 1$ :

$$\delta = \frac{3 \cdot 10^{10}}{6,28\sqrt{50 \cdot 5 \cdot 10^{17}}} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{6,28 \cdot 5 \cdot 10^9} \sim 1 \text{ см.}$$

Итак, для медного проводника  $\delta = 1$  см. Оценка показывает, что для тонких проводников скин-эффектом можно пренебречь. Но для «толстого» кабеля необходимо его учитывать. В электротехнике в этом случае делают сердцевину кабеля из более дешевого алюминия, а оболочку порядка  $\delta$  – из дорогой меди.

В заключение отметим, что мы получили дифференциальные характеристики, т.е.  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$ , которые экспериментально, конечно, проверить нельзя. В следующем параграфе будут получены интегральные характеристики, которые можно проверить экспериментально.

### § 31. Скиновая проводимость. Нормальный и аномальный скин-эффект

Получим соотношения, которые можно проверить экспериментально. За основу расчетов возьмем результаты §30, а именно, формулы (4.18) и (4.19).

Запишем закон Джоуля-Ленца для количества теплоты, выделяемой в 1 сек.:

$$Q = J^2 R.$$

Поскольку ток протекает переменный, то необходимо учитывать средние за период значения  $\bar{Q}$  и  $\bar{J}^2$ . Тогда сопротивление запишется в виде

$$R = \frac{\bar{Q}}{\bar{J}^2}.$$

$R$  называется скиновым сопротивлением, обратная величина  $\Lambda = 1/R$  – скиновой проводимостью. Итак, скиновая проводимость равна:

$$\Lambda = \frac{\bar{J}^2}{\bar{Q}}. \tag{4.21}$$

Вычислим среднее за период значение  $\bar{Q}$ , выделяемое в проводнике на единицу поверхности, используя дифференциальную форму закона Джоуля-Ленца:

$$Q = \int_V \vec{j} \vec{E} dV = \lambda \int_V E^2 dV.$$

Элемент объема  $dV = S \cdot dz$ , но поскольку  $S = 1 \text{ см}^2$ , то  $dV = 1 \cdot dz = dz$ . В дальнейшем проводим интегрирование по  $z$ . Подставим вместо  $\vec{E}$  выражение (4.18) и получаем:

$$\bar{Q} = \lambda \int_0^{\infty} \overline{E^2} dz = \lambda E_0^2 \int_0^{\infty} e^{-2pz} \overline{\cos^2(\omega t - pz)} dz.$$

При вычислении измеряемых величин вместо комплексных берем только действительные части. Поскольку при  $z = 0$

$$\begin{aligned} \overline{\cos^2 \omega t} &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2T} \int_0^T (1 + \cos 2\omega t) dt \\ &= \frac{1}{2T} t \Big|_0^T + \frac{1}{2T \cdot 2\omega} \sin 2\omega t \Big|_0^T = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

тогда,

$$\bar{Q} = \frac{\lambda E_0^2}{2} \int_0^{\infty} e^{-2pz} dz = \frac{\lambda E_0^2}{2} \left( -\frac{1}{2p} e^{-2pz} \Big|_0^{\infty} \right) = \frac{\lambda E_0^2}{4p}.$$

Итак,

$$\bar{Q} = \frac{\lambda E_0^2}{4p}. \quad (4.22)$$

Вычислим интеграл

$$J = \int_S j_n dS = \int_0^{\infty} \lambda E dz = \lambda E_0 \int_0^{\infty} e^{-pz} \cos(\omega t - pz) dz = \lambda E_0 J_1,$$

где интеграл

$$J_1 = \int_0^{\infty} e^{-pz} \cos(\omega t - pz) dz$$

берем по частям:

$$\cos(\omega t - pz) = u, \quad du = p \sin(\omega t - pz) dz.$$

Тогда:

$$J_1 = -\frac{1}{p} e^{-pz} \cos(\omega t - pz) \Big|_0^\infty + \frac{1}{p} \cdot p \int_0^\infty e^{-pz} \sin(\omega t - pz) dz = \frac{1}{p} \cos \omega t + J_2.$$

Интеграл  $J_2$  тоже берем по частям:

$$J_2 = \int_0^\infty e^{-pz} \sin(\omega t - pz) dz,$$

$$\sin(\omega t - pz) = u, \quad du = -p \cos(\omega t - pz) dz,$$

$$e^{-pz} dz = dv, \quad v = -\frac{1}{p} e^{-pz}.$$

Получаем:

$$J_2 = -\frac{1}{p} e^{-pz} \sin(\omega t - pz) \Big|_0^\infty - \frac{1}{p} \cdot p \int_0^\infty e^{-pz} \cos(\omega t - pz) dz = \frac{1}{p} \sin \omega t - J_1.$$

Тогда:

$$J_1 = \frac{1}{p} (\cos \omega t + \sin \omega t) - J_1$$

$$2J_1 = \frac{1}{p} (\cos \omega t + \sin \omega t),$$

откуда следует, что

$$J_1 = \frac{1}{2p} (\cos \omega t + \sin \omega t).$$

Итак,

$$J = \frac{\lambda E_0}{2p} (\cos \omega t + \sin \omega t).$$

Далее находим:

$$\bar{j}^2 = \frac{\lambda^2 E_0^2}{4p^2} (\overline{\cos^2 \omega t} + \overline{\sin^2 \omega t}) + 2 \overline{\sin \omega t \cdot \cos \omega t} = \frac{\lambda^2 E_0^2}{4p^2}.$$

Итак,

$$\bar{j}^2 = \frac{\lambda^2 E_0^2}{4p^2}. \quad (4.23)$$

Тогда скиновая проводимость с учетом (4.22), (4.23) и (4.16):

$$\Lambda = \frac{\lambda^2 E_0^2 \cdot 4p}{4p^2 \lambda E_0^2} = \frac{\lambda}{p} = \frac{\lambda c}{\sqrt{2\pi\mu\lambda\omega}} = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\omega}} \sqrt{\lambda},$$

$$\Lambda = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\omega}} \sqrt{\lambda}. \quad (4.24)$$

Формула (4.24) показывает, что скиновая проводимость прямо пропорциональна  $\sqrt{\lambda}$ . Эта зависимость хорошо подтверждается для различных металлов при высоких температурах. Такой скин-эффект называется нормальным. Однако в области низких температур обнаруживается аномалия: скиновая проводимость становится постоянной. Такой скин-эффект называется аномальным. Нормальный скин-эффект обусловлен локальным законом Ома:

$$\vec{j} = \lambda \vec{E},$$

т.е. значение плотности тока  $\vec{j}$  в данной точке определяется значением вектора  $\vec{E}$  в этой же самой точке. Это связано с тем, что при высоких температурах длина свободного пробега электрона в металле мала, и электрон приходит в данную точку, «потеряв» информацию о напряженности  $\vec{E}$  в других точках поля. При низких температурах необходимо учитывать, что длина свободного пробега достаточно велика и тогда закон Ома имеет нелокальный характер. Учет нелокального характера закона Ома весьма сложная процедура и не входит в программу нашего курса. За деталями расчета отсылаем читателя к курсу А.А. Власова «Макроскопическая электродинамика» [2].

## § 32. Магнитная кумуляция

В 1952 году А.Д. Сахаров предложил идею магнитной кумуляции (МК) для получения сверхсильного магнитного поля (Сахаров А.Д. Воспоминания // Наука и жизнь. 1990. № 1 – С.12–23.)

Основная физическая идея очень проста: генерация сверхсильного магнитного поля происходит при быстром, за очень короткий промежуток времени, пластическом обжатии проводящих оболочек, охватывающих магнитное поле. Такое быстрое

обжигание можно осуществить с помощью направленного – кумулятивного – взрыва. Впоследствии были сконструированы специальные взрывные устройства, в которых сходящаяся ударная волна производила пластическое сжатие проводящего цилиндра, охватывающего магнитный поток.

Открытое явление – МК – основано на действии закона электромагнитной индукции Фарадея.

Рассмотрим цилиндрический медный проводник радиуса  $r$ , длиной  $\ell$ , с толщиной стенки  $d$  (рис. 44).

По закону электромагнитной индукции

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (4.25)$$

Введем магнитный поток  $\Phi$ :

$$\Phi = \frac{1}{c} L\mathcal{J}, \quad (4.26)$$

где  $L$  – самоиндукция проводника,  $\mathcal{J}$  – сила тока.

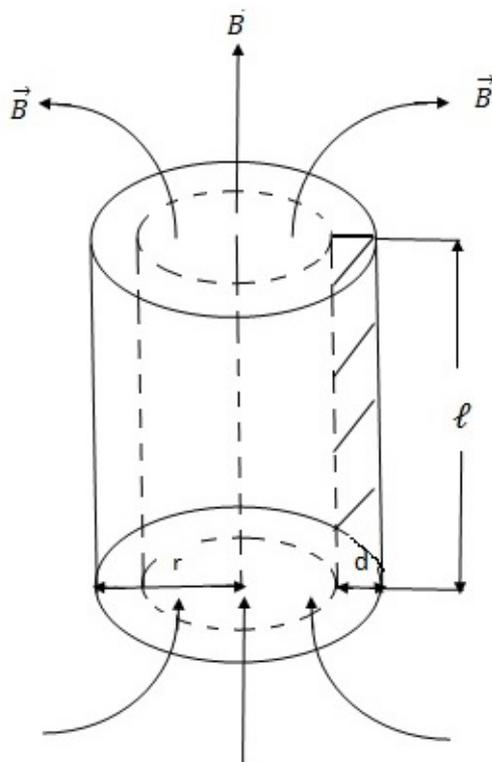


Рис. 44. Проводящий цилиндр

Учтем, что

$$\mathcal{E}^{\text{инд}} = RJ.$$

Тогда

$$\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (LJ) = -RJ. \quad (4.27)$$

Умножим и разделим левую часть (4.27) на  $L$  и перепишем это выражение, выделяя в левой и правой части  $(LJ)$ :

$$\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (LJ) = -\frac{R}{L} (LJ).$$

Отсюда следует:

$$\frac{d(LJ)}{(LJ)} = -\frac{Rc^2}{L} dt.$$

Интегрируя, получим

$$\int \frac{d(LJ)}{(LJ)} = - \int \frac{Rc^2}{L} dt,$$

$$\ln(LJ) - \ln A = - \int \frac{Rc^2}{L} dt = -\frac{t}{\tau},$$

где введено  $\tau$  – эффективное время релаксации контура:

$$\tau = t \left[ c^2 \int \frac{R(t)}{L(t)} dt \right]^{-1}. \quad (4.28)$$

Далее имеем:

$$\ln \left( \frac{LJ}{A} \right) = -\frac{t}{\tau},$$

и

$$LJ = Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

где

$$A = L_0 J_0.$$

Окончательно получаем:

$$LJ = L_0 J_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (4.29)$$

Предположим, что  $t \ll \tau$ , тогда  $e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow 1$  и  $LJ \simeq L_0 J_0 = \text{const}$ , соответственно магнитный поток согласно (4.26) также  $\Phi = \text{const}$ , т.е.

$$\Phi = \Phi_0.$$

Полагая

$$\Phi = \int_S B_n dS \simeq BS,$$

получаем:

$$BS = B_0 S_0,$$

откуда следует, что

$$B = \frac{B_0 S_0}{S}. \quad (4.30)$$

Это означает, что если за очень малое время  $t \ll \tau$  уменьшить площадь  $S$ , то магнитная индукция  $B$  резко возрастет! Сахаров приводит значение  $B = 25 \cdot 10^6$  гаусс. Это сверхсильное магнитное поле.

Необходимо оценить время  $\tau$ . Для этого сначала рассчитаем сопротивление  $R$ , оказываемое цилиндром вихревым токам. Пусть  $\vec{B}$  «растет» вверх вдоль образующей цилиндра, т.е.  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial z} > 0$  и направлено вверх, соответственно  $\text{rot} \vec{E}$  «смотрит» вниз и вихревой ток идет в плоскости основания цилиндра. Тогда

$$R = \rho \frac{\ell_1}{S},$$

где  $\ell_1 = 2\pi r$ ,  $S = \ell d$ ,  $S$  – площадь заштрихованной части на рисунке 44.

Получаем сопротивление, введя электропроводность  $\lambda = \frac{1}{\rho}$ :

$$\begin{aligned} R &= \rho \frac{2\pi r}{\ell d} = \frac{2\pi r}{\lambda \ell d}, \\ R &= \frac{2\pi r}{\lambda \ell d}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Найдем индуктивность  $L$  цилиндра. Используем выражение

$$\begin{aligned} \oint \vec{H} d\vec{\ell} &= H\ell = B\ell, \\ B &= H, \quad \mu \simeq 1, \\ B\ell &= \frac{4\pi}{c} J, \end{aligned}$$

откуда

$$B = \frac{4\pi J}{c\ell}.$$

Поскольку

$$\Phi = BS = B \cdot \pi r^2 = \frac{4\pi J}{c\ell} \pi r^2 = \frac{1}{c} LJ,$$
$$\frac{1}{c} LJ = \frac{4\pi^2 r^2}{c\ell} J,$$

тогда

$$L = \frac{4\pi^2 r^2}{\ell}. \quad (4.32)$$

Найдем с учетом (4.31) и (4.32):

$$c^2 \frac{R}{L} = \frac{c^2}{2\pi\lambda r d}. \quad (4.33)$$

Но при пластическом сжатии объем цилиндра не меняется, т.е.  $rd = r_0 d_0$ , следовательно,  $R/L = \text{const}$ .

Подставим (4.33) в (4.28):

$$\tau = t \left[ c^2 \frac{R}{L} t \right]^{-1} = \frac{L}{c^2 R} = \frac{2\pi\lambda r d}{c^2}.$$

Итак,

$$\tau = \frac{2\pi\lambda r_0 d_0}{c^2}. \quad (4.34)$$

Оценим  $\tau$  для меди: при  $\lambda = 5 \cdot 10^{17}$ ,  $r_0 = 5$  см,  $d_0 = 1$  см,  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/с, получаем:

$$\tau = 0,0157 \text{ с} \simeq 0,02 \text{ с}.$$

Проведенный расчет показывает, что время  $\tau$  очень мало и условие  $t \ll \tau$  выполняется только при взрыве.

Возможно, что таким взрывом внутри звезды объясняется образование сверхсильного магнитного поля пульсаров.

В технике возможно получение сверхсильного кратковременного магнитного поля для научных целей – «одноразовые» ускорители с энергией  $10^9$  эв, получение сверхвысокотемпературной плазмы с замороженным магнитным полем, передача сверхвысокого давления и т.п.

### § 33. Дифференциальные уравнения для линейных квазистационарных токов

В этом параграфе будут получены дифференциальные уравнения для линейных квазистационарных токов и рассмотрены примеры их решения.

Сначала получим уравнения. Для этого запишем обобщенный закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}^{\text{стор}}).$$

Затем делим обе части на  $\lambda$  (электропроводность проводника), умножаем на  $d\vec{l}$  и интегрируем по контуру цепи. Тогда получаем:

$$\oint_l \frac{\vec{j} d\vec{l}}{\lambda} = \oint_l \vec{E} d\vec{l} + \oint_l \vec{E}^{\text{стор}} d\vec{l}. \quad (4.35)$$

Выясним, что означает каждый интеграл. Сначала рассматриваем левую часть, полагая, что  $\vec{j}$  и  $d\vec{l}$  совпадают по направлению. Кроме того, считая токи линейными, можно пренебречь скин-эффектом и примерно положить, что  $j \simeq J/S$ . Тогда левая часть запишется так:

$$\oint_l \frac{\vec{j} d\vec{l}}{\lambda} = \oint_l \frac{j dl}{\lambda} = \oint_l \frac{J dl}{S\lambda}.$$

Затем, считая токи квазистационарными, а цепь не очень длинной, вынесем  $J$  из-под знака интеграла и окончательно получим:

$$\oint_l \frac{\vec{j} d\vec{l}}{\lambda} = J \oint_l \frac{dl}{S\lambda} = J \oint_l dR = J \cdot R,$$

где  $R$  – сопротивление всей цепи. Итак, слева имеем:

$$\oint_l \frac{\vec{j} d\vec{l}}{\lambda} = J \cdot R. \quad (4.36)$$

Рассмотрим интеграл в правой части:

$$\oint_l \vec{E}^{\text{стор}} d\vec{l} = \mathcal{E}^{\text{стор}}. \quad (4.37)$$

где  $\mathcal{E}^{\text{стор}}$  – сторонняя ЭДС.

Теперь рассмотрим интеграл  $\oint_l \vec{E} d\vec{l}$ , введя связь  $\vec{E}$  с потенциалами в квазистационарном случае согласно (4.5):

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = - \oint_l \text{grad} \varphi d\vec{l} - \frac{1}{c} \oint_l \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\vec{l}.$$

Во втором интеграле выносим производную  $\frac{\partial}{\partial t}$ , считая, что цепь неподвижна и не деформируется, затем применяем теорему Стокса и вводя вектор  $\vec{B}$  согласно (3.16) и магнитный поток  $\Phi$ , получаем:

$$\begin{aligned} \oint_l \vec{E} d\vec{l} &= - \oint_l d\varphi - \frac{1}{c} \oint_l \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\vec{l} = \\ &= - \oint_l d\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \oint_l \vec{A} d\vec{l} = - \oint_l d\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \oint_S \text{rot}_n \vec{A} dS = - \oint_l d\varphi \\ &= - \frac{1}{c} \int_S B_n dS = - \oint_l d\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \end{aligned}$$

Учитываем, что магнитный поток, согласно (3.80), связан с токами и коэффициентами индукции:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c} \sum_n L_{kn} J_n = \frac{1}{c} \sum_n L_{kn} \frac{\partial J_n}{\partial t}.$$

Подставляем в  $\oint_l \vec{E} d\vec{l}$  и получаем на этом этапе:

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = - \oint_l d\varphi - \frac{1}{c^2} \sum_n L_{kn} \frac{\partial J_n}{\partial t}. \quad (4.38)$$

Теперь «разберемся» с  $\oint_l d\varphi$  в (4.38). Выделим два случая.

I. В цепи отсутствуют конденсаторы. Это означает, что  $\oint_l d\varphi = 0$ . Тогда (4.38) переходит для некоторой  $k$ -той цепи в уравнение:

$$J_k R_k = - \frac{1}{c^2} \sum_n L_{kn} \frac{\partial J_n}{\partial t} + \varepsilon_k^{\text{стоп}},$$

или

$$\frac{1}{c^2} \sum_n L_{kn} \frac{\partial J_n}{\partial t} + R_k J_k = \varepsilon_k^{\text{стоп}}. \quad (4.39)$$

Уравнение (4.39) представляет собой систему уравнений. Она описывает систему индуктивно связанных цепей и может быть использована, например, для анализа процессов в трансформаторе (см. И.Е. Тамм, §80, пример 3. Элементарная теория трансформатора).

В качестве примера рассмотрим известные процессы включения и выключения постоянной ЭДС в цепи, содержащей самоиндукцию.

Включение.

Запишем уравнение (4.39) для одной цепи:

$$\frac{1}{c^2}L \frac{dJ}{dt} + RJ = \mathcal{E}^{\text{стоп}}. \quad (4.40)$$

Введем начальные условия: при  $t = 0$   $J_0 = 0, \mathcal{E}_0 \neq 0$ . Найдем решение однородного уравнения:

$$\frac{1}{c^2}L \frac{dJ}{dt} + RJ = 0.$$

Разделяем переменные

$$\frac{dJ}{J} = -\frac{c^2 R}{L} dt,$$

и после интегрирования получаем:

$$J = Ae^{-\frac{c^2 R}{L}t}.$$

Частное решение выбираем в виде:

$$J = \frac{\mathcal{E}^{\text{стоп}}}{R}.$$

Тогда общее решение:

$$J = Ae^{-\frac{c^2 R}{L}t} + \frac{\mathcal{E}^{\text{стоп}}}{R}.$$

Используем начальные условия:

$$0 = A + \frac{\mathcal{E}_0}{R},$$

что дает

$$A = -\frac{\mathcal{E}_0}{R}.$$

Подставляем в общее решение и получаем:

$$J = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{c^2 R}{L} t} \right). \quad (4.41)$$

Решение (4.41) означает, что при включении постоянной ЭДС  $\mathcal{E}_0$  не сразу достигается ток  $J = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$ . Процесс «разворачивается» во времени (см. рис. 45).

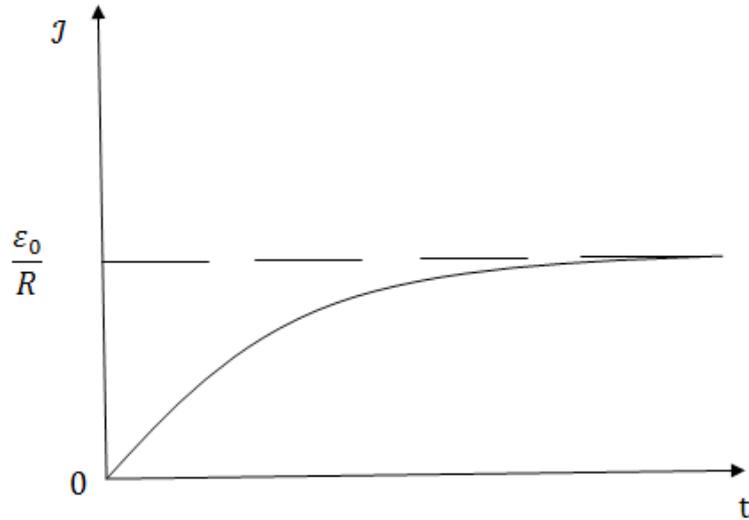


Рис. 45. Включение постоянной ЭДС

При малых временах, т.е. при  $t \rightarrow 0$ , разлагая  $e^{-\frac{c^2 R}{L} t}$  в ряд, получаем, что

$$J \simeq \frac{\mathcal{E}_0}{R} \frac{c^2 R}{L} t = \frac{c^2 \mathcal{E}_0}{L} t.$$

Это означает, что в начале процесса есть небольшой линейный участок, а затем ток плавно достигает максимального значения согласно закону Ома для постоянного тока.

Выключение постоянной ЭДС.

Начальные условия: при  $t = 0$   $\mathcal{E}_0^{\text{стоп}} = 0$ ,  $J_0 \neq 0$ . Уравнение для тока – однородное и имеет решение:

$$J = A e^{-\frac{c^2 R}{L} t},$$

где  $A = J_0$  согласно начальным условиям.

Итак, решение имеет вид:

$$J = J_0 e^{-\frac{c^2 R}{L} t}. \quad (4.42)$$

Решение (4.42) означает, что ток не сразу обращается в нуль, но продолжает течь. Промежуток времени  $\tau$ , в течение которого ток убывает от начального значения в  $e$  раз, называется временем релаксации:

$$J = J_0 e^{-1} = J_0 e^{-\frac{c^2 R}{L} \tau},$$

$$\tau = \frac{L}{c^2 R}.$$

II. В  $k$ -той цепи имеется конденсатор с емкостью  $C_k$ . Тогда

$$\oint_l d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q_k}{C_k},$$

где  $q_k$  – заряд на обкладках конденсатора. Добавляем этот член в правую часть уравнения (4.39) и получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{c^2} \sum_n L_{kn} \frac{\partial J_n}{\partial t} + R_k J_k = \mathcal{E}_k^{\text{стоп}} - \frac{q_k}{C_k}. \quad (4.43)$$

Учтем, что  $J_k = \frac{dq_k}{dt}$ , и чтобы ввести вместо  $q_k$  в уравнение  $J_k$ , возьмем производную  $\frac{d}{dt}$  от левой и правой части уравнения (4.43). Отметим, что можно вместо частной производной брать полную, так как все величины в уравнении зависят явно только от времени. Перенесем член с током влево и получим:

$$\frac{1}{c^2} \sum_n L_{kn} \frac{d^2 J_n}{dt^2} + R_k \frac{dJ_k}{dt} + \frac{1}{C_k} J_k = \frac{d\mathcal{E}_k^{\text{стоп}}}{dt}. \quad (4.44)$$

Это наиболее общее уравнение позволяет анализировать процессы в системе реальных индуктивно связанных цепей, содержащих конденсаторы, индуктивности, переменные ЭДС. Примеры решений см. в книгах А.А. Власова [2], И.Е. Тамма [18].

На основе этого уравнения можно составлять сложные программы для расчетов цепей на персональных компьютерах.

В качестве примера рассмотрим расчет системы двух реальных индуктивно связанных цепей – два колебательных контура. Пусть в первый контур включена переменная ЭДС  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$ , во втором контуре  $\mathcal{E}_2 = 0$ . Параметры системы: сопротивления

$R_1, R_2$ , емкости  $C_1, C_2$ , самоиндукции  $L_{11}, L_{22}$ , коэффициенты взаимной индукции  $L_{12} = L_{21}$ . Схема системы изображена на рисунке 46.

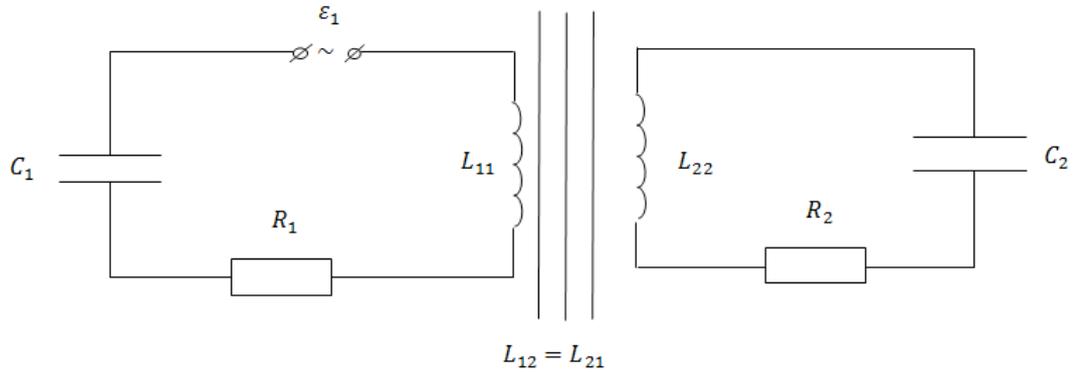


Рис. 46. Схема системы двух колебательных контуров

В задаче необходимо найти токи  $J_1$  и  $J_2$  в контурах по заданному значению  $\mathcal{E}_1$ . Составляем систему двух уравнений, используя уравнение (4.44):

1)  $k = 1, n = 1, 2.$

$$\frac{1}{c^2} L_{11} \frac{d^2 J_1}{dt^2} + \frac{1}{c^2} L_{12} \frac{d^2 J_2}{dt^2} + R_1 \frac{dJ_1}{dt} + \frac{1}{C_1} J_1 = \frac{d\mathcal{E}_1}{dt}.$$

2)  $k = 2, n = 1, 2.$

$$\frac{1}{c^2} L_{21} \frac{d^2 J_1}{dt^2} + \frac{1}{c^2} L_{22} \frac{d^2 J_2}{dt^2} + R_2 \frac{dJ_2}{dt} + \frac{1}{C_2} J_2 = 0.$$

Ищем частное решение в виде той же периодической функции, что и заданная  $\mathcal{E}_1$ :  $J_1 = J_{01} e^{i\omega t}, J_2 = J_{02} e^{i\omega t}$ , берем производные и подставляя в уравнения 1 и 2, получаем систему обыкновенных линейных уравнений с неизвестными  $J_1$  и  $J_2$ :

$$\begin{aligned} \left( i\omega R_1 - \frac{\omega^2}{c^2} L_{11} + \frac{1}{C_1} \right) J_1 - \frac{\omega^2}{c^2} L_{12} J_2 &= i\omega \mathcal{E}_1, \\ -\frac{\omega^2}{c^2} L_{12} J_1 + \left( i\omega R_2 - \frac{\omega^2}{c^2} L_{22} + \frac{1}{C_2} \right) J_2 &= 0. \end{aligned}$$

Решения для  $J_1$  и  $J_2$  находим по общему методу:

$$J_1 = \frac{\Delta_{J_1}}{\Delta}, \quad J_2 = \frac{\Delta_{J_2}}{\Delta},$$

где  $\Delta$  – определитель системы однородных уравнений, а определители  $\Delta_{J_1}$  и  $\Delta_{J_2}$  получаются заменой соответствующих столбцов значениями в правых частях уравнений 1 и 2. Раскрывая определители, получаем решения:

$$J_1 = \frac{i\omega\varepsilon_1 \left( i\omega R_2 - \frac{\omega^2}{c^2} L_{22} + \frac{1}{C_2} \right)}{\left( i\omega R_1 - \frac{\omega^2}{c^2} L_{11} + \frac{1}{C_1} \right) \left( i\omega R_2 - \frac{\omega^2}{c^2} L_{22} + \frac{1}{C_2} \right) - \frac{\omega^4}{c^4} L_{12}^2},$$

$$J_2 = \frac{i\omega\varepsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2} L_{12}}{\left( i\omega R_1 - \frac{\omega^2}{c^2} L_{11} + \frac{1}{C_1} \right) \left( i\omega R_2 - \frac{\omega^2}{c^2} L_{22} + \frac{1}{C_2} \right) - \frac{\omega^4}{c^4} L_{12}^2}.$$

Эти решения показывают, что если отсутствует индуктивная связь между колебательными контурами и конденсатор во второй цепи не был заряжен, то поскольку  $L_{12} = 0$ , получаем, что  $J_2 = 0$ , а  $J_1 = \frac{\varepsilon_1}{Z_1}$ . При этом  $Z_1$  – комплексное сопротивление первого контура, равно:

$$Z_1 = R + i \left( \frac{\omega}{c^2} L_{11} + \frac{1}{\omega C_1} \right).$$

Другие примеры решения уравнения (4.44) см. в приложении VI.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### Приложение I

#### Темы лекций с указанием соответствующих параграфов пособия

По учебному плану на лекционный курс «Электродинамика» выделено всего 34 часа, т.е. 17 лекций (для сравнения: государственной программой по теоретической физике для педагогических институтов 1970 года, т.е. почти полвека тому назад, на курс электродинамики отводилось 48 лекционных часов). Следовательно, не все параграфы пособия входят в эти 17 лекций. Часть из них можно рассмотреть на практических занятиях, часть предложить студентам изучать самостоятельно.

Раздел «Релятивистская формулировка электродинамики» перенесён в курс специальной теории относительности (главы VII и VIII, § 51–59).

В таблице 3 отражено содержание полного курса. В часть I учебного пособия включены первые 10 лекций, которым соответствуют §§ 1–33.

Таблица 3

Темы лекций в соответствии с рабочей программой дисциплины	Параграфы и вопросы пособия
1	2
1. Предмет и метод электродинамики. Математический аппарат	Введение. Предмет и метод электродинамики. Макроскопическая и микроскопическая электродинамика. Концепции близко- и дальнего действия. Основной математический аппарат
2. Четвертое, третье и второе уравнения Максвелла	Основы макроскопической электродинамики. § 1. Четвертое уравнение Максвелла как обобщение экспериментального закона Кулона. § 2. Третье уравнение Максвелла как обобщение экспериментального факта отсутствия в природе свободных магнитных зарядов. § 3. Второе уравнение Максвелла как обобщение закона электромагнитной индукции
3. Первое уравнение Максвелла. Система уравнений Максвелла в среде и вакууме	§ 4. Первое уравнение Максвелла как обобщение закона Био-Савара-Лапласа. Уравнение непрерывности. Ток смещения § 5. Система уравнений Максвелла
4. Теорема Умова–Пойнтинга. Граничные условия	§ 6. Закон сохранения и превращения энергии электромагнитного поля. Теорема Умова–Пойнтинга. § 7. Граничные условия для нормальных и касательных составляющих векторов электромагнитного поля

1	2
5. Основные уравнения электростатики в среде. Основные свойства поля. Потенциал	§ 8. Основные уравнения. Основные задачи электростатики. § 9. Основные свойства поля. Скалярный потенциал, его связь с работой
6. Дифференциальные уравнения для потенциала, их общие решения. Разложение потенциала системы зарядов по мультипольным моментам	§ 10. Дифференциальные уравнения для потенциала, их общие решения. Нормировка потенциала. Решение второй задачи электростатики. § 11. Разложение потенциала системы зарядов на больших расстояниях, Дипольное, квадрупольное, мультипольное приближения
7. Диэлектрики в электростатическом поле. Энергия поля, энергия зарядов в поле, энергия системы зарядов	§13. Диэлектрики в электростатическом поле. § 14. Энергия в электростатике
8. Основные уравнения стационарного поля, магнитостатическое поле в среде. Вектор-потенциал. Дифференциальные уравнения для вектор-потенциала, их общие решения	Стационарное электромагнитное поле. Магнитостатика. § 16. Основные уравнения. Основные задачи теории стационарного поля. §18. Основные уравнения магнитостатики. Вихревой характер магнитного поля. Циркуляция магнитной напряженности. § 19. Вектор-потенциал магнитного поля. Градиентная или калибровочная инвариантность поля. Калибровка вектор-потенциала. § 20. Дифференциальные уравнения для вектор-потенциала, их общие решения
9. Закон Био-Савара-Лапласа. Энергия магнитного поля, токов в поле, энергия системы токов	§ 21. Закон Био-Савара-Лапласа для объемных и линейных токов. §25 Энергия в магнитостатике
10. Основные уравнения теории квазистационарного поля, потенциалы, дифференциальные уравнения для потенциалов, их общие решения. Скин-эффект	Квазистационарные явления. § 27. Основные уравнения квазистационарного поля. Условие квазистационарности. § 28. Потенциалы, их связь с векторами $\vec{B}$ и $\vec{E}$ . § 29. Дифференциальные уравнения для потенциалов, объемной плотности зарядов, их общие решения. § 30. Скин-эффект. Элементарная теория скин-эффекта
11. Основные уравнения теории переменных полей. Потенциалы. Дифференциальные уравнения для потенциалов	Переменное поле. § 34. Основные уравнения. Потенциалы. Градиентная или калибровочная инвариантность. § 35. Дифференциальные уравнения для потенциалов в однородной среде. Калибровка Лоренца

1	2
12. Уравнение Даламбера для потенциалов. Запаздывающие и опережающие потенциалы	§ 36. Уравнение Даламбера для потенциалов. Запаздывающие и опережающие потенциалы
13. Электромагнитное поле линейного гармонического осциллятора. Мощность излучения осциллятора	§ 37. Электромагнитное поле линейного гармонического осциллятора. § 38. Мощность излучения осциллятора
14. Излучение ускоренно движущейся заряженной частицы. Распространение плоских монохроматических волн в однородных диэлектриках	§ 39. Излучение ускоренно движущейся заряженной частицы. Сила лучистого трения. § 41. Распространение плоских монохроматических волн в однородных диэлектриках. Свойства плоских волн
15. Распространение плоских монохроматических волн в однородных проводниках. Законы отражения и преломления плоских монохроматических волн на границе двух диэлектриков. Электромагнитная природа света	§ 42. Распространение плоских монохроматических волн в однородных проводниках. Коэффициент затухания, глубина проникновения поля. Комплексная диэлектрическая проницаемость. § 44. Прохождение плоских монохроматических волн через границу двух диэлектриков. § 45. Электромагнитная природа света
16. Уравнения Максвелла–Лоренца, их усреднение	Основы микроскопической электродинамики. § 46. Уравнения Максвелла–Лоренца – основные уравнения микроскопической электродинамики. Усреднение уравнений Максвелла–Лоренца
17. Теорема об импульсе поля и вещества. Поле как вид материи	§ 50. Теорема об импульсе поля и вещества. Закон сохранения импульса поля и вещества. Давление электромагнитных волн. Заключение

## Основные понятия векторного анализа

### II.1. Скалярное поле. Градиент скаляра.

Скалярное поле – это область пространства, каждой точке которого поставлено в соответствие определенное значение скалярной величины  $\varphi$  (например, температуры, давления, электрического заряда, потенциальной энергии, электростатического потенциала и т.д.). Совокупность точек, в которых скалярная величина  $\varphi$  имеет одинаковое значение, называется поверхностью уровня, или эквипотенциальной поверхностью.

Рассмотрим две эквипотенциальные поверхности  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  (рис. 47).

Нормаль  $\vec{n}$  к поверхности уровня  $\varphi = \varphi_0$  направлена в сторону возрастания  $\varphi$ ;  $\vec{s}$  – произвольное направление.

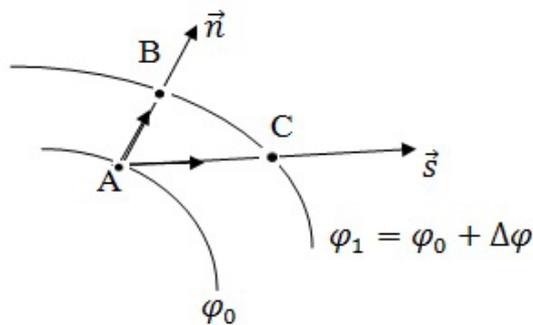


Рис. 47. Эквипотенциальные поверхности

Составим разность потенциалов:

$$\varphi_B - \varphi_A = \varphi_1 - \varphi_0,$$

$$\varphi_C - \varphi_A = \varphi_1 - \varphi_0.$$

Из этих формул видно, что простая разность потенциалов – неинформативная и неудобная характеристика для описания изменения потенциала. Рассмотрим скорость роста потенциала при переходе от  $\varphi_0$  к  $\varphi_1$ :

$$\frac{\varphi_B - \varphi_A}{AB} > \frac{\varphi_C - \varphi_A}{AC}, \text{ т. е.}$$

$$\frac{\Delta\varphi}{AB} > \frac{\Delta\varphi}{AC}.$$

Мы видим, что скорость изменения потенциала зависит от направления.

Производная скаляра  $\varphi$  по любому направлению  $\vec{s}$  определяется выражением

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s}.$$

Ясно, что скорость возрастания  $\varphi$  будет наибольшей вдоль направления  $\vec{n}$ . Это позволяет ввести определение градиента скаляра:

$$\boxed{\text{grad} \varphi = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta n} \vec{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \vec{n}.} \quad (\text{II.1})$$

Таким образом, градиент скаляра  $\varphi$  – это вектор, направленный по нормали к линии уровня в сторону возрастания  $\varphi$  и численно равный производной  $\varphi$  по этому направлению. Градиент  $\varphi$  направлен вдоль наиболее быстрого возрастания скаляра  $\varphi$ .

В декартовой системе координат

$$\boxed{\text{grad} \varphi = \nabla \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z},} \quad (\text{II.2})$$

$$\text{grad}_x \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \text{grad}_y \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \text{grad}_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$|\text{grad} \varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

## II.2. Векторное поле

Векторное поле – это область пространства, каждой точке которого сопоставляется определенная векторная величина  $\vec{a}$ .

### II.2.1. Поток вектора $\vec{a}$

Название «поток вектора» взято из гидродинамики, где изучается векторное поле скорости жидкости. Поэтому вначале рассмотрим пример: поток жидкости в трубке через сечение S (рис. 48, а).

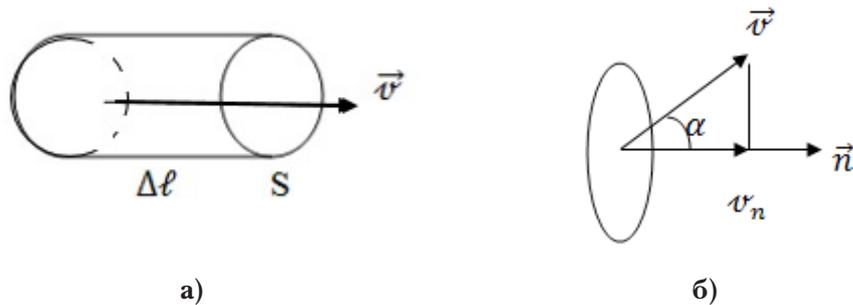


Рис. 48. К определению потока вектора

Масса жидкости, протекающая в единицу времени через площадь  $S$  с постоянной скоростью  $\vec{v}$ , определяется выражением

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = \rho \frac{\Delta \ell}{\Delta t} S = \rho v S = \rho N,$$

где  $\rho$  – плотность,  $N$  – поток вектора скорости  $\vec{v}$

$$N = vS.$$

В общем случае вектор  $\vec{v}$  образует некоторый угол  $\alpha$  с площадкой  $S$  (рис. 48 б), поэтому

$$N = v \cos \alpha S = v_n S.$$

Кроме того, может оказаться, что  $v \neq const$ , поэтому вначале надо определить поток вектора скорости через элементарную поверхность  $dS$ :

$$dN = v_n dS.$$

По существу, это объем жидкости, протекающий через данный элемент поверхности в единицу времени в направлении внешней нормали к  $dS$ . Поток жидкости через конечную поверхность  $S$  равен потоку вектора скорости  $\vec{v}$  через эту поверхность:

$$N = \int dN = \int v_n dS.$$

Теперь обобщим это понятие на случай произвольного вектора  $\vec{a}$ . Поток вектора  $\vec{a}$  через бесконечно малую площадку  $dS$  называется величина

$$dN = a_n dS.$$

Площадка выбирается бесконечно малой для того, чтобы вектор  $\vec{a}$  имел на этой площадке одно определенное значение. Чтобы определить поток вектора через поверхность конечных размеров, необходимо разбить ее на бесконечно малые площадки  $dS$ , на каждой из которых  $a = const$ . Для нахождения потока вектора через поверхность  $S$  необходимо просуммировать потоки через отдельные элементы этой поверхности. Таким образом, поток  $N$  вектора  $\vec{a}$  через поверхность  $S$  определяется следующим образом:

$$N = \int_S a_n dS. \quad (II.3)$$

Приведем примеры: поток вектора электрической индукции

$$N = \int_S D_n dS,$$

магнитный поток

$$N = \int_S B_n dS.$$

### II. 2.2. Дивергенция вектора $\vec{a}$

Пусть имеются два объема  $V_1$  и  $V_2$  ( $V_1 > V_2$ ), через которые протекают одинаковые потоки вектора  $\vec{a}$  ( $N_1 = N_2$ ), рисунок 49.

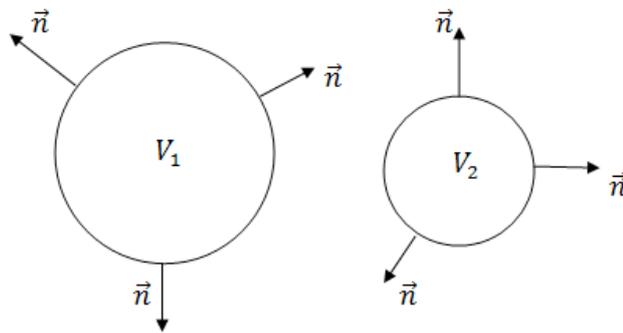


Рис. 49. К определению удельного потока

Поскольку  $V_1 > V_2$ , удельный поток оказывается различным:

$$\frac{N_1}{V_1} < \frac{N_2}{V_2}.$$

Таким образом, приходим к понятию дивергенции:

$$\boxed{\text{div } \vec{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S a_n dS}{\Delta V}}. \quad (\text{II.4})$$

Дивергенция вектора  $\vec{a}$  в данной точке поля есть предел, к которому стремится отношение потока вектора  $\vec{a}$  через поверхность, окружающую эту точку, к ограниченному этой поверхностью объёму.

Дивергенция – это скаляр. Название «дивергенция» по-латыни означает расхождение, расходимость. Числовое значение дивергенции называется обильностью истоков поля. В зависимости от знака дивергенции обильность истоков может быть положительной и отрицательной:

- а)  $a_n > 0, \text{div } \vec{a} > 0$ , «исток» поля;
- б)  $a_n < 0, \text{div } \vec{a} < 0$ , «сток» поля;
- в)  $\vec{a} \neq 0, \text{div } \vec{a} = 0$ . Векторные поля, свободные от источников, называются соленоидальными.

Дивергенция вычисляется следующим образом:

$$\text{div } \vec{a} = (\nabla \vec{a}) = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z.$$

Учитывая компоненты градиента, перепишем это выражение в виде

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Таким образом,

$$\boxed{\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.} \quad (\text{II.5})$$

Это выражение можно записать более компактно:

$$\text{div } \vec{a} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial a_\alpha}{\partial \alpha}, \quad \alpha = x, y, z.$$

### II. 2.3. Циркуляция вектора

Понятие циркуляции естественным образом появляется, например, при описании движения воды по трубам замкнутого контура. Чтобы вода возвращалась в исходную точку, необходимо, чтобы имела место циркуляция вектора скорости  $\vec{v}$  (рис. 50).

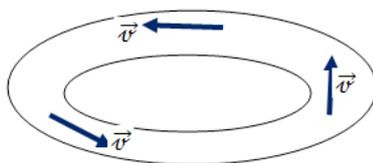


Рис. 50. Циркуляция вектора скорости

Циркуляция вектора  $\vec{v}$  по контуру  $\ell$  определяется выражением

$$C = \oint_{\ell} \vec{v} d\vec{\ell}.$$

В общем случае циркуляция произвольного вектора  $\vec{a}$  по контуру  $\ell$  имеет вид

$$C = \oint_{\ell} \vec{a} d\vec{\ell}. \quad (\text{II.6})$$

### II.2.4. Ротор вектора

Рассмотрим два контура, охватывающих площади  $S_1$  и  $S_2$ , для которых циркуляция некоторого вектора  $\vec{a}$  одинакова ( $C_1 = C_2$ ), рисунок 51.

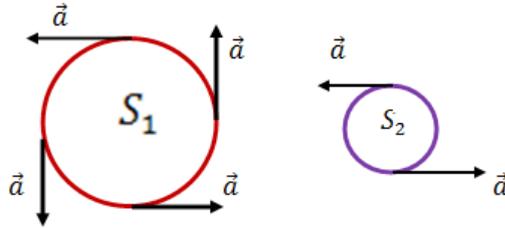


Рис. 51. К понятию поверхностной циркуляции

Поскольку  $S_1 > S_2$ , то поверхностная циркуляция оказывается различной:

$$\frac{C_1}{S_1} < \frac{C_2}{S_2}.$$

Понятие поверхностной циркуляции позволяет прийти к определению ротора:

$$\text{rot } \vec{a} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\ell} \vec{a} d\vec{\ell}}{\Delta S} \vec{n}. \quad (\text{II.7})$$

Ротор (или вихрь) векторного поля есть предел отношения циркуляции векторного поля по элементарному контуру к величине площадки, ограниченной этим контуром.

Ротор – это вектор, направление которого определяется по правилу «буравчика» (рис. 52).

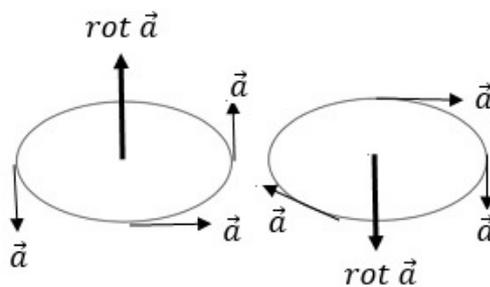


Рис. 52. Определение направления ротора по правилу «буравчика»

Вычисляется ротор с помощью векторного произведения

$$\mathit{rot} \vec{a} = [\nabla \vec{a}],$$

т.е.  $\mathit{rot} \vec{a}$  может быть представлен в форме определителя:

$$\mathit{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \quad (\text{II.8})$$

Компонентами этого вектора являются

$$\mathit{rot}_x \vec{a} = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z},$$

$$\mathit{rot}_y \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x},$$

$$\mathit{rot}_z \vec{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

Таким образом, имеются три дифференциальные операции первого порядка: градиент (оператор набла), дивергенция и ротор (вихрь).

**Основные формулы векторного анализа.  
Интегральные теоремы**

$$1) \operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} .$$

$$2) \operatorname{div} \vec{a} = (\nabla \vec{a}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} .$$

$$3) \operatorname{rot} \vec{a} = [\nabla \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} .$$

$$4) \operatorname{grad}_a R = \frac{\vec{R}}{R} .$$

$$5) \operatorname{grad}_q R = - \frac{\vec{R}}{R} .$$

$$6) \operatorname{grad}_a \left( \frac{1}{R} \right) = - \frac{\vec{R}}{R^3} .$$

$$7) \operatorname{grad}_q \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{\vec{R}}{R^3} .$$

$$8) \operatorname{grad}_a \left( \frac{1}{R^n} \right) = -n \frac{\vec{R}}{R^{n+2}} = -\operatorname{grad}_q \left( \frac{1}{R^n} \right) .$$

$$9) \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} .$$

$$10) \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0 .$$

$$11) \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0 .$$

$$12) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a} - \nabla^2 \vec{a} .$$

$$13) (\vec{a} \nabla) \vec{a} = \frac{1}{2} \nabla a^2 + [\operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{a}] .$$

$$14) \operatorname{grad}(\varphi_1 \cdot \varphi_2) = \varphi_1 \operatorname{grad} \varphi_2 + \varphi_2 \operatorname{grad} \varphi_1 .$$

$$15) \operatorname{rot}(\varphi \vec{a}) = \varphi \operatorname{rot} \vec{a} + [\operatorname{grad} \varphi \cdot \vec{a}] .$$

$$16) \operatorname{div}(\varphi \vec{a}) = \varphi \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \operatorname{grad} \varphi .$$

$$17) \operatorname{div}[\vec{a} \vec{b}] = \vec{b} \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \operatorname{rot} \vec{b}.$$

$$18) [[\vec{a} \vec{b}] \vec{c}] = \vec{b}(\vec{a} \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \vec{b}).$$

Отметим две важнейшие теоремы векторного анализа.

1. Теорема Остроградского – Гаусса: поток вектора  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность  $S$ , ограничивающую объём  $V$ , равен сумме обильностей всех истоков поля вектора  $\vec{a}$ , находящихся внутри этого объёма. Эта теорема позволяет перейти от интеграла по поверхности к интегралу по объёму, ограниченному этой поверхностью:

$$\oint_S a_n dS = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV. \quad (\text{III.1})$$

2. Теорема Стокса: циркуляция вектора  $\vec{a}$  по замкнутому контуру  $\ell$  равна потоку ротора вектора  $\vec{a}$  через произвольную поверхность  $S$ , опирающуюся на контур  $\ell$ . Теорема позволяет перейти от интеграла по замкнутой кривой к интегралу по поверхности, опирающейся на данную кривую:

$$\oint_{\ell} \vec{a} d\vec{\ell} = \int_S \operatorname{rot}_n \vec{a} dS. \quad (\text{III.2})$$

Изложение основ векторного анализа в объёме, необходимом для понимания курса электродинамики, содержится в приложении учебника И.Е. Тамма [18]. В частности, в §§ 4 и 5 приводится доказательство интегральных теорем Остроградского–Гаусса и Стокса. Важнейшие формулы векторного анализа приведены в § 9.

## Избранные задачи электростатики

### IV.1. Интегрирование уравнений Пуассона и Лапласа в случае равномерно заряженного по объёму шара

Определим потенциал и напряженность электростатического поля вне и внутри равномерно заряженного по объёму шара ( $\rho = \text{const}$ ). Заряд шара равен  $q$ , радиус шара –  $a$  (рис. 53).

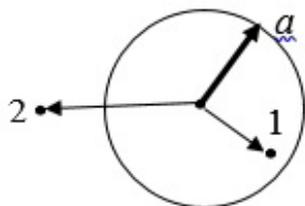


Рис. 53. Равномерно заряженный по объёму шар

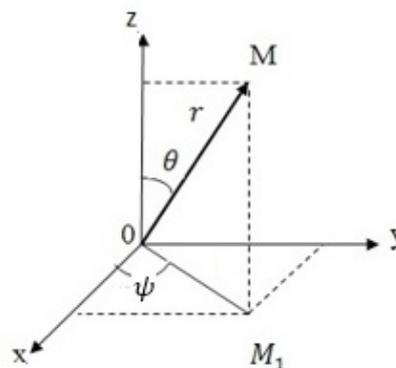


Рис. 54. Сферическая система координат

Для точек, расположенных внутри шара (1), используем уравнение Пуассона:

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad r \leq a. \quad (\text{IV.1})$$

Для точек, расположенных вне шара (2), используем уравнение Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad r > a. \quad (\text{IV.2})$$

В данной задаче удобно использовать сферическую систему координат (рис. 54), в которой лапласиан имеет следующий вид:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right].$$

Поскольку заряд распределен сферически симметрично, потенциал зависит только от расстояния и не зависит от углов  $\theta$  и  $\psi$ . Поэтому в лапласиане сохраняем только радиальную часть:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi).$$

1) Вне шара используем уравнение Лапласа:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) = 0. \quad (\text{IV.3})$$

Введём новую функцию:

$$u = r\varphi. \quad (\text{IV.4})$$

Тогда получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0.$$

Проинтегрируем его и получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{du}{dr} = c_1.$$

Разделяя переменные и интегрируя ещё раз, получим:

$$u = c_1 r + c_2,$$

откуда с учетом (IV.4) находим потенциал за пределами шара:

$$\varphi_2 = c_1 + \frac{c_2}{r}. \quad (\text{IV.5})$$

Будет разумным предположить, что при  $r \rightarrow \infty$  потенциал  $\varphi_2 \rightarrow 0$ , т.е.

$$0 = c_1 + \frac{c_2}{\infty} = c_1. \quad (\text{IV.6})$$

Таким образом,  $c_1=0$ , тогда

$$\varphi_2 = \frac{c_2}{r}. \quad (\text{IV.7})$$

2) Внутри шара используем уравнение Пуассона:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) = -4\pi \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

С учетом (IV.4) уравнение (IV.3) примет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = -4\pi \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

С целью понижения порядка этого уравнения введём следующую функцию:

$$f = \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (\text{IV.8})$$

Тогда будем иметь:

$$\frac{df}{dr} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}r.$$

Разделяя переменные в этом уравнении, получим:

$$df = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}rdr.$$

В результате интегрирования найдём функцию  $f$ :

$$f = -\frac{4\pi\rho r^2}{\varepsilon} + c_3.$$

С учетом (IV.8) получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{2\pi\rho r^2}{\varepsilon} + c_3.$$

Интегрируя это уравнение, находим функцию  $u$

$$u = -\frac{2\pi\rho r^3}{\varepsilon} + c_3r + c_4,$$

а затем согласно (IV.4) – потенциал для внутренних областей шара:

$$\varphi = -\frac{2\pi\rho}{3\varepsilon}r^2 + c_3 + \frac{c_4}{r}. \quad (\text{IV.9})$$

Из (IV.9) следует, что при  $r \rightarrow 0$  потенциал расходится, т.е.  $\varphi \rightarrow \infty$  за счет третьего слагаемого. Потребуем, чтобы потенциал стал конечным при  $r \rightarrow 0$ ; это возможно, если положить  $c_4 = 0$ . Таким образом, будем иметь для точек внутри шара:

$$\varphi_1 = -\frac{2\pi\rho}{3\varepsilon}r^2 + c_3. \quad (\text{IV.10})$$

3) Для нахождения постоянных интегрирования  $c_2$  и  $c_3$  используем граничные условия (непрерывность потенциала и его первых производных на границе шара при  $r = a$ ):

$$\varphi_1|_a = \varphi_2|_a, \quad (\text{IV.11})$$

$$\frac{d\varphi_1}{dr}|_a = \frac{d\varphi_2}{dr}|_a. \quad (\text{IV.12})$$

С учетом (IV.7) и (IV.10) получим:

$$c_3 - \frac{2\pi\rho}{3\varepsilon}a^2 = \frac{c_2}{a}, \quad (\text{IV.13})$$

$$-\frac{4\pi\rho a}{3\varepsilon} = -\frac{c_2}{a^2}. \quad (\text{IV.14})$$

Из последнего уравнения следует, что

$$c_2 = \frac{4\pi\rho}{3\varepsilon}a^3.$$

После подстановки этого выражения в (IV.13) получим

$$c_3 = \frac{2\pi\rho}{\varepsilon}a^2.$$

Таким образом,

$$\varphi_1 = \frac{2\pi\rho}{\varepsilon} \left( a^2 - \frac{r^2}{3} \right), \quad (\text{IV.15})$$

$$\varphi_2 = \frac{4\pi\rho a^3}{3\varepsilon r} = \frac{q}{\varepsilon r}. \quad (\text{IV.16})$$

На границе шара при  $r = a$  из (IV.15) и (IV.16) следует, что

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{4\pi\rho}{3\varepsilon}a^2, \quad (\text{IV.17})$$

т.е. непрерывность потенциала выполняется.

Для нахождения напряженности электрического поля учтём, что

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi.$$

Поэтому

$$E_1 = -\frac{d\varphi_1}{dr} = \frac{4\pi\rho}{3\varepsilon}r,$$

или

$$E_1 = \frac{q}{\varepsilon a^3}r. \quad (\text{IV.18})$$

Аналогично

$$E_2 = -\frac{d\varphi_2}{dr},$$

т.е.

$$E_2 = \frac{q}{\varepsilon r^2}. \quad (\text{IV.19})$$

Полученные результаты отражены в таблице 4.

Таблица 4

	Внутри шара, $r < a$	Вне шара, $r > a$
Уравнение	Пуассона: $\nabla^2 \varphi = -4\pi \frac{\rho}{\varepsilon}$	Лапласа: $\nabla^2 \varphi = 0$
$\varphi(r)$	$\varphi_1 = \frac{2\pi\rho}{\varepsilon} \left( a^2 - \frac{r^2}{3} \right)$	$\varphi_2 = \frac{4\pi\rho a^3}{3\varepsilon r} = \frac{q}{\varepsilon r}$
$E(r)$	$E_1 = \frac{q}{\varepsilon a^3} r$	$E_2 = \frac{q}{\varepsilon r^2}$

Согласно (IV.15) – (IV.17)

$$\frac{\varphi(0)}{\varphi(a)} = 1.5.$$

Графическая иллюстрация полученного решения представлена на рисунке 55.

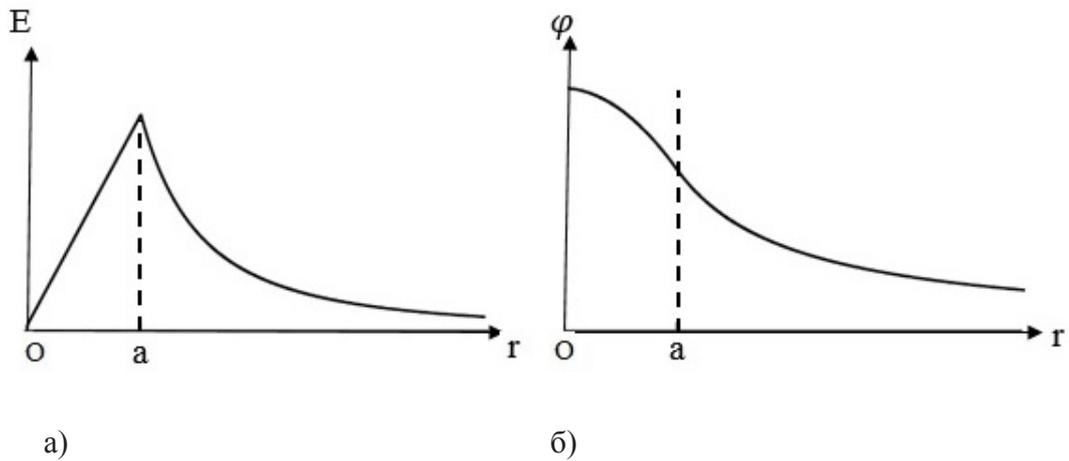


Рис. 55. Напряженность (а) и потенциал (б) электростатического поля заряженного шара

#### IV.2. Потенциал бесконечной равномерно заряженной плоскости

Рассмотрим плоскость, расположенную перпендикулярно оси  $x$  (рис. 56).

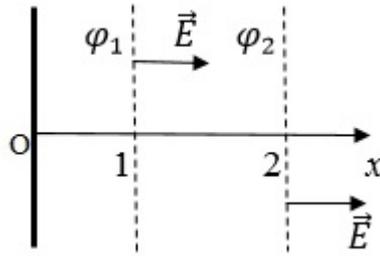


Рис. 56. Бесконечная равномерно заряженная плоскость

Учтем связь потенциала с работой:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = A_{1,2} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}.$$

Напряженность электростатического поля, создаваемого плоскостью, равномерно заряженной с поверхностной плотностью  $\sigma = \text{const}$ , определяется выражением

$$E = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon}.$$

Поэтому

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon} \int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon} (x_2 - x_1).$$

При  $x_2 \rightarrow \infty$  будет физически разумно предположить, что  $\varphi_2 \rightarrow 0$ . Тогда

$$\varphi_1 = -\frac{2\pi\sigma}{\varepsilon} \infty \rightarrow \infty.$$

Следовательно, нормировка потенциала на бесконечность в этом случае не подходит. Необходимо принять, что при  $x_1 = 0$  потенциал  $\varphi_1 = 0$ . Тогда

$$0 - \varphi_2 = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon} x_2,$$

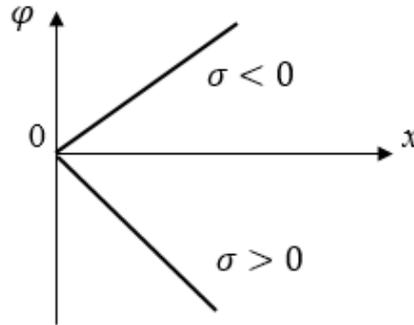
т.е.

$$\varphi_2 = -\frac{2\pi\sigma}{\varepsilon} x_2.$$

Для произвольной точки  $x$  получим

$$\varphi = -\frac{2\pi\sigma}{\varepsilon} x.$$

График зависимости  $\varphi(x)$  представлен на рисунке 57. Аналогичным образом ведет себя потенциал в поле тяготения Земли, т.е. линейно растёт с высотой.



**Рис. 57. Потенциал бесконечной равномерно заряженной плоскости**

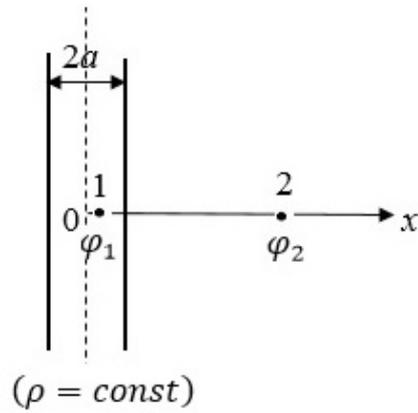
Сформулируем выводы:

1) Нормировку на бесконечность можно проводить, если потенциал с увеличением расстояния убывает. Это имеет место в случае, когда заряженный объект находится в конечной области пространства.

2) Нормировку на бесконечность проводить нельзя для протяженных в бесконечность заряженных объектов.

### **IV.3. Потенциал и напряженность электростатического поля «Великой китайской стены»**

Бесконечная пластинка толщиной  $2a$  (образно назовём её «Великая китайская стена») равномерно заряжена по объёму с постоянной плотностью  $\rho$ . Вычислим потенциал и напряженность электрического поля вне и внутри пластины, используя уравнения Пуассона и Лапласа (рис. 58).



**Рис. 58.** «Великая китайская стена», равномерно заряженная по объему

Данную задачу удобно решать в декартовой системе координат, где

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Учитывая, что  $\varphi = \varphi(x)$ , будем иметь

$$\nabla^2 \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dx^2}.$$

1) Вне стены: используем уравнение Лапласа

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0.$$

Дважды проинтегрировав это уравнение, получим:

$$\varphi_2 = c_1 x + c_2. \tag{IV.20}$$

2) Внутри стены: используем уравнение Пуассона

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}.$$

С целью понижения порядка этого уравнения введем новую функцию

$$f = \frac{d\varphi}{dx}.$$

Тогда получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{df}{dx} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$f = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}x + c_3,$$

или

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}x + c_3.$$

В результате интегрирования получаем следующее выражение:

$$\varphi_1 = -\frac{2\pi\rho}{\varepsilon}x^2 + c_3x + c_4. \quad (\text{IV.21})$$

Для определения постоянных интегрирования  $c_1, c_2, c_3, c_4$  применим граничные условия:

1) потенциал  $\varphi_1$  должен оставаться конечным при  $x \rightarrow 0$ ; с учетом этого из (IV.21) следует, что  $c_4 = 0$ ;

2) напряженность электрического поля в начале координат

$$E|_{x=0} = 0,$$

что эквивалентно требованию

$$\left. \frac{d\varphi_1}{dx} \right|_{x=0} = 0,$$

откуда следует, что  $c_3 = 0$ ;

3) на границе стены должно выполняться условие непрерывности потенциала и его первых производных:

$$\begin{aligned} \varphi_1|_a &= \varphi_2|_a, \\ \left. \frac{d\varphi_1}{dx} \right|_{x=a} &= \left. \frac{d\varphi_2}{dx} \right|_{x=0}. \end{aligned}$$

Это приводит к следующим выражениям для констант  $c_1$  и  $c_2$ :

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}a, \\ c_2 &= \frac{2\pi\rho}{\varepsilon}a^2. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения всех четырех постоянных интегрирования в (IV.20) и в (IV.21), получим:

$$\varphi_1 = -\frac{2\pi\rho}{\varepsilon}x^2, \quad (IV.22)$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi\rho}{\varepsilon}a(a-2x). \quad (IV.23)$$

Таким образом, потенциал до границы стены убывает параболически, а затем – по линейному закону.

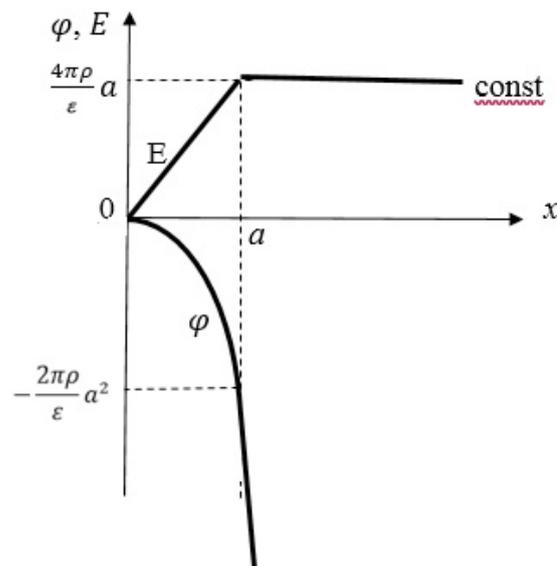
Учитывая связь напряженности электрического поля с потенциалом, получаем следующие результаты:

$$E_1 = -\frac{d\varphi_1}{dx} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}x, \quad (IV.24)$$

$$E_2 = \frac{d\varphi_2}{dx} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}a. \quad (IV.25)$$

Из (IV.24) и (IV.25) видно, что внутри стены напряженность электрического поля линейно растет с ростом  $x$ , а за пределами стены остается величиной постоянной.

Графическая иллюстрация поведения  $\varphi(x)$  и  $E(x)$  представлена на рисунке 59.



**Рис. 59.** Потенциал и напряженность электрического поля «Великой китайской стены»

Полученные результаты можно обобщить на случай, когда стена заряжена не равномерно, а с объёмной плотностью, меняющейся по закону  $\rho = cx$ . Нетрудно показать, что в этом случае

$$\varphi_1 = -\frac{2\pi c}{3\varepsilon} x^3, \quad (\text{IV.26})$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi c}{\varepsilon} a^2 \left( \frac{2}{3} a - x \right), \quad (\text{IV.27})$$

$$E_1 = \frac{2\pi c}{\varepsilon} x^2, \quad (\text{IV.28})$$

$$E_2 = \frac{2\pi c}{\varepsilon} a^2 = \text{const.} \quad (\text{IV.29})$$

#### IV.4. Потенциал и напряженность электрического поля бесконечного кругового цилиндра

Определим потенциал и напряженность внутри и вне бесконечного кругового цилиндра радиусом  $a$ , равномерно заряженного с объёмной плотностью электрического заряда  $\rho = \text{const.}$

Задача решается путём интегрирования уравнений Лапласа и Пуассона в цилиндрических координатах, при этом

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad (\text{IV.30})$$

ось  $z$  совпадает с осью цилиндра (рис. 60).

Поскольку линейные размеры цилиндра бесконечны, его поле симметрично относительно любой плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра, поэтому потенциал  $\varphi$  не зависит от  $z$ . Потенциал поля, создаваемого цилиндром, не зависит также и от угла  $\theta$ , поскольку цилиндр круговой, и заряд распределен равномерно по его объёму. С учетом данных свойств симметрии поля в формуле (IV.30) следует сохранить только первые два слагаемых:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi}{dr} \right). \quad (\text{IV.31})$$

1) Внутри цилиндра используем уравнение Пуассона:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi}{dr} \right) = -4\pi \frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (\text{IV.32})$$

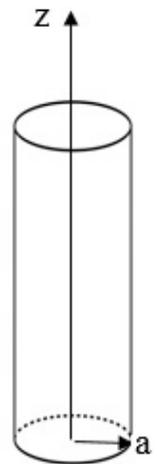


Рис. 60

Введем новую функцию

$$r \frac{d\varphi}{dr} = u. \quad (\text{IV.33})$$

Тогда уравнение (IV.32) принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} u = -4\pi \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим, что

$$u = -4\pi \frac{\rho}{\varepsilon} \cdot \frac{r^2}{2} + c_1.$$

С учетом (IV.33) получаем

$$\int d\varphi = -\frac{2\pi\rho}{\varepsilon} \int r dr + c_1 \int \frac{dr}{r}.$$

Таким образом, внутри цилиндра ( $r < a$ ) потенциал имеет вид

$$\varphi_1 = -\frac{\pi\rho}{\varepsilon} r^2 + c_1 \ln r + c_2. \quad (\text{IV.34})$$

2) Вне цилиндра используем уравнение Лапласа:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0. \quad (\text{IV.35})$$

Очевидно, что

$$r \frac{d\varphi}{dr} = \text{const} = c_3,$$

т.е.

$$r d\varphi = c_3 dr.$$

В результате интегрирования этого уравнения находим, что потенциал, создаваемый цилиндром при  $r > a$ , имеет вид

$$\varphi_2 = c_3 \ln r + c_4. \quad (\text{IV.36})$$

Из (IV.34) и (IV.36) получаем напряженности поля

$$E_1 = -\frac{d\varphi_1}{dr} = \frac{2\pi\rho}{\varepsilon} r - \frac{c_1}{r}, \quad (\text{IV.37})$$

$$E_2 = -\frac{d\varphi_2}{dr} = -\frac{c_3}{r}. \quad (\text{IV.38})$$

3) Далее необходимо определить постоянные интегрирования.

Для того чтобы напряженность  $E_1$  оставалась конечной при  $r \rightarrow 0$ , следует положить  $c_1 = 0$ , иначе  $E_1 \rightarrow -\infty$  и, соответственно, в бесконечность обращается энергия поля

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V E^2 dV,$$

что противоречит закону сохранения энергии.

Положить  $\varphi_2 \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$  (как в задаче с шаром) нельзя, так как при этом пришлось бы допустить, что  $c_3 = 0$  и считать  $E_2 = 0$  для любых  $r \geq a$ , что не соответствует действительности. Поэтому будем считать, что постоянная  $c_3 \neq 0$ . Конечно, при этом потенциал  $\varphi_2 \rightarrow \infty$ , но это не представляет опасности для закона сохранения энергии, т.к. при этом  $E_2 \rightarrow 0$ . Логарифмическая расходимость потенциала на больших расстояниях – это характерная особенность поля, обладающего осевой симметрией.

Из (IV.34) следует, что  $\varphi_1 \rightarrow c_2$  при  $r \rightarrow 0$ . Поэтому положим  $c_2 = \varphi_0$ , где  $\varphi_0$  – потенциал поля на оси цилиндра. С учетом сделанных замечаний получим:

$$\varphi_1 = -\frac{\pi\rho}{\varepsilon} r^2 + \varphi_0; \quad \varphi_2 = c_3 \ln r + c_4. \quad (\text{IV.39})$$

Для определения постоянных  $c_3$  и  $c_4$  используем граничные условия, которые сводятся к требованию непрерывности потенциала и нормальной составляющей вектора напряженности электрического поля на поверхности цилиндра:

$$\begin{aligned} \varphi_1(a) &= \varphi_2(a), \\ \left(\frac{d\varphi_1}{dr}\right)_{r=a} &= \left(\frac{d\varphi_2}{dr}\right)_{r=a}. \end{aligned}$$

Эти требования выполняются, если

$$\begin{aligned} c_3 &= -\frac{2\pi\rho}{\varepsilon} a^2, \\ c_4 &= -\frac{\pi\rho}{\varepsilon} a^2 + \frac{2\pi\rho}{\varepsilon} a^2 \ln a + \varphi_0. \end{aligned}$$

Окончательно для потенциала находим:

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{\pi\rho}{\varepsilon} r^2, \quad (\text{IV.40})$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \frac{2\pi\rho}{\varepsilon} a^2 \ln \frac{a}{r} - \frac{\pi\rho}{\varepsilon} a^2. \quad (\text{IV.41})$$

#### IV.5. Электрические квадрупольные моменты (заряженный эллипсоид, линейный квадруполь, плоский квадруполь)

В § 11 был рассмотрен вопрос о потенциале поля, создаваемого системой зарядов. Решение этой задачи демонстрирует возможность применения эффективного приближенного метода, который называется разложением по мультиполям. Суть его состоит в том, что потенциал произвольной системы зарядов на большом расстоянии может быть представлен в виде суммы потенциалов точечного заряда, диполя, квадрупольного момента и т.д.

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n .$$

Первое слагаемое  $\varphi_0$  описывает потенциал точечного заряда, расположенного в начале координат и равного алгебраической сумме всех зарядов системы. Второе слагаемое  $\varphi_1$  представляет потенциал поля электрического диполя, помещенного в начале координат. Следующее слагаемое  $\varphi_2$  называется электрическим квадрупольным моментом системы

$$\varphi_2 = \frac{1}{6} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} D_{\alpha\beta} \left( \frac{3x_{\alpha}x_{\beta}}{R^5} - \frac{1}{R^3} \delta_{\alpha\beta} \right), \quad (\text{IV.42})$$

где  $\delta_{\alpha\beta}$  есть  $\delta$  – символ Кронекера,  $D_{\alpha\beta}$  – квадрупольный момент системы зарядов, представляющий собой 9-компонентный симметричный тензор второго ранга. Значение квадрупольного момента зависит от формы заряженного тела, что будет проиллюстрировано далее на трех примерах: однородно заряженный эллипсоид, линейный квадруполь и плоский квадруполь.

##### IV.5.1. Заряженный эллипсоид

Электрический квадрупольный момент заряженного эллипсоида рассматривается во втором томе курса теоретической физики Ландау и Лифшица (Теория поля) [7] в виде задачи после § 41. Решение её занимает всего половину страницы и не содержит никаких вычислительных подробностей. Здесь мы очень подробно рассмотрим вычисления, приводящие к результатам, изложенным в [7].

Тензор квадрупольного момента определяется выражением

$$D_{\alpha\beta} = \sum_k q_k (3x_{\alpha}x_{\beta} - r_k^2 \delta_{\alpha\beta}), \quad (\text{IV.43})$$

где

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{при } \alpha = \beta \\ 0, & \text{при } \alpha \neq \beta \end{cases} .$$

Сначала определим диагональные компоненты тензора (IV.43), учитывая, что  $\delta_{\alpha\beta} = 1$ , т.к.  $\alpha = \beta$ .

Поскольку заряд распределен равномерно, можно в формуле заменить (IV.43) суммирование на интегрирование по объему эллипсоида.

Вычислим компоненту  $D_{xx}$ . Формула (IV.43) принимает вид:

$$D_{xx} = \int dq(3x^2 - r^2).$$

Учитывая, что  $dq = \rho dV$ ,  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , получим:

$$D_{xx} = \rho \int (2x^2 - y^2 - z^2) dx dy dz. \quad (IV.44)$$

Уравнение эллипсоида имеет вид:

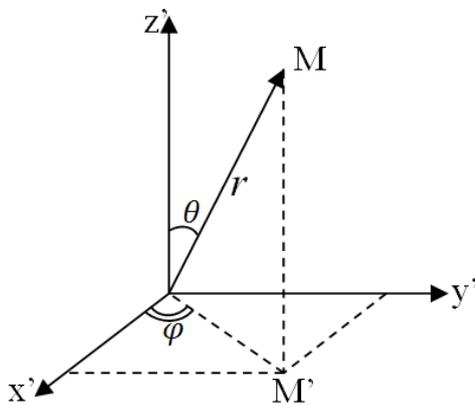
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Направим оси координат вдоль осей эллипсоида. Эти оси являются главными осями тензора  $D_{\alpha\beta}$ . Перейдем к новым координатам:  $x = ax'$ ,  $y = by'$ ,  $z = cz'$ . Тогда уравнение эллипсоида запишется в виде

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 1.$$

Это уже уравнение сферы с радиусом, равным единице.

Перейдем к сферической системе координат (рис. 61):



$$\begin{cases} x' = r \sin \theta \cos \varphi \\ y' = r \sin \theta \sin \varphi \\ z' = r \cos \theta. \end{cases}$$

Элемент объема в новых координатах имеет вид,

$$dV = dx dy dz = abc dx' dy' dz' \quad \text{т.е.}$$

$$dV = abc r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Рис. 61. Сферическая система координат

Подставив эти выражения в формулу (IV.44), получим

$$D_{xx} = \rho abc \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (2a^2 r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - b^2 r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - c^2 r^2 \cos^2 \theta) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Разобьём это выражение на три интеграла. Первый интеграл представляет собой следующее выражение:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (2a^2 r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= 2a^2 \int_0^1 r^4 dr \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Интеграл по  $\theta$  вычисляем с учетом тождества  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ :

$$\int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = - \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta.$$

В интеграле по  $\varphi$  применим формулу понижения степени

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}.$$

Окончательно получаем:

$$I_1 = \frac{8\pi a^2}{15}. \quad (\text{IV.45})$$

Для интеграла  $I_2$  имеем:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (b^2 r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= b^2 \int_0^1 r^4 dr \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Проводя аналогичные вычисления, получим:

$$I_2 = \frac{4\pi b^2}{15}. \quad (\text{IV.46})$$

Остается вычислить третий интеграл

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (c^2 r^2 \cos^2 \theta) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= c^2 \int_0^1 r^4 dr \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi. \end{aligned}$$

По аналогии с предыдущими вычислениями получим:

$$I_3 = \frac{4\pi c^2}{15}. \quad (\text{IV.47})$$

Из (IV.45) – (IV.47) следует, что первая диагональная компонента  $D_{xx}$  тензора квадрупольного момента имеет вид

$$D_{xx} = \rho abc(I_1 - I_2 - I_3) = \rho abc(2a^2 - b^2 - c^2) \frac{4\pi}{15}.$$

Учитывая, что  $q = \rho V = \rho abc \frac{4}{3}\pi$ , окончательно получим выражение для этой компоненты:

$$D_{xx} = \frac{q}{5}(2a^2 - b^2 - c^2). \quad (\text{IV.48})$$

2) Аналогичным образом вычисляем следующую диагональную компоненту квадрупольного момента  $D_{yy}$ :

$$\begin{aligned} D_{yy} &= \rho \int_V (3y^2 - r^2) dV = \rho \int_V (2y^2 - x^2 - z^2) dV, \\ D_{yy} &= \frac{q}{5}(2b^2 - a^2 - c^2). \end{aligned} \quad (\text{IV.49})$$

3) Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} D_{zz} &= \rho \int_V (3z^2 - r^2) dV = \rho \int_V (2z^2 - x^2 - y^2) dV, \\ D_{zz} &= \frac{q}{5}(2c^2 - a^2 - b^2). \end{aligned} \quad (\text{IV.50})$$

4) Далее вычислим недиагональные компоненты тензора (IV.43) с учетом того, что он является симметричным ( $D_{xy} = D_{yx}$ ,  $D_{zx} = D_{xz}$ ,  $D_{yz} = D_{zy}$ ). В этом случае  $\delta_{\alpha\beta} = 0$ , т.к.  $\alpha \neq \beta$ . Для компоненты  $D_{xy}$  находим:

$$D_{xy} = 3\rho \int xy dV = 3\rho abc \int_0^1 r^4 dr \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi.$$

После интегрирования получаем, что  $D_{xy} = D_{yx} = 0$ , поскольку

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi = -\frac{1}{4} \cos 2\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

5) Аналогично вычислим  $D_{zx}$ :

$$D_{zx} = 3\rho \int xz dV = 3\rho abc \int_0^1 r^4 dr \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi.$$

Получаем:  $D_{zx} = D_{xz} = 0$ , т.к.

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

6) Остается вычислить последнюю компоненту:

$$D_{yz} = 3\rho \int yz dV = 3\rho abc \int_0^1 r^4 dr \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi.$$

Получаем:  $D_{yz} = D_{zy} = 0$ , поскольку

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Для проверки сложим все диагональные компоненты, они в сумме дадут нуль:

$$\begin{aligned} \text{Spur} D &= D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} \\ &= \frac{q}{5}(2a^2 - b^2 - c^2) + \frac{q}{5}(2b^2 - a^2 - c^2) + \frac{q}{5}(2c^2 - a^2 - b^2) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

В случае, когда  $a = b = c$ , согласно (IV.48) – (IV.50), все диагональные компоненты тензора (IV.43) обращаются в нуль:  $D_{xx} = D_{yy} = D_{zz} = 0$ , и в целом квадрупольный момент отсутствует. Таким образом, можно различать два случая:

1) если  $D = 0$ , то распределение заряда является сферически симметричным (заряженное тело имеет форму шара);

2) если  $D \neq 0$ , то заряженное тело имеет форму эллипсоида.

Результаты рассмотренной задачи имеют важное значение для ядерной физики. По значениям квадрупольного момента можно судить о распределении заряда, а значит, и о форме атомного ядра.

#### IV.5.2. Линейный квадруполь

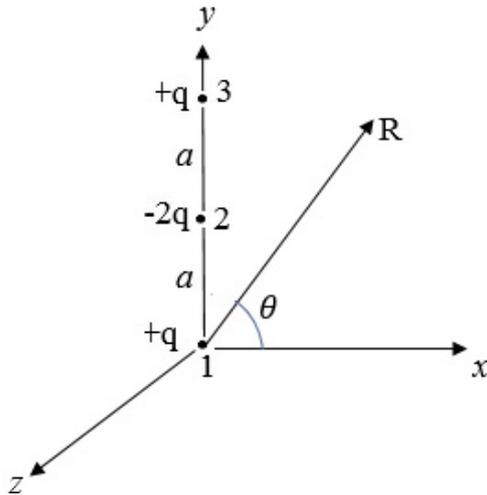


Рис. 62. Линейный квадруполь

Линейный квадруполь (рис. 62) представляет собой систему четырех зарядов  $+q, -2q, +q$ , расположенных вдоль одной линии. В качестве исходной формулы снова используем (IV.43).

1) Рассчитаем  $D_{xx}$ , учитывая, что  $\delta_{\alpha\beta} = 1$ , т.к.  $\alpha = \beta$ .

Из рис. 62 видно, что  $x(1) = 0, x(2) = 0, x(3) = 0$ ;  $r(1) = 0, r(2) = a, r(3) = 2a$ .

Поэтому

$$D_{xx} = \sum_k q_k (3x_k^2 - r_k^2) =$$

$$= q_1 (3 \cdot 0^2 - 0^2) + q_2 (3 \cdot 0^2 - a^2) + q_3 (3 \cdot 0^2 - (2a)^2) =$$

$$= 2qa^2 - 4qa^2 = -2qa^2.$$

Таким образом,

$$D_{xx} = -2qa^2. \quad (IV.51)$$

2) Аналогично рассчитаем  $D_{yy}$ . Из рисунка 62 видно, что  $y(1) = 0, y(2) = a, y(3) = 2a$ ;  $r(1) = 0, r(2) = a, r(3) = 2a$ . Поэтому

$$D_{yy} = \sum_k q_k (3y_k^2 - r_k^2) =$$

$$= q_1 (3 \cdot 0^2 - 0^2) + q_2 (3 \cdot a^2 - a^2) + q_3 (3 \cdot (2a)^2 - (2a)^2) =$$

$$= -4qa^2 + 8qa^2 = 4qa^2,$$

$$D_{yy} = 4qa^2. \quad (IV.52)$$

3) Вычислим  $D_{zz}$ . Снова  $\delta_{\alpha\beta} = 1$ , т.к.  $\alpha = \beta$ .

Из рисунка 62 следует:  $z(1) = 0, z(2) = 0, z(3) = 0; r(1) = 0, r(2) = a, r(3) = 2a$ .

Поэтому

$$\begin{aligned} D_{zz} &= \sum_k q_k (3z_k^2 - r_k^2) = \\ &= q_1(3 \cdot 0^2 - 0^2) + q_2(3 \cdot 0^2 - a^2) + q_3(3 \cdot 0^2 - (2a)^2) = \\ &= 2qa^2 - 4qa^2 = -2qa^2, \\ D_{zz} &= -2qa^2. \end{aligned} \quad (\text{IV.53})$$

При этом

$$\text{Spur} D = D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = -2qa^2 + 4qa^2 - 2qa^2 = 0.$$

4) Определим  $D_{xy}$ . Учтем, что  $\delta_{\alpha\beta} = 0$ , т.к.  $\alpha \neq \beta$ . Получаем:

$$D_{xy} = 3 \sum_k q_k x_k y_k = 3(q_1(0 \cdot 0) + q_2(0 \cdot a) + q_3(0 \cdot 2a)) = 0 = D_{yx}.$$

Таким образом,

$$D_{xy} = D_{yx} = 0. \quad (\text{IV.54})$$

5) Рассчитаем  $D_{yz}$ :

$$\begin{aligned} D_{yz} &= 3 \sum_k q_k y_k z_k = 3(q_1(0 \cdot 0) + q_2(a \cdot 0) + q_3(2a \cdot 0)) = 0 = D_{zy}, \\ D_{yz} &= D_{zy} = 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.55})$$

6) Наконец, определим  $D_{zx}$ :

$$\begin{aligned} D_{zx} &= 3 \sum_k q_k z_k x_k = 3(q_1(0 \cdot 0) + q_2(0 \cdot 0) + q_3(0 \cdot 0)) = 0 = D_{xz}, \\ D_{zx} &= D_{xz} = 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.56})$$

Мы видим, что ненулевые значения имеют только диагональные компоненты квадрупольного момента. Полученные результаты позволяют вычислить потенциал поля линейного квадрупольного ( $\varphi_2$ ) в соответствии с формулой (IV.42).

Из формул (IV.51) – (IV.53) следует, что  $D_{xx} = D_{zz} = -\frac{1}{2}D_{yy} = -\frac{D}{2}$ . Поэтому

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \frac{1}{6}D \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{3x^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \right) + \left( \frac{3y^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{3z^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \right) \right] = \\ &= \frac{D}{6R^3} \frac{1}{2} \left[ - \left( \frac{3x^2}{R^2} - 1 \right) + 2 \left( \frac{3y^2}{R^2} - 1 \right) - \left( \frac{3z^2}{R^2} - 1 \right) \right].\end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases},$$

где  $\theta$  – угол между направлением на точку наблюдения и осью  $x$ , то

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \frac{D}{12R^3} \left[ - \left( \frac{3R^2 \cos^2 \theta}{R^2} - 1 \right) + 2 \left( \frac{3R^2 \sin^2 \theta}{R^2} - 1 \right) - \left( \frac{3 \cdot 0^2}{R^2} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{D}{12R^3} [1 + 2(3\sin^2 \theta - 1) + 1] = \frac{D \sin^2 \theta}{2 R^3}.\end{aligned}\tag{IV.57}$$

Из (IV.57) видно, что потенциал, создаваемый линейным квадруполем, убывает с расстоянием по следующему закону

$$\varphi_2 \sim \frac{1}{R^3}.$$

### IV.5.3. Плоский квадруполь

Рассмотрим систему чередующихся по знаку четырёх электрических зарядов, расположенных в вершинах квадрата со стороной  $a$  (рис. 63).

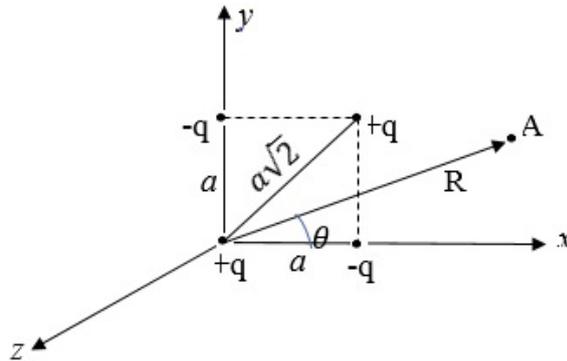


Рис. 63. Плоский квадруполь. А – точка «наблюдения»

Для вычисления компонент квадрупольного момента используем формулу (IV.43).

$$\begin{aligned}
 1) D_{xx} &= \sum_k q_k (3x_k^2 - r_k^2) = -q(3 \cdot 0 - a^2) + q(3a^2 - 2a^2) - q(3a^2 - a^2) \\
 &= qa^2 + qa^2 - 2qa^2 = 0, \\
 D_{xx} &= 0.
 \end{aligned} \tag{IV.58}$$

$$\begin{aligned}
 2) D_{yy} &= \sum_k q_k (3y_k^2 - r_k^2) = -q(3a^2 - a^2) + q(3a^2 - 2a^2) - q(3 \cdot 0 - a^2) \\
 &= -2qa^2 + qa^2 + qa^2 = 0, \\
 D_{yy} &= 0.
 \end{aligned} \tag{IV.59}$$

$$\begin{aligned}
 3) D_{zz} &= \sum_k q_k (3z_k^2 - r_k^2) = -q(3 \cdot 0 - a^2) + q(3 \cdot 0 - 2a^2) - q(3 \cdot 0 - a^2) \\
 &= qa^2 + qa^2 - 2qa^2 = 0, \\
 D_{zz} &= 0.
 \end{aligned} \tag{IV.60}$$

$$\begin{aligned}
 4) D_{xy} &= 3 \sum_k q_k x_k y_k = 3(-q \cdot 0 \cdot a + q \cdot a \cdot a - q \cdot a \cdot 0) = 3qa^2, \\
 D_{xy} &= D_{yx} = 3qa^2.
 \end{aligned} \tag{IV.61}$$

5) Зная компоненты тензора квадрупольного момента, можно определить потенциал согласно (IV.42):

$$\varphi_2 = \frac{2}{6} \left( \frac{3xy}{R^5} - 0 \right) \cdot 3qa^2 = \frac{3xy}{R^5} qa^2.$$

Учитывая, что

$$x_A = R \cos \theta, \quad y_A = R \sin \theta,$$

получаем следующее выражение для  $\varphi_2$ :

$$\varphi_2 = \frac{3qa^2 \sin \theta \cos \theta}{R^3}. \tag{IV.62}$$

Таким образом, в случае плоского квадрупольного момента зависимость  $\varphi_2$  от расстояния такая же, как и для линейного квадрупольного момента:

$$\varphi_2 \sim \frac{1}{R^3}.$$

## Избранные задачи магнитостатики

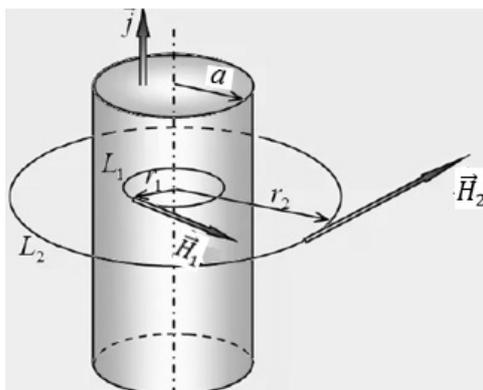


Рис. 64. Цилиндрический проводник

### V.1. Магнитное поле сплошного цилиндрического проводника

Определим напряженность магнитного поля внутри и вне цилиндрического проводника радиуса  $a$ , по которому течет постоянный ток  $J$ , равномерно распределенный по сечению проводника (рис. 64).

Применим к расчету магнитного поля закон полного тока

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int_s j_n dS. \quad (V.1)$$

1) Для контура, выбранного внутри проводника ( $r \leq a$ ), имеем

$$H \cdot 2\pi r_1 = \frac{4\pi}{c} \frac{J}{\pi a^2} \pi r_1^2,$$

откуда следует, что

$$H = \frac{2J}{ca^2} r. \quad (V.2)$$

Таким образом, внутри проводника напряженность магнитного поля растет по линейному закону при удалении от оси цилиндра ( $H \sim r$ ).

2) Для контура, находящегося за пределами проводника ( $r > a$ ), из (V.1) следует:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} J,$$

$$H \cdot 2\pi r = \frac{4\pi J}{c}.$$

Таким образом, вне проводящего цилиндра

$$H = \frac{2J}{cr}, \quad (V.3)$$

т.е. магнитное поле убывает с ростом расстояния до оси цилиндра.

Поведение магнитного поля согласно (V.2) и (V.3) показано на рис. 65.

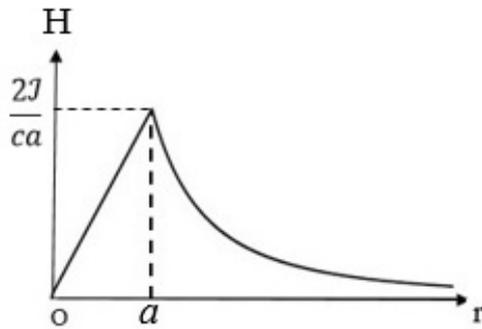


Рис. 65. Зависимость напряженности магнитного поля от расстояния

Нетрудно заметить сходство рисунка 65 с рисунком 55 для напряженности электростатического поля шара, равномерно заряженного по объёму.

### V.2. Магнитное поле тонкого полого проводника

Определим напряженность магнитного поля внутри и вне бесконечного полого цилиндра, по поверхности которого течет равномерно распределенный ток, параллельный его оси.

1) Внутри цилиндра ( $r < a$ ) тока нет, поэтому согласно (V.1)

$$H = 0.$$

2) Вне цилиндра ( $r \geq a$ )

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} J,$$

откуда следует, что

$$H = \frac{2J}{cr}.$$

Этот результат совпадает с (V.3).

График зависимости  $H(r)$  представлен на рисунке 66.

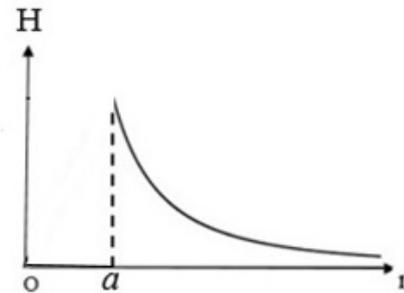


Рис. 66. Магнитное поле полого цилиндра

### V.3. Задача о кабеле

Внутри бесконечной проводящей цилиндрической оболочки радиуса  $b$  находится коаксиальный с ней провод радиуса  $a$  (рис. 67). По оболочке протекает ток  $J$ , который равномерно распределен по ее поверхности. По проводу течет равный, но противоположно направленный ток, равномерно распределенный по сечению провода. Определим зависимость  $H(r)$ , а также вычислим энергию магнитного поля и самоиндукцию единицы длины кабеля.

Очевидно, здесь мы должны совместить результаты вычислений для двух предыдущих объектов: магнитное поле сплошного проводящего цилиндра и полого цилиндрического проводника, по поверхности которого течет ток.

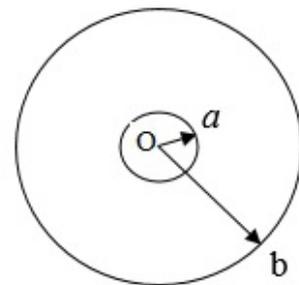


Рис. 67. Сечение кабеля

1) Внутри оболочки ( $0 \leq r \leq b$ ) поле возбуждается только током, текущим по проводу, поэтому

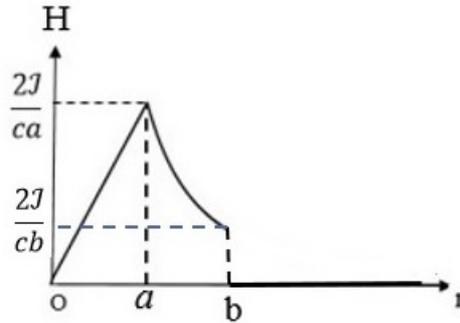
$$\begin{cases} H_1 = \frac{2J}{ca^2} r, & \text{при } 0 \leq r \leq a, \\ H_2 = \frac{2J}{cr}, & \text{при } (a \leq r \leq b). \end{cases} \quad (\text{V.4})$$

Вне оболочки ( $r > b$ ) поля нет,  $H_3 = 0$ , т.к. токи, текущие по проводу и по оболочке, возбуждают вне кабеля равные, но противоположно направленные поля.

При  $r = a$  и  $r = b$  напряженность магнитного поля принимает следующие значения:

$$\begin{cases} H_1 = \frac{2J}{ca}, & \text{при } r = a, \\ H_2 = \frac{2J}{cb}, & \text{при } r = b. \end{cases} \quad (\text{V.5})$$

График зависимости  $H(r)$  представлен на рисунке 68.



**Рис. 68.** Зависимость напряженности магнитного поля от расстояния в кабеле

2) Собственная энергия магнитного поля кабеля имеет вид

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V \vec{H} \vec{B} dV = \frac{\mu}{8\pi} \int_V H^2 dV,$$

где элемент объема  $dV = 2\pi r dr \Delta \ell$ . Разбивая область интегрирования на два интервала, получим с учетом (V.4):

$$W = \frac{\mu}{8\pi} \int_0^a H_1^2 2\pi r dr \Delta \ell + \frac{\mu}{8\pi} \int_a^b H_2^2 2\pi r dr \Delta \ell = \frac{2\mu J^2 \Delta \ell}{2c^2} \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right).$$

В расчете на единицу длины кабеля энергия имеет вид

$$W = \frac{2\mu J^2}{2c^2} \left( \frac{1}{4} + \ell n \frac{b}{a} \right). \quad (\text{V.6})$$

Это выражение можно переписать следующим образом:

$$W = \frac{1}{2c^2} L J^2,$$

где

$$L = 2\mu \left( \frac{1}{4} + \ell n \frac{b}{a} \right) \quad (\text{V.7})$$

есть самоиндукция единицы длины кабеля. Из (V.7) видно, что самоиндукция зависит от размеров кабеля.

#### V.4. Напряженность поля магнитного момента

В § 22 было показано, что вектор-потенциал замкнутого тока на достаточно больших расстояниях от него в первом приближении определяется магнитным моментом этого тока:

$$\vec{A} = \frac{[\vec{M}\vec{R}]}{R^3}.$$

При этом напряженность магнитного поля выражается формулой

$$\vec{H} = \text{rot}\vec{A} = \text{rot} \frac{[\vec{M}\vec{R}]}{R^3} = \frac{1}{R^3} \text{rot}[\vec{M}\vec{R}] + \left[ \text{grad} \frac{1}{R^3} \cdot [\vec{M}\vec{R}] \right]. \quad (\text{V.8})$$

Преобразуем по отдельности каждое слагаемое в (V.8).

1) Учтем, что по определению векторного произведения

$$[\vec{M}\vec{R}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ M_x & M_y & M_z \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Тогда находим:

$$\begin{aligned} \text{rot}_x[\vec{M}\vec{R}] &= \frac{\partial}{\partial y} [\vec{M}\vec{R}]_z - \frac{\partial}{\partial z} [\vec{M}\vec{R}]_y = \frac{\partial}{\partial y} (M_x y - M_y x) - \frac{\partial}{\partial z} (M_z x - M_x z) \\ &= 2M_x. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\text{rot}_y[\vec{M}\vec{R}] = 2M_y, \quad \text{rot}_z[\vec{M}\vec{R}] = 2M_z.$$

Поэтому

$$\text{rot}[\vec{M}\vec{R}] = 2\vec{M}.$$

Тогда

$$\frac{1}{R^3} \text{rot}[\vec{M}\vec{R}] = \frac{2\vec{M}}{R^3}. \quad (\text{V.9})$$

2) Вычислим второе слагаемое в (V.8), учитывая, что двойное векторное произведение раскрывается по правилу:

$$[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c}).$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \left[ \text{grad} \frac{1}{R^3} \cdot [\vec{M}\vec{R}] \right] &= \left[ -\frac{3\vec{R}}{R^5} [\vec{M}\vec{R}] \right] = \frac{3}{R^5} [[\vec{M}\vec{R}] \cdot \vec{R}] = \frac{3}{R^5} \{ \vec{R}(\vec{M}\vec{R}) - \vec{M}R^2 \} \\ &= \frac{3\vec{R}(\vec{M}\vec{R})}{R^5} - \frac{3\vec{M}}{R^3}. \end{aligned} \quad (\text{V.10})$$

Из (V.8)– (V.10) окончательно получаем:

$$\vec{H} = \frac{3(\vec{M}\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{M}}{R^3}. \quad (\text{V.11})$$

Этот результат совпадает с (3.41) с учетом того, что  $B = \mu H, \mu = 1$ . Сравнение с (2.63) показывает, что магнитное поле системы медленно и квазистационарно движущихся зарядов вдали от системы определяется такой же формулой, как электростатическое поле системы покоящихся зарядов. Различие состоит в том, что вместо электрического дипольного момента  $\vec{p}$  в (2.63), в формуле (V.11) стоит магнитный момент системы зарядов  $\vec{M}$ .

## Примеры решения дифференциальных уравнений для линейных квазистационарных токов

**Пример 1.** Процессы в колебательном контуре.

Реальный колебательный контур имеет ненулевые значения омического сопротивления, коэффициента самоиндукции и емкости:  $R \neq 0, L \neq 0, C \neq 0$ . Уравнение (4.44) запишем следующим образом:

$$\frac{1}{c^2} L \frac{d^2 J}{dt^2} + R \frac{dJ}{dt} + \frac{1}{C} J = \frac{d\varepsilon^{\text{стор}}}{dt}. \quad (\text{VI.1})$$

В этом уравнении следует различать две буквы:  $c$  – скорость света и  $C$  – емкость. Пусть включена переменная сторонняя ЭДС:

$$\varepsilon^{\text{стор}} = \varepsilon_0 e^{i\omega t}.$$

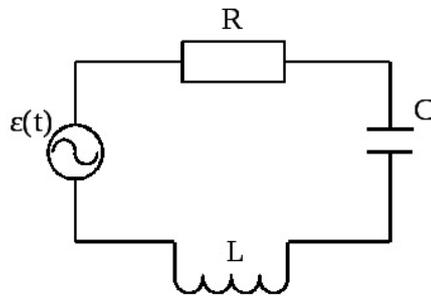


Рис. 69. Реальный колебательный контур

Ищем решение уравнения (VI.1) в виде

$$J = J_0 e^{i\omega t}.$$

Подставляя в (VI.1) производные

$$\frac{dJ}{dt} = i\omega J, \quad \frac{d^2 J}{dt^2} = -\omega^2 J,$$

получаем уравнение

$$-\frac{1}{c^2} \omega^2 L J + i\omega R J + \frac{1}{C} J = i\omega \varepsilon^{\text{стор}},$$

откуда следует, что

$$J = \frac{i\omega \mathcal{E}^{\text{стор}}}{i\omega R - \frac{1}{c^2}\omega^2 L + \frac{1}{C}} = \frac{\mathcal{E}^{\text{стор}}}{R + i\left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\mathcal{E}^{\text{стор}}}{Z}.$$

Здесь

$$Z = R + i\left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (\text{VI.2})$$

есть комплексное электрическое сопротивление,  $\omega L/c^2$  – индуктивное сопротивление,  $1/\omega C$  – емкостное сопротивление. Таким образом,

$$J = \frac{\mathcal{E}^{\text{стор}}}{Z}. \quad (\text{VI.3})$$

Комплексное число  $Z$  можно представить в другом виде, выделив модуль и фазовый множитель:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right)^2} e^{i\delta}, \quad (\text{VI.4})$$

где

$$\text{tg} \delta = \frac{\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (\text{VI.5})$$

Величина  $\delta$  определяет, как мы увидим из дальнейшего анализа, сдвиг фазы между  $\mathcal{E}^{\text{стор}}$  и  $J$ . Подставляя (VI.4) в (VI.3), получаем:

$$J = \frac{\mathcal{E}_0 e^{i\omega t}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right)^2} e^{i\delta}} = \frac{\mathcal{E}_0 e^{i(\omega t - \delta)}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Итак,

$$J = \frac{\mathcal{E}_0 e^{i(\omega t - \delta)}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (\text{VI.6})$$

Рассмотрим частные случаи:

а)  $\delta = 0$ , сдвига фазы нет при

$$\frac{\omega L}{c^2} = \frac{1}{\omega C},$$

т.е. индуктивное и емкостное сопротивления равны;

б)  $\delta > 0$ , ток отстает по фазе от ЭДС при

$$\frac{\omega L}{c^2} > \frac{1}{\omega C},$$

индуктивное сопротивление больше емкостного;

в)  $\delta < 0$ , ток опережает по фазе ЭДС при

$$\frac{\omega L}{c^2} < \frac{1}{\omega C},$$

индуктивное сопротивление меньше емкостного.

**Пример 2.** Изменение тока в колебательном контуре при отключении переменной ЭДС.

В случае свободных колебаний тока  $\mathcal{E}^{\text{стоп}} = 0$ , общее решение ищем в виде

$$J = J_0 e^{i\omega t}.$$

Из (VI.3) получаем  $J \cdot Z = 0$ , но  $J \neq 0$ , следовательно, найти  $\omega$  можно, полагая  $Z = 0$  в (VI.2):

$$R + i \frac{\omega L}{c^2} - \frac{i}{\omega C} = 0.$$

После умножения на  $\left(-\frac{i\omega c^2}{L}\right)$  получаем уравнение

$$\omega^2 - i \frac{c^2 R}{L} \omega - \frac{ic^2}{CL} = 0.$$

Его решение имеет вид

$$\omega_{1,2} = i \frac{c^2 R}{2L} \pm \sqrt{\frac{c^2}{CL} - \left(\frac{c^2 R}{2L}\right)^2} = i\gamma \pm \omega_0, \quad (\text{VI.7})$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c^2}{CL} - \left(\frac{c^2 R}{2L}\right)^2} \quad (\text{VI.8})$$

есть собственная частота.

В случае идеального колебательного контура  $R = 0$  и (VI.7) переходит в

$$\omega = \sqrt{\frac{c^2}{LC}},$$

что дает период колебаний

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{LC}}{c},$$

т.е. формулу Томсона.

Рассмотрим возможные частные случаи решения (VI.7).

а) При выполнении условия

$$\frac{c^2}{CL} > \left(\frac{c^2 R}{2L}\right)^2$$

частота  $\omega_0$  является действительной величиной, тогда

$$J = J_0 e^{-\gamma t + i\omega_0 t},$$

т.е. колебания будут затухающими с частотой  $\omega_0$  и коэффициентом затухания

$$\gamma = \frac{c^2 R}{2L}.$$

б) При условии

$$\frac{c^2}{CL} < \left(\frac{c^2 R}{2L}\right)^2$$

частота  $\omega_0$  – мнимая, тогда можно записать

$$J = J_0 e^{-(\gamma + \omega_0)t},$$

т.е. будет иметь место аperiодическое убывание тока в цепи.

## Заключение

В первой части курса рассмотрены основы феноменологической электродинамики. При этом многие вопросы оказались тесно связанными со школьным курсом физики, в первую очередь, электростатика, магнитостатика, стационарное магнитное поле.

Со страниц школьных учебников на нас «смотрят» картинки, физический смысл которых подробно обсуждается в курсе электродинамики. Когда школьникам необходимо растолковать, как определяется направление силы Лоренца, или силы Ампера, мы вспоминаем правило левой руки. А почему именно левой, а не правой? Школьникам это правило приходится просто запоминать. А на помощь студентам приходит умение определять направление векторного произведения, – тут и «ключик» к ответу на вопрос. А правило буравчика, – откуда оно следует? Почему силовые линии электрического поля «истекают» из положительного заряда и заканчиваются на отрицательном заряде? Почему внутри проводящего заряженного шара напряженность электрического поля равна нулю, а вне шара силовые линии распределяются в пространстве точно так же, как и в случае точечного заряда? Соответствующие картины силовых линий приведены в школьном учебнике, и снова ученику их надо просто усвоить и запомнить. И так далее... И чем дальше мы читаем школьный учебник, тем больше хочется найти глубокое обоснование всем тем утверждениям, которые там приводятся.

Не случайно Сусанна Маврикиевна придавала очень большое значение вопросам электростатики и магнитостатики, и проводила по ним отдельный вводный коллоквиум. Причем проводился он не ради какой-то «отчетности» или баллов в рейтинг студента, а имел вполне конкретную цель – выявить пробелы и недопонимание в вопросах, составляющих базисный уровень освоения электродинамики, сформировавшийся в рамках средней школы и курса общей физики. Наряду с выявлением проблем тут же осуществлялось и «залечивание» пробелов в знаниях студентов. В результате всё становилось на «свои места», достигалось понимание того, что раньше казалось не столь ясным.

Конечно, проводимые ею коллоквиумы (а их по курсу электродинамики было всего шесть!) требовали много времени, которое преподаватель мог бы потратить на совсем другие цели. Однако сама Сусанна Маврикиевна не считала это каким-то «жертвоприношением» и не меняла «сценарий» организации работы по изучению электродинамики. Затраченное время приносило свои плоды: в итоге более 70 % студентов получали за курс оценки «хорошо» и «отлично».

Любопытно, что как уравнения Максвелла, так и целый ряд экспериментальных законов, входящих в содержание классической электродинамики, были установлены ещё до открытия дискретности электрических зарядов.

Электрон появился в физике немногим более 120 лет назад. В 1881 году Герман Гельмгольц пришел к выводу о существовании «атома электричества», анализируя законы электролиза, установленные Фарадеем.

В 1891 г. Джордж Стони (Stoney) предложил термин «электрон» для обозначения единицы элементарного электрического заряда. Наконец, в 1897 году Джозеф Джон Томсон открыл электрон при исследовании катодных лучей.

Тогда и стало ясно, что электрон – это главное «действующее лицо» (наряду с электромагнитным полем) во всех электромагнитных явлениях. Само понятие отрицательного заряда обрело конкретный смысл, на этой основе, чуть позднее, стала понятна и природа электрического тока – оказалось, что носителями тока являются электроны (в рамках первой классической теории электропроводности).

Уже первые главы электродинамики блестяще продемонстрировали возможности применения специального математического аппарата – векторного анализа, вдохнув в него глубокое физическое содержание. Максвелл в свое время отметил: «Если искусство математика позволило экспериментатору заметить, что измеренные им количества связаны необходимыми соотношениями, то физические открытия показали математику новые формы количеств, которые он никогда бы не смог себе представить».

Часть I курса затронула, в первую очередь, достижения XVIII столетия – «века электростатики» и частично XIX столетия – «века электродинамики». Рассмотренные здесь вопросы образуют фундамент, необходимый для понимания более глубоких и интересных разделов электродинамики, которые составляют содержание части II (переменное поле, излучение и распространение электромагнитных волн, основы микроскопической электродинамики, релятивистская электродинамика).

*Л.М. Свирская*

## Библиографический список

1. Бредов, М.М. Классическая электродинамика [Текст]: учеб. пособие / М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин; под ред. И.Н. Топтыгина. – СПб.: Лань, 2003. – 398 с.
2. Власов, А.А. Макроскопическая электродинамика [Текст]: классический университетский учебник / А.А. Власов. – М.: URSS, 2014. – 232 с.
3. Горькавый, Н.Н. Электрический дракон [Текст] / Н.Н. Горькавый. – АСТ, 2017. – 251 с.
4. Измайлов, С.В. Курс электродинамики [Текст]: учебник для физико-математических факультетов пед. ин-тов / С.В. Измайлов. – М.: Учпедгиз, 1962. – 439 с.
5. Карцев, В.П. Приключения великих уравнений [Текст] / В.П. Карцев. – М.: Просвещение, 2007. – 176 с.
6. Ландау, Л.Д. Краткий курс теоретической физики [Текст]: в 2 т. Т. I: Механика. Электродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1969. – 272 с.
7. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика [Текст]: в 10 т. Т. II: Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 2012. – 536 с.
8. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика [Текст]: в 10 т. Т. VIII: Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 2003. – 656 с.
9. Левич, В.Г. Курс теоретической физики [Текст]: в 2 т. / В.Г. Левич. – М.: Физматлит, 1962. – Т. I. – 696 с.; Т. II. – 820 с.
10. Матвеев, А.Н. Электродинамика и теория относительности [Текст]: учебник для пед. ин-тов / А.Н. Матвеев. – М.: Высшая школа, 1964. – 424 с.
11. Мултановский, В.В. Классическая электродинамика [Текст]: учеб. пособие для вузов / В.В. Мултановский. – М.: Дрофа, 2006. – 348 с.
12. Пановский, В. Классическая электродинамика [Текст] / В. Пановский, М. Филипс. – М.: Физматгиз, 1963. – 432 с.
13. Пеннер, Д.И. Электродинамика и специальная теория относительности [Текст]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. факультетов / Д.И. Пеннер, В.А. Угаров. – М.: Просвещение, 1980. – 271 с.
14. Планк, М. Генрих Рудольф Герц [Текст] / М. Планк // Избранные труды. – М.: Наука, 1975. – 788 с.

15. Свирский, М.С. Электронная теория вещества [Текст] / М.С. Свирский. – Челябинск, 1972. – 292 с.
16. Свирский, М.С. Электронная теория вещества [Текст] / М.С. Свирский. – М.: Просвещение, 1980. – 288 с.
17. Смирнов, В.И. Курс высшей математики [Текст]: в 5 т. / В.И. Смирнов. – СПб., 2008, 2010. – Т. II. – 848 с.; Т. III, ч. 2. – 816 с.
18. Тамм, И.Е. Основы теории электричества [Текст] / И.Е. Тамм. – М.: Физматлит, 2003. – 616 с.
19. Терлецкий, Я.П. Электродинамика [Текст] / Я.П. Терлецкий, Ю.П. Рыбаков. – М.: Высшая школа, 1990. – 352 с.
20. Фейнман, Р. Фейнмановские лекции по физике [Текст]. Т. 6: Электродинамика / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс; пер. с англ. – 3-е изд. – М. – Эдиториал УРСС, 2004. – 349 с.

*Учебное издание*

Горяинова Сусанна Маврикиевна  
Свирская Людмила Моисеевна

## **ЭЛЕКТРОДИНАМИКА**

Курс лекций:  
в двух частях

*Часть I*

ISBN 978-5-907210-33-2

ISBN 978-5-907210-34-9

Работа рекомендована РИС ЮУрГГПУ  
Протокол № 19, 2019

Редактор О.Э. Карпенко

Издательство ЮУрГГПУ  
454080, Челябинск, пр. Ленина, 69

Подписано в печать 30.04.2019

Формат  $84 \times 108 \frac{1}{16}$ . Объем 6,41уч.-изд. л. 21,84 усл. п.л.

Тираж 100 экз. Заказ № 347

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ЮУрГГПУ  
454080, Челябинск, пр. Ленина, 69

