МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методические особенности изучения темы «Тригонометрические функции» в средней школе в условии реализации ФГОС

Выпускная квалификационная работа по направлению 44.03.05

Педагогическое образование (два профиля подготовки)

Направленность программы бакалавриата

«Математика. Информатика»

Форма обучения очная (дневная)

Проверка на объем заимствований:
64 % авторского текста
Работа рекомендована к защите
рекомендована/не рекомендована
«25» мая 2020 г.
и. о. зав. кафедрой ММОМ
Шумакова Екатерина Олеговна

Выполнил (а):
Студент (ка) группы ОФ-513-204-5-1
Плешкова Татьяна Александровна

Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук, доцент
Шумакова Екатерина Олеговна

Челябинск
2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Тригонометрия — это раздел математики, который изучает тригонометрические функции, их свойства, связи и их использование в геометрии. Тригонометрические расчеты используются практически во всех областях геометрии, физики и техники.

Тригонометрические функции изучаются во время алгебры и начала анализа средней школы. Существует несколько разных подходов к изучению этой темы в школьном курсе, и учителя, особенно начинающие, могут быть легко спутаны с тем, какой подход будет наиболее подходящим. Основные проблемы с тригонометрией в школьных курсах также возникают из-за несоответствия между достаточно большим объемом контента и относительно небольшим количеством часов, посвященных изучению этой темы. Все вышеперечисленное определяет выбор темы для данной работы.

Что касается актуальности работы, то следует сказать, что «тригонометрия» школьного курса математики традиционно является наиболее сложной частью для учащихся. Стоит также отметить огромное значение тригонометрического материала для развития мышления учащихся, а также его роль в дальнейшем образовании и практической деятельности.

Отметим, что тригонометрия уже некоторое количество десятков лет не изучается в общеобразовательной школе, как самостоятельный учебный предмет. При этом постоянно происходит урезание тригонометрии в содержательном плане, что отрицательно воздействует на качество усвоения ее основных идей и методов. Элементы тригонометрии лишь только маленькими частями входят в геометрию 8 и 9 классов, а весь основной материал изучается в 10, 11 классах, став для учеников достаточно абстрактным разделом алгебры.

В то же время тригонометрический материал входит в ЕГЭ (ОГЭ) и используется при проведении всевозможных олимпиад и конкурсов. Таким образом учащиеся нуждаются в глубоком знании тригонометрии.

Объектом исследования является процесс изучения тригонометрии в средней школе.

Предмет исследования — методика изучения тригонометрических функций в курсе алгебры и начала анализа в средней школе.

Гипотеза — если разработать и реализовать систему задач по тригонометрии, классифицированных по типам, то это способствует повышению качества знаний школьников по тригонометрии.

Таким образом, основной целью данной работы является разработать систему задач по тригонометрии для средней школы.

Для достижения поставленной цели, определенны следующие задачи:

— изучить историю тригонометрии;
— собрать и систематизировать теоретический материал по данной теме;
— рассмотреть федеральные государственные образовательные стандарты;
— провести сравнительный анализ учебно-методических комплексов по данному разделу;
— рассмотреть задачи курса тригонометрии в средней школе;
— систематизировать задачи данного курса.

Данная выпускная квалификационная работа состоит из введения, теоретической части (глава 1), содержащей историю развития тригонометрии, основные понятия и вывод формул тригонометрии, также в первой главе рассматриваются свойства тригонометрических функций; практической части (глава 2), в которой рассматриваются федеральные государственные образовательные стандарты, представлен анализ учебно-методических комплексов, методика изучения основных тем раздела тригонометрии и система задач по данному разделу, заключения и списка использованной литературы.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ

1.1 История развития тригонометрии

Термин «тригонометрия» буквально от древнегреческого означает «измерение треугольников». Впервые он появился в 1595 году как название книги немецкого математика Бартоломея Питиска, а сама наука использовалась в древние времена для расчетов в астрономии, архитектуре и геодезии.

Древнегреческие математики использовали в своих конструкциях хордовую технику для измерения дуг окружности. Перпендикулярно хорде, опущенной от центра круга, половина дуги и хорд опираются на него. Половина хорды, разделенная пополам, представляет синус половинного угла, и поэтому функция синуса также известна как «половина хорды». С этой зависимостью древнегреческий математик также знал значительное количество тригонометрических тождеств и известных сегодня теорем, но в эквивалентной хордовой форме. Хотя в работах Евклида и Архимеда нет тригонометрии в точном смысле этого слова, их предложения представлены в геометрической форме, эквивалентной определенной тригонометрической формуле. Теорема Архимеда о разделении хорды эквивалентна формуле синуса суммы и разности углов.

Гиппарх является первым, кто составил таблицу соответствующих значений дуг и хорд для разных углов. Постоянное использование всего круга в 360° определялось главным образом благодаря Гиппарху и его таблице аккордов. Гиппарх, возможно, рассматривал такое разделение от Гипсикла, которое ранее делило день на 360 частей, хотя вавилонские астрономы могли предложить такое разделение дня.

Позже Клавдий Птолемей в «Альмагесте» расширил «хорды Гиппарха в окружности». Тринадцать книг «Альмагеста» — самая важная тригонометрическая работа всех древностей. Теорема, которая была центром при вычислении аккорда Птолемея, теперь также называется теоремой Птолемея, которая говорит, что сумма произведений противоположных сторон выпуклого вписанного четырехугольника равна сумме диагоналей. Отдельный случай теоремы Птолемея появился как 93-е предложение Евклида «Данные» [22].

Теорема Птолемея стремится достичь эквивалентности формул с четырьмя суммами и разностями для синуса и косинуса. Позже Птолемей вывел формулу половинного угла. Птолемей использовал эти результаты для создания своих тригонометрических таблиц, хотя, возможно, эти таблицы взяты из работы Гиппарха.

Замена хорд синусом была главным достижением средневековой Индии. Такая замена позволила ввести различные функции, касающиеся сторон и углов прямоугольного треугольника. Отсюда следует, что в Индии фундамент тригонометрии был заложен, как учение о тригонометрических величинах.

Индийские учёные использовали различные тригонометрические соотношения, в том числе и теми, которые в современной форме выражаются как:

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,
- $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$,
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$.

Индийцы также знали шаблоны для разных углов. Тригонометрия необходима для астрономических расчетов, которые выполнены в виде таблиц. Первая таблица пустот находится в Сурья-Сиддханте и Ариабхате. Позже ученые составили более подробные таблицы: например, Бхаскара дает таблицу синусов через 1°.

В шестнадцатом веке математики Южной Индии добились больших успехов в суммировании бесконечных числовых рядов. По-видимому, они были вовлечены в эти исследования в поисках способов расчета более точных значений для числа π [22].

1.2 Свойства тригонометрических функций

Прежде тригонометрические функции были связаны с соотношениями сторон в прямоугольном треугольнике. Их единственным аргументом является угол (один из острых углов этого треугольника).

- синус — отношение противолежащего катета к гипотенузе;
- косинус — отношение прилежащего катета к гипотенузе;
- тангенс — отношение противолежащего катета к прилежащему;
- котангенс — отношение прилежащего катета к противолежащему;
- секанс — отношение гипотенузы к прилежащему катету;
- косеканс — отношение гипотенузы к противолежащему катету.

Эти определения дают возможность вычислить значения функций для острых углов, то есть от 0° до 90° (от 0 до $\frac{\pi}{2}$ радиан). В XVIII веке Леонард Эйлер дал более общие определения, увеличив область определения этих функций на всю числовую ось. Рассмотрим в прямоугольной системе координат единичную окружность (рисунок 1) и отложим от горизонтальной оси угол θ. Точку пересечения построенной стороны угла с окружностью обозначим A. Тогда:

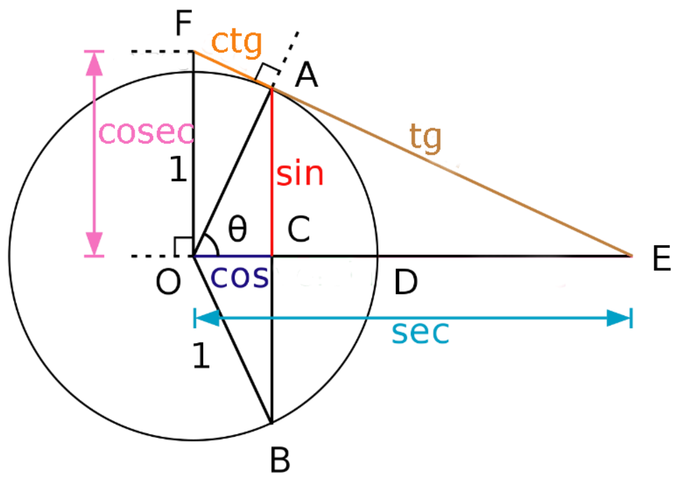

Рисунок 1

- синус угла θ определяется как ордината точки A;
- косинус — абсцисса точки A;

- тангенс — отношение синуса к косинусу;
- котангенс — отношение косинуса к синусу;
- секанс — величина, обратная косинусу;
- косеканс — величина, обратная синусу.

Для острых углов новые определения совпадают с прежними [22].

Свойства функции синус (рисунок 2):

— область определения функции — множество всех действительных чисел: $D(y) = R$;

— множество значений — промежуток от -1 до 1: $E(y) = [-1; 1]$;

— функция $y = \sin(\alpha)$ является нечетной: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$;

— функция периодическая, наименьший положительный период равен 2π: $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$;

— график функции пересекает ось Ox при $\alpha = \pi n, n \in Z$;

— промежутки знакопостоянства: $y > 0$ при $(2\pi n + 0;\ \pi + +2\pi n), n \in \mathbb{Z}$ и $y < 0$ при $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n), n \in Z$;

— функция непрерывна и имеет производную при любом значении аргумента: $(\sin\alpha)' = \cos\alpha$;

— функция $y = \sin(\alpha)$ возрастает при $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + +2\pi n\right), n \in Z$, и убывает при $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ 3\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$;

— функция имеет минимум при $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ и максимум при $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ [1].

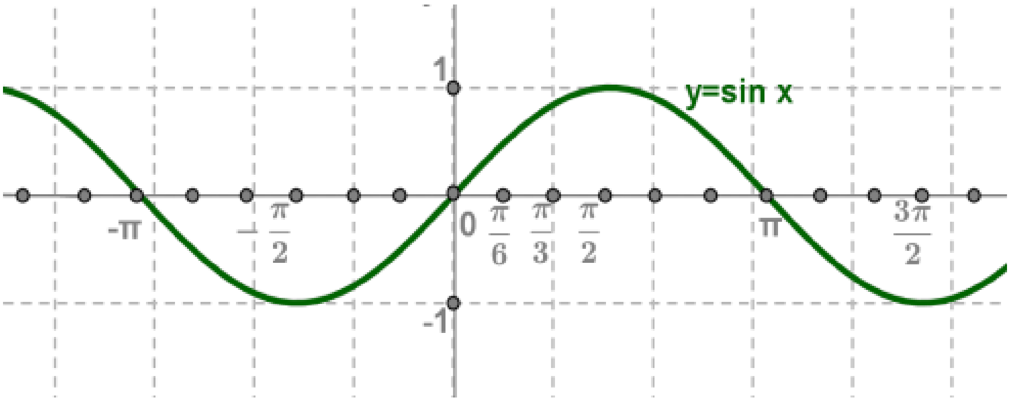

Рисунок 2

Свойства функции косинус (рисунок 3):

— область определения функции — множество всех действительных чисел: $D(y) = R$;

— множество значений — промежуток от -1 до 1: $E(y) = [-1; 1]$;

— функция $y = \cos(\alpha)$ является четной: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$;

— функция периодическая, наименьший положительный период равен 2π: $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$;

— график функции пересекает ось Ox при $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

— промежутки знакопостоянства: $y > 0$ при $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + +2\pi n\right), n \in Z$ и $y < 0$ при $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 3\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$;

— функция непрерывна и имеет производную при любом значении аргумента: $(\cos\alpha)' = -\sin\alpha$;

— функция $y = \cos(\alpha)$ возрастает при $\alpha \in (-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n)$, $n \in Z$, и убывает при $\alpha \in (2\pi n;\ \pi + 2\pi n), n \in Z$;

— функция имеет минимум при $\alpha = \pi + 2\pi n, n \in Z$ и максимум при $\alpha = 2\pi n, n \in Z$ [1].

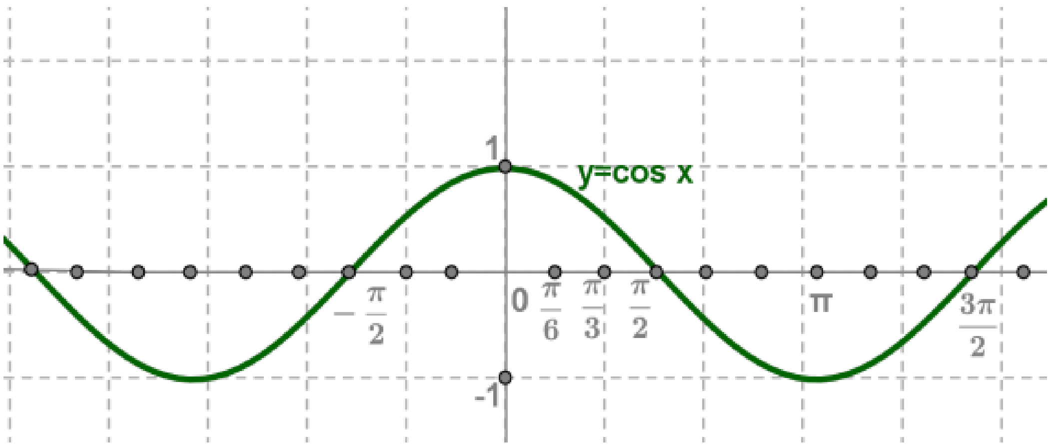

Рисунок 3

Свойства функции тангенс (рисунок 4):

— область определения функции — множество всех действительных чисел: $D(y) = R$, кроме чисел $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

— множество значений — множество всех действительных чисел: $E(y) = R$;

— функция $y = \operatorname{tg}(\alpha)$ является нечетной: $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$;

— функция периодическая, наименьший положительный период равен π: $\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}\alpha$;

— график функции пересекает ось Ox при $\alpha = \pi n, n \in Z$;

— промежутки знакопостоянства: $y > 0$ при $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$ и $y < 0$ при $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right), n \in Z$;

— функция непрерывна и имеет производную при любом значении аргумента из области определения: $(\operatorname{tg}\alpha)' = \frac{1}{\cos^2\alpha}$;

— функция $y = \operatorname{tg}(\alpha)$ возрастает при $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$ [1].

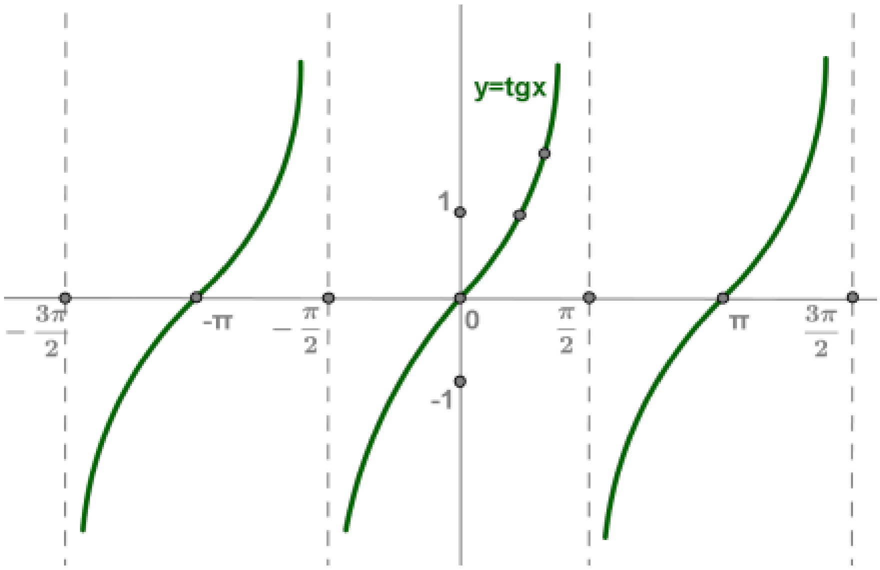

Рисунок 4

Свойства функции котангенс (рисунок 5):

— область определения функции — множество всех действительных чисел: $D(y) = R$, кроме чисел $\alpha = \pi n, n \in Z$;

— множество значений — множество всех действительных чисел: $E(y) = R$;

— функция $y = \operatorname{ctg}(\alpha)$ является нечетной: $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$;

— функция периодическая, наименьший положительный период равен π: $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg}\alpha$;

— график функции пересекает ось Ox при $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

— промежутки знакопостоянства: $y > 0$ при $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$ и $y < 0$ при $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi(n+1)\right), n \in Z$;

— функция непрерывна и имеет производную при любом значении аргумента из области определения: $(\operatorname{ctg}\alpha)' = -\frac{1}{\sin^2\alpha}$;

— функция $y = \operatorname{ctg}(\alpha)$ убывает при $\alpha \in (\pi n;\ \pi(n+1)),\ n \in Z$ [1].

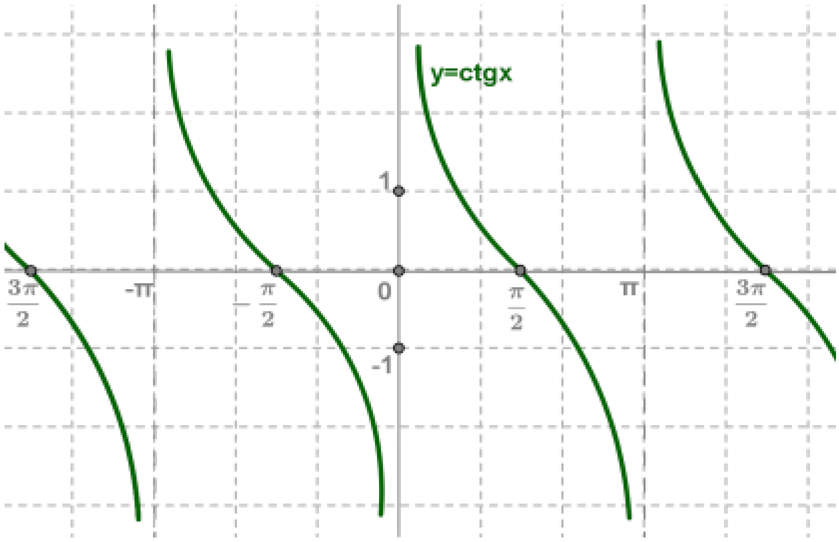

Рисунок 5

1.3 Основные формулы тригонометрии

В данном параграфе по порядку перечислим все главные тригонометрические формулы, которых достаточно для решения большинства заданий тригонометрии. Для удобства запоминания и применения будем объединять формулы по предназначению.

1. Основные тригонометрические тождества.

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, сумма квадратов синуса и косинуса одного угла тождественно равна единице.

Доказательство: воспользуемся единичной окружностью (рисунок 6). Пусть начальная точка A имеет координаты (1;0). После поворота на угол α точка A переходит в точку A_1, которая по определению имеет координаты $(\cos\alpha\,;\sin\alpha)$. Более того, точка A_1 лежит на единичной окружности, следовательно, ее координаты должны удовлетворять уравнению окружности, которое имеет вид $x^2 + y^2 = 1$. То есть, должно быть справедливо равенство $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Таким образом, тождество доказано для любых углов поворота α.

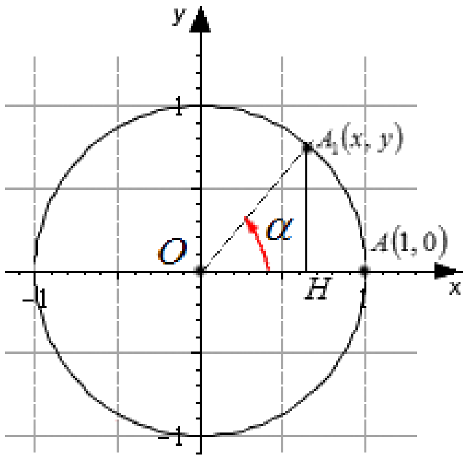

Рисунок 6

- $\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \text{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, тангенсом угла называют отношение синуса к косинусу этого угла, а котангенсом – отношение косинуса к синусу.

По определению синус есть ордината y, косинус есть абсцисса x, тангенс — отношение ординаты к абсциссе, то есть, $\text{tg}\,\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, а котангенс — отношение абсциссы к ординате, то есть, $\text{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

- $\text{tg}\alpha \cdot \text{ctg}\alpha = 1$, тангенс и котангенс одного угла, при котором они имеют смысл, есть взаимно обратные числа.

По определению $\text{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}$ и $\text{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y}$, отсюда $\text{tg}\alpha \cdot \text{ctg}\alpha = \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = 1$.

- $\text{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}, 1 + \text{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, сумма квадрата тангенса угла и единицы равна числу, обратному квадрату косинуса этого угла, также сумма единицы и квадрата котангенса угла равна числу, обратному квадрату синуса этого угла.

Доказать формулы можно, опираясь на основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Если разделить обе части этого равенства на

$\cos^2 \alpha$,то мы получаем формулу $\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$. Если же обе части равенства разделить на $\sin^2 \alpha$, то получим $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ [3].

2. Формулы приведения.

Существует много формул приведения, вам не нужно помнить все. Существует мнемоническое правило, позволяющее легко применять формул приведения, состоит оно из трех этапов:

1. Сначала аргумент исходной функции представляется в виде $\pm\alpha + 2\pi n, \frac{\pi}{2} \pm \alpha + 2\pi n, \pi \pm \alpha + 2\pi n$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha + 2\pi n$, при этом угол α должен быть от 0 до 90 градусов. Это уточнение про угол очень важно, так как для других мнемоническое правило может приводить к неверным результатам.

2. Затем определяется знак, который имеет исходная функция. Функция в правой части записываемой формулы приведения будет иметь такой же знак.

3. Наконец, для углов $\pm\alpha + 2\pi n$ и $\pi \pm \alpha + 2\pi n$ название исходной функции сохраняется, а для углов, $\frac{\pi}{2} \pm \alpha + 2\pi n$ и $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha + 2\pi n$ название исходной функции меняется на «кофункцию» [21].

Пример: используя мнемоническое правило, запишем формулы приведения для $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + 2\pi n\right)$ и $\mathrm{tg}(\pi - \alpha + 2\pi n)$, считая угол α углом первой четверти.

Решение: первый шаг правила делать не надо, так как углы под знаками тригонометрических функций уже записаны в нужном виде. Определим знак функций $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + 2\pi n\right)$ и $\mathrm{tg}(\pi - \alpha + 2\pi n)$. При условии, что α – угол первой четверти, угол $\frac{\pi}{2} - \alpha + 2\pi n$ тоже является углом первой четверти, а угол $\pi - \alpha + 2\pi n$ – углом второй четверти. Косинус в первой четверти имеет знак плюс, а тангенс во второй четверти имеет знак минус. На этом этапе искомые формулы будут иметь вид

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + 2\pi n\right) = +$ и $\operatorname{tg}(\pi - \alpha + 2\pi n) = -$. Теперь можно переходить к заключительному шагу мнемонического правила.

Так как аргумент функции косинус имеет вид $\frac{\pi}{2} - \alpha + 2\pi n$, то название функции нужно поменять на кофункцию, то есть, на синус. А аргумент тангенса имеет вид $\pi - \alpha + 2\pi n$, следовательно, название функции нужно оставить прежним. В итоге имеем $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + 2\pi n\right) =$
$= +\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}(\pi - \alpha + 2\pi n) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Ответ: $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha + 2\pi n) = \sin\alpha$ и $\operatorname{tg}(\pi - \alpha + 2\pi n) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Перечислим некоторую часть формулы приведения для синуса, косинуса, тангенса и котангенса:

- $\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha$;
- $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha + 2\pi n) = \cos\alpha$;
- $\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha$;
- $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha + 2\pi n) = -\sin\alpha$;
- $\operatorname{tg}(\alpha + 2\pi n) = \operatorname{tg}\alpha$;
- $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha + 2\pi n) = -\operatorname{ctg}\alpha$;
- $\operatorname{ctg}(\alpha + 2\pi n) = \operatorname{ctg}\alpha$;
- $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} + \alpha + 2\pi n) = -\operatorname{tg}\alpha$.

3. Формулы сложения.

- $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Доказательство: рассмотрим единичную окружность. Пусть точки A_1 и A_2 получены в результате поворота начальной точки A с координатами (1; 0) вокруг точки O на углы α и β соответственно. Тогда угол между векторами $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}$ равен $(\alpha - \beta) + 2\pi n$, либо $2\pi - (\alpha - \beta) + 2\pi n$, где n — любое целое число. (рисунок 7)

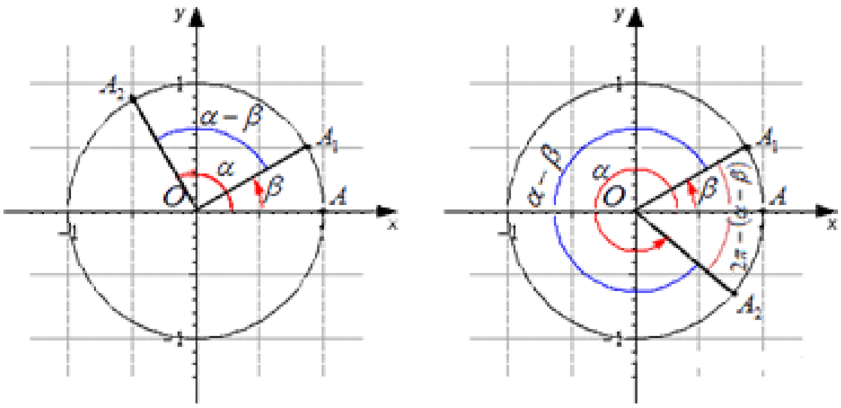

Рисунок 7

По определению синуса и косинуса, точки A_1 и A_2 имеют координаты $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ и $(\cos\beta, \sin\beta)$ соответственно. Тогда $\overrightarrow{OA_1} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ и $\overrightarrow{OA_2} = (\cos\beta, \sin\beta)$. Длины этих векторов равны единице, так как они равны радиусу единичной окружности [3].

Теперь запишем скалярное произведение этих векторов. $\left(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}\right) = |\overrightarrow{OA_1}| \cdot |\overrightarrow{OA_2}| \cdot \cos\left(\overrightarrow{OA_1, OA_2}\right) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha-\beta)$, а также в координатах $\left(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}\right) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. Отсюда получаем равенство $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Доказательство:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

Доказательство: воспользуемся формулой приведения

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right).$$

Тогда $\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)\cos\beta + \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

- $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$

Доказательство:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

- $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$

Доказательство:

Вспомним, что тангенс – это отношение синуса к косинусу, так $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$. Далее разделим числитель и знаменатель полученной дроби на $\cos\alpha\cos\beta$, получаем: $\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=$

$$=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\ [3].$$

- $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$

Доказательство: $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}(\alpha+(-\beta))=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$

- $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{-1+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}.$

Доказательство: $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}=$

$$=\frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}{\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}=\frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}-1}{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}=\frac{-1+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}.$$

- $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{-1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}.$

Доказательство: $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\operatorname{ctg}\big(\alpha+(-\beta)\big)=\frac{-1+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}(-\beta)}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}(-\beta)}=$

$$=\frac{-1-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}.$$

4. Формулы двойного, тройного угла и т.д..

- $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$

Доказательство следует из формул сложения. Если угол β заменить на угол α, то получим

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha,$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1.$$

Первая формула доказывается по аналогии с прошлой формулой: $\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

Следующие две формулы косинуса двойного угла сводятся к первой формуле, если в них единицу заменить на сумму квадратов синуса и косинуса на основе основного тригонометрического тождества $\sin \alpha + + \cos \alpha = 1$. Тогда $1 - 2\sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - - \sin^2 \alpha$ и $2\cos^2 \alpha - 1 = 2\cos^2 \alpha - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

- $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

Доказательство: $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} =$
$= \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

- $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2\operatorname{ctg} \alpha}$.

Доказательство: $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{2\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin^2 \alpha}}{\frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \frac{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1}{2\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} =$
$= \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2\operatorname{ctg} \alpha}$.

- $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha, \sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha.$

Доказательство: $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = = 2\sin \alpha \cos \alpha \cos \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)\sin \alpha = 3\sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha$.

Если в полученной формуле $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha$ заменив $\cos^2 \alpha$ на $1 - \sin^2 \alpha$, то она примет вид $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$.

- $\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3\sin^2 \alpha \cos \alpha, \cos 3\alpha = -3\cos \alpha + 4\cos^3 \alpha.$

Доказательство аналогично прошлому пункт: $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)\cos \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha \sin \alpha = = \cos^3 \alpha - 3\sin^2 \alpha \cos \alpha$. Заменив $\sin^2 \alpha$ на $1 - \cos^2 \alpha$, формула примет вид
$$\cos 3\alpha = -3\cos \alpha + 4\cos^3 \alpha.$$

$$\bullet \quad \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Доказательство: $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \frac{3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha}{\cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha} = \frac{\frac{3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}}{\frac{\cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha}{\cos^3\alpha}} =$

$= \frac{3\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}}{1 - 3\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}.$

$$\bullet \quad \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}.$$

Доказательство: $\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{\cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha}{3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha} =$

$= \frac{\frac{\cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha}{\sin^3\alpha}}{\frac{3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha}{\sin^3\alpha}} = \frac{\frac{\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha} - 3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{3\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - 1} = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}.$

Для вывода формул четверного угла можно представить 4α как $2 \cdot 2\alpha$, после чего поочередно два раза воспользоваться формулами двойного угла. Для формул пятерного угла можно представить 5α как $3\alpha + 2\alpha$, после чего использовать формулы сложения, а также формулы тройного и двойного угла. Подобным образом можно вывести и иные формулы кратных углов. Впрочем, они используются относительно редко и в них нет особенной надобности [21].

5. Формулы половинного угла.

$$\bullet \quad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}.$$

Доказательство: выводится из формулы косинуса двойного угла вида $\cos\alpha = 1 - 2 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}$. Разрешив это равенство относительно $\sin^2\frac{\alpha}{2}$, получаем формулу половинного угла для синуса $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$.

$$\bullet \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}.$$

Доказательство выводится из формулы косинуса двойного угла вида $\cos\alpha = 2 \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$. Разрешив это равенство относительно $cos^2\frac{\alpha}{2}$, получаем формулу половинного угла для косинуса $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$.

$$\bullet \quad \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}.$$

Для доказательства воспользуемся основным тригонометрическим тождеством вида $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, а также вышеперечисленными формулами. Получаем $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

- $\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$.

Для доказательства воспользуемся основным тригонометрическим тождеством вида $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, а также вышеперечисленными формулами [21]. Получаем $\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{1+\cos\alpha}{2}}{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$.

6. Формулы понижения степени.

- $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

Доказательство: формула понижения для квадрата синуса напрямую следуют из формул двойного угла вида $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$. Достаточно разрешить относительно синуса в квадрате, получим $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

- $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

Доказательство: формула понижения для квадрата косинуса напрямую следуют из формул двойного угла вида $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$. Достаточно разрешить относительно косинуса в квадрате, получим. $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

- $\sin^3\alpha=\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4}$.

Доказательство: если формулы тройного угла вида $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$, разрешить относительно синуса в кубе, то получим формулу понижения степени $\sin^3\alpha=\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4}$.

- $\cos^3\alpha=\frac{3\cos\alpha+\cos 3\alpha}{4}$.

Доказательство: если формулы тройного угла вида $\cos 3\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha$, разрешить относительно косинуса в кубе, то получим формулу понижения степени $\cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}$.

- $\sin^4\alpha = \frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{8}$.

Доказательство: дважды обратимся к формуле понижения синуса в квадрате $\sin^4\alpha = (\sin^2\alpha)^2 = \left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha}{4} =$

$= \frac{1 - 2\cos 2\alpha + \frac{1+\cos 4\alpha}{2}}{4} = \frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{8}$.

- $\cos^4\alpha = \frac{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{8}$.

Доказательство: дважды обратимся к формуле понижения косинуса в квадрате $\cos^4\alpha = (\cos^2\alpha)^2 = \left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha}{4} =$

$= \frac{1 + 2\cos 2\alpha + \frac{1+\cos 4\alpha}{2}}{4} = \frac{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{8}$.

7. Формулы суммы и разности тригонометрических функций.

- $\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Доказательство: для вывода формулы можно использовать формулы сложения. Также потребуется представление углов α и β в виде $\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$ и $\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$. Такое представление правомерно, так как $\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \alpha$ и $\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = \beta$ для любых углов α и β.

Сначала в сумме $\sin\alpha + \sin\beta$ заменяем α на $\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$, а β на $\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$, при этом получаем $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$. Теперь к $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ применяем формулу синуса суммы, а к $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ – формулу синуса разности: $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\right.$

$\cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2 \times$
$\times \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

- $$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Доказательство: нужно проделать аналогичные действия $\sin\alpha -$ $- \sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot\right.$ $\left.\cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2 \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

- $$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Доказательство: нужно проделать аналогичные действия $\cos\alpha +$ $+ \cos\beta = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot\right.$ $\left.\cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

- $$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Доказательство: нужно проделать аналогичные действия $\cos\alpha -$ $- \cos\beta = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot\right.$ $\left.\cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = -2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

8. Формулы произведения синусов, косинусов и синуса на косинус.

- $$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)).$$

Доказательство: для вывода потребуются формулы косинуса суммы и косинуса разности, сложив их получим: $\cos(\alpha+\beta) + + \cos(\alpha-\beta) =$ $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$, откуда следует, что $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2 \cdot \cos\alpha\cos\beta$ и $\cos\alpha\cos\beta =$
$= \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos\alpha + \beta)$.

- $$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)).$$

Доказательство: если формулу косинуса суммы переписать как $-\cos(\alpha+\beta) = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$, после чего к этому равенству прибавим равенство $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$, то легко получается формула произведения синусов вида $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - -\beta) - \cos(\alpha + \beta))$.

- $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$.

Доказательство: достаточно сложить левые и правые стороны формул синуса суммы и синуса разности, получится: $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$, откуда следует, что $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$ [21].

ГЛАВА 2. МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ В КУРСЕ «АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА» В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

2.1 Анализ учебно-методических комплексов по алгебре и началам анализа в средней школе в условии реализации ФГОС

Подробнее рассмотрим, что такое ФГОС, их значения и цели. Федеральные государственные образовательные стандарты (далее ФГОС) — это совокупность требований, обязательных при реализации основных образовательных программ начального общего, основного общего, среднего (полного) общего, начального профессионального, среднего профессионального и высшего профессионального образования образовательными учреждениями, имеющими государственную аккредитацию [23].

Федеральные государственные образовательные стандарты, являются законами со всеми вытекающими последствиями. Они в обязательном порядке должны соблюдаться всеми без исключения образовательными учреждениями.

Давайте подробнее разберемся, что обеспечивают федеральные государственные образовательные стандарты:

— единство образовательного пространства Российской Федерации. Проще говоря, в каком городе или регионе вы бы ни жили, учащиеся везде будет учиться по одинаковым программам, и получать одинаковый багаж знаний;

— развитие духовных и нравственных качеств и высокого уровня воспитания;

— вариативность содержания образовательных программ. Знания даются одинаковые, но подход к образовательному процессу может отличаться. Главное, выполнить цель: учащиеся должны получить набор знаний, установленный на государственном уровне;

— преемственность основных образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего, начального профессионального, среднего профессионального и высшего профессионального образования. Говоря доступным языком, детский сад занимается подготовкой детей к начальной школе, которая, в свою очередь, готовит в среднюю школу и так далее. На каждом этапе жизненного пути ребенок должен получать весь необходимый объем знаний для беспрепятственного продвижения вверх по лестнице образования [24].

Важно отметить, что ФГОС — это основа всех образовательных программ.

Используя ФГОС, специалисты пишут учебники и методические пособия. По ФГОС решают, какие задания будут на ЕГЭ и как проводить аттестации. По ним определяют, сколько времени выделить на тот или иной предмет [24]. одним словом, ФГОС — это база образовательного процесса.

Для каждого уровня образования имеется собственный государственный стандарт. Существует 12 видов ФГОС:

1. ФГОС дошкольного образования. Работает в детских садах.
2. ФГОС начального общего образования. Разработан для 1-4 классов.
3. ФГОС основного общего образования. Разработан для 5-9 классов.
4. ФГОС среднего общего образования. Разработан для 10-11 классов.

Для магистратуры, бакалавриата, ординатуры также разработаны федеральные образовательные стандарты. Также существуют ФГОС для учащихся с ограниченными возможностями здоровья [23]. Каждый стандарт включает 3 вида требований:

1. Требования к структуре основных образовательных программ, в том числе требования к соотношению частей основной образовательной программы и их объёму, а также к соотношению обязательной части

основной образовательной программы и части, формируемой участниками образовательного процесса.

2. Требования к условиям реализации основных образовательных программ, в том числе кадровым, финансовым, материально-техническим и иным условиям.

3. Требования к результатам освоения основных образовательных программ.

Многие специалисты в сфере образования высказали свое негативное мнение относительно новых образовательных стандартов:

- ректор ВШЭ Ярослав Кузьминов, член Совета Министерства образования и науки по федеральному государственному образовательному стандарту, считает, что образовательные стандарты, предлагаемые Министерством образования и науки для начальной школы (1-4 класс) и основной школы (5-9 класс), утратили свою актуальность для современных науки. Это означает, что они просто устарели. Ректор экономического университета изложил в письме министру образования и науки свое мнение. Основная идея письма заключается в том, что проект необходимо тщательно пересмотреть;
- директор федерального института развития образования Александр Асмолов считает, что новые ФГОС – не что иное, как «стандарты юрского периода» [24].

Критика проекта ФГОС в подробностях – личное мнение одного специалиста.

1. Качество написания стандарта.

ФГОС написаны бюрократическим языком, который поглощает всю смысловую нагрузку. Не везде есть грамотная структура, некоторые пункты дублируются.

2. Отсутствие задач образовательных программ.

Законопроект не содержит статей о задачах. По неизвестным причинам они перемещены в раздел «требования» - поэтому список требований выглядит смешанным. Задачи каждого учебного курса и требования к знаниям и умениям обучающихся необходимо было бы разделять. Это было бы логично и грамотно.

Для того чтобы учебная организация эффективно функционировала, каждому педагогу важно понимать, какие задачи стоят перед ним. Одну и ту же программу воплощать на практике можно совершенно разными способами.

Для того чтобы образовательная организация функционировала эффективно, важно, чтобы каждый учитель понимал, какие задачи стоят перед ним. Одну и ту же программу можно применить на практике совершенно разными способами.

Поэтому, крайне важно переоценить и четко сформулировать задачи, поставленные перед каждым учителем и включить их в образовательный стандарт.

3. Актуальность стандарта.

Актуальность образовательного стандарта оценивается по нескольким признакам. Из-за неопровержимого факта, подтвержденного многими учителями — стандарт устарел и не актуален в современной реальности. А также идеи тех, кто участвовал в их разработке.

В последние десятилетия структура знаний претерпела значительные изменения, и сама теория знаний теперь является неотъемлемой частью человеческого знания. И спрашивать: «Кто придумал именно так разбивать предметы» бесполезно – делали это непрофессионалы.

4. Уровни преподавания предметов.

К сожалению, необходимая и хорошая идея преподавания предметов на разных уровнях не получила концептуальной полноты. Нет компетентного обоснования полезности и необходимости такого подхода — по этой причине общество не приняло его. Кроме того, эта идея связана с задачей сокращения финансирования обязательных программ. Это то, что она дискредитировала сама и вызвала волну критики. Возникло предположение, что она и была придумана только для сокращения финансирования. Эта тема является ключом к определению структуры системы образования. Вопрос в том, как и чему учить. Можно ли всему научить? Чему конкретно нужно обучать?

В современном мире научные знания движутся по пути интеграции, поэтому необходимость создания интегрированных курсов ясна и очевидна. И они должны быть построены таким образом, чтобы ученик приобретал базовые знания по всем дисциплинам. Проще говоря, интегрированные курсы должны быть включены в необходимый список предметов.

Было бы более грамотным, если бы профильные предметы были не альтернативой интегрированным дисциплинам, а как бы наслаивались на них. Проще говоря, учащийся с обязательным набором предметов, будет иметь возможность и необходимость выбирать определенное количество специализированных предметов для подготовки к будущей профессии. Что это дает? У учащегося есть большие возможности, которые могут изменить его выбор не только во время учебы, но и после выпуска из школы.

5. Тенденция лишения представления о какой-либо деятельности, гарантирующей выживаемость.

Подчеркиваем, что учащиеся в городских школах лишены уроков труда, на которых они бы учились использовать инструмент, не узнают о сельском хозяйстве, которое может их кормить, не будут вовлечены в общественные работы. Это очень глупо! Получается, что новые стандарты предлагают культивирование «привязанностей» к компьютеру, которые зависят от наемного труда иностранных работодателей. Дети, которые просто не выживут в чрезвычайных ситуациях из-за своей неспособности. Необходимо дать возможность реализовать все потребности, которые есть у человека. Человек намного больше, чем просто разум [24].

Таким образом можно сделать вывод, что Федеральные государственные образовательные стандарты являются не идеальными и к ним есть замечания экспертов. Именно поэтому становится понятна причина постоянных изменений. Но все же ФГОС является основой всего образования.

Рассмотрим требования ФГОС относительно математики в школе с 5 по 9 классы и с 10 по 11 классы, а также отдельно применительно к тригонометрии в школе.

- ФГОС основного общего образования (ПРИЛОЖЕНИЕ 1 Требования ФГОС основного общего образования)

Как можно заметить про тригонометрию во ФГОС основного общего образования ничего не говориться. Можно сделать выводы, что раздел «Тригонометрические функции» не предусматривается в 5-9 классах.

- ФГОС среднего общего образования (ПРИЛОЖЕНИЕ 2 Требования ФГОС среднего общего образования)

Мы заметили, что в образовательных стандартах среднего общего образования уже говорится о тригонометрии, как о требовании предметного результата освоения базового курса математики.

- Изучение школьного курса тригонометрии в контексте ФГОС

В соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации, в школьной системе внедряется новая образовательная парадигма, под влиянием которой происходят изменения в содержании, средствах и методах обучения. Новая база критериев образования позволяет отслеживать не только знания, навыки, но и смещать акцент с узко ориентированных на результаты обучения по мета-предметам. Появляются не только новые школьные предметы, но и подходы к изучению традиционных предметов, особенно математики. Практическая реализация основных идей ГЭФ в ряде случаев вызывает проблемы, связанные с недостаточной разработкой методологических основ и методического обеспечения преподавания отдельных частей школьной математики, математики, в том числе тригонометрии [19].

По мнению обучающихся и преподавателей математики, изучение тригонометрии вызывает значительные трудности у школьников.

Это можно объяснить тем, что учебный материал по тригонометрии представлен фрагментарным курсом математически основной школы. До середины 60-х годов роль тригонометрии в школьном курсе математики полностью отличалась от сегодняшней. В 9-м и 10-м классе учащиеся осваивали отдельную дисциплину под названием тригонометрия, 2 часа в неделю отводилось на изучение этой дисциплины. Позже, во время реформы школьного математического образования, подход к тригонометрии изменился. Этот раздел оказался недостаточно представленным в программе школьного курса математики в основной и старшей школах.

Трудности в изучении тригонометрии также могут быть связаны с непониманием ее роли среди школьников. Тригонометрические функции используются в астрономии, морской и воздушной навигации, теории музыки, акустике, оптике, анализе финансового рынка, электронике, теории вероятностей, статистике, биологии, медицинской визуализации, химии, теории чисел, океанография, геодезия, архитектура, экономика, электротехника, машиностроение, строительство, компьютерная графика, картография, кристаллография, разработка игр и многие другие направления.

Возможно, осознание важности тригонометрии для такого широкого круга областей повысит мотивацию учащихся к изучению соответствующих частей школьной программы по математике [16].

В то же время тригонометрический материал входит в ЕГЭ (ОГЭ) и используется при проведении всевозможных олимпиад и конкурсов. Соответственно не снижается потребность у учащихся в глубоком знании тригонометрии.

Поэтому так важна методически грамотная организация изучения данного раздела, способствующая формированию универсальных учебных действий учащихся – одной из целей ФГОС второго поколении, в которых наряду с предметными выделяются также метапредметные и личностные образовательные результаты.

Возможно, что проблемы, возникающие при обучении тригонометрии в школе, связаны с неоднозначным подходом авторов учебников на первых этапах презентации учебных материалов в этом разделе [19].

В настоящее время тригонометрические элементы изучаются только небольшими частями в геометрии 8 и 9 классов, а весь основной материал изучается в 10 и 11 классах в рамках курса «Алгебра и начало математического анализа». В то же время, в частности, поставлены следующие цели:

— ввести понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса для произвольного угла;

— изучить свойства тригонометрических функций;

— научить учащихся строить графики тригонометрических функций и выполнять некоторые преобразования этих графиков [16].

Проведем сравнительный анализ учебников, которые наиболее распространены в общеобразовательных школах, а именно: Погорелов «Геометрия» 7-9 класс, Атанасян «Геометрия» 7-9 класс, Никольский «Алгебра» 9 класс, Никольский «Алгебра и начала математического анализа» 10 класс, Колягин «Алгебра и начала математического анализа» 10 класс, Колмогоров «Алгебра и начала математического анализа» 10-11 класс.

Для лучшей наглядности и удобства сравнения разделим данные учебники на три группы:

1. Геометрия 7-9 класс.
2. Алгебра 9 класс.
3. Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс.

Рассмотрим учебники первой группы (Таблица 1):

Таблица 1 — Анализ учебников геометрии 7-9 класс [2, 8]

1	2	3
Элементы анализа	Погорелов А.В.	Атанасян Л.С.
Профиль подготовки	Данное пособие для учащихся было написано в обновленном и более строгом изложении традиционной геометрии. Учебник является книгой для самостоятельного чтения учеником после объяснения учителем, а все методические аспекты (в том числе и различные подходы к объяснению материала) есть удел книги для учителя. Таким образом, здесь делается упор на высокую квалификацию учителя, на его методические вкусы.	Теоретический материал учебника изложен доступно и интересно, с учетом психологических особенностей школьников. Книга разбита на 13 глав, имеет три приложения и снабжена более чем 1000 разнообразных задач разного уровня сложности. В учебнике много оригинальных приемов изложения, которые используются авторами ради стремления сделать учебник доступным учащимся и одновременно позволяет развить интерес учащихся к математике. Большое внимание уделяется тщательной формулировке задач, нередко приводится несколько решений одной и той же задачи.
Основные виды деятельности ученика	8 класс: — Знать определение косинуса острого угла в прямоугольном треугольнике; уметь вычислять косинус угла при решении конкретных задач, строить угол по его косинусу. — Знать определения синуса, тангенса; уметь решать задачи на вычисление элементов прямоугольного треугольника, а также пользоваться таблицами Брадиса и инженерным калькулятором. — Знать основные тригонометрические тождества; уметь использовать их в несложных вычислениях. — Знать числовые значения синуса, косинуса и тангенса углов 30°, 45°, 60°; уметь применять данные числовые значения при решении задач.	8 класс: — Формулировать определения и иллюстрировать понятия синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника. — Выводить основное тригонометрическое тождество и значения синуса, косинуса, тангенса углов 30°,45°,60°. — Решать задачи, связанные с подобием треугольников и нахождением неизвестных элементов прямоугольного треугольника. 9 класс: — Формулировать и иллюстрировать определения синуса, косинуса и тангенса углов от 0° до 180°. Выводить основное тригонометрическое тождество и формулы приведения. — Формулировать и доказывать теоремы синусов и косинусов, применять их при решении треугольников.

Продолжение таблицы 1

1	2	3
Основные виды деятельности ученика	— Знать теорему об изменении синуса, косинуса и тангенса при возрастании угла; уметь пользоваться данной теоремой при решении задач. — Знать определение синуса, косинуса и тангенса любого угла от 0° до 180°; уметь находить значения синуса, косинуса и тангенса острых и тупых углов, используя определения и рассмотренные в пункте формулы приведения. 9 класс: — Знать формулировку теоремы косинусов; уметь доказывать теорему косинусов; по трём данным сторонам треугольника находить косинусы его углов, по данным двум сторонам треугольника и углу между ними находить третью сторону. — Знать теорему синусов и основные вытекающие из неё соотношения; уметь доказывать эту теорему; понимать, зачем она нужна, какую роль играет, на решение каких задач нацелена. — Знать формулировку утверждения о том, что в треугольнике против большего угла находится большая сторона, и формулировку обратного утверждения; уметь активно пользоваться названным свойством углов и сторон треугольника при решении задач на доказательство геометрических неравенств. — Уметь для каждой из основных задач проводить решение в общем виде и для треугольников с заданными числовыми значениями сторон и углов.	— Объяснять, как используются тригонометрические формулы в измерительных работах на местности.

Продолжение таблицы 1

1	2	3
Планируемые результаты изучения курса	Выпускник научится: — оперировать с начальными понятиями тригонометрии и выполнять элементарные операции над функциями углов; — находить значения длин линейных элементов фигур и их отношения, градусную меру углов от 0° до 180°, применяя определения, свойства и признаки фигур и их элементов, отношения фигур (равенство, подобие, симметрии, поворот, параллельный перенос); Выпускник получит возможность: — приобрести опыт применения алгебраического и тригонометрического аппарата и идей движения при решении геометрических задач; — приобрести опыт применения алгебраического и тригонометрического аппарата и идей движения при решении задач на вычисление площадей многоугольников.	
Сравнение основных тем	В 8 классе во второй четверти в параграфе «Теорема Пифагора» вводиться понятие косинуса угла, разбираются соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике, формулируются основные тригонометрические тождества. В третьей четверти разбираются такие темы, как «Значения синуса, косинуса и тангенса некоторых углов» и «Изменение синуса, косинуса и тангенса при возрастании угла». Также в параграфе «Декартовы координаты на плоскости» разбираются определения синуса, косинуса и тангенса для любого угла от 0° до 180°. Таким образом в 8 классе на тригонометрию отводиться 14 часов. В 9 классе в 1-2 четверти изучается «Решение треугольников», а именно: теорема косинусов, синусов, соотношение между углами треугольника и противолежащими сторонами и решение треугольников с помощью данных теорем. На весь тригонометрический материал в 9 классе отводиться 9 часов.	В 8 классе в главе «Подобные треугольники» в параграфе «Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника» вводятся понятия синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника, а также значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°,45°,60°. Таким образом в 8 классе на тригонометрию отводиться 5 часов. В 9 классе в главе «Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов» синус и косинус любого угла от 0° до 180° вводятся с помощью единичной полуокружности, формулируются основные тригонометрические тождества и формулы приведения, также вводятся формулы для вычисления координат точки. Доказываются теоремы синусов и косинусов и выводится еще одна формула площади треугольника (половина произведения двух сторон на синус угла между ними). Этот аппарат применяется к решению треугольников. На весь тригонометрический материал в 9 классе отводиться 10 часов.

Рассматриваемые, учебники в данной группе соответствуют Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования. Далее можно сделать выводы по данным из таблицы. Учащиеся получают первичные сведения о тригонометрии в 8-9 классах курса геометрии. В учебнике Погорелова А.В. «Геометрия. 7-9 класс» материал соответствует обязательному минимуму обучения, однако для учащихся 8-9 классов он является достаточно трудным для понимания, так как весь основной материал изучается в 8 классе и только спустя полгода уже в 9 классе до изучаются оставшиеся темы. В учебнике Атанасяна Л.С. «Геометрия. 7-9 класс» материал соответствует обязательному минимуму обучения, весьма доступен для учащихся 8-9 классов. Стоит отметить, что по данному учебнику часов отводиться в полтора раза меньше, но более плавно представлен материал, что лучше усваивается учащимися данного возраста.

Далее приступим к анализу учебников второй группы:

В данную группу входит только один учебник Никольский С.М. «Алгебра» 9 класс [6], так как в остальных УМК тригонометрия в курсе Алгебры начинает изучаться в 10 классе.

Учебник соответствует федеральному государственному образовательному стандарту для основного общего образования. Включает материалы для общеобразовательных классов и углубленных математических классов. Авторская концепция сохраняет основной характер изложения теории, который является традиционным для российского образования, оставляя преподавателю право регулировать степень углубления теоретического материала, использование дополнительных материалов и комплексных заданий с учетом уровня подготовки в классе и целей обучения. Основной методологический принцип, лежащий в основе представления теоретического материала и организации системы упражнений, заключается в том, что студент должен преодолеть не более одной трудности за один раз. Система задач делится на категории в зависимости от вида деятельности. Каждая глава учебника дополнена исторической информацией и интересными заданиями. В конце учебника выделен пункт «Задачи на исследования», который служит основой для проектной деятельности студентов.

«Изучение тригонометрических формул в 9 классе не является обязательным для обычных классов, но для классов с углубленным изучением математики этот материал по традиции обязательный. Владение им поможет успешнее освоить программу старших классов».

Тригонометрические формулы в данном курсе рассматриваются в главе 4. Основная цель – дать понятия синуса, косинуса тангенса и котангенса произвольного угла, научить решать, связанные с ними вычислительные задачи и выполнять тождественные преобразования простейших тригонометрических выражений. Данной теме отводиться 23-32 часа. Перечислим основные темы изучения: понятие угла, градусная мера угла, радианная мера угла, определение синуса и косинуса угла, основные формулы для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, тангенс и котангенс угла, косинус суммы и косинус разности двух углов, формулы для дополнительных углов, синус суммы и синус разности двух углов, сумма и разность синусов и косинусов, формулы для двойных и половинных углов, произведение синусов и косинусов.

Таким образом, можно сказать, что учебник «Алгебра. 9 класс» Никольского С.М. единственный современный учебник, который начинает изучение тригонометрии в 9 классе углубленного уровня, что способствует успешному освоению программы старших классов и подготовке к основным государственным экзаменам. Также можно сказать, что для учителей математики этот учебник не очень удобен для преподавания, так как в одном учебнике собраны темы, как для обычных классов, так и для углубленных, из-за этого в обычном классе придётся «перескакивать» некоторые темы, например такую как «тригонометрические формулы».

Перейдем к анализу учебников третьей группы (Таблица 2):

Таблица 2 — Анализ учебников алгебры и начал анализа 10-11 класс [3, 7]

1	2	3
Элементы анализа	Никольский С.М.	Колягин Ю.Н.
Профиль подготовки	Авторы считают принципиально важным обучать школьников в рамках разных уровней по одним и тем же учебникам. Тогда учащиеся, заинтересованные в более глубоком изучении математики и не обучающиеся в профильных классах, получают возможность углублять свои познания в математике самостоятельно или под руководством учителя.	Для учащихся физико-математических классов в учебнике предусмотрено большое количество трудных задач, требующих не только хорошего знания материала, но и творческого подхода. Некоторые темы изучаются только в физико-математических классах.
Цели изучения	• получение базовых знаний по тригонометрии • расширение и углубление знаний по тригонометрии (учебники с двумя уровнями подготовки) • систематическое повторение изученного	• изучение понятий синуса, косинуса, тангенса и котангенса • знакомство с основными формулами тригонометрии • формирование умений решать тригонометрические уравнения • изучение свойств тригонометрических функций • обучение построению графиков тригонометрических функций
Сравнение основных тем	Тригонометрические формулы	
	Учащимся практически сразу дается понятие арксинуса и арккосинуса угла, много времени уделяется изучению тригонометрического круга. Каждая формула «разжевана» для учащихся, что весьма упрощает понимание тригонометрии в целом.	Понятие тригонометрической функции еще не вводится, учащиеся изучают числовые выражения и тригонометрические формулы. Это готовит учащихся к рассмотрению тригонометрических функций. Впервые учащиеся доказывают тригонометрические тождества, применяя соответствующие формулы.
	Тригонометрические уравнения и неравенства	
	В учебнике подробно рассмотрены все основные случаи решения тригонометрических уравнений. Неравенства приводятся под звездочкой (*), т.е. для повышенного уровня.	Работа в этом разделе начинается с самого простого решения тригонометрического уравнения, созданного в предыдущем материале.

Продолжение таблицы 2

1	2	3
Сравнение основных тем	Тригонометрические функции	
	На тему выделено 6 часов. Все тригонометрические функции числового аргумента рассмотрены подробно, отрицательным является представление небольшое количество практических задач, хотя теория представлена в полном объеме.	Свойства каждой конкретной тригонометрической функции формулируются с опорой на графическую иллюстрацию. Естественные, технические и физические классы математических профилей требуют умения создавать графики в результате сдвигов и сокращений (деформаций) вдоль координатных осей.
	Обратно-тригонометрические функции	
	Понятия арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса введены в самом начале, после изучения основных формул. Рассмотрены простые примеры, в незначительном количестве. Далее данный материал почти не используется.	Решение тригонометрических неравенств и свойства обратных тригонометрических функций в классах социально-экономического профиля лишь в ознакомительном плане.

Сделаем выводы по рассмотренным учебникам.

Учебник Колягина Ю.Н. и др. «Алгебра и начала математического анализа. 10 класс» соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту среднего общего образования. Материал в учебнике соответствует обязательному минимуму обучения, весьма доступен для учащихся 10 класса. На изучение темы отводится 18 часов. В этом учебнике используется известная схема представления тригонометрического материала. Сначала рассматриваются все известные формулы тригонометрического процесса, а затем рекомендуется решить тригонометрические уравнения. В результате мы видим, что тригонометрические уравнения и их преобразования остаются едва взаимосвязанными частями [12].

Учебник Никольского С.М. и др. «Алгебра и начала математического анализа. 10 класс» соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту среднего общего образования. Время изучения тригонометрических уравнений в этом учебнике недостаточно. Кроме того, хотя основой для решения тригонометрических уравнений является их способность правильно решать простейшие тригонометрические уравнения, однако, недостаточно внимания уделяется именно простейшим тригонометрическим уравнениям. В этом руководстве не указаны задачи, требующие отбора корней. Большое внимание уделено понятиям арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс, но, к сожалению, автор не объясняет ученикам, почему они ввели эти понятия [12].

Анализ учебников и математических программ позволяет сделать вывод, что изучение тригонометрии содержит большой объем изучаемой информации и относительно небольшое количество часов, а также тот факт, что изучение тригонометрии в значительной степени опирается на запоминание. В этом контексте также необходимо выделить основные проблемы, связанные с его изучением:

1) при большом объеме получаемой информации значительно сокращается время на изучение этой дисциплины, что приводит к перегрузке учащихся;

2) нет мотивации для изучения тригонометрии.

Существующие проблемы можно решить, учитывая следующие факторы:

— необходимо поддерживать мотивацию учащихся к изучению тригонометрии посредством общения с другими школьными предметами (физика, география, геометрия, история, экономика и многие другие);

— мотивацию учащихся также можно повысить, изучая тригонометрию не одной четвертью, а «растянуть» изучение в течении всего учебного года (10-11 класс);

— следует добиваться у учащихся отчетливых геометрических представлений, связанных с единичным (тригонометрическим) кругом и графиками функций.

2.2 Методика изучения основных тем в разделе тригонометрии

Во введении обсуждалась необходимость изучения тригонометрических функций в школьном курсе по алгебре и начала математического анализа. Какая в этом необходимость?

Изучение тригонометрических функций в школьном курсе имеет определенные особенности. Сначала, перед изучением тригонометрических функций, мы рассмотрели функции вида $y = f(x)$, где x и y - некоторые действительные числа, в тригонометрических функциях углу присваивается соответственно число, что является необычным для учащихся. Кроме того, ранее все функции определялись формулами, в которых был явно указан порядок действий со значениями аргументов для получения значений функций. Теперь ученики сталкиваются с функциями, заданными таблично.

Основными целями изучения тригонометрических функций являются:

1. Ознакомление школьников с новым типом трансцендентных функций.
2. Развитие вычислительных навыков (работа с трансцендентными функциями часто требует сложных вычислений и знания определенных формул).
3. Сформировать четкое представление всех основных свойств функций (особенно периодичности).
4. Создание междисциплинарных связей с практикой (колебания маятника, электрический ток не может быть изучен без знания тригонометрических функций).
5. Развитие логического мышления (использование формул).

При изучении тригонометрических функций учащиеся начнут лучше понимать саму концепцию функции. Они начинают понимать, что функция может быть отношением между любым набором объектов, даже если они имеют различную природу [4].

В изучении тригонометрических функций в школе можно выделить два основных этапа:

1. Первоначальное знакомство с тригонометрическими функциями углового аргумента в курсе геометрии (8-9 класс):

a) первое знакомство с тригонометрическими функциями углового аргумента в геометрии. Значение аргумента рассматривается в промежутке (0°; 90°). На этом этапе учащиеся узнают, что $\sin\alpha, \cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ зависят от градусной меры угла, знакомятся с табличными значениями, основным тригонометрическим тождеством и некоторыми формулами приведения;

b) обобщение понятий синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов (0°; 180°). На этом этапе рассматривается взаимосвязь тригонометрических функций и координат точки на плоскости, доказываются теоремы синусов и косинусов, рассматривается вопрос решения треугольников с помощью тригонометрических соотношений.

2. Систематизация и расширение знаний о тригонометрических функциях в курсе алгебры и начал анализа (10-11 класс):

a) введение понятий тригонометрических функций числового аргумента;

b) систематизация и расширение знаний о тригонометрических функциях числа, рассмотрение графиков функций, проведение исследования, в том числе и с помощью производной.

На первом этапе не доказывается и не уточняется, что изучаемые зависимости являются функциями. Изменение синуса и косинуса при изменении угла доказываются на основе свойств наклонной. Эти понятия достаточно абстрактны для курса геометрии, поэтому усваиваются довольно плохо. Но еще большие трудности вызывает переход к аргументу, большему 90°. Ведь мы определяли тригонометрические функции через отношение сторон прямоугольного треугольника, а, как известно, в прямоугольном треугольнике не может быть угла с градусной мерой, большей 90°. Для объяснения этого факта уже на этом этапе приходится рассматривать окружность, и это является своеобразной пропедевтической работой для введения тригонометрических функций числового аргумента с помощью окружности в курсе алгебры и начал анализа.

На втором этапе происходит переход от углового аргумента к числовому. С самого начала курса вы должны рассмотреть тригонометрические функции любого размера углов. Итак, вам нужно ввести угол для ученика в виде величины, которая может варьироваться от $-\infty$ до $+\infty$. Такая концепция не появилась в процессе изучения геометрии, поэтому мы должны укрепить ее на втором этапе. Следовательно, необходимо ввести числовую окружность. Рекомендуется сделать это тоже на втором этапе [4].

В качестве пропедевтической работы при изучении модели числового круга необходимо рассмотреть геометрические задачи на определения длины дуг, четверти круга заданного радиуса, его трети и половы радиусов. Обобщая полученные результаты, необходимо привести учеников к тому, что для дальнейшей работы выгоднее выбирать единичную окружность, а не произвольный радиус.

В процессе работы в окружности школьникам необходимо развить следующие навыки:

— находить на числовой окружности точку, соответствующую заданному числу, выраженному в долях числа π;

— составлять запись анализа для дуги числовой окружности;

— определять связь точки с координатной четвертью;

— осуществлять переход от одной системы координат к другой и работать одновременно в двух системах координат – в криволинейной и прямоугольно-декартовой;

— находить координаты точек числовой окружности и находить точку, содержащую указанные координаты на числовой окружности [4].

Для этого целесообразно рассматривать задания следующих типов:

1. Найти на числовой окружности точки $\frac{3\pi}{2}, 5\pi, \frac{28\pi}{3}, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{11\pi}{6}\dots$

2. Найти на числовой окружности точки $1, 3, 7, -5, -31 \dots$

3. Определить, каким четвертям принадлежат точки $\frac{22\pi}{4}, -\frac{38\pi}{6}, \frac{25\pi}{3}, 10, -15 \dots$

4. Отметить на числовой окружности точки t, удовлетворяющие неравенствам:

a) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le t \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$

b) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le t \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$

5. Найти декартовы координаты точек, соответствующих числам $\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{23\pi}{6}, -\frac{13\pi}{3}\dots$

6. Найти положительные и отрицательные числа, которым соответствуют точки с координатами $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right) (-1; 0) \dots$

Учитель должен иметь как минимум два макета с числовыми окружностями. На первом из них отсчет в положительном направлении с размещением точек, на втором в отрицательном направлении с указанием точек. Целесообразно вешать второй макет после того, как учащиеся ответят на вопрос: «что произойдет, если точка будет двигаться в обратном направлении?»

Эта задача позволяет нам создать связь между числовой окружностью и числовой линией. В числовой прямой можно отмечать как положительные, так и отрицательные значения. То же самое можно сделать для числового круга, но вам необходимо принять во внимание тот факт, что прямое соответствие между точками и числами является однозначным, и в каждой точке имеется бесконечное число имен, которые отличаются на $2\pi n, n \in Z$ [4].

Теперь, когда учащиеся научились работать с числовым кругом, как с самостоятельным объектом, мы можем начать изучать тригонометрические функций.

Помните, что определения тригонометрических функций с использованием числового круга не укладываются в уме школьников по одной простой причине: на первом этапе определения были даны с помощью геометрической интерпретации — как соотношение сторон прямоугольного треугольника.

Из психологии известно, что, когда впервые вводится важная информация, ассоциации, которые ее сопровождают, становятся очень прочно вовлеченными в сознание учащегося. Последующие впечатления слабее и не могут стереть то, что уже впервые вложили.

Хотя мы уже использовали окружность, чтобы ввести «новые» определения синуса и косинуса в фазе расширения набора значений, принимаемых углом, необходимо снова нарисовать взаимосвязь между прямым треугольником и единичной окружностью. Рассмотрим числовой круг единичного радиуса в декартовых координатах (рисунок 8).

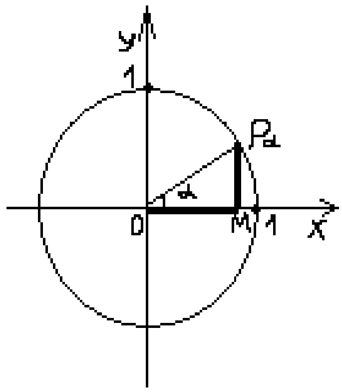

Рисунок 8

В положительном направлении от оси Ox отложим угол α такой, что $0 < \alpha < 90°$. Обозначим полученную на окружности точку как P_α. Опустим из этой точки перпендикуляр на ось Ox, получим точку M. Рассмотрим получившийся прямоугольный треугольник OMP_α. $\mathrm{Sin}\,\alpha$ по определению равен отношению $\frac{MP_\alpha}{OP_\alpha}$, но радиус окружности равен единице, следовательно, $\sin\alpha = MP_\alpha$. Аналогичным образом, $\cos\alpha = OM$. Заметим, что длина OM — это абсцисса точки P_α в прямоугольно-декартовой системе координат, а длина MP_α — ее ордината. Таким образом, синус и косинус угла α определяются через ординату и абсциссу точки P_α, что является более удобным при работе в прямоугольно-декартовой системе координат [4].

Работая с числовым кругом, учащиеся уже узнали, что, поскольку длина дуги окружности легко выражается через центральный угол, опирающийся на нее, точка P_α может быть построена другим способом — путем разгрузки дуги заданной длины. А поскольку длина дуги всегда является действительным числом, это означает, что легко перейти от тригонометрических функций углового аргумента к тригонометрическим функциям числового аргумента.

Угол α принадлежит промежутку от 0° до 90°, а значит и длина дуги лежит между нулем и $\frac{\pi}{2}$. Используя все ту же геометрическую интерпретацию, легко показать, что эти определения можно распространить и на любые углы и числа [4].

Понятия тангенса и котангенса можно вводить двояко: как отношение синуса к косинусу (косинуса к синусу) и как ординату (абсциссу) точки пересечения касательной к окружности в точке (1;0) ((0;1)) и прямой OP_α (рисунок 9).

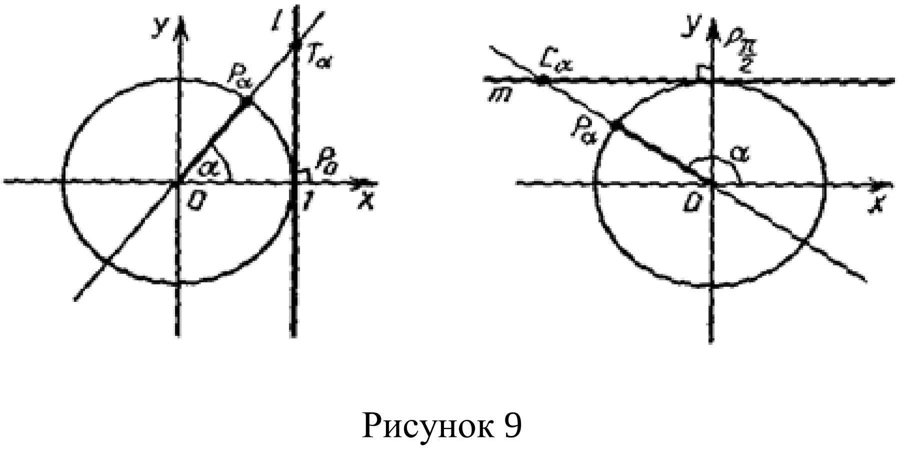

Рисунок 9

Вообще говоря, определив функции синус и косинус, школьники уже не нуждаются в числовой окружности, как средстве для введения понятий тангенса и котангенса. Но раз уж мы взялись работать с этой моделью, то неплохо бы показать, как определить функции тангенс и котангенс, используя только их геометрическое определения. Стоит заметить, что выражения «тангенс угла α – это отношение синуса α к косинусу α» и «котангенс угла α – это отношение косинуса α к синусу α» не являются определениями – это уже свойства [4].

Использование второго подхода поможет ученикам не только на этапе изучения самих тригонометрических функций, но и на этапе решения тригонометрических уравнений и неравенств. Следовательно, лучше использовать второй подход, и определение тангенса α как отношения синуса α к косинусу α считается свойством.

Итак, мы ввели понятия всех тригонометрических функций. Прежде чем приступить к своим исследованиям и графикам, необходимо убедиться, что учащиеся развили следующие навыки [4]:

— нахождение значений всех тригонометрических функций в «главных» точках;

Вы можете использовать следующую справочную Таблицу 3, чтобы лучше запомнить значения тригонометрических функций.

Таблица 3

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

— решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств;

— определение знаков тригонометрических функций в заданных точках;

— упрощение выражений с использованием основного тригонометрического тождества и формул приведения;

— нахождение по заданному значению одной из тригонометрических функций значений всех остальных тригонометрических функций.

Приобретая вышеупомянутые навыки, учащиеся получают арсенал средств, достаточный для более тщательного изучения и демонстрации тригонометрических функций.

Задачу построить и исследовать функцию можно выполнить двумя способами:

1) сначала граф создается точками, затем графическая интерпретация используется для изучения всех свойств функций;

2) график строится после изучения функции, и ученик анализирует поведение функции в числовом круге, чтобы получить визуальное представление характеристик [4].

При таком раскладе второй подход является наиболее подходящим, поскольку первоначально все признаки тригонометрической функции показаны в обеих моделях (числовая окружность и график), а во-вторых, это хорошая подготовительная работа для дальнейшего обучения в области изучения функций и построения используя производные.

Хотя мы только иллюстрируем свойство анализа поведения функции в числовом круге, мы не должны забывать, что иногда «доказательство» с помощью круга — единственный способ для школьников оправдать определенные факты. Хотя в некоторых случаях все же требуется более четкое изложение причин таких заявлений [4].

Далее следует подробнее остановиться на исследовании тригонометрических функций (п. 1.2 Свойства тригонометрических функций).

Затем желательно проиллюстрировать все свойства тригонометрических функций в графе и свести их к одной таблице (Таблица 4).

Таблица 4 – свойства тригонометрических функций

1	2	3	4	5
Свойства:	$y = \sin\alpha$	$y = \cos\alpha$	$y = \mathrm{tg}\,\alpha$	$y = \mathrm{ctg}\,\alpha$
Область определения	$D(y) = R$	$D(y) = R$	$D(y) = R$, кроме чисел $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	$D(y) = R$, кроме чисел $\alpha = \pi n, n \in Z$
Множество значений	$E(y) = [-1; 1]$	$E(y) = [-1; 1]$	$E(y) = R$	$E(y) = R$
Четность и нечетность	нечетная: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	четная: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	нечетная: $\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$	нечетная: $\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$
Периодичность	Периодическая. Наименьший период 2π	Периодическая. Наименьший период 2π	Периодическая. Наименьший период π	Периодическая. Наименьший период π
Нули функции	$\alpha = \pi n, n \in Z$ при $y = 0$	$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ при $y = 0$	$\alpha = \pi n, n \in Z$ при $y = 0$	$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ при $y = 0$
Промежутки знакопостоянства	$y > 0$ при $(2\pi n + 0;\ \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$ $y < 0$ при $\left(\begin{matrix}\pi + 2\pi n;\\ 2\pi + 2\pi n\end{matrix}\right), n \in Z$	$y > 0$ при $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$ $y < 0$ при $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 3\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$	$y > 0$ при $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$ $y < 0$ при $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right), n \in Z$	$y > 0$ при $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$ $y < 0$ при $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi(n+1)\right)$, $n \in Z$
Непрерывность функции	Непрерывна	Непрерывна	Непрерывна	Непрерывна
Монотонность	возрастает при $\alpha \in \left(\begin{matrix}-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\end{matrix}\right)$,	возрастает при $\alpha \in (-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n)$, убывает при $\alpha \in (2\pi n;\ \pi + 2\pi n)$	возрастает при $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$	убывает при $\alpha \in (\pi n;\ \pi(n+1))$

Продолжение таблицы 4

1	2	3	4	5
Монотонность	убывает при $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 3\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$			
Максимум и минимум функции	минимум при $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ максимум при $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$	минимум при $\alpha = \pi + 2\pi n, n \in Z$ и максимум при $\alpha = 2\pi n, n \in Z.$	-	-

Для дальнейшей работы над навыками по исследованию тригонометрических функций и построению графиков используют гармонические колебания, которые имеют вид $y = A\sin(bx + \alpha)$ и $y = A\cos(bx + \alpha)$. Основной задачей введения гармонических колебаний является наглядная демонстрация того, как изменяются свойства функций в зависимости от значения коэффициентов A, b и α. При этом будет правильно использовать задания вида:

1) по графику функций определите задающую ее формулу (рисунок 10):

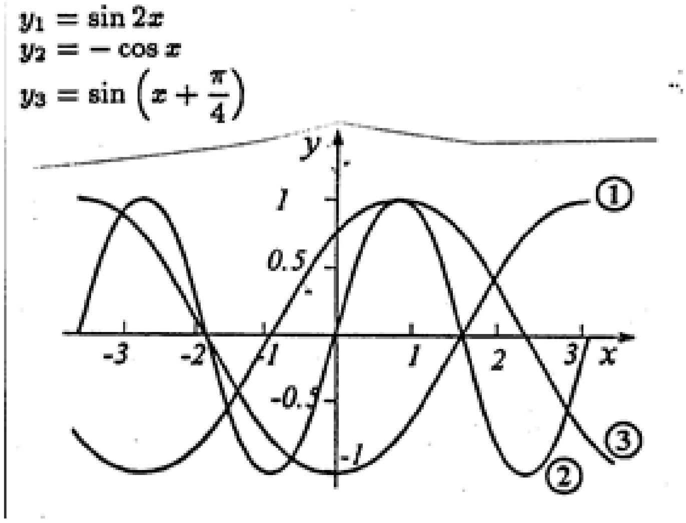

Рисунок 10

2) какими свойствами обладают данные функции на данных промежутках?

	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$[0; \pi]$	$[-2\pi; 0]$	$\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$	$[-\pi; \pi]$
$y = \cos x$					
$y = \cos 2x$					
$y = 2\cos\frac{x}{2}$					
$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$					
$y = 3\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$					

После того, как учащиеся в достаточной мере хорошо научились оперировать свойствами тригонометрических функций, можно переходить к решению тригонометрических уравнений и к тригонометрическим преобразованиям.

2.3 Разработка системы задач для курса тригонометрии в средней школе

В данном параграфе представлена разработка системы задач по тригонометрии для 10-11 классов, а также рассматривается методика преподавания тригонометрии в «Средней общеобразовательной школе № 45 г. Челябинска».

Во время прохождения педагогической практики на выпускном курсе мне удалось познакомиться с интересным подходом преподавания тригонометрии в средней школе. Данный подход в МБОУ "СОШ № 45 г. Челябинска" заключается в следующем:

1. Весь материал, представленный для изучения тригонометрии в школе, осваивается учащимися в течении всего учебного года.
2. Для изучения тригонометрии выделяется один урок алгебры в неделю для углубленных классов, и один урок в две недели для общеобразовательных классов.

Таким образом, учащиеся равномерно усваивают материал в течении учебного года. Учитель успевает дать весь материал учащимся, остановиться подробнее на тригонометрическом круге, что очень важно (п. 2.2), показать применение всех основных формул, рассмотреть все виды тригонометрических уравнений, а также остается время для работы с проблемными местами у учащихся, разбор заданий высокого уровня (ЕГЭ и олимпиадные).

Рассмотрим рабочую программу учебного предмета «Математика: алгебра и начала анализа, геометрия» (базовый и углубленный уровень), 10-

11 класс МБОУ "СОШ № 45 г. Челябинска". Содержание учебного предмета относительно тригонометрии [17, 18]:

Тригонометрическая окружность, радианная мера угла. Синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла. Основное тригонометрическое тождество и следствия из него. Значения тригонометрических функций для углов 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°. Формулы сложения тригонометрических функций, формулы приведения, формулы двойного аргумента.

Нули функции, промежутки знакопостоянства, монотонность. Наибольшее и наименьшее значение функции. Периодические функции. Четность и нечетность функций. Сложные функции.

Тригонометрические функции $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$. Свойства и графики тригонометрических функций.

Арккосинус, арксинус, арктангенс числа. Арккотангенс числа. Простейшие тригонометрические уравнения. Решение тригонометрических уравнений.

Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики. Решение простейших тригонометрических неравенств.

Далее будет представлена нами разработанная система задач для вышеперечисленных тем в дополнение к УМК «Алгебра и начала математического анализа» Колягин Ю.М. и др. (10-11) Базовый и углублённый уровни. От простейших задач к более сложным. Задачи будут разделены на три группы: базовый курс, задачи ЕГЭ и олимпиадные задачи. Все задачи, представленные в разработке, являются разнотипными, это направленно на то, чтобы учащиеся могли ориентироваться во всех типах тригонометрических задач. Если у учащегося возникают проблемы с решением какого-либо задания, то следует проработать ряд подобных задач из учебников или из интернет ресурсов.

2.3.1 Базовый курс математики. Тригонометрия

В данном параграфе будут представлены задачи из разработанной системы задач по тригонометрии базового курса.

1. Тригонометрическая окружность, радианная мера угла.

Задача 1. Какое число больше?

a) $\sin\frac{\pi°}{3}$ или $\sin\frac{\pi}{3}$; b) $\cos 4°$ или $\cos 4$.

Решение:

a) в самом первом случае четко указано, что угол – в градусах. Следовательно, $\pi° \approx 3{,}14°$, можно записать $\sin\frac{\pi°}{3} \approx \sin\frac{3{,}14°}{3} \approx \sin 1{,}05°$.

Во втором выражении никаких обозначений нет. Значит π измеряется в радианах $\sin\frac{\pi}{3} \approx \sin\frac{180°}{3} \approx \sin 60°$.

Осталось сравнить эти два выражения, с помощью тригонометрического круга (рисунок 11):

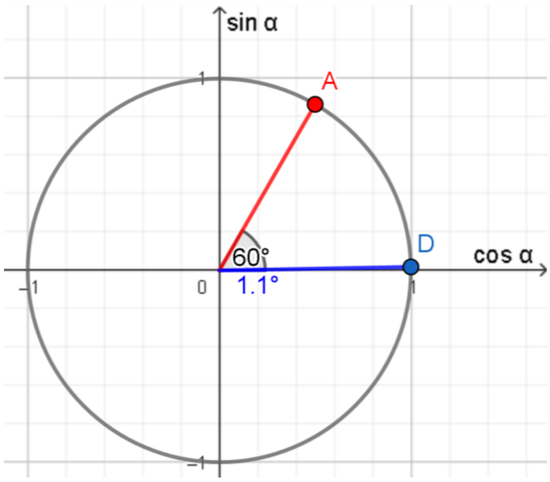

Рисунок 11

Ответ: $\sin\frac{\pi°}{3} < \sin\frac{\pi}{3}$.

b) аналогично сравниваем числа с помощью тригонометрического круга (рисунок 12):

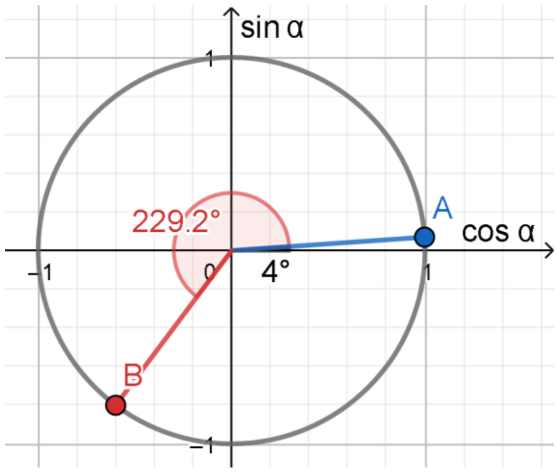

Рисунок 12

Ответ: $\cos 4° < \cos 4$.

Задача 2. Перейдите от радианной меры угла к градусной (значение тригонометрических функций вычислять не надо):

a) $\cos\frac{7\pi}{6}$;

b) $\text{tg}\frac{2\pi}{3}$;

Решение:

a) $\cos\frac{7\pi}{6} = \cos\frac{7\cdot180°}{6} = \cos 210°$;

b) $\text{tg}\frac{2\pi}{3} = \text{tg}\frac{2\cdot180°}{3} = \text{tg}\,120°$.

Задача 3. В какую четверть попадают углы:

a) $91°$;

b) $355°$;

c) $-300°$;

d) $-45°$;

e) $\frac{26\pi}{3}$;

f) $-\frac{17\pi}{6}$;

g) 3 радиан;

h) 20 радиан.

Решение:

a) $\alpha \in (90°;\ 180°)$ — II координатная четверть;

b) $\alpha \in (270°;\ 360°)$ — IV координатная четверть;

c) Отметим данный угол на единичной окружности (рисунок 13).

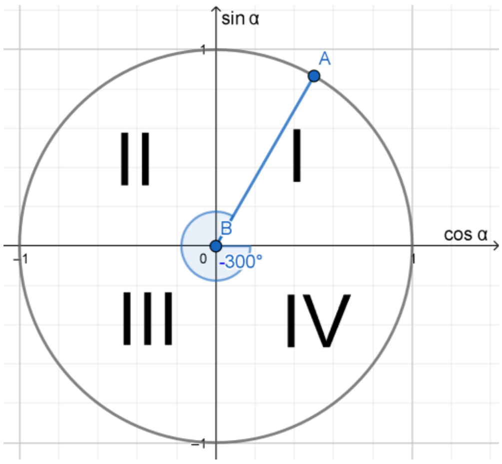

Рисунок 13

По рисунку видно, что угол принадлежит I четверти;

d) Аналогично предыдущему пункту, отмечаем угол (рисунок 14).

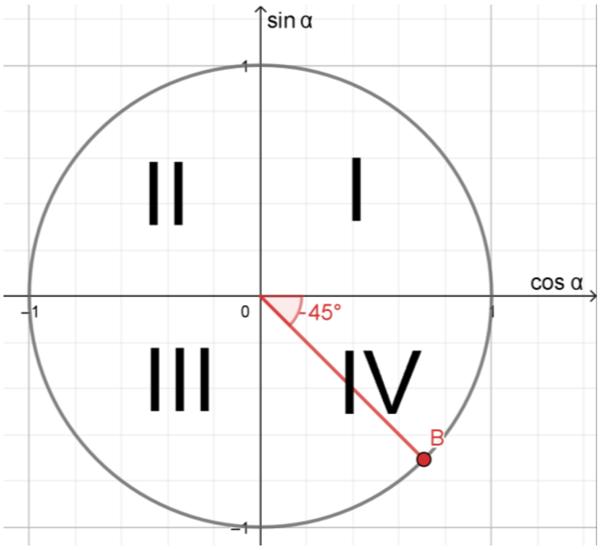

Рисунок 14

По рисунку видно, что угол принадлежит IV четверти;

e) $\frac{26\pi}{3} = \frac{26 \cdot 180°}{3} = 1560° = 360° \cdot 4 + 120°.$

$\alpha \in (90°;\ 180°)$ — II координатная четверть;

f) $-\frac{17\pi}{6} = -\frac{17 \cdot 180°}{6} = -510° = 360° + 150°.$

$\alpha \in (90°;\ 180°)$ — II координатная четверть;

g) $3\text{рад} \cdot \frac{180°}{\pi} = 171{,}97°.$

$\alpha \in (90°;\ 180°)$ — II координатная четверть;

h) $20\text{рад} \cdot \frac{180°}{\pi} = 1146{,}5° = 360° \cdot 3 + 66{,}5°.$

$\alpha \in (0°; 90°)$ — это угол I координатной четверти.

Задача 4. На какие оси попадают углы:

a) 345π; b) $\frac{11\pi}{2}$.

Решение: мы уже знаем, что углы равные $\pi, 2\pi, 3\pi \ldots$ лежат на оси косинуса, следовательно угол равный 345π будет также лежать на оси косинуса. Аналогично, углы $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots$ лежат на оси синуса $\Rightarrow$ угол $\frac{11\pi}{2}$ также лежит на оси синуса.

Задача 5. Две точки A и B, находящиеся на противоположных концах диаметра, начинают двигаться по окружности в одном направлении. Точка A в каждую минуту описывает дугу в 60°, точка B — дугу в 48°. Через сколько минут после начала движения произойдет совпадение точек?

Решение: на рисунке 15 можно видеть исходное положение точек.

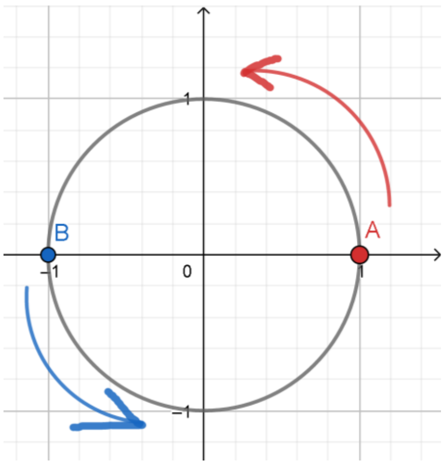

Рисунок 15

Между точками расстояние равно $180°$, разница скоростей равна $60° - 48° = 12°$, следовательно через $\frac{180°}{12°} = 15$ минут точки совпадут первый раз. Таким образом, задача свелась к задаче на движение. Далее вторая точка обгонит первую и всегда будет лидировать.

Ответ: первое совпадение произойдет на 10 минуте.

2. Синус, косинус, тангенс и котангенс произвольного угла.

Задача 1. Найти значение выражения:

a) $3\sin\frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; b) $\left(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right) : \cos\frac{\pi}{6}$.

Решение:

a) $3\sin\frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = 3\sin 30° + 2\cos 30° - \mathrm{tg}\,60° = 3\cdot\frac{1}{2} +$ $+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = 1{,}5;$

b) $\left(2\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{6} - \mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\right) : \cos\frac{\pi}{6} = (2\,\mathrm{tg}\,30° - \mathrm{tg}\,60°) : \cos 30° = \left(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} -\right.$ $\left.-\sqrt{3}\right) : \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3}.$

Задача 2. Найдите наибольшее значение выражения $4 - 2\ \cos \mathrm{a}$.

Решение: по определению знаем, что область значений косинуса от -1 до 1, следовательно наибольшее значение 1. По выражению видно, что наибольшее значение будет в наименьшем значении косинуса. Следовательно, получаем $4 - 2\cdot(-1) = 6$.

Задача 3. Определить знак выражения:

a) $\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{4}$; b) $\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$.

Решение: для определения знака необходимо определить знак каждого числа в выражении.

a) $\frac{2\pi}{3}$ находится во второй четверти, у синуса знак +, $\frac{3\pi}{4}$ тоже во второй четверти, у синуса также знак +. Следовательно, у всего выражения знак +;

b) $\frac{2\pi}{3}$ находится во второй четверти, у косинуса знак $-$, $\frac{\pi}{6}$ в первой четверти, у косинуса знак +. Следовательно, у всего выражения знак $-$.

3. Основное тригонометрическое тождество и следствия из него.

Задача 1. Вычислить $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

Решение: $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \sin^2\alpha\,(\sin^2\alpha - 1) +$ $+\sin^2\alpha\cos^2\alpha = -\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha = 0.$

Задача 2. Две стороны треугольника равны 2 и 3, а синус тупого угла, заключённого между этими сторонами, равен $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите третью сторону треугольника.

Решение: назовем треугольник ABC, где AB=2, AC=3 и $\sin \mathrm{A} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Для начала нужно найти $\cos \mathrm{A} = \sqrt{1 - \sin^2 \mathrm{A}} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \frac{1}{3}$.

По теореме косинусов находим сторону BC: $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2 \cdot \mathrm{AB} \cdot$

$\cdot \mathrm{AC} \cos \mathrm{A} = 4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} = 9 \Leftrightarrow \mathrm{BC} = \pm 3$. Сторона отрицательной быть не может, следовательно остается только положительный корень.

Ответ: $\mathrm{BC} = 3$.

Задача 3. Найдите все значения x, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$ для которых выполнено равенство $\sin \mathrm{x} + \cos \mathrm{x} = 1$.

4. Формулы сложения.

Задача 1. Вычислите точное значение $\operatorname{tg} 15°$.

Решение: $\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(45° - 30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 30°}{1 + \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{\frac{3+\sqrt{3}}{3}} =$

$= \frac{3-\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{3+\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$.

Задача 2. Упростите выражения:

a) $\sin \alpha \cos \beta - \sin(\alpha - \beta)$;

b) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \mathrm{x}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \mathrm{x}$.

Решение:

a) $\sin \alpha \cos \beta - \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - (\sin \alpha \cos \beta -$

$- \cos \alpha \sin \beta) = \cos \alpha \sin \beta$;

b) Аналогично.

Задача 3. Известно, что $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \mathrm{t}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - \mathrm{t}\right) = \mathrm{p}$. Найдите $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \mathrm{t}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \mathrm{t}\right)$.

5. Синус, косинус и тангенс двойного угла.

Задача 1. Представьте через $\sin \frac{2\alpha}{3}$ тригонометрические функции угла $\frac{\alpha}{6}$.

Решение: $\sin\frac{2\alpha}{3} = 2\sin\frac{\alpha}{3}\cos\frac{\alpha}{3} = 2\left(2\sin\frac{\alpha}{6}\cos\frac{\alpha}{6}\right)\left(\cos^2\frac{\alpha}{6} - \sin^2\frac{\alpha}{6}\right) =$
$= 4\sin\frac{\alpha}{6}\cos^3\frac{\alpha}{6} - 4\sin^3\frac{\alpha}{6}\cos\frac{\alpha}{6}$.

Задача 2. Известно, что $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $90° < \alpha < 180°$. Найдите $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$.

Решение: для начала нужно найти косинус угла $\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} =$
$= \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$. Далее находим синус двойного угла $\sin 2\alpha =$
$= 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 -$
$-\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$.

Задача 3. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Решение: вспомним формулу синуса двойного угла $\sin 2\alpha =$
$= 2\sin\alpha\cos\alpha$. Далее исходное выражение возведем в квадрат: $(\sin\alpha +$
$+ \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}$. Следовательно, $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha =$
$= -\frac{3}{4}$.

Задача 4. Выведите формулы тройного угла ($\sin 3\alpha$; $\cos 3\alpha$; $\mathrm{tg}\, 3\alpha$).

6. Синус, косинус и тангенс половинного угла.

Задача 1. Упростите выражение $\frac{2}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}$.

Задача 2. Докажите тождество $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} - \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = 2\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Задача 3. Вычислите значение выражения $4\cos\frac{\alpha}{2} + 2\cos\alpha + 5$, если $\cos\alpha = \frac{1}{8}$.

7. Формулы приведения.

Задача 1. Упростите выражение:

a) $\sin(90° - \alpha) + \cos(180° + \alpha) + \mathrm{tg}(270° + \alpha) + \mathrm{ctg}(360° + \alpha)$;

b) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha) + \mathrm{tg}(\pi - \alpha) + \mathrm{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)$.

Задача 2. Вычислите:

a) $\cos 20° + \cos 40° + \cos 60° + \cos 80° + \cos 100° + \cos 120° +$ $+ \cos 140° + \cos 160°$;

b) $\cos 1° + \cos 2° + \cos 3° + \cdots + \cos 179°$.

Задача 3. Найдите значение выражения $7\cos(\pi + \beta) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + +\beta\right)$, если $\cos\beta = -\frac{1}{3}$.

8. Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов.

Задача 1. Вычислить $\operatorname{tg} 110° + \operatorname{tg} 70°$.

Задача 2. Докажите равенство:

a) $\sin 87° - \sin 59° - \sin 93° + \sin 61° = \sin 1°$;

b) $\cos 115° - \cos 35° + \cos 65° + \cos 25° = \sin 5°$.

9. Произведение синусов и косинусов.

Задача 1. Вычислите точное значение произведения $\sin 75°$ и $\cos 15°$.

Решение: точные значения данных чисел нам не известны, с помощью формулы произведения мы сможем вычислить значение выражения. Сумма углов $90°$, а их разность $60°$, таким образом: $\sin 75° \cos 15° = \frac{1}{2}(\sin 60° + + \sin 90°) = \frac{\sqrt{3}+2}{4}$.

Задача 2. Вычислите $\operatorname{tg} 20° \cdot \operatorname{tg} 40° \cdot \operatorname{tg} 60° \cdot \operatorname{tg} 80°$.

Решение: используем определение тангенса $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, учитываем, что $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, получим: $\operatorname{tg} 20° \cdot \operatorname{tg} 40° \cdot \operatorname{tg} 60° \cdot \operatorname{tg} 80° = \sqrt{3} \cdot \frac{\sin 20°}{\cos 20°} \times$ $\times \frac{\sin 40°}{\cos 40°} \cdot \frac{\sin 80°}{\cos 80°}$.

Применим формулу приведения $\cos 80° = \sin 10°$, далее применим формулу двойного угла $\sin 20° = 2\sin 10° \cos 10°$, $\sin 40° =$ $= 2\sin 20° \cos 20°$ и $\sin 80° = 2\sin 40° \cos 40°$.

Подставляем выражения полученные, с помощью формул и получаем $\sqrt{3} \cdot \frac{2\sin 10° \cos 10°}{\cos 20°} \cdot \frac{2\sin 20° \cos 20°}{\cos 40°} \cdot \frac{2\sin 40° \cos 40°}{\sin 10°} = 8\sqrt{3}\cos 10° \sin 20° \sin 40°$. Применяем формулу произведения синусов получаем: $8\sqrt{3}\cos 10° \times$

$\times \frac{1}{2}(\cos 20° - \cos 60°) = 4\sqrt{3}\cos 10° \cdot \left(\cos 20° - \frac{1}{2}\right) = 4\sqrt{3}\cos 10° \cdot$
$\cdot \cos 20° - 2\sqrt{3}\cos 10°$. Снова применим формулу произведения, но уже для косинусов: $4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}(\cos 30° + \cos 10°) - 2\sqrt{3}\cos 10° = 2\sqrt{3}\cos 30° +$
$+2\sqrt{3}\cos 10° - 2\sqrt{3}\cos 10° = 2\sqrt{3}\cos 30° = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$.

Ответ: 3.

10. Уравнение $\cos x = a$.

Задача 1. Решить уравнение $\left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos 3x + \frac{1}{2}\right) = 0$.

Решение: область определения любое действительное число. Левая часть уравнения содержит два множителей. Правая часть уравнения равна нулю. Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Следовательно, надо решить два уравнения.

1) $\cos 2x - \frac{1}{2} = 0, \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, n \in Z$. Так как $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, то имеем: $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z; x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$ – корни первого и исходного уравнений;

2) $\cos 3x - \frac{1}{2} = 0, \cos 3x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$. Так как $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, то имеем: $3x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z; x = \pm\frac{2\pi}{9} +$
$+\frac{2\pi n}{3}, n \in Z$ – корни второго и исходного уравнений.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$ и $x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z$.

11. Уравнение $\sin x = a$.

Задача 1. Решить уравнение $(\sin 1{,}5x + 1)\left(\sin^2 2x - \frac{1}{8}\right) = 0$.

Решение: аналогично предыдущему пункту надо решить два уравнения

1) $\sin 1{,}5x + 1 = 0, \sin\frac{3x}{2} = -1 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z; x = -\frac{\pi}{3} +$
$+\frac{4\pi n}{3}, n \in Z$ – корни первого и исходного уравнения;

2) $\sin^2 2x - \frac{1}{8} = 0, \sin^2 2x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2x = \pm\arcsin\sqrt{\frac{1}{8}} + \pi n, n \in Z.$ Так как $\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, то можно записать, что $2x = \pm\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}} + \pi n, n \in Z$; $x = \pm\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$ – корни второго и исходного уравнений.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi n}{3}, n \in Z$ и $x = \pm\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

12. Уравнение $\operatorname{tg} x = a$.

Задача 1. Решить уравнение $\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right)\left(\operatorname{tg} 2x - \sqrt{3}\right) = 0.$

Решение: область определения данного уравнения

$$\begin{cases} \cos\frac{x}{2} \neq 0, \\ \cos 2x \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pi + 2\pi n, n \in Z, \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z. \end{cases}$$

Нанесем все исключенные точки на одну единичную окружность (рисунок 16).

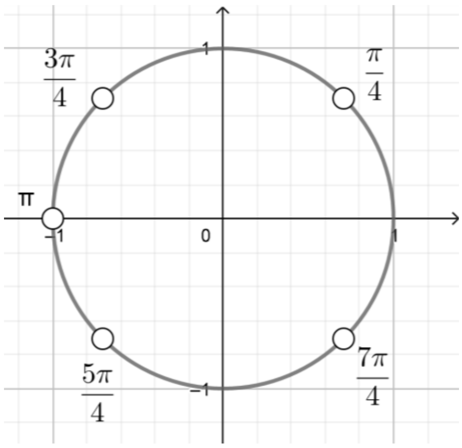

Рисунок 16

Чтобы решить исходное уравнение, надо приравнять каждый множитель нулю и решить получившиеся уравнения

1) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1 = 0, \operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \in Z$. Нанесем найденные точки на единичную окружность (рисунок 17).

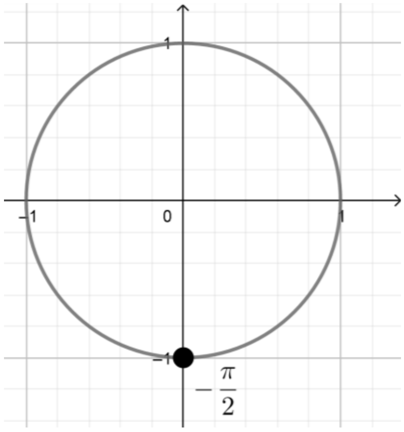

Рисунок 17

2) $\operatorname{tg} 2x - \sqrt{3} = 0, \operatorname{tg} 2x = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi n, n \in Z$. Так как $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, то можно записать, что $2x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$; $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$. Нанесем найденные корни уравнения на единичную окружность (рисунок 18).

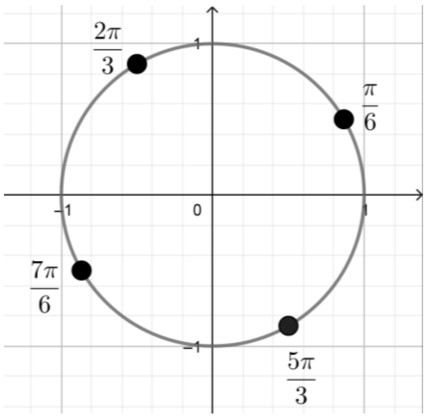

Рисунок 18

Теперь из множество полученных корней отберем корни данного уравнения. Для этого нанесем все найденные решения на единичную окружность и исключим из них точки из области допустимых значений (рисунок 19).

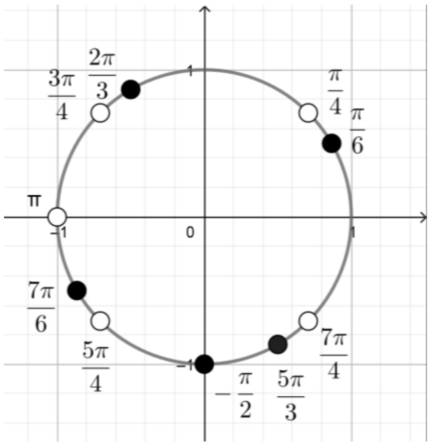

Рисунок 19

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

13. Системы тригонометрических уравнений.

Задача 1. Решить систему $\begin{cases} \sin x + 2\sin y = 1, \\ \cos 2x + 2\cos 2y = 2. \end{cases}$

Решение: преобразуем второе уравнение $\cos 2x + 2\cos 2y = 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 2(1 - 2\sin^2 y) = 2 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 4\sin^2 y = 1.$

Делаем замену: $u = \sin x, v = \sin y$. Получится следующая система

$$\begin{cases} u + 2v = 1, \\ 2u^2 + 4v^2 = 2. \end{cases}$$

Решениями полученной системы служат пары: $u_1 = 0$, $v_1 = \frac{1}{2}$ и $u_2 = \frac{2}{3}$, $v_2 = \frac{1}{6}$. Делаем обратную замену:

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin y = \dfrac{1}{2}, \end{cases} \text{или} \begin{cases} \sin x = \dfrac{2}{3}, \\ \sin y = \dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\pi n;\ (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi k\right), \left((-1)^n \arcsin\frac{2}{3} + \pi n;\ (-1)^n \arcsin\frac{1}{6} + \pi k\right), n, k \in Z.$

14. Область определения и множество значений тригонометрических функций.

Задача 1. Найти множество значений функции $y = \sin x + \cos x$.

Решение: преобразуем исходное выражение

$$sin\,x + sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\,sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2}\right)cos\left(\frac{x + \frac{\pi}{2} + x}{2}\right) =$$

$$= 2\,sin\frac{\pi}{4}cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Из определения косинуса мы знаем, что $-1 \le cos\,x \le 1$;

$$-1 \le cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1;$$

$$-\sqrt{2} \le cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2};$$

Так как данная функция непрерывна на всей области определения то множество ее значений заключено между наименьшим и наибольшим ее значением, если такие существуют, множество значений функции $y = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ есть множество $\left[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right]$.

Множество значений функции $y = sin\,x + cos\,x$ есть множество чисел $\left[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right]$.

15. Четность, нечетность, периодичность тригонометрических функций.

Задача 1. Доказать утверждение $\operatorname{tg} 385° = \operatorname{tg} 25°$.

Решение: так как тангенс периодическая функция с минимальным периодом $360°$, то получится $\operatorname{tg} 385° = \operatorname{tg}(360° + 25°) = \operatorname{tg} 25°$.

Задача 2. Определите, является ли функция $y = 2 + \sin x \cos\left(\frac{3\pi}{2} + +x\right)$ четной или нечетной.

Решение: $y = 2 + sin\,x\,cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$;

$$cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\,sin\,x\,;$$

$$y = 2 + sin\,x\,sin(-x)\,;$$

$$y = 2 + sin^2\,x\,;$$

$$(sin(-x))^2 = sin^2\,x\,;$$

$$y(-x) = y(x);$$

$y = 2 + sin\,x\,cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ – четная функция.

16. Свойства тригонометрических функций и их графики.

Задача 1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $\mathrm{y} = \cos \mathrm{x}$, на отрезке $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{11\pi}{6}\right]$.

Решение: построим данную функцию на промежутке $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{11\pi}{6}\right]$. На графике (рисунок 20) четко видно, что наименьшее значение находится в точке π, а наибольшее $\frac{11\pi}{6}$.

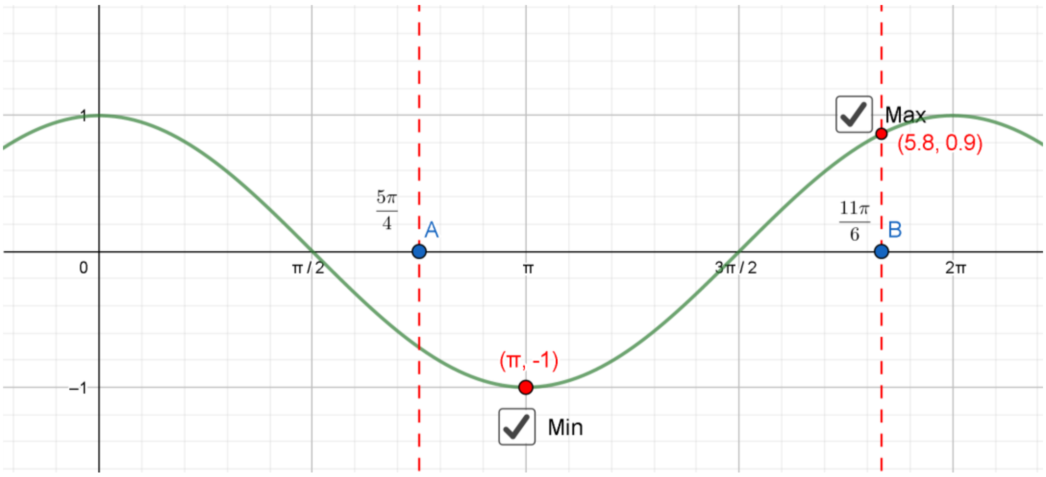

Рисунок 20

Наименьшее значение: $\cos(\pi) = -1$; наибольшее значение: $\cos(\frac{11\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача 2. Постройте график функции $\mathrm{y} = -3 \sin 2\mathrm{x} + 4$. Укажите период данной функции.

Решение: для наглядного построения можно воспользоваться динамической геометрической платформой GeoGebra, которая позволит по шагам рассмотреть построение:

1) изобразим график функции $\mathrm{y} = \sin \mathrm{x}$ (рисунок 21). Период равен $\mathrm{T} = 2\pi$;

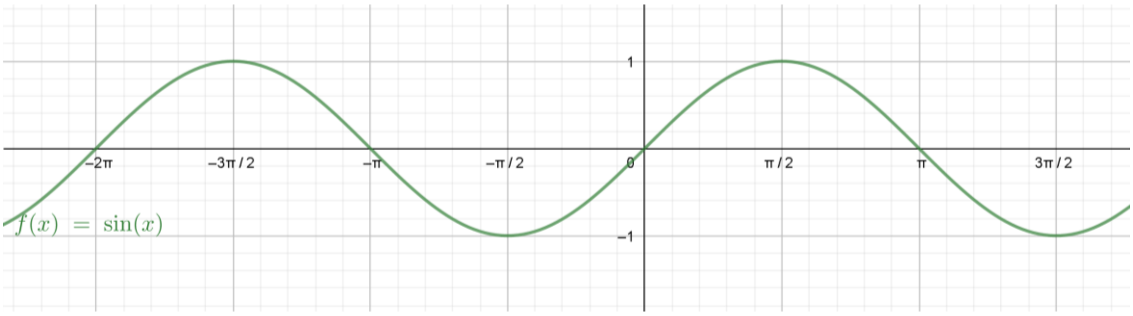

Рисунок 21

2) затем сжимаем в 2 раза $y = \sin 2x$ (рисунок 22). Период стал равным $T = \pi$;

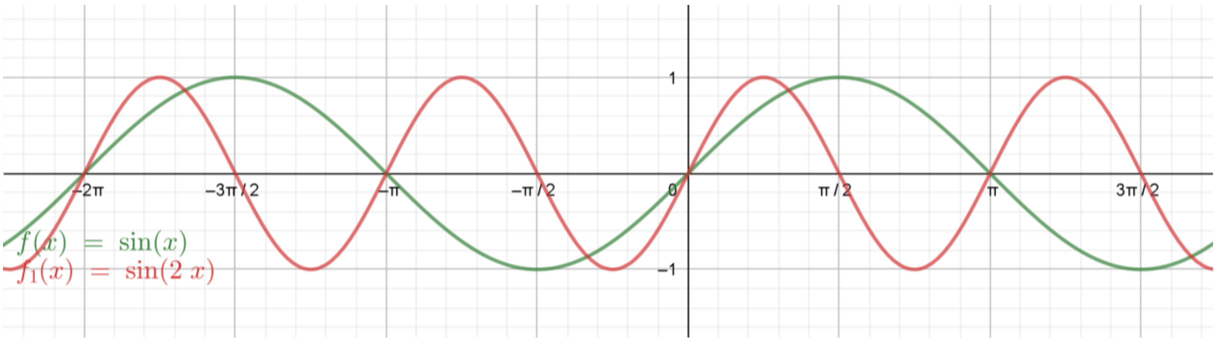

Рисунок 22

3) отобразим синусоиду симметрично относительно оси OX: $y = -\sin 2x$ (рисунок 23). Период при этом не изменился $T = \pi$;

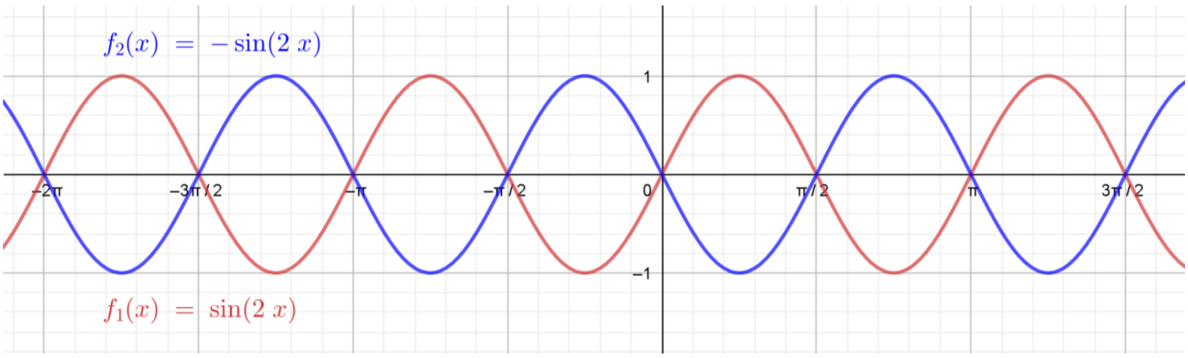

Рисунок 23

4) вытягиваем график вдоль оси OY в 3 раза: $y = -3\sin 2x$ (рисунок 24). Период при этом не изменился $T = \pi$;

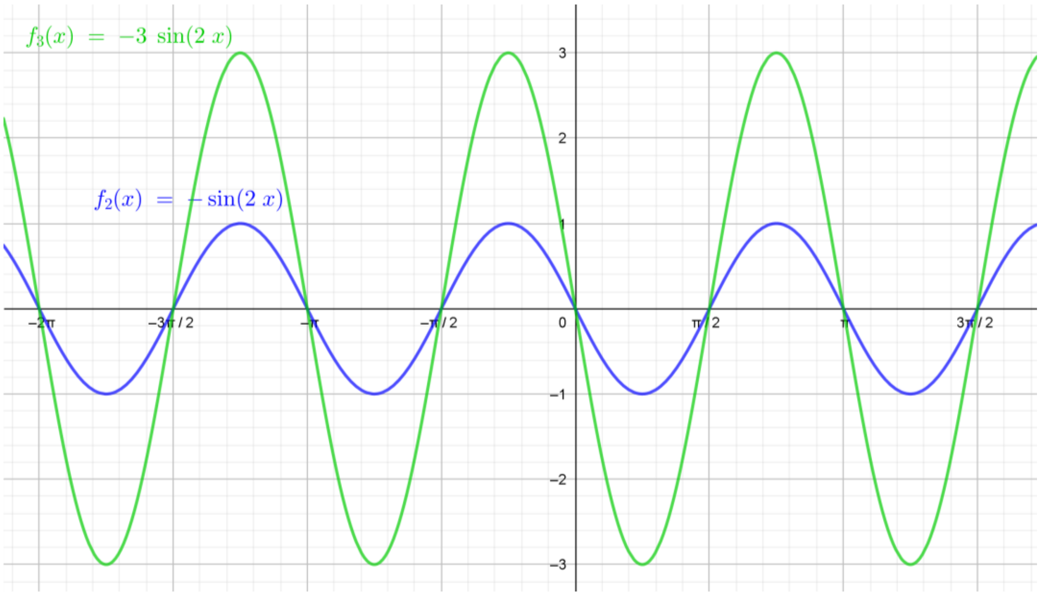

Рисунок 24

5) сдвигаем график вдоль оси OY вверх на 4 единицы:

$y = -3\sin 2x + 4$ (рисунок 25). Период не изменился $T = \pi$;

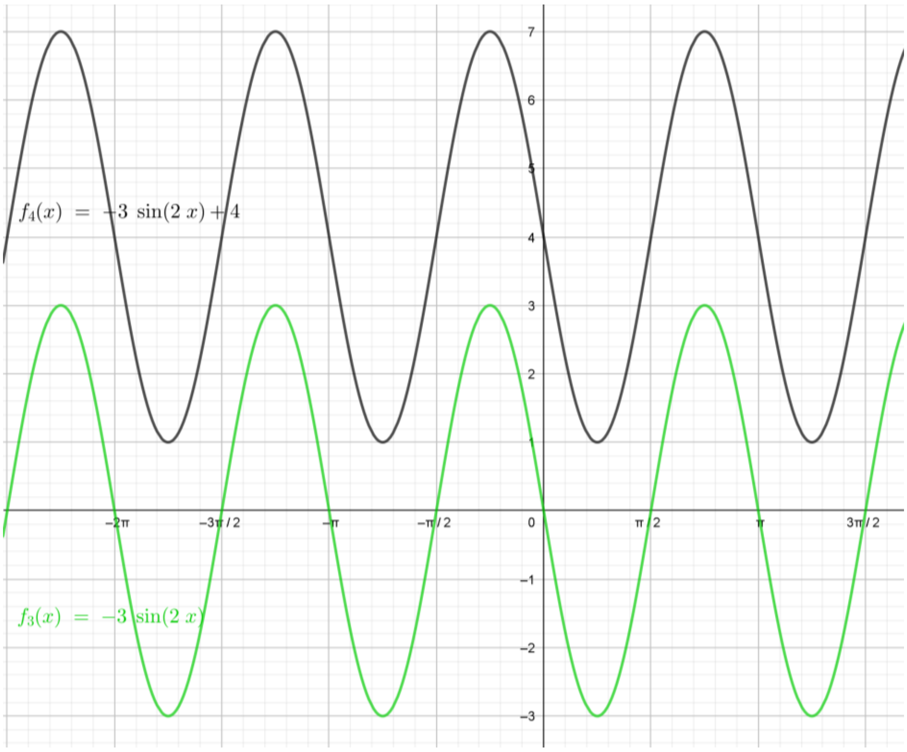

Рисунок 25

Задача 3. Построить график функции $y = f(x)$, найти область определения, множество значений и промежутки возрастания.

$$f(x) = \begin{cases} tg\, x\,, \text{если } \pi \le x < \dfrac{3\pi}{2}; \\ sin\, x\,, \text{если } -\pi \le x < \pi. \end{cases}$$

17. Обратные тригонометрические функции.

Задача 1. Найти $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решение: $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+$

$+\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)==\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+$

$+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Задача 2. Решите неравенство $3\arcsin 2x<1$.

Решение: $3\arcsin 2x<1$;

$$\arcsin 2x<\frac{1}{3};$$

$$\arcsin 2x<\arcsin\left(\sin\frac{1}{3}\right).$$

Накладываем ограничения по свойствам арксинуса:

$$-1\le 2x<\sin\frac{1}{3};$$

$$-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}\sin\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\sin\frac{1}{3}\right)$.

Таким образом, в базовом курсе получилось 40 задач.

2.3.2 Задачи ЕГЭ по математике (профильный уровень)

1. Вычисления и преобразования (№9) [14].

Задача 1. Найдите значение выражения $\frac{19}{\cos^2 37°+1+\cos^2 53°}$.

Решение:

$$\frac{19}{\cos^2 37°+1+\cos^2 53°}=\frac{19}{\cos^2 37°+1+\cos^2(90°-37°)}=$$

$$=\frac{19}{\cos^2 37°+\sin^2 37°+1}=\frac{19}{1+1}=\frac{19}{2}=9{,}2.$$

Задача 2. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\frac{3\sin\alpha-5\cos\alpha+2}{\sin\alpha+3\cos\alpha+6}=\frac{1}{3}$.

Решение: используя свойства пропорции, получим

$$3(3\sin\alpha-5\cos\alpha+2)=\sin\alpha+3\cos\alpha+6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\sin\alpha-\sin\alpha-15\cos\alpha-3\cos\alpha+6-6=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\sin\alpha-18\cos\alpha=0.$$

Если $18\cos\alpha$ перенести в право и поделить обе часть на $\cos\alpha$, получим:

$$\frac{8\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{18\cos\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow 8\operatorname{tg}\alpha=18 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha=\frac{18}{8} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha=\frac{9}{4}.$$

Задача 3. Найдите значение выражения $\sqrt{72}-\sqrt{288}\sin^2\frac{21\pi}{8}$.

Решение: воспользуемся формулой косинуса двойного угла $\cos 2\alpha = = 1-2\sin^2\alpha$.

$$\sqrt{72}-\sqrt{288}\sin^2\frac{21\pi}{8}=\sqrt{72}\left(1-2\sin^2\frac{21\pi}{8}\right)=\sqrt{72}\cos\frac{21\pi}{4}=$$

$$=\sqrt{72}\cos\left(5\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{72}\cos\frac{\pi}{4}=-\sqrt{72}\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{12}{2}=-6.$$

Задача 4. Найдите значение выражения $\frac{3\cos(\pi-\beta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}{\cos(\beta+3\pi)}$.

Решение: так как косинус периодичен, то $\cos(\beta+3\pi)=\cos(\beta+\pi)$. Далее будем использовать формулы приведения:

$$\frac{3\cos(\pi-\beta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}{\cos(\beta+3\pi)}=\frac{-3\cos\beta+\cos\beta}{-\cos\beta}=2.$$

2. Задачи с прикладным содержанием (№10) [14].

Задача 1. Очень лёгкий заряженный металлический шарик зарядом $q=2\cdot10^{-6}$ Кл скатывается по гладкой наклонной плоскости. В момент, когда его скорость составляет $v=5$ м/с, на него начинает действовать постоянное магнитное поле, вектор индукции B которого лежит в той же плоскости и составляет угол α с направлением движения шарика. Значение индукции поля $B=4\cdot10^{-3}$ Тл. При этом на шарик действует сила Лоренца, равная $F_л = qvB\sin\alpha$ (Н) и направленная вверх перпендикулярно плоскости. При каком наименьшем значении угла $\alpha \in [0°; 180°]$ шарик оторвётся от поверхности, если для этого нужно, чтобы сила $F_л$ была не менее чем $2 \cdot 10^{-8}$ Н? Ответ дайте в градусах.

Решение: задача сводится к решению неравенства $qvB \sin\alpha \geq 2 \cdot 10^{-8}$ на интервале $\alpha \in [0°; 180°]$ при заданных значениях заряда шарика $q = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл, индукции магнитного поля $B = 4 \cdot 10^{-3}$ Тл и скорости $v = 5$ м/с:

$$2 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \sin\alpha \geq 2 \cdot 10^{-8} \Leftrightarrow \sin\alpha \geq \frac{1}{2};$$

$$30° + 360°n \leq \alpha \leq 150° + 360°n \underset{0°<\alpha<180°}{\Leftrightarrow} 30° \leq \alpha \leq 150°.$$

Ответ: 30.

Задача 2. Груз массой 0,08 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v = v_0 \sin\frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 12$ с — период колебаний, $v_0 = 0{,}5$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 1 секунду после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Решение: найдем скорость груза через 1 секунду после начала колебаний: $v = v_0 \sin\frac{2\pi t}{T} = 0{,}5 \sin\frac{2\pi \cdot 1}{12} = 0{,}5 \sin\frac{\pi}{6} = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$ м/с. Далее найдем кинетическую энергию: $E = \frac{mv^2}{2} = \frac{0{,}08 \cdot 0{,}25^2}{2} = 0{,}0025$.

Ответ: 0,0025.

3. Наибольшее и наименьшее значение функций (№12) [14].

Задача 1. Найдите наибольшее значение функции $y = 3\,\mathrm{tg}\,x - 3x + {}$ $+5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\ 0\right]$.

Решение: найдем производную данной функции

$$y' = 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = 3\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) = 3\,\mathrm{tg}^2\,x.$$

Найденная производная неотрицательна на данном отрезке. Заданная функция возрастает на нем, поэтому наибольшим значением функции на отрезке является

$$\mathrm{y}(0) = 2\,\mathrm{tg}\,0 - 3 \cdot 0 + 5 = 5.$$

Ответ: 5.

Задача 2. Найдите точку минимума функции $\mathrm{y} = (0{,}5 - \mathrm{x})\cos \mathrm{x} + {}$ $+ \sin \mathrm{x}$, принадлежащую промежутку $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение: найдем производную функции

$$\mathrm{y}' = (0{,}5 - \mathrm{x})\sin \mathrm{x} - \cos x + \cos x = (0{,}5 - \mathrm{x})\sin \mathrm{x}.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} (0{,}5 - \mathrm{x})\sin \mathrm{x} = 0, \\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}, \\ x = \pi n, n \in Z, \end{array}\right. \\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции (рисунок 26):

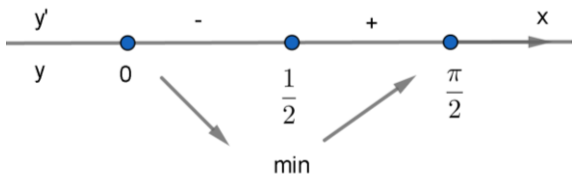

Рисунок 26

Искомая точка минимума $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

4. Уравнения (№13) [14].

Задача 1. Решите уравнение $\sin 2\mathrm{x} + \sqrt{3}\sin \mathrm{x} = 0$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие к отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение: $\sin 2\mathrm{x} + \sqrt{3}\sin \mathrm{x} = 0 \Leftrightarrow 2\sin \mathrm{x}\cos \mathrm{x} + \sqrt{3}\sin \mathrm{x} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sin \mathrm{x}\left(2\cos \mathrm{x} + \sqrt{3}\right) = 0$. Далее решаем, как обыкновенное уравнение:

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, \end{cases} n \in Z.$$

С помощью единичной окружности отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$. Получим числа $\frac{17\pi}{6}$; 3π; $\frac{19\pi}{6}$ (рисунок 27).

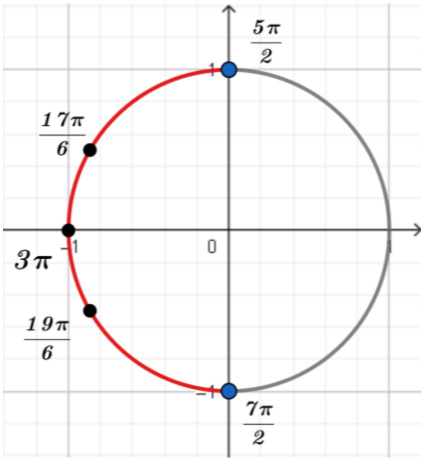

Рисунок 27

Задача 2. Решите уравнение $(27^{\cos x})^{\sin x} = 3^{\frac{3\cos x}{2}}$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие к отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение: преобразуем данное уравнение

$$3^{3\cos x \sin x} = 3^{\frac{3\cos x}{2}} \Leftrightarrow 3\cos x \sin x = \frac{3\cos x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin x = \dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, \end{array}\right. n \in Z.$$

С помощью единичной окружности отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$. Получим числа $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$ (рисунок 28).

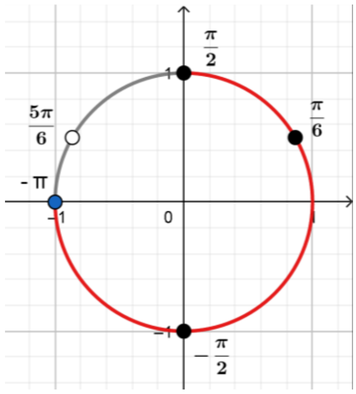

Рисунок 28

5. Задача с параметром (№18) [14].

Задача 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $\frac{a-(a^2-2a-3)\sin x+4}{1{,}5+0{,}5\cos 2x+a^2} < 1$ содержит отрезок $\left[-2\pi;\ -\frac{7\pi}{6}\right]$.

Задача 2. Найдите все значения k, при каждом из которых уравнение $\frac{6k-(2-3k)\cos t}{\sin t-\cos t} = 2$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение: ОДЗ данного уравнения $\sin t - \cos t \neq 0 \Leftrightarrow$
$\sin t \neq \cos t \Leftrightarrow t \neq \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

Преобразуем исходное выражение $6k - (2 - 3k)\cos t = 2(\sin t - \cos t) \Leftrightarrow 6k - 2\cos t + 3k\cos t = 2\sin t - 2\cos t \Leftrightarrow 2\sin t = 6k +$
$+3k\cos t \Leftrightarrow \sin t = \frac{3k}{2}(2 + \cos t)$.

Пусть $\frac{3k}{2} = a$, тогда уравнение примет вид $\sin t = a(2 + \cos t)$. В системе координат оно задает пучок прямых, проходящих через точку $(-2; 0)$ (рисунок 29).

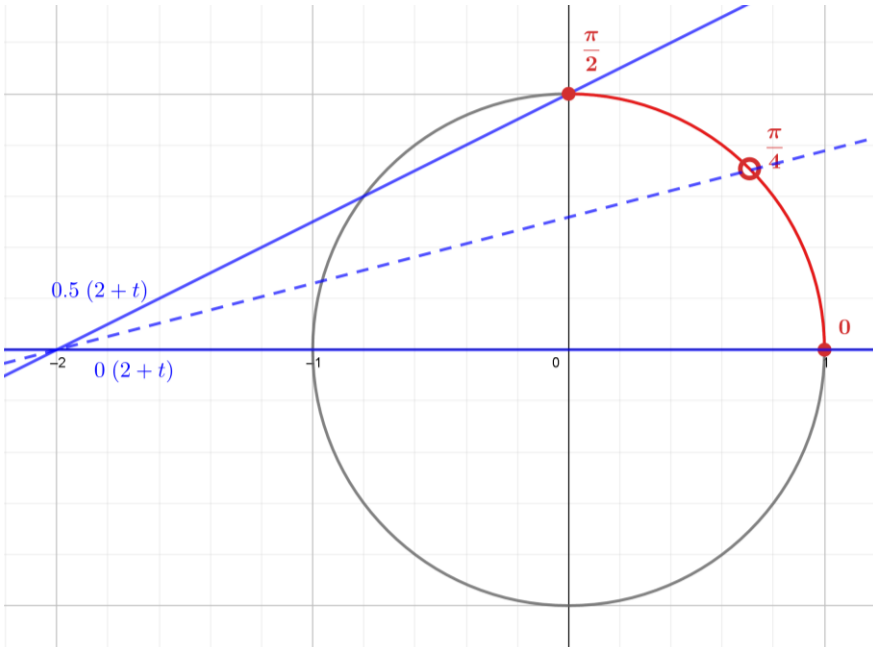

Рисунок 29

Точки пересечения этих самых прямых с окружностью представляют собой решение уравнения. Чтобы на промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ были решения, прямая должна пересекать дугу окружности, выделенную красным цветом, и не проходить через точку $\frac{\pi}{4}$.

Угловой коэффициент горизонтальной прямой $a = 0$. У прямой, проходящей через верхнюю точку дуги, угловой коэффициент $a = 0{,}5$. У прямой, проходящей через точку $\frac{\pi}{4}$, угловой коэффициент $a = \frac{\sqrt{2}}{2\cdot\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} =$

$= \frac{\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{7}$.

Таким образом, условие задачи выполняется при

$$0 \le a < \frac{2\sqrt{2}-1}{7} \text{ или } \frac{2\sqrt{2}-1}{7} < a \le 0{,}5.$$

Вернувшись к параметру $k = \frac{2a}{3}$, получим ответ:

$$0 \le k < \frac{4\sqrt{2}-2}{21} \text{ или } \frac{4\sqrt{2}-2}{21} < k \le \frac{1}{3}.$$

Задачи типа ЕГЭ по математике профильного уровня получилось в разработанной системе 12 штук.

2.3.3 Олимпиадные задачи по математике. Тригонометрия

1. Тригонометрические преобразования и вычисления [15].

Задача 1. Найдите значение выражения $\sin^4\frac{\pi}{24}+\cos^4\frac{5\pi}{24}+$ $+\sin^4\frac{19\pi}{24}+\cos^4\frac{23\pi}{24}$.

Решение: заметим, что

$$\sin\frac{19\pi}{24}=\sin\left(\pi-\frac{5\pi}{24}\right)=\sin\frac{5\pi}{24},\cos\frac{23\pi}{24}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{24}\right)=-\cos\frac{\pi}{24}.$$

Обозначим для кратности $\alpha=\frac{\pi}{24},\beta=\frac{5\pi}{24}$. Искомую сумму обозначим S. Тогда

$$S=\sin^4\alpha+\cos^4\beta+\sin^4\beta+\cos^4\alpha.$$

Преобразуем сумму четвертых степеней синуса и косинуса: $\sin^4\alpha+$ $+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-\frac{1}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha)^2=1-$ $-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha==1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos4\alpha}{2}==\frac{3+\cos4\alpha}{4}$. Теперь имеем:

$$S=\frac{3+\cos4\alpha}{4}+\frac{3+\cos4\beta}{4}=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}(\cos4\alpha+\cos4\beta)=$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Задача 2. Найдите значение выражения $\operatorname{tg}20°+4\sin20°$.

Решение:

$$\operatorname{tg}20°+4\sin20°=\frac{\sin20°+4\sin20°\cos20°}{\cos20°}=\frac{\sin20°+2\sin40°}{\cos20°}=$$

$$=\frac{(\sin20°+\sin40°)+\sin40°}{\cos20°}=\frac{2\sin30°\cos10°+\sin40°}{\cos20°}=$$

$$=\frac{\cos10°+\cos50°}{\cos20°}=\frac{2\cos30°\cos20°}{\cos20°}=\sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

2. Исследование тригонометрических функций [15].

Задача 1. Определите, верно ли следующее утверждение: множество значений функции $y = \cos x - 3\ \sin x$ принадлежит отрезку $\left[-4;\ \sqrt{5}\right]$.

Решение: преобразуем выражение

$$y = \cos x - 3\ \sin x = 1 - 2\sin^2 x - 3\sin x.$$

Сделаем замену $t = \sin x$. Когда x пробегает все значения из множества действительных чисел, величина t пробегает все значения из отрезка $[-1; 1]$. Поэтому задача сводится к нахождению множества значений квадратичной функции $y(t) = -2t^2 - 3t + 1$ на отрезке $I = [-1; 1]$.

Графиком функции y(t) служит парабола, ветви которой направлены вниз. Абсцисса вершины параболы $t_0 = -\frac{3}{4}$ принадлежит отрезку I, поэтому наибольшее значение функции на данном отрезке достигается в вершине параболы:

$$y_{\max} = y(t_0) = -2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 1 = \frac{17}{8}.$$

Наименьшее значение функции y(t) на отрезке I достигается на одном из концов отрезка. Вычислим:

$$y(-1) = 2, y(1) = -4 \Rightarrow y_{\min} = -4.$$

Таким образом, множество значений нашей функции на отрезке I есть отрезок $E(y) = \left[-4;\ \frac{17}{8}\right]$. Остается сравнить числа $\frac{17}{8}$ и $\sqrt{5}$. Имеем:

$$\frac{17}{8} - \sqrt{5} = \sqrt{\frac{289}{64}} - \sqrt{5} = \sqrt{\frac{289}{64}} - \sqrt{\frac{320}{64}} < 0.$$

Следовательно, $E(y) \in \left[-4;\ \sqrt{5}\right]$.

Задача 2. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{2\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right)\cos 3x - \cos 6x - 7}$.

Решение: обозначим данное выражение через f и преобразуем его:

$$f=\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)\cos 3x-(2\cos^2 3x-1)-7}=$$

$$=\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{4\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cos 3x-2\cos^2 3x-6}.$$

Обозначим также $a=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right), b=\cos 3x$. Имеем:

$$f=\frac{a}{4ab-2b^2-6}=\frac{-a}{2(a-b)^2+6-2a^2}.$$

Знаменатель последней дроби положителен. Чтобы не связываться со знаком a, оценим модуль полученного выражения с учетом неравенств $(a-b)^2\geq 0$ и $|a|\leq 1$:

$$|f|=\frac{|a|}{2(a-b)^2+6-2a^2}\leq\frac{|a|}{6-2a^2}\leq\frac{1}{6-2\cdot 1}=\frac{1}{4}.$$

Откуда

$$-\frac{1}{4}\leq f\leq\frac{1}{4}.$$

Если $x=\frac{2\pi}{3}$, то $a=b=1$, и тогда в оценке снизу достигается равенство. Следовательно, наименьшее значение величины f равно $-\frac{1}{4}$.

3. Обратные тригонометрические функции [15].

Задача 1. Для каждого значения параметра α решите неравенство $\arcsin x<\alpha$.

Решение: множество значений $\arcsin x$ есть отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, поэтому если $\alpha\leq-\frac{\pi}{2}$, то неравенство $\arcsin x<\alpha$ не имеет решений, а если $\alpha>\frac{\pi}{2}$, то неравенству удовлетворяют все $x\in[-1;1]$. Демонстрацию данного решения можно воспроизвести в динамической геометрической платформе GeoGebra (рисунок 30).

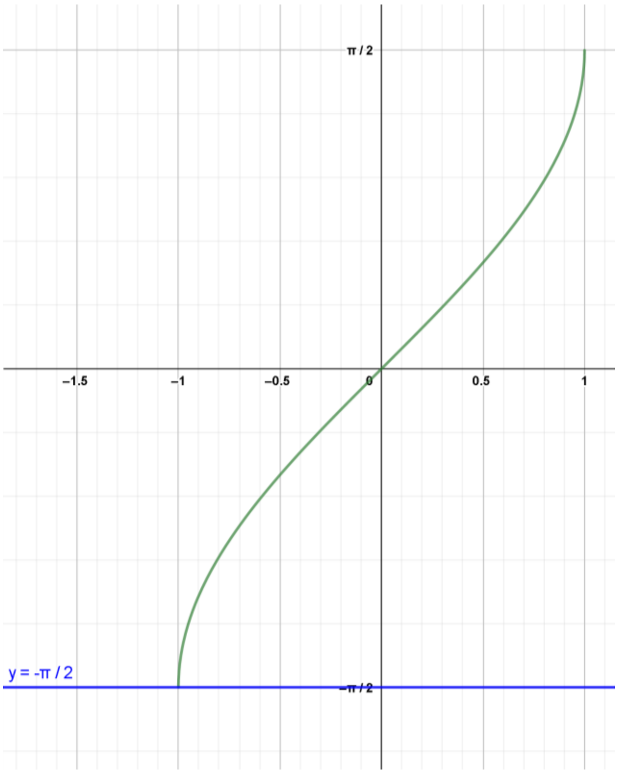

Рисунок 30

Пусть $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Имеется ровно одно значение $x = \sin\alpha$, для которого выполнено равенство $\arcsin x = \alpha$. Ввиду монотонного возрастания функции $y = \arcsin x$ все решения неравенства $\arcsin x < \alpha$ задаются формулой $-1 \leq x < \sin\alpha$ (рисунок 31).

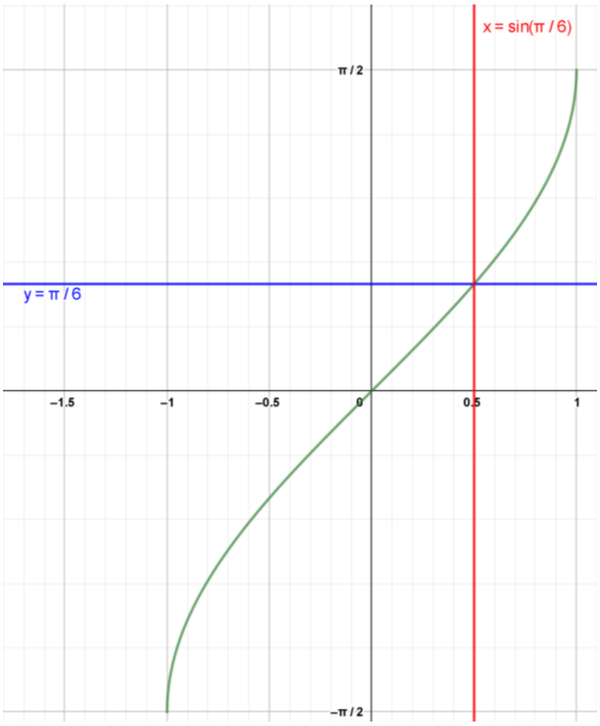

Рисунок 31

Ответ: если $\alpha \le -\frac{\pi}{2}$, то решений нет; если $-\frac{\pi}{2} < \alpha \le \frac{\pi}{2}$, то $-1 \le x < \sin\alpha$; если $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то $-1 \le x \le 1$.

4. Преобразования тригонометрических уравнений [15].

Задача 1. Решить уравнение $\cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(17x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение: воспользуемся формулой приведения $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ и превращаем разность синусов в произведение:

$$0 = \sin\left(17x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(17x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) =$$

$$= 2\sin 14x \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right).$$

Что равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} 14x = \pi n, \\ \frac{\pi}{4} + 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \end{array}\right. n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{14}, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

5. Тригонометрические уравнения с модулем [15].

Задача 1. Решить уравнение $\sqrt{6}\cos x - \sqrt{2}|\sin x| = 2$.

Решение: разделим обе части уравнения на $2\sqrt{2}$, получим:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}|\sin x| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos x \cos\frac{\pi}{6} - |\sin x| \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Если $\sin x \ge 0$, то уравнение примет вид

$$\cos x \cos\frac{\pi}{6} - \sin x \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

С решениями $x = -\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, которые нужно записать в виде двух отдельных корней:

$$x_1 = \frac{\pi}{12} + 2\pi n \text{ и } x_2 = -\frac{5\pi}{12} + 2\pi n, n \in Z.$$

Условию $\sin x \ge 0$ удовлетворяет только один корень x_1.

Если же $\sin x < 0$, то уравнение примет вид:

$$\cos x \cos\frac{\pi}{6} - \sin x \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

$$x_3 = \frac{5\pi}{12} + 2\pi n \text{ и } x_4 = -\frac{\pi}{12} + 2\pi n, n \in Z.$$

Условию $\sin x \geq 0$, удовлетворяет только корень x_4.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{12} + 2\pi n, n \in Z$.

6. Тригонометрические уравнения с радикалами [15].

Задача 1. Решите уравнение $\sqrt{3 + \frac{25}{2}\sin^2 x} = \sqrt{6}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x$.

Решение: данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3 + \dfrac{25}{2}\sin^2 x = \left(\sqrt{6}\cos x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)^2, \\ \sqrt{6}\cos x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0, \\ 2\sqrt{3}\cos x - \sin x \geq 0. \end{cases}$$

Если подставить $\cos x = 0$ в уравнение, то получим и $\sin x = 0$ вопреки основному тригонометрическому тождеству. Значит, все решения уравнения удовлетворяют условию $\cos x \neq 0$. Поделив обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим равносильное уравнение

$$15\,\mathrm{tg}^2\, x + 2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} \mathrm{tg}\, x &= -\frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \mathrm{tg}\, x &= \frac{\sqrt{3}}{5}, \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= -\frac{\pi}{6} + \pi n, \\ x &= \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5} + \pi n, \end{aligned}\right. \quad n \in Z.$$

Решениями являются два корня с периодом π каждый. Чтобы удобнее было проверять неравенство, представим найденные решения в виде четырех корней с периодом 2π каждый:

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, x_3 = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5} + 2\pi n,$$

$$x_4 = \pi + \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5} + 2\pi n, n \in Z.$$

Теперь имеем:

$$2\sqrt{3}\cos x_1 - \sin x_1 = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} > 0;$$

$$2\sqrt{3}\cos x_2 - \sin x_2 = -2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} < 0;$$

$$2\sqrt{3}\cos x_3 - \sin x_3 = 2\sqrt{3}\cdot\frac{5}{\sqrt{28}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}} > 0;$$

$$2\sqrt{3}\cos x_4 - \sin x_4 = -2\sqrt{3}\cdot\frac{5}{\sqrt{28}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}} < 0.$$

Следовательно, решениями данного уравнения являются корни x_1 и x_3.

Ответ: $= -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5} + 2\pi n, n \in Z.$

7. Системы тригонометрических уравнений [15].

Задача 1. Решить систему $\begin{cases} x + y = \pi, \\ \sin x + \sin y = 1. \end{cases}$

Решение: из первого уравнения выражаем y через x:

$$y = \pi - x.$$

Подставляем y во второе уравнение:

$$\sin x + \sin(\pi - x) = 1 \Leftrightarrow 2\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}.$$

Получилось простое тригонометрическое уравнение относительно x. Его корни:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

Остается найти соответствующие значения y:

$$y_1 = \pi - x_1 = \frac{5\pi}{6} - 2\pi n, y_2 = \pi - x_2 = \frac{\pi}{6} - 2\pi n.$$

Как всегда в случае системы уравнений, ответ дается в виде пары (x; y).

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} - 2\pi n\right), \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{6} - 2\pi n\right), n \in Z.$

8. Минимаксные задачи в тригонометрии [15].

Задача 1. Решите уравнение $(\cos x - 3\cos 4x)^2 = 16 + \sin^2 3x$.

Решение: из очевидного неравенства $-4 \le \cos x - 3\cos 4x \le 4$ мы получаем оценку левой части уравнения: $(\cos x - 3\cos 4x)^2 \le 16$. В то же время правая часть не меньше 16. Следовательно, равенство возможно лишь, только если обе части равны 16.

Левая сторона равна 16, когда $\cos x = 1$ и $\cos 4x = -1$ или когда $\cos x = -1$ и $\cos 4x = 1$ одновременно. Первый случай невозможен, а во втором мы имеем $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$. Для такого x, как нетрудно убедиться, правая часть уравнения равна 16.

Ответ: $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.

Задач олимпиадного уровня в разработанной системе получилось 10.

Таким образом, в разработанной системе задач нами было реализовано 62 задачи, что поможет учащимся равномерно усвоить материал в течении всего учебного года. Так же учитель успеет разобрать весь материал с учащимися, а также останется время для работы с заданиями повышенной сложности (ЕГЭ и олимпиадные).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Принимая во внимание все материалы, упомянутые в этом документе, можно сделать вывод:

1. Тригонометрические функции являются наиболее подходящим и наглядный средством для обучения учащихся исследованию функций.

2. Преподавание темы «Тригонометрические функции» требует тщательного выбора содержания, инструментов и методов обучения, то есть разработки эффективной методики.

3. Изучение тригонометрических функций будет более эффективным, если:

— была проделана большая работа с кругом чисел до введения тригонометрических функций;

— числовой круг рассматривается не только как отдельный объект, но и как элемент декартовой системы координат;

— график выполняется после изучения свойств тригонометрических функций на основе анализа поведения функции в числовом круге;

— каждое свойство функций четко обоснованно и все они сведены в одну таблицу.

Также можно констатировать, что значительные временные интервалы между изучением отдельных тем в разделе «Тригонометрия», по нашему мнению, являются одной из основных причин, по которой школьникам трудно изучать этот раздел. Следует отметить, что до 1966 года тригонометрия в домашнем обучении была представлена в качестве отдельной дисциплины, которая была выделена 2 часа в неделю, обеспечивая тем самым систематический и структурированный учебный материал, а следовательно, силу и глубину знаний учащихся.

В настоящее время в 9 классе по геометрии школьники изучают только поверхностное представление о тригонометрических функциях, а вычисление значений углов и вовсе происходит на интуитивном непонятном для детей уровне. Тем не менее, задачи по тригонометрии включаются в модуль «Геометрия» на основном государственном экзамене, и большая часть сдающих допускает много ошибок при выполнении заданий именно этого раздела или вообще не берется за такие задания. По тогам ЕГЭ тригонометрия занимает второе место после геометрии по степени невыполнения заданий.

В ходе практики мы убедились, что качество математической подготовки школьников по разделу «Тригонометрия» повышается, если изучать этот курс не отрывками, а выделив отдельное время на изучение.

Используя нами разработанную систему задач, учащиеся равномерно смогут усвоить материал в течении всего учебного года. Так же учитель успеет разобрать весь материал с учащимися, а также останется время для работы с заданиями повышенной сложности (ЕГЭ и олимпиадные).

Таким образом, на основании всего сказанного мы можем судить о том, что цель дипломной работы достигнута, задачи выполнены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Адронов И.К. Курс тригонометрии, развиваемый на основе реальных задач / И.К. Андронов, А. К. Окунев — М.: Просвещение, 2012.

2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и другие Геометрия. 7-9 классы: Учебник для общеобразовательных учреждений / Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и другие. – 2-е изд. — М.: Просвещение, 2014. — 383 с.

3. Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е., Шабунин М.И. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни / Колягин Ю.М., Ткачева М.В. под ред. Жижченко А.Б. — 4-е изд. – М.: Просвещение, 2011. — 368с.

4. Малова И. Е Теория и методика обучения математике в средней школе: учеб. пособие для студентов вузов / И. Е Малова [и др.]. — М.: Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2009. — 445 с.

5. Мордкович А.Г. Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе / Математика в школе, 2012 — №6 — с.32-38.

6. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных организаций / Никольский С.М., Потапов М.К. — М.: Просвещение, 2014. — 335 с.

7. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни / Никольский С.М., Потапов М.К. — 8-е изд. — М.: Просвещение, 2009. — 430с.

8. Погорелов А.В. Геометрия. 7-9 классы: учебник для общеобразовательных организаций / А.В. Погорелов — 2-е изд. — М.: Просвещение, 2014. — 240 с.

9. Талызина, Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний / Н.Ф. Талызина. — М. Изд-во МГУ, 2013.

10. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования / в ред. Приказа Минобрнауки России от 29.12.2014 — № 1644.

11. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования / в ред. Приказа Минобрнауки России от 29.12.2014 — № 1645.

12. Гимаддинова М. В. К вопросу об изучении тригонометрии в курсе математики средней школы // Казанский (Приволжский) федеральный университет. — URL http://dspace.kpfu.ru/xmlui/bitstream/handle/net/110958/mathedu2016_110_114.pdf (дата обращения: 04.03.2020).

13. Золотарева Е.А. Проблемы в изучении тригонометрии // Е.А. Золотарева. Материалы международной научно-практической конференции: в 2-х частях, 2018. 108-109 с. — URL https://elibrary.ru/download/elibrary_32503238_84090096.pdf (дата обращения: 10.04.2020).

14. Математика профильного уровня // Гущин Д. Д. Образовательный портал для подготовки к экзаменам 2011-2020. — URL https://ege.sdamgia.ru/ (дата обращения: 02.05.2020).

15. Материалы по математике: подготовка к олимпиадам и ЕГЭ // И. В. Яковлев Дистанционная подготовка к олимпиадам, ДВИ и ЕГЭ по математике и физике 2012-2020. — URL https://mathus.ru/math/ (дата обращения: 13.01.2020).

16. Мурадова С.Р.К. К вопросу обучения тригонометрии в основной общеобразовательной школе // сборник: Лучшая студенческая статья 2018 сборник статей XIII Международного научно-практического конкурса. В 2-х частях. 2018. 166-169 с. — URL

https://www.elibrary.ru/download/elibrary_32592191_85479867.pdf (дата обращения: 15.02.2020).

17. Рабочая программа учебного предмета «Математика: алгебра и начала анализа, геометрия» (базовый уровень), 10-11 класс. — URL http://mou45.chel-edu.ru/DswMedia/prilojenie1rpmatematika-10-11-baza.pdf (дата обращения: 03.04.2020).

18. Рабочая программа учебного предмета «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» (углубленный уровень), 10-11 класс. — URL http://mou45.chel-edu.ru/DswMedia/prilojenie1rpmatematika-10-11-uglublennyiy.pdf (дата обращения: 12.12.2019).

19. Титоренко С.А., Иванов О.Н., Обуховский В.В. Изучение школьного курса тригонометрии в контексте ФГОС // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. 2015. № 3. 160-165 с. — URL https://pandia.ru/text/80/156/18365.php (дата обращения: 06.11.2019).

20. Тригонометрические уравнения. Основные методы решений // Вся элементарна математика 2004-2012. — URL https://www.bymath.net/studyguide/tri/sec/tri16.htm (дата обращения: 21.05.2020).

21. Тригонометрические формулы — список основных формул. — URL www.cleverstudents.ru (дата обращения: 31.01.2020).

22. Тригонометрия // Материал из Википедии — свободной энциклопедии, 2020. — URL https://ru.wikipedia.org/wiki/Тригонометрия.

23. Федеральные государственные образовательные стандарты // Национальная ассоциация развития образования и науки 2016-2018. — URL https://fgos.ru/ (дата обращения: 03.04.2020).

24. Что такое ФГОС: их значение, цели и задачи // Science Debate, 2019. — URL https://www.sciencedebate2008.com/chto-takoye-fgos-ikh-znacheniye-tseli-i-zadachi/ (дата обращения: 14.02.2020).

25. Skripchenko Yu. Making of trigonometric equations according to planimetric problems as the searching method of their solving // Дидактика математики: проблемы и исследования, 2006. № 25. С. 244-247. — URL https://elibrary.ru/download/elibrary_25613086_96028115.pdf (дата обращения: 21.12.2019).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Требования ФГОС основного общего образования

Предметные результаты освоения основной образовательной программы основного общего образования с учетом общих требований Стандарта и специфики изучаемых предметов, входящих в состав предметных областей, должны обеспечивать успешное обучение на следующем уровне общего образования.

Изучение предметной области "Математика и информатика" должно обеспечить:

— осознание значения математики и информатики в повседневной жизни человека;

— формирование представлений о социальных, культурных и исторических факторах становления математической науки;

— понимание роли информационных процессов в современном мире;

— формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления.

В результате изучения предметной области "Математика и информатика" обучающиеся развивают логическое и математическое мышление, получают представление о математических моделях; овладевают математическими рассуждениями; учатся применять математические знания при решении различных задач и оценивать полученные результаты; овладевают умениями решения учебных задач; развивают математическую интуицию; получают представление об основных информационных процессах в реальных ситуациях.

Предметные результаты изучения предметной области "Математика и информатика" должны отражать:

Математика. Алгебра. Геометрия. Информатика:

1) формирование представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления;

2) развитие умений работать с учебным математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию), точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений;

3) развитие представлений о числе и числовых системах от натуральных до действительных чисел; овладение навыками устных, письменных, инструментальных вычислений;

4) овладение символьным языком алгебры, приемами выполнения тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств; умения моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат;

5) овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей;

6) овладение геометрическим языком; развитие умения использовать его для описания предметов окружающего мира; развитие пространственных представлений, изобразительных умений, навыков геометрических построений;

7) формирование систематических знаний о плоских фигурах и их свойствах, представлений о простейших пространственных телах; развитие умений моделирования реальных ситуаций на языке геометрии, исследования построенной модели с использованием геометрических

понятий и теорем, аппарата алгебры, решения геометрических и практических задач;

8) овладение простейшими способами представления и анализа статистических данных; формирование представлений о статистических закономерностях в реальном мире и о различных способах их изучения, о простейших вероятностных моделях; развитие умений извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, описывать и анализировать массивы числовых данных с помощью подходящих статистических характеристик, использовать понимание вероятностных свойств окружающих явлений при принятии решений;

9) развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов, компьютера, пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах;

10) формирование информационной и алгоритмической культуры; формирование представления о компьютере как универсальном устройстве обработки информации; развитие основных навыков и умений использования компьютерных устройств;

11) формирование представления об основных изучаемых понятиях: информация, алгоритм, модель – и их свойствах;

12) развитие алгоритмического мышления, необходимого для профессиональной деятельности в современном обществе; развитие умений составить и записать алгоритм для конкретного исполнителя; формирование знаний об алгоритмических конструкциях, логических значениях и операциях; знакомство с одним из языков программирования и основными алгоритмическими структурами — линейной, условной и циклической;

13) формирование умений формализации и структурирования информации, умения выбирать способ представления данных в

соответствии с поставленной задачей — таблицы, схемы, графики, диаграммы, с использованием соответствующих программных средств обработки данных;

14) формирование навыков и умений безопасного и целесообразного поведения при работе с компьютерными программами и в Интернете, умения соблюдать нормы информационной этики и права [10].

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Требования ФГОС среднего общего образования

Предметные результаты освоения основной образовательно программы устанавливаются для учебных предметов на базовом и углубленном уровнях.

Предметные результаты освоения основной образовательной программы для учебных предметов на базовом уровне ориентированы на обеспечение преимущественно общеобразовательной и общекультурной подготовки.

Предметные результаты освоения основной образовательной программы для учебных предметов на углубленном уровне ориентированы преимущественно на подготовку к последующему профессиональному образованию, развитие индивидуальных способностей обучающихся путем более глубокого, чем это предусматривается базовым курсом, освоением основ наук, систематических знаний и способов действий, присущих данному учебному предмету.

Предметные результаты освоения интегрированных учебных предметов ориентированы на формирование целостных представлений о мире и общей культуры обучающихся путем освоения систематических научных знаний и способов действий на метапредметной основе.

Предметные результаты освоения основной образовательной программы должны обеспечивать возможность дальнейшего успешного профессионального обучения или профессиональной деятельности.

Изучение предметной области "Математика и информатика" должно обеспечить:

— сформированность представлений о социальных, культурных и исторических факторах становления математики и информатики;

— сформированность основ логического, алгоритмического и математического мышления;

— сформированность умений применять полученные знания при решении различных задач;

— сформированность представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления;

— сформированность представлений о роли информатики и ИКТ в современном обществе, понимание основ правовых аспектов использования компьютерных программ и работы в Интернете;

— сформированность представлений о влиянии информационных технологий на жизнь человека в обществе; понимание социального, экономического, политического, культурного, юридического, природного, эргономического, медицинского и физиологического контекстов информационных технологий;

— принятие этических аспектов информационных технологий; осознание ответственности людей, вовлеченных в создание и использование информационных систем, распространение информации.

Предметные результаты изучения предметной области "Математика и информатика" включают предметные результаты изучения учебных предметов:

"Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия" (базовый уровень) — требования к предметным результатам освоения базового курса математики должны отражать:

1) сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;

2) сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;

3) владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

4) владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;

5) сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа;

6) владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;

7) сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;

8) владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач.

"Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия" (углубленный уровень) – требования к предметным результатам освоения углубленного курса математики должны включать требования к результатам освоения базового курса и дополнительно отражать:

1) сформированность представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений;

2) сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;

3) сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат;

4) сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей;

5) владение умениями составления вероятностных моделей по условию задачи и вычисления вероятности наступления событий, в том числе с применением формул комбинаторики и основных теорем теории вероятностей; исследования случайных величин по их распределению.

Требования Стандарта к результатам освоения основной образовательной программы определяют содержательно-критериальную и нормативную основу оценки результатов освоения обучающимися основной образовательной программы, деятельности педагогических работников, организаций, осуществляющих образовательную деятельность.

Освоение обучающимися основной образовательной программы завершается обязательной государственной итоговой аттестацией выпускников. Государственная итоговая аттестация обучающихся проводится по всем изучавшимся учебным предметам [11].