МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика обучения решению задач на построение в курсе планиметрии

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность программы бакалавриата

«Математика. Экономика»

Форма обучения очная

Проверка на объем заимствований:
84 % авторского текста
Работа рекоменд к защите
«25» мая 2020 г.
И.о. зав. Кафедрой МиМОМ
Шумакова Е.О.

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513/086-5-1
Павлова Анна Андреевна

Научный руководитель:
Старший преподаватель кафедры МиМОМ
Мартынова Елена Владимировна

Челябинск
2020

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Задачи на построение являются традиционными задачами в курсе геометрии. Разработкой методов решения таких задач математики занимаются ещё со времён Древней Греции. Уже в VII в. до н.э. учёные выполняли геометрические построения на плоскости. Они проводили свои построения с помощью двух приборов: гладкой дощечки с ровным краем – линейки и двух заострённых палок, связанных на одном конце – циркуля. В течение многих веков математики проявляли живейший интерес к задачам на построение. Интерес к этим задачам обусловлен не только их красотой и оригинальностью методов решения, но и большой практической ценностью. Проектирование строительства, архитектура, конструирование различной техники основаны на геометрических построениях.

Геометрические построения на плоскости циркулем и линейкой – раздел евклидовой геометрии, который школьники впервые начинают изучать практически в самом начале своего знакомства с данным предметом. От того, как они с ним познакомятся, насколько им будет понятно и интересно, зависит дальнейшее их отношение к геометрии. В задачах на построение циркуль и линейка считаются идеальными инструментами. Их назначение известно всем школьникам: линейкой проводят прямые, а циркулем – окружности, откладывают и отрезки заданных длин.

Задачи на построение уникальны тем, что не допускают стандартного подхода к решению. Для каждой задачи необходимо проводить анализ, чтобы выбрать свой конкретный метод решения. Это очень развивает поисковые навыки решения практических проблем, заставляет мыслить нестандартно и креативно, обобщать полученные ранее знания для того, чтобы найти выход из затруднительной ситуации. Развиваются так же логическое мышление, математическая интуиция и умение самостоятельно искать решение без опоры на решенную ранее идентичную задачу. Также эти задачи полезны тем, что они удобны для обобщения и закрепления знаний обучающихся по любому из разделов школьного курса геометрии.

Таким образом, целью данной работы является выведение методических рекомендаций для учителей, которые помогут им при работе с задачами на построение, а также разработка программы факультативного курса по теме: «Нестандартные задачи на построение» для 9 класса.

Объект исследования: процесс обучения геометрии.

Предмет исследования: решение задач на построение.

Гипотеза исследования: применение учителем компьютерных технологий, при изучении с обучающимися задач на построение, пояснение актуальности данных задач через их практическую значимость, а также решение нестандартных задач на построение не только повышает общий уровень мотивации обучающихся к изучению математики, но и развивает такие качества как умение анализировать, обобщать и систематизировать информацию, а также развивает умственные и творческие способности обучающихся.

Задачи:

1. Изучить учебно-методические материалы по теме, рассмотреть стандартные и нестандартные задачи на построение.
2. Рассмотреть различные методы решения задач на построение.
3. Провести сравнительный анализ учебно-методических комплексов по геометрии за 7-9 классы.
4. Изучить технологии построения уроков по данной теме.
5. Разработать методические рекомендации для мотивации обучающихся.
6. Выявить основные проблемы, с которыми сталкиваются обучающиеся при решении задач на построение, и разработать методы их устранения.

7. Разработать программу факультативного курса по геометрии для 9 класса по теме «Нестандартные задачи на построение».

База исследования: МАОУ «Лицей №67 г. Челябинска», 7 классы.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ПОСТРОЕНИЯ ЦИРКУЛЕМ И ЛИНЕЙКОЙ» В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

1.1. Содержание темы «Построения циркулем и линейкой»

Задачи на построение при помощи циркуля и линейки занимали важное место в древнегреческой математике. Хотя линейкой пользовались еще в Древнем Египте, циркуль, по свидетельству римского поэта Овидия, изобрели именно греки.

Для решения задач на построение с помощью циркуля и линейки под линейкой понимается инструмент, который не имеет делений и имеет сторону бесконечной длины, но только одну.

Для решения задач на построение с помощью циркуля и линейки учитывается, что циркуль может иметь какой угодно большой или малый раствор (то есть может чертить окружность произвольного радиуса).

Конструктивная геометрия – раздел геометрии, рассматривающий задачи на построение и методы их решения.

Выберем в пространстве некоторую плоскость и назовем ее основной плоскостью. Будем предполагать, что все рассматриваемые фигуры лежат в этой плоскости. Точки, прямые и окружности основной плоскости называются основными фигурами. Простейшими фигурами назовем отрезки, лучи и углы [27; 28; 29].

Допустимые построения:

1. Отметить точку:

- произвольную точку плоскости;
- произвольную точку на заданной фигуре;
- точку пересечения двух заданных фигур;
- точку касания двух заданных фигур.

2. С помощью линейки можно построить прямую:

– произвольную прямую на плоскости;

– произвольную прямую, проходящую через заданную точку;

– прямую, проходящую через две заданных точки.

3. С помощью циркуля можно построить окружность:

– произвольную окружность на плоскости;

– произвольную окружность с центром в заданной точке;

– произвольную окружность с радиусом, равным расстоянию между двумя заданными точками;

– окружность с центром в заданной точке и радиусом, равным расстоянию между двумя заданными точками.

Постановка задачи на построение:

Дано конечное множество основных построенных фигур $F_1, F_2, \dots, F_n$, и описаны свойства, характеризующие искомую непостроенную фигуру F. Требуется, используя общие аксиомы конструктивной геометрии, получить конечное множество основных построенных фигур, содержащих фигуру F.

Задача на построение решена, если построена фигура F (построены все точки этой фигуры), удовлетворяющая условиям задачи, а также указана последовательность, состоящая из конечного числа фигур, являющихся либо данными фигурами $F_1, F_2, \dots, F_n$, либо фигурами, являющимися средствами построения. Последний член этой последовательности является искомой фигурой F [5].

В практических целях указанную последовательность фигур требуется изобразить (начертить) на бумаге, доске и т.д.

Для указания последовательности фигур, используемых в решении задачи, пользуются общими аксиомами конструктивной геометрии.

Общие аксиомы конструктивной геометрии:

– O_1. Каждая из данных фигур $F_1, F_2, \dots, F_n$ построена (иными словами, что дано, то построено);

– O_2. Если построены фигуры F_1 и F_2, может быть построена фигура $F = F_1 \cup F_2$;

– O_3. Если построены фигуры F_1 и F_2, и их пересечение не пустое множество, может быть построена фигура $F = F_1 \cap F_2$;

– O_4. Если построены фигуры F_1 и F_2, и их разность не пустое множество, может быть построена фигура $F = F_1 \backslash F_2$;

– O_5. Если фигура F_1 построена, то можно построить любую точку ей принадлежащую;

– O_6. Если фигура F_1 построена и отлична от всей плоскости, то можно построить любую точку ей не принадлежащую.

Аксиома линейки ($A_л$). Если построены различные точки A и B, то может быть построен луч $[AB)$или $[BA)$.

Следствия:

– если построены различные точки A и B, то может быть построена прямая (AB);

– если построены различные точки A и B, то может быть построен отрезок $[AB]$.

Аксиома циркуля ($A_ц$). Если построены точка O или отрезок $[AB]$, то может быть построена окружность с центром в точке O и радиусом $[AB]$.

Схема решения задач на построение. Решение задачи на построение содержит в себе четыре существенные части:

1. Анализ – поиск способа решения задачи. Предполагается, что искомая фигура построена, делается эскиз и находится зависимость между данными фигурами и искомой.

2. Построение – указывается конечная последовательность фигур, полученных при построениях. Указание последовательности шагов построения сопровождается и фактическим выполнением чертежа инструментами.

3. Доказательство того, что объект, построенный описанным способом, действительно является искомым, т.е. удовлетворяет всем условиям задачи.

4. Исследование на предмет единственности или неединственности решения, получаемого описанным способом, в зависимости от взаимного расположения данных в условии задачи фигур и их размера.

На практике решение весьма простых задач приводит к большому количеству построений, логически обоснованных аксиомами $O_1 - O_6$, $(A_л)$, $(A_ц)$. Поэтому при решении задач на построение допускается делать ссылку на ранее решенные задачи, а также на ряд задач, которые называются элементарными задачами на построение [5; 11].

Элементарные задачи на построение:

1. Отложить на данном луче отрезок, равный данному.
2. Отложить от данного луча угол, равный данному.
3. Построить середину данного отрезка.
4. Построить биссектрису данного угла.
5. Через данную точку провести прямую, перпендикулярную данной прямой (2 случая: данная точка O лежит на данной прямой a или данная точка O не лежит на данной прямой a).
6. Через данную точку, не лежащую на прямой, провести прямую, параллельную данной.
7. Построить треугольник по трем основным элементам:

   1) по трем сторонам;

   2) по двум сторонам и углу, лежащему между ними;

   3) по стороне и двум прилежащим к ней углам.

8. Построить прямоугольный треугольник по двум основным элементам:

   1) по катетам;

   2) по катету и гипотенузе;

3) по катету и прилежащему к нему острому углу;

4) по катету и противолежащему ему острому углу;

5) по гипотенузе и острому углу.

9. Через данную точку провести касательную к данной окружности (2 случая: данная точка А лежит на окружности или не принадлежит ей).

10. Провести общие касательные двух окружностей. Рассмотреть все возможные случаи расположения этих окружностей.

11. Данный отрезок разделить внутренним и внешним образом на части, находящиеся в отношении $m:n, m \neq n$.

Геометрическое место точек (ГМТ).

Геометрическим местом точек называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, обладающих определенным свойством. Некоторые геометрические места точек применяются при решении задач на построение.

ГМТ_1. Множество точек плоскости, равноотстоящих от одной данной точки, есть окружность с центром в этой точке.

ГМТ_2. Множество точек плоскости, равноотстоящих от двух данных точек, есть серединный перпендикуляр к отрезку с концами в данных точках.

ГМТ_3. Множество точек плоскости, равноотстоящих от трех данных точек, есть точка пересечения серединных перпендикуляров, или есть центр окружности, описанной вокруг треугольника с вершинами в данных точках.

ГМТ_4. Множество точек плоскости, равноотстоящих от данной прямой, есть две параллельные прямые, для которых данная прямая является осью симметрии.

ГМТ_5. Множество точек плоскости, равноудаленных от двух параллельных прямых, есть средняя линия полосы (ось симметрии).

ГМТ$_6$. Множество точек плоскости, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых, есть биссектрисы углов, образованных этими прямыми.

ГМТ$_7$. Множество точек плоскости, равноудаленных от трех пересекающихся прямых, есть четыре точки, одна из которых есть центр вписанной окружности, и центры вневписанных окружностей.

ГМТ$_8$. Множество точек плоскости, из которых данный отрезок виден под прямым углом, есть окружность, построенная на данном отрезке, как на диаметре, без концов отрезка.

ГМТ$_9$. Множество точек плоскости, из которых данный отрезок виден под данным углом α, есть сегмент, вмещающий данный угол.

ГМТ$_{10}$. Множество точек плоскости, для каждой из которых отношение расстояний до двух данных точек равно отношению двух неравных отрезков, есть окружность Аполлония.

ГМТ$_{11}$. Множество точек плоскости, середин равных хорд данной окружности, есть окружность, концентрическая данной.

ГМТ$_{12}$. Множество точек плоскости, делящих равные хорды данной окружности в данном отношении $\frac{m}{n}$, есть окружность, концентрическая данной.

ГМТ$_{13}$. Множество точек плоскости, из которых данная окружность видна под данным углом α, есть концентрическая окружность.

ГМТ$_{14}$. Множество точек плоскости, касательные из которых к данной окружности равны данному отрезку a, есть концентрическая окружность.

ГМТ$_{15}$. Множество точек плоскости, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек A и B равна квадрату длины данного отрезка q, есть прямая, перпендикулярная AB.

ГМТ_{16}. Множество точек плоскости, для каждой из которых сумма квадратов расстояний до двух данных точек A и B равна квадрату длины данного отрезка q, есть окружность с центром в середине AB.

ГМТ_{17}. Множество точек плоскости, касательные из которых к двум окружностям равны между собой, есть прямая, называемая радикальной осью этих окружностей.

Неразрешимые задачи.

Следующие три задачи на построение были поставлены ещё древними греками:

1. Трисекция угла — разбить произвольный угол на три равные части.

2. Удвоение куба — построить ребро куба вдвое большего по объёму, чем данный куб.

3. Квадратура круга — построить квадрат, равный по площади данному кругу.

Лишь в XIX веке было строго доказано, что все эти три задачи неразрешимы при использовании только циркуля и линейки. Доказательство неразрешимости этих задач построения было достигнуто с помощью алгебраических методов, основанными на теории Галуа. В частности, невозможность построения квадратуры круга следует из трансцендентности числа π.

Другая известная и неразрешимая с помощью циркуля и линейки задача — построение треугольника по трём заданным длинам биссектрис. Эта задача остаётся неразрешимой даже при наличии инструмента, выполняющего трисекцию угла, например томагавка [33; 28].

1.2. Место темы «Построения циркулем и линейкой» в школьном курсе геометрии

Еще Евклид начал список геометрических постулатов описанием простейших построений линейкой и циркулем: а именно, если заданы две точки, то можно провести через них прямую и продлить ее сколь угодно далеко; кроме того, можно провести окружность с заданным центром и заданным радиусом.

В «Началах» Евклида нет привычного нам слова «теорема». За определениями, аксиомами и постулатами следуют предложения: одни из этих предложений выражают теоретические истины, которые затем доказываются, а другие формулируют задачи на построение, которые затем решаются. На деле различие между первыми и вторыми не так велико. Дело в том, что Евклид считает существующими только те фигуры, которые могут быть построены: построение как бы вызывает их к жизни. Поэтому решение задачи на построение некой фигуры на самом деле является доказательством теоретического утверждения о ее существовании. В силу этого Евклид не может говорить о фигурах, которые невозможно построить циркулем и линейкой. Например, он не может утверждать существование квадрата, равновеликого данному кругу (квадратура круга), но может говорить о том, что площади кругов пропорциональны квадратам их диаметров [29].

В школьном курсе геометрии тема «Построения циркулем и линейкой» затрагивается еще в начале седьмого класса, когда только начинается курс геометрии. На нее отводится не так много часов в курсе планиметрии, но, тем не менее, она занимает достаточно важное место в связи с тем, с чего начиналась геометрия Евклида. Задачи на построение влекут за собой в современном мире практический смысл, что было ясно еще с древнейших времен: не зря геометрия от др.-греч. γεωμετρία, от γῆ — земля и μετρέω — измеряю.

Рассмотрим, как эта тема изучается в школе, на примере различных учебников таких авторов, как Л. С. Атанасян [6], А. В. Погорелов [37], А. Г. Мерзляк [30; 31; 32] и А. Д. Александров [1; 2; 3].

Рассмотрим учебник Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова и др. за 7-9 классы. В таблице (Приложение А) представлены разделы и темы, которые связаны с задачами на построение циркулем и линейкой и те задачи, которые автор учебника полностью рассматривает, предлагая свое решение. Также в таблице указано количество часов, затраченных на изучение задач на построение в данном разделе.

Большую часть материала по данной теме Л.С. Атанасян разбирает в начале седьмого класса, после того, как знакомит с понятиями «точка», «прямая» и «окружность» в двух разделах в течение 10 часов. Особенностью этого учебника является то, что некоторые теоремы авторы предлагают не в качестве отдельных утверждений, а в виде задачи после темы, оставляя их на самостоятельное изучение.

В разделе «Треугольники» при изучении построения биссектрисы угла, авторы учебника упоминают, что аналогичным образом угол можно разделить и на четыре части, но деление на три равных любого угла – невозможно. Построение перпендикуляра к прямой рассматривается только в одном варианте: с точкой на прямой. Вариант, когда точка, через которую должен проходить перпендикуляр к прямой не лежит на данной прямой, авторы учебника предлагают учащимся рассмотреть самостоятельно в задаче №153.

В следующем разделе: «Соотношения между сторонами и углами треугольника» в учебнике рассматриваются задачи на построение равных треугольников. Однако в параграфах разбираются только две задачи, а построение треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам остается на самостоятельное изучение без разбора задачи в учебнике: авторы считают, что эта задача полностью посильна учащимся без каких-либо подсказок, и они могут ее решить по аналогии с задачей на построение треугольника по двум сторонам и углу между ними. Задача на построение прямой, параллельной данной, на данном расстоянии a рассматривается исключительно через построение перпендикуляра к перпендикуляру, и остальные варианты построения не рассматриваются, потому что обучающиеся еще не знакомы с такой фигурой, как параллелограмм. Решение представлено в задаче под номером 284. Также в этом разделе в задачах соответственно №293 и №351 рассматриваются построение треугольника по стороне, прилежащему к ней углу и высоте, проведенной к этой стороне и построение треугольника по двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне. Среди задач, данных на самостоятельное решение, можно встретить разные аналогичные задания, а названные выше задачи с решением являются подсказкой учащимся к тому, как их решать.

На этом соприкосновение с данной темой в седьмом классе заканчивается, потому что остальные задачи на построение требуют больше первичных знаний обучающихся для того, чтобы их можно было решить. В следующий раз с данным разделом Л.С. Атанасян знакомит обучающихся в восьмом классе, но тратит время лишь на одну задачу, связанную с темой, которую обучающиеся изучают. В разделе «Подобные треугольники» авторы предлагают решить задачу на деление отрезка на два отрезка, пропорциональных данным двум отрезкам. В заданиях можно встретить уже более частные случаи данной задачи, которые помогают обучающимся для решения более сложных задач, связанных с подобием треугольников.

В девятом классе авторы учебника вновь затрагивают задачи на построение циркулем и линейкой. На этот раз в разделе «Длина окружности и площадь круга» рассматриваются построения некоторых правильных многоугольников. В частном случае – правильного шестиугольника, сторона которого равна данному отрезку. Также рассматривается построение правильного многоугольника с в два раза большим количеством углов, чем у данного. То есть задача обобщается: если построен n-угольник, то может быть построен и 2n-угольник. Однако Л.С. Атанасян упоминает, что как бы ни казалось странным, доказано, что правильный семиугольник не может быть построен, а вот правильный семнадцатиугольник – вполне.

Следующий раздел учебника вновь касается построений: «Движения». В данном разделе представлено достаточное количество задач, которые задевают построения отображения при центральной и осевой симметрии. Также автор учебника дает определение наложения и множество задач на доказательство того, что при движении фигура отображается на равную ей фигуру. Не меньшее количество задач предлагается решить и на параллельный перенос и поворот [6].

Учебник по геометрии для 7-11 классов средней школы А.В. Погорелова несколько отличается подачей материала от учебника Л.С. Атанасяна, потому аналогично в таблице (Приложение Б) представлены разделы и темы, которые связаны с задачами на построение циркулем и линейкой и те задачи, которые А.В. Погорелов полностью рассматривает, предлагая свое решение.

В отличие от Л.С. Атанасяна А.В. Погорелов начинает рассматривать построения с помощью циркуля и линейки в конце седьмого класса – последним изучаемым разделом в учебном году. Однако количество задач, которые с решением рассмотрены в учебнике, гораздо меньше, чем у Л.С. Атанасяна. Большую часть элементарных задач на построение можно найти среди тех, которые ученикам предлагается сделать самим или с помощью учителя. Причем порядок рассмотренных задач отличается от того, что предлагает Л.С. Атанасян, это связано с тем, что обучающиеся уже имеют некий багаж знаний к моменту изучения темы, а потому порядок может варьироваться уже не в зависимости от знаний обучающихся, а от целей автора учебника.

Из задач на построение треугольника, А.В. Погорелов рассматривает лишь задачу на построение треугольника по трем сторонам. Остальные, по его мнению, обучающиеся способны решить сами. Зато построение перпендикуляра к прямой А.В. Погорелов наоборот рассматривает оба случая сразу, не разделяя и не вынося в отдельную задачу после данной темы, как это делает Л.С. Атанасян.

Еще одним существенным отличием является то, что в этом же разделе А.В. Погорелов рассматривает понятие геометрического места точек и рассматривает метод геометрических мест, которые в учебнике Л.С. Атанасяна не затрагиваются вообще. Он рассматривает задачу: «Даны три точки. Построить четвертую, которая одинаково удалена от двух данных и находится на данном расстоянии от третьей» и все остальные задачи даны на самостоятельное изучение с опорой на эту задачу.

В восьмом классе аналогично рассматривается лишь одна задача, однако А.В. Погорелов формулирует ее совершенно иначе: «Даны отрезки а, b, c. Построить отрезок $x = \frac{bc}{a}$» и рассматривает ее в разделе «Четырехугольники», а не «Подобные треугольники», как Л.С. Атанасян. И рассматривает данную задачу в первой же теме учебника, относящейся к восьмому классу, то есть с расчетом на изучение данного материала в начале учебного года.

Тему «Движение» А.В. Погорелов поднимает к концу восьмого класса, и по учебному плану на него отведено куда меньшее количество часов, чем у Л.С. Атанасяна. Количество задач тоже куда меньше, и большинство из них – на доказательство. Задач непосредственно на построение очень мало.

В девятом классе А.В. Погорелов куда более подробно, чем Л.С. Атанасян останавливаете на разделе «Многоугольники» и рассматривает построение правильных многоугольников. В отличие от своего коллеги, он рассматривает не только построение правильного вписанного шестиугольника, но также и построение правильного вписанного треугольника и правильного вписанного четырехугольника. Вместе с этим он рассматривает, как, имея правильный вписанный многоугольник, построить правильный описанный многоугольник. Как и Л.С. Атанасян, А.В. Погорелов рассматривает задачу о построении правильного 2n-угольника, если построен правильный n-угольник, однако автор учебника не упоминает ничего о том, что, например, правильный семиугольник не может быть построен [15; 37].

Учебники А.Г. Мерзляка имеют куда более ярковыраженную направленность на изучение задач на построение. В книгах присутствует сноска: «В учебнике задачи на построение обязательны для рассмотрения». Изучение данной темы А.Г. Мерзляк начинает в конце седьмого класса, и начинает с рассмотрения задач на построение угольником, после чего уже переходит к циркулю и линейке. Основные рассмотренные автором задачи представлены в таблице (Приложение В). Понятие задач на построение вводится после введения понятия геометрическое место точек. Также после основных рассмотренных задач на построение рассматриваются неразрешимые задачи. В учебнике для седьмого класса отдельно присутствует глава, посвященная интересующей нас теме, в учебниках же восьмого и девятого классов отдельных глав для них нет, однако подобные задачи рассматриваются практически в каждом разделе, и очень много задач представлено для самостоятельного изучения в предлагаемых упражнениях.

Тема, связанная с правильными многоугольниками рассматривается довольно полно. Разобрано большое количество задач, какие многоугольники могут быть построены с помощью циркуля и линейки, имеется даже краткая историческая заметка про Гаусса. Геометрические преобразования затрагиваются лишь в конце девятого класса, и рассматриваются в рамках последней темы в курсе планиметрии. При этом вводится понятие гомотетии, и рассматриваются связанные с ней задачи [30; 31; 32].

Учебник А.Д. Александрова, А.Л. Вернера и В.И. Рыжика для классов с углубленным изучением математики в школе, рассмотренный в данной работе, изрядно отличается от названных выше. Изначально количество часов, отведенное на изучение задач на построение с помощью циркуля и линейки гораздо меньше, чем то, которое отводят на изучение данной темы Л.С. Атанасян, А.В. Погорелов и А.Г. Мерзляк. Связано это с тем, что А.Д. Александров, А.Л. Вернер и В.И. Рыжик рассматривают параллельно с планиметрией, еще и понятия стереометрии. Но, несмотря на это, задачи, связанные с построением, встречаются практически в каждой главе учебника, а в девятом классе построениям посвящен целый раздел, большинство рассматриваемого материала которого в учебниках первых двух авторов не рассматривается вовсе. Аналогично в таблице (Приложение Г) представлены разделы и темы, которые связаны с задачами на построение циркулем и линейкой и те задачи, которые авторы учебника полностью рассматривают, предлагая свое решение.

Знакомство с задачами на построение циркулем и линейкой А.Д. Александров, А.Л. Вернер и В.И. Рыжик начинают с задачи на построение треугольника по трем известным сторонам. В этом же разделе авторы учебника упоминают, что не все задачи могут быть построены, и рассказывают о задачах на трисекцию угла, о квадратуре круга и об удвоении куба.

В следующей теме, А.Д. Александров, А.Л. Вернер и В.И. Рыжик обращают внимание на то, как построить прямой угол, и уже с опорой на эту задачу разбирают следующую: построение перпендикуляра к прямой в данной точке. Также они замечают, что если можно разделить угол пополам, значит можно разделить угол не только на 4 части, о чем упоминал Л.С. Атанасян, но и на 4, на 8, на 16 и так далее частей, причем снова напоминают, что трисекция любого угла невозможна.

Раздел «Треугольники» А.Д. Александров, А.Л. Вернер и В.И. Рыжик начали с разбора, как построить равносторонний треугольник, а далее уделили особое внимание задаче на построение треугольника, равного данному, в заданном месте. По сути они заново рассмотрели задачу на построение треугольника по трем равным сторонам, только обратили внимание на практический смысл, показали, как до сих пор в современном мире пользуются этой задачей, например, в строительстве.

Уже куда позже авторы учебника рассматривают задачу на построение перпендикуляра к прямой через точку, не лежащую на данной прямой, как и задачу на построение треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам. Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними авторами учебника не разбирается, лишь предлагается в задачах на самостоятельное решение.

В следующей теме авторы учебника рассматривают задачу на построение параллельных отрезков и прямых, аналогично Л.С. Атанасяну рассматривая через построение перпендикуляра к перпендикуляру, но и отмечая определенные свойства параллелограмма. Далее же А.Д. Александров, А.Л. Вернер и В.И. Рыжик рассматривают задачу на построение прямоугольника, что не делал ни Л.С. Атанасян, ни А.В. Погорелов. Они предлагают два различных способа построения: через перпендикуляры к лучам прямого угла и через перпендикуляры к двум параллельным прямым.

Как раз в восьмом классе А.Д. Александров, А.Л. Вернер и В.И. Рыжик рассматривают раздел «Многоугольники и окружности» и разбирают задачи на построение правильных фигур. Как и А.В. Погорелов, авторы учебника не ограничиваются шестиугольником, разбирая построение правильного треугольника, правильного четырехугольника и правильного 2n-угольника, но еще и дают решение задачи на построение правильного пятиугольника. Вместе с этим, авторы учебника упоминают и о том, что правильный семиугольник построить нельзя, а правильный семнадцатиугольник – можно, и приводят формулы для выяснения: можно ли построить некий правильный n-угольник или нет.

А вот в девятом классе А.Д. Александров, А.Л. Вернер и В.И. Рыжик рассматривают большой раздел «Преобразования», в котором, в отличие от Л.С. Атанасяна и А.В. Погорелова, рассматриваются не только осевая, центральная симметрии, параллельный перенос и поворот, но и комбинированные преобразования – скользящее отражение, гомотетия и инверсия [1; 2; 3].

Вне зависимости от того, по какому учебнику учитель будет обучать школьников, ему необходимо будет коснуться несколько раз в разные годы обучения темы о построении с помощью циркуля и линейки, а в отдельных случаях и остановиться на этой теме для чуть более подробного разбора.

1.3. Методы решения задач на построение

Существует несколько основных методов решения задач на построение:

1. Метод геометрических мест.
2. Метод геометрических преобразований:
   - метод параллельного переноса;
   - метод поворота (вращения);
   - метод осевой симметрии;
   - метод центральной симметрии;
   - метод гомотетии;
   - метод инверсии.
3. Алгебраический метод.

1.3.1. Метод геометрических мест

Сущность метода заключается в том, что еще в анализе замечают: решение задачи сводится к нахождению определенной точки, удовлетворяющей сразу двум условиям. Исходя из этого, сначала принимают во внимание только первое условие и находят, что искомая точка принадлежит фигуре, состоящей из всех точек, удовлетворяющих этому условию. Таким образом, находят фигуру F_1 – некоторое известное ГМТ. Далее по такому же принципу находят фигуру F_2, состоящую из всех точек, удовлетворяющих второму условию, т.е. находят второе известное ГМТ. Пересечение фигур F_1 и F_2 дает искомую точку [5].

Рассмотрим пример задачи на построение, решаемой методом пересечения ГМТ.

Задача 1.

Построить ΔABC по a, h_a и $b^2 - c^2 = p^2$, где p – данный отрезок.

Анализ.

Предположим, что задача решена (рисунок 1).

$b^2 - c^2 = p^2 \; => A \in \text{ГМТ}_{15}$,

$h_a \perp a \; => \; A \in \text{ГМТ}_4$.

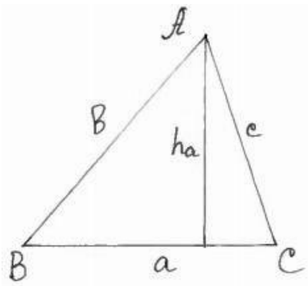

Рисунок 1 – Анализ задачи №1

Задача сводится к построению $A = \text{ГМТ}_{15} \cap \text{ГМТ}_4$.

Построение.

1. $a, \mathrm{h_a}, \mathrm{p}\ (\mathrm{O_1})$;
2. ГМТ_{15};
3. ГМТ_4;
4. $\text{ГМТ}_{15} \cap \text{ГМТ}_4 = A_1 A_2 \;\; (O_3)$;

$\Delta A_1BC, \Delta A_2BC$ – искомые (рисунок 2).

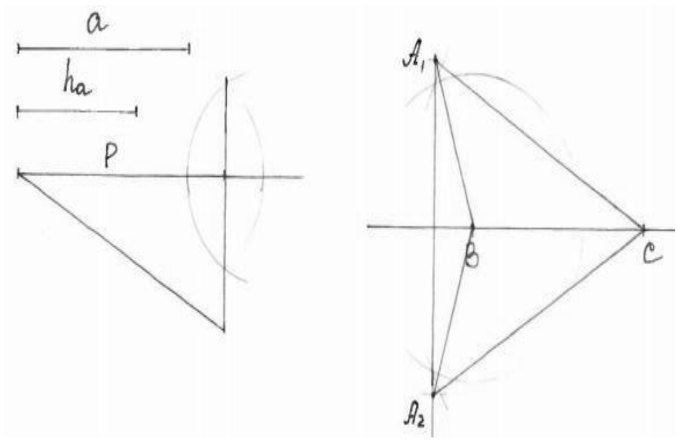

Рисунок 2 – Построение задачи №1

Доказательство.

$A \in \text{ГМТ}_{15}$ $(b^2 - c^2 = p^2)$ — по построению,

$A \in \text{ГМТ}_4$ $(AH = h_a)$ – по построению,

$\text{BC} = a$ – по построению.

Исследование.

Задача всегда имеет два равных решения.

1.3.2. Метод геометрических преобразований

Сущность метода заключается в том, что в анализе при решении задачи рассматривают, наряду с данными и искомыми фигурами, другие фигуры, которые получают из данных или искомых фигур или их частей с помощью того или иного геометрического преобразования. В зависимости от применяемого преобразования метод носит название: метод параллельного переноса, метод поворота (вращения), метод осевой симметрии, метод центральной симметрии, метод гомотетии, метод подобия, метод аффинных преобразований, метод инверсии.

Геометрические преобразования будем обозначать следующим образом: $T_{\vec{a}}$ – параллельный перенос на вектор $\vec{a}$, R_O^α – поворот на угол α вокруг точки O, S_l – осевая симметрия относительно прямой l, Z_o – центральная симметрия относительно точки O, H_O^k – гомотетия с центром в точке O, и коэффициентом подобия k, P – подобие, I_O^r – инверсия с центром в точке O и радиусом r.

Применение того или иного метода диктуется условиями задачи [19].

1.3.2.1. Метод параллельного переноса

Пусть на плоскости задан $\vec{a}$. Параллельным переносом называется такое преобразование плоскости, при котором каждой M ставится в соответствие M', для которой $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$.

Задача 2.

Построить отрезок равный и параллельный данному отрезку а, концы которого лежали бы на двух данных окружностях.

Анализ.

Предположим, что задача решена (рисунок 3).

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{c} A \in \omega_1 \\ T_{\vec{a}}(A) = B \\ T_{\vec{a}}(\omega_1) = \omega_1' \end{array}\right\} => B \in \omega_1' \\ B \in \omega_2 \end{array}\right\} => B = \omega_2 \cap \omega_1'$$

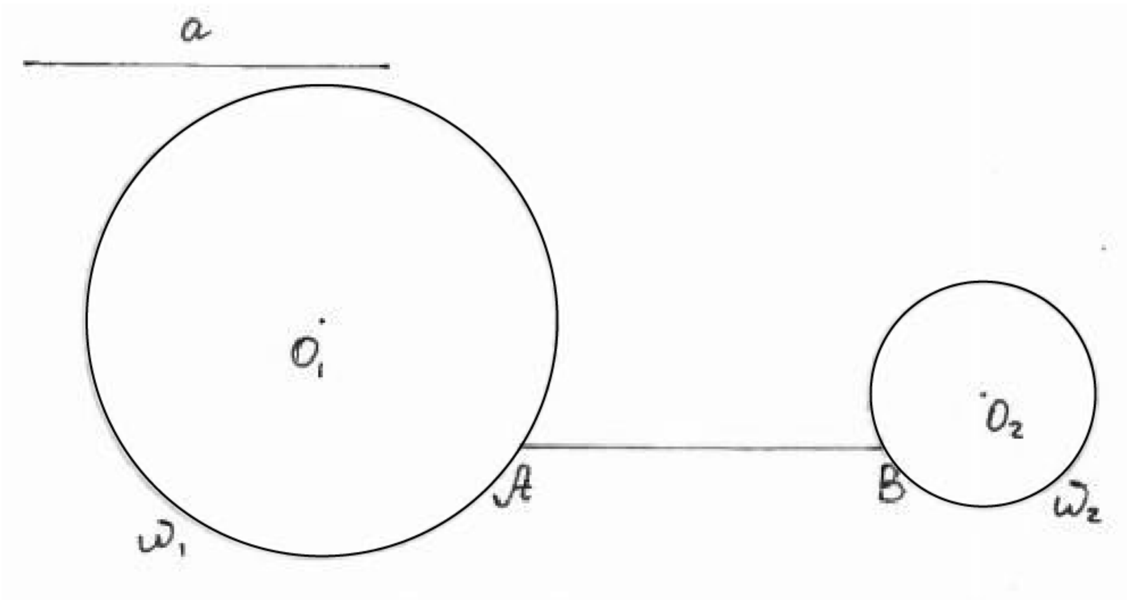

Рисунок 3 – Анализ задачи №2

Задача сводится к построению B как точки пересечения образа ω_1 при $T_{\vec{a}}$ и ω_2.

Построение.

1. $\omega_1, \omega_2, a \ \ (O_1)$;

2. $T_{\vec{a}}(\omega_1) = \omega_1'$;

3. $\omega_2 \cap \omega_1' = B_1, B_2 \ \ (O_3)$;

4. $T_{\overrightarrow{-a}}(B_1) = A_1$,

$T_{\overrightarrow{-a}}(B_2) = A_2$;

5. $\frac{A_1B_1}{A_2B_2}$ – искомые $(A_л)$ (рисунок 4).

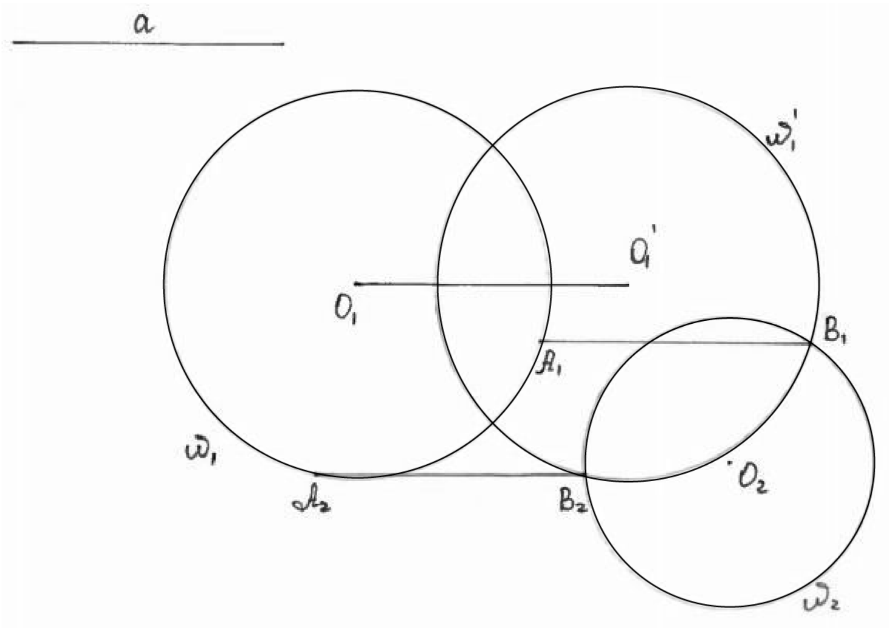

Рисунок 4 – Построение задачи №2

Доказательство.

$AB \parallel a, AB = a$ по построению.

$B \in \omega_1'$ по построению. $T_{\overrightarrow{-a}}(\omega_1') = \omega_1, T_{\overrightarrow{-a}}(B) = A \ => A \in \omega_1$.

Исследование.

Число решений зависит от количества точек пересечения ω_2 и ω_1':

1. Если ω_2 и ω_1' не пересекаются − нет решений.

2. Если $\omega_2 \cap \omega_1'$ в двух точках – два решения.

3. Если $\omega_2 \cap \omega_1'$ в одной точке – одно решение.

1.3.2.2. Метод поворота (вращения)

Пусть на ориентированной плоскости задан ориентируемый угол α и точка O. Поворотом плоскости вокруг точки O на угол α называется такое преобразование плоскости, при котором:

1. $M = O \rightarrow M' = O,$
2. $M \neq O \rightarrow M' \colon |OM| = |OM'|$ и $\angle MOM' = \alpha.$

Задача 3.

Построить квадрат, три вершины которого лежали бы соответственно на трех данных параллельных прямых.

Анализ.

Предположим, что задача решена (рисунок 5).

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r} A \in a \\ R_B^{90}(A) = C \\ R_B^{90}(a) = a' \end{array}\right\} => C \in a' \\ C \in c \end{array}\right\} => C = a' \cap c$$

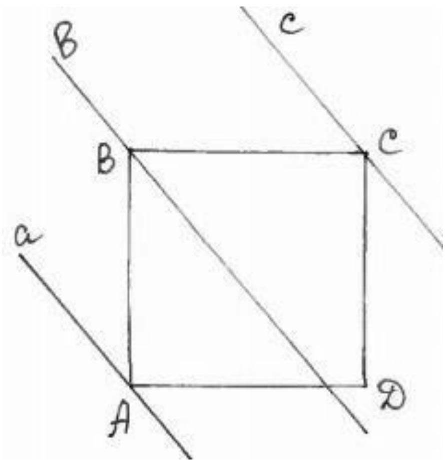

Рисунок 5 – Анализ задачи №3

Задача сводится к построению C, как точки пересечения c и a' – образованной прямой a в результате поворота на 90°.

Построение.

1. $a, b, c \quad (O_1);$
2. $B \in b \quad (O_5);$
3. $R_B^{90}(a) = a';$

4. $a' \cap c = C \ (O_3)$;

5. $R_B^{-90}(C) = A$;

6. $DC \perp BC$

$AB \perp AD$ (Эл.з. 5.1);

7. $DC \cap AD = D \ (O_3)$;

8. $ABCD -$ искомый (рисунок 6).

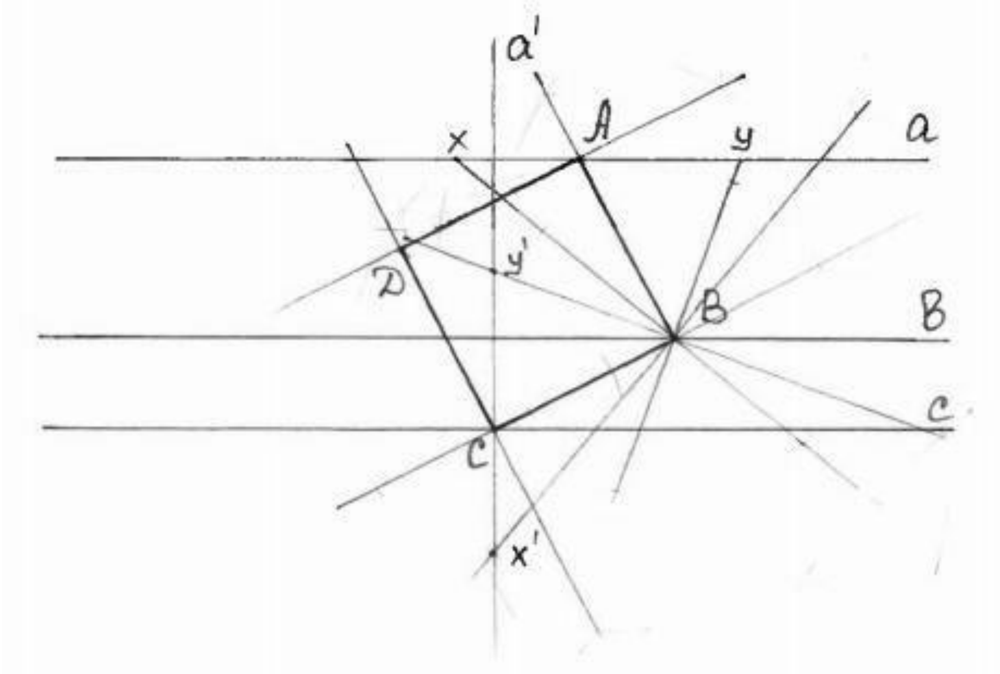

Рисунок 6 – Построение задачи №3

Доказательство.

$ABCD -$ прямоугольник, т.к. $AD \perp AB$ и $DC \perp BC \Rightarrow AB \parallel DC$ и $AD \parallel BC$.

$AB = BC$ по построению $\Rightarrow ABCD -$ квадрат.

Исследование.

Задача всегда имеет два решения.

1.3.2.3. Метод осевой симметрии

Пусть на плоскости задана прямая l. M' называется симметричной точке M относительно l, если $MM' \perp l$ и $K \in l$, где K – середина $[MM']$. Всякая точка прямой l симметрична сама себе.

Осевой симметрией относительно l называется такое преобразование плоскости, при котором каждой M ставится в соответствие M' симметричная M относительно l.

Задача 4.

Дана прямая l и две окружности ω_1 и ω_2 по разные стороны от нее. Построить ромб с данной диагональю d так, чтобы две его вершины лежали бы на данных окружностях, а известная диагональ – на данной прямой.

Анализ.

Предположим, что задача решена (рисунок 7).

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}A \in \omega_1\\ S_l(A) = C\\ S_l(\omega_1) = \omega_1'\end{array}\right\} => C \in \omega_1'\\ C \in \omega_2\end{array}\right\} => C = \omega_2 \cap \omega_1'$$

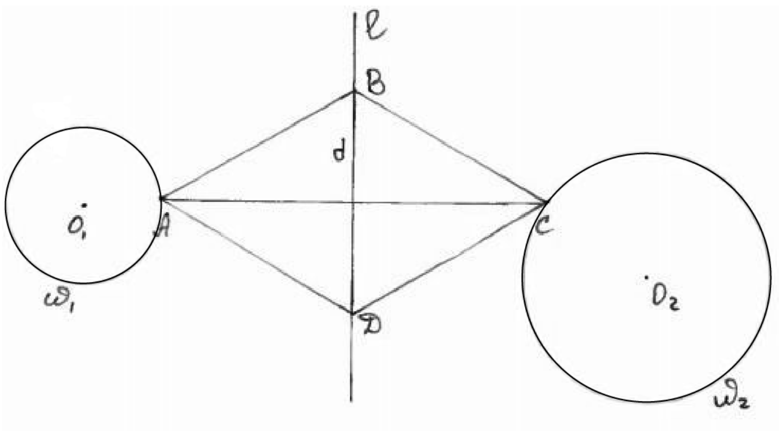

Рисунок 7 – Анализ задачи №4

Задача сводится к нахождению $C = \omega_2 \cap \omega_1'$, где $\omega_1' = S_l(\omega_1)$.

Построение.

1. $\omega_1, \omega_2, l, d \quad (O_1)$;
2. $S_l(\omega_1) = \omega_1'$;
3. $\omega_2 \cap \omega_1' = C_1, C_2 \quad (O_3)$;
4. $S_l(C_1) = A_1$

$S_l(C_2) = A_2$,;

5. $A_1M_1 = M_1C_1$

$A_2M_2 = M_2C_2$;

6. $B_1D_1 = d$

$B_1M_1 = M_1D_1$ (Элементарная задача 1);

7. $B_2D_2 = d$

$B_2M_2 = M_2D_2$ (Элементарная задача 1);

8. ABC_1D_1 и ABC_2D_2 − искомые (рисунок 8).

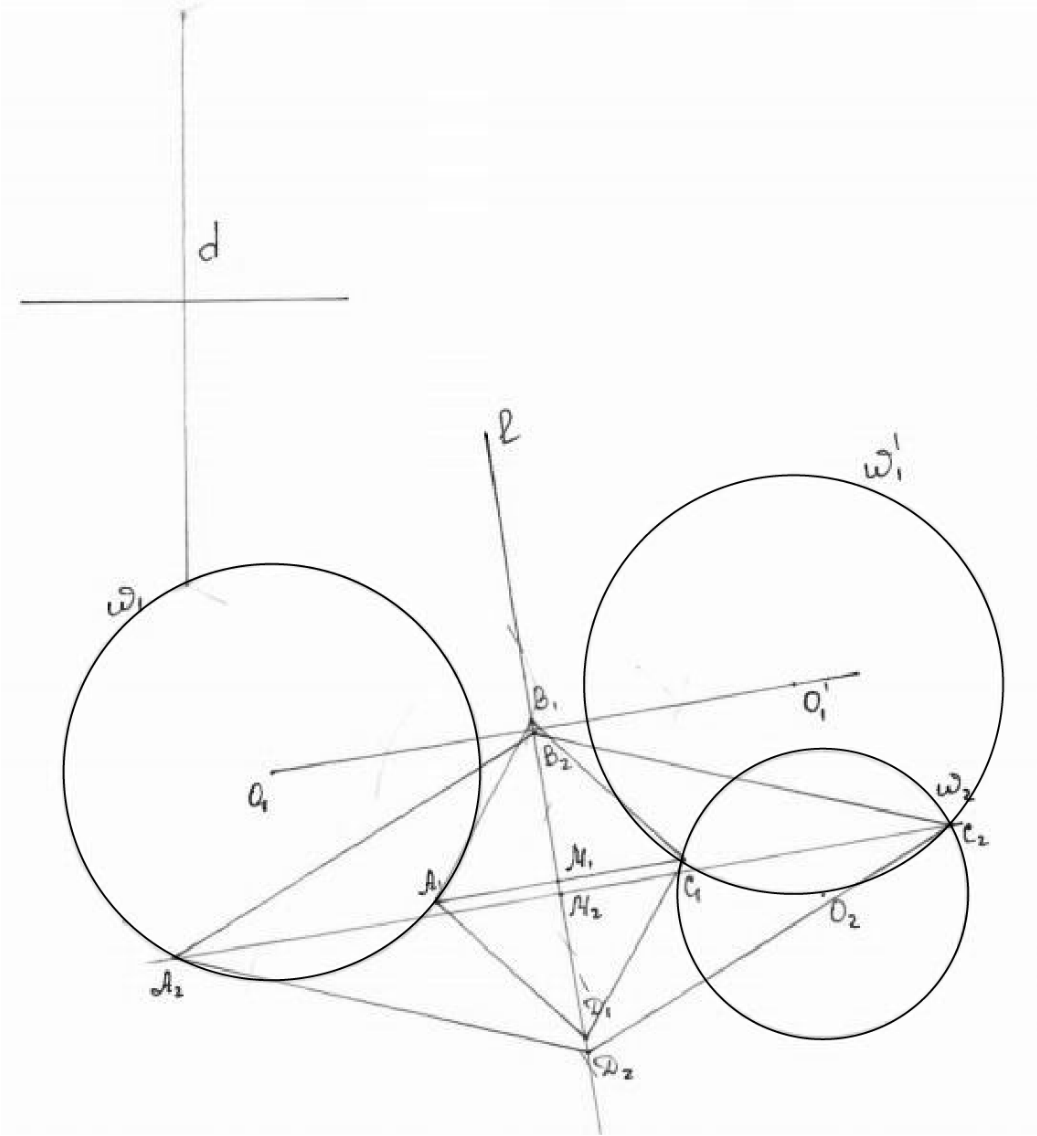

Рисунок 8 – Построение задачи №4

Доказательство.

$C \in \omega_2$ по построению, $A \in \omega_1$ по построению. $BD = d$ по построению. Тогда $ABCD$ − ромб по построению.

Исследование.

Число решений зависит от количества точек пересечения ω_2 и ω_1':

1. Если ω_2 и ω_1' не пересекаются − нет решений.
2. Если $\omega_2 \cap \omega_1'$ в двух точках – два решения.
3. Если $\omega_2 \cap \omega_1'$ в одной точке – одно решение.

1.3.2.4. Метод центральной симметрии

Пусть на плоскости задана точка O. Точка M называется симметричной M_o относительно O, если O – середина отрезка MM_o.

Центральной симметрией относительно O называется такое преобразование плоскости, при котором каждой точке M ставится в соответствие точка M', симметричная M относительно O.

Задача 5.

Дан $\angle h, k$ и внутри него точка A. Провести секущую l через A так, чтобы отрезок ее, заключенный между сторонами угла, делился точкой A пополам.

Анализ.

Предположим, что задача решена (рисунок 9).

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r} x \in h\\ Z_A(x) = Y\\ Z_A(h) = h'\end{array}\right\} => Y \in h'\\ Y \in k\end{array}\right\} => Y = h' \cap k$$

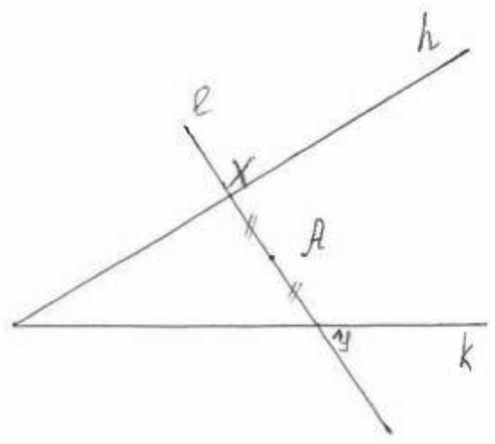

Рисунок 9 – Анализ задачи №5

Задача сводится к построению Y как точки пересечения h' и k, где h' – образ h при Z_A.

Построение.

1. $\angle h, k, A \quad (O_1)$;
2. $Z_A(h) = h'$;
3. $h' \cap k = Y \ (O_3)$;
4. $YA \cap h = X \ (A_{л}, O_3)$;
5. $XY = l$ – искомая (рисунок 10).

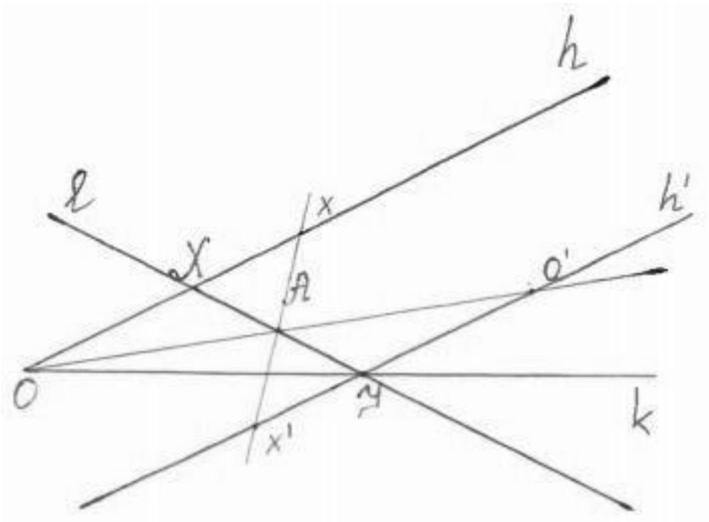

Рисунок 10 – Построение задачи №5

Доказательство.

$ONO'N'$ – параллелограмм, т.к. диагонали точкой A делятся пополам.

$$\left.\begin{array}{c} \angle NAX = \angle YAN' - \text{вертикальные} \\ NA = N'A - \text{по построению} \\ \angle XNA = \angle YN'A - \text{накрест} - \text{леж.} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta NAX = \Delta N'AY \ \Rightarrow XA = YA.$$

Исследование.

Задача всегда имеет одно решение, если $\angle h, k \neq 180°$.

1.3.2.5. Метод гомотетии

Преобразование плоскости называется подобием, если $\exists k > 0$, что для $\forall A$ и B и их образов A' и B' выполняется $A'B' = k \cdot AB$.

Гомотетией с центром в O и $k \neq 0$ называется преобразование плоскости, которое $\forall M \to M'$: $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ [38, 39].

Задача 6.

В данный равносторонний треугольник вписать другой равносторонний треугольник, стороны которого были бы перпендикулярны сторонам данного треугольника.

Анализ.

Предположим, что задача решена (рисунок 11), $\Delta A_0B_0C_0$ вписанный равносторонний треугольник со сторонами, перпендикулярными ΔABC. Дополнительное построение: $\Delta A_1B_1C_1$, где $C_1 \in AC_0, B_1 \in AB, A_1 \in AC$, $A_1B_1 \perp AC, A_1C_1 \perp BC, B_1C_1 \perp AB$.

$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_0B_0C_0$.

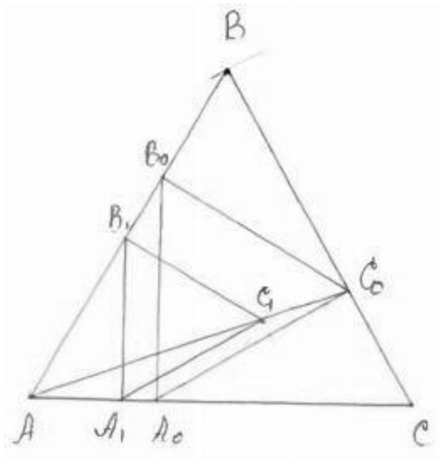

Рисунок 11 – Анализ задачи №6

Задача сводится к построению точки $C_0 = BC \cap AC_1$.

Построение.

1. $\Delta ABC -$ равностор. (O_1);
2. $A_1 \in AC$ (O_5);
3. $A_1B_1 \perp AC, B_1 \in AB$ (Эл. з. 5.1, O_3);
4. $\Delta A_1B_1C_1$ (Эл. з. 7.1);
5. AC_1 $(A_л)$;
6. $AC_1 \cap CB = C_0$ (O_3);

7. $H_A^{\frac{A_1C_1}{A_0C_0}}(\Delta A_1B_1C_1) = \Delta A_0B_0C_0$;

8. $\Delta A_0B_0C_0$ –искомый (рисунок 12).

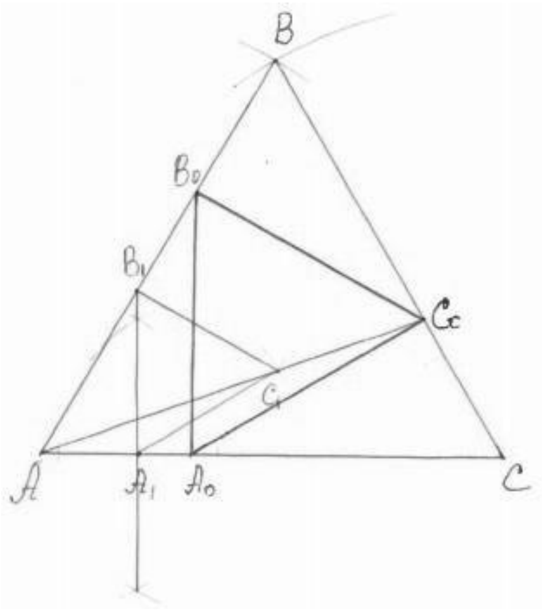

Рисунок 12 – Построение задачи №6

Доказательство.

$A_1B_1 \perp AC, A_1C_1 \perp BC, B_1C_1 \perp AB$ по построению, $\Delta A_1B_1C_1$ равносторонний по построению. $H_A^{\frac{A_1C_1}{A_0C_0}}(\Delta A_1B_1C_1) = \Delta A_0B_0C_0$, $\Delta A_1B_1C_1$ –равносторонний и с перпендикулярными ΔABC сторонами, исходя из свойств гомотетии.

Исследование.

Задача всегда имеет одно решение.

1.3.2.6. Метод инверсии

Выберем на плоскости точку O и некоторое $r > 0$. Преобразование плоскости, которое каждой M, отличной от O, ставит в соответствие M' на $[OM)$ такую, что $|OM'| \cdot |OM| = r^2$, есть инверсия с центром в точке O и радиусом r [21].

Задача 7.

Построить образ квадрата $ABCD$, вписанного в инверсную окружность.

Анализ.

Прямая, не проходящая через центр инверсии переходит в окружность, проходящую через центр инверсии. $O \notin AB \Rightarrow I_O^r(AB) = \omega_1 : O, A, B \in \omega_1$. Так как $AB -$ отрезок внутри инверсионной окружности, то он переходит в дугу окружности, проходящей через центр инверсии, лежащую вне инверсионной окружности с концами в точках A и B. Аналогично с остальными сторонами квадрата.

Задача сводится к построению дуги окружности, лежащей вне инверсионной окружности с концами в вершинах квадрата.

Построение.

1. ABCD − квадрат,

A, B, C, D $\in \omega$;

2. $I_O^r(AB) = \omega_1$;

3. $I_O^r(BC) = \omega_2$;

4. $I_O^r(CD) = \omega_3$;

5. $I_O^r(AD) = \omega_4$ (рисунок 13).

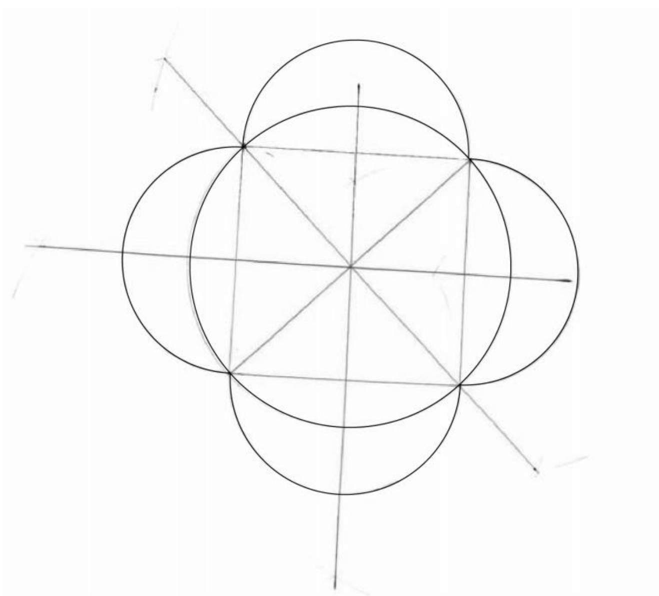

Рисунок 13 – Построение задачи №7

Доказательство.

Дуга AB – образ стороны AB по построению.

Дуга AD – образ стороны AD по построению.

Дуга BC – образ стороны BC по построению.

Дуга CD – образ стороны CD по построению.

Исследование.

Задача всегда имеет одно решение.

1.3.3. Алгебраический метод

Задача, которая решается алгебраическим методом:

Пусть даны отрезки $\overline{a}, \overline{b}, \dots \overline{l}$, а $a, b, \dots l$ – числа, выражающие их длины, если заданы единицы измерения. Требуется построить $\overline{x}$, длина которого в той же единице измерения выражается через заданные длины следующим равенством: $x = f(a, b, \dots l)$ [11].

Простейшие построения:

- ПП1. $x = a + b$;
- ПП2. $x = a - b$;
- ПП3. $x = m \cdot a, m \in N$;
- ПП4. $x = \frac{a}{n},\ n \in N$;
- ПП5. $x = \frac{ab}{c}$;
- ПП6. $x = \sqrt{ab}$;
- ПП7. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- ПП8. $x = \sqrt{a^2 - b^2}, a > b$;
- ПП9. $x = a \cdot sin\alpha$;
- ПП10. $x = a \cdot cos\alpha$;
- ПП11. $x = a \cdot tg\alpha$;
- ПП12. $x = a \cdot ctg\alpha$.

Задача 8.

Построить $x = \sqrt[4]{a^4 - b^4}$

Анализ.

$x = \sqrt[4]{a^4 - b^4} = \sqrt{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}.$

Задача сводится к последовательному построению ПП8, ПП7, ПП6.

Построение.

1. $a, b \quad (O_1)$;
2. $y = \sqrt{a^2 - b^2},$ (ПП8);
3. $z = \sqrt{a^2 + b^2},$ (ПП7);
4. $x = \sqrt{y \cdot z},$ (ПП6) (рисунок 14).

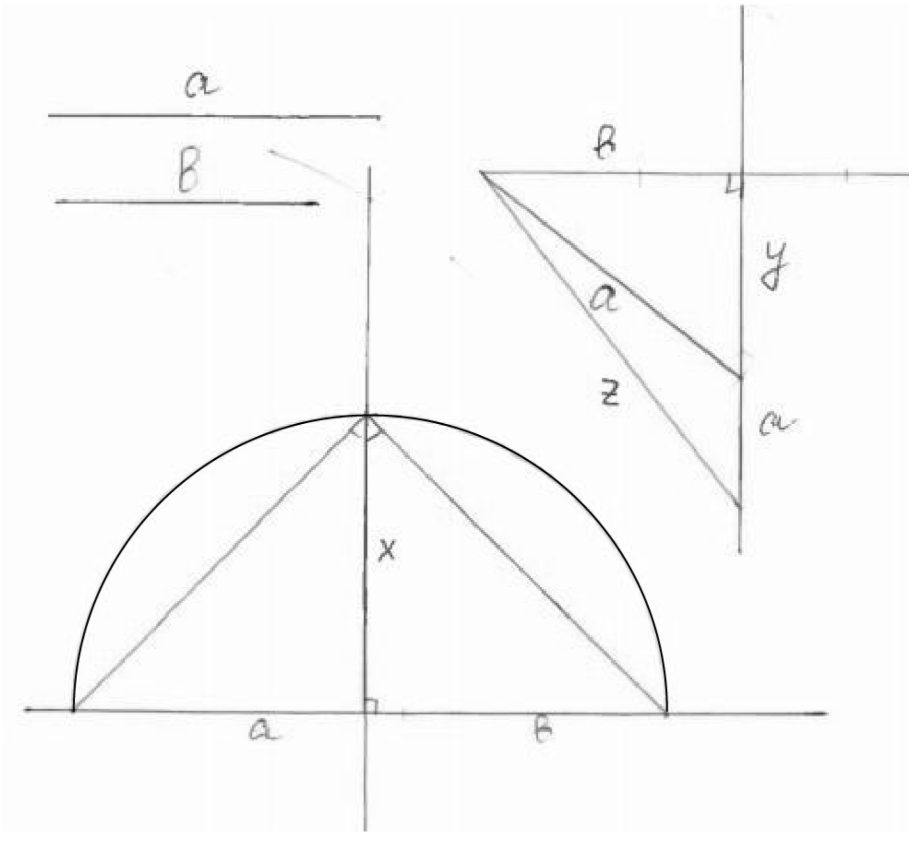

Рисунок 14 – Построение задачи №8

Доказательство.

$x = \sqrt[4]{a^4 - b^4} = \sqrt{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{y \cdot z},$ где $y = \sqrt{a^2 - b^2}$ по построению, $z = \sqrt{a^2 + b^2}$ по построению, $x = \sqrt{y \cdot z}$ по построению.

Исследование.

Задача всегда имеет одно решение.

1.4. Нестандартные задачи на построение

На уроках математики зачастую можно услышать фразы: нестандартная задача, нестандартная ситуация, нестандартный подход, нестандартное решение. У разных авторов свой подход к трактовке этих понятий.

Ю. М. Колягин пишет: «Нестандартная задача – это задача, решение которой для данного ученика не является известной цепью известных действий». Это очень простая трактовка нестандартной задачи, она мало что дает, но, с другой стороны, она дает возможность понять, как следует воспринимать нестандартную задачу.

Б. А. Кордемский использует другое название для нестандартных задач – внеучебные математические задачи. Он пишет, что это «совокупность своеобразных задач, дополнительных к тем, которые учащиеся решают в процессе систематического изучения математики».

И. Ф. Шарыгин писал: «...в книге есть задачи и более высокого уровня, назовем этот уровень творческим». Эти задачи он называет задачи-проблемы.

Нестандартные построения:

- построения с помощью одного циркуля;
- построения с помощью одной линейки;
- построения с недоступными элементами;
- построения с помощью других средств.

Идея о построении с помощью одного циркуля была выдвинута еще итальянским ученым Джованни Баттиста Бендетти (1530-1590). В 1672 году появилась книга «Euclidus Danicus» датского геометра Георга Мора (1640-1697). В ней он показал, что все задачи, которые сводятся к квадратным уравнениям, можно решить геометрически с помощью одного циркуля. Более чем через 100 лет, в 1797 году, эта задача была вновь поставлена и решена итальянцем Лоренцо Маскерони (1750-1800).

Разумеется, одной линейкой можно проделать не всякое построение, выполнимое циркулем и линейкой. Если же на листе предварительно нарисована окружность и отмечен ее центр, то согласно теореме Штейнера, все построения, выполнимые циркулем и линейкой, могут быть проделаны одной линейкой. Однако, всякое построение, выполнимое циркулем и линейкой, можно проделать и одним циркулем.

Л. М. Фридман в своей книге пишет: «...многие выдающиеся математики и педагоги нашли ряд общих указаний – рекомендаций, которыми следует руководствоваться при решении нестандартных задач. Эти указания называют эвристическими правилами».

Л. М. Фридман приводит рекомендации, которым необходимо следовать при поиске решения нестандартной математической задачи:

1. Прочтя задачу, надо попытаться установить, к какому виду задач она принадлежит.

2. Если задача не является стандартной, то следует действовать в следующих направлениях:

а) вычленять из задачи или разбивать ее на подзадачи стандартного вида (способ разбиения);

б) ввести в условие вспомогательные элементы: вспомогательные параметры, вспомогательные построения (способ вспомогательных элементов);

в) переформулировать ее, заменить ее другой равносильной задачей (способ моделирования).

3. Для того чтобы легче было осуществлять указанные способы, полезно предварительно построить наглядную вспомогательную модель задачи – ее схематическую запись.

Решение нестандартных задач есть искусство, которым можно овладеть лишь в результате глубокого постоянного самоанализа действий по решению задач и постоянной тренировки в решении разнообразных задач [5; 24].

1.4.1. Построения с помощью одного циркуля

С помощью одного циркуля, естественно, нельзя построить сразу все точки прямой. Поэтому мы договоримся считать, что прямая построена, если построены две ее точки (ясно, что «известная» прямая не является построенной в прямом смысле: она может быть построена, если мы располагаем линейкой, но циркуль не даёт возможности построить «известную» прямую) Отрезок назовём построенным, если построены его концы, а луч — если построены его начало и какая-либо принадлежащая ему точка. Оказывается, что при таком условии с помощью циркуля можно выполнить все построения, которые можно выполнить с помощью циркуля и линейки. Это следует из возможности построить одним циркулем точки пересечения прямой, заданной двумя точками с окружностью и точку пересечения двух прямых, так как любое построение циркулем и линейкой представляет собой последовательность нахождений точек пересечения окружностей и прямых. Эти задачи характерны тем, что искомыми фигурами являются точки. Круг задач, разрешимых с помощью циркуля, при такой постановке вопроса значительно расширяется. Например, циркуль позволяет разделить пополам данный угол или найти перпендикуляр к данной прямой, проходящий через данную точку, так как в этих задачах линейка употребляется только для выполнения последней операции — для вычерчивания прямой.

Мор в 1672 г., а затем в 1797 г. Маскерони пришли к выводу, что все геометрические задачи на построение, решаемые при свободном пользовании циркулем и линейкой, могут быть решены исключительно циркулем. Теорема Мора-Маскерони: «Любая геометрическая задача на построение фигуры из конечного числа точек, разрешимая при наличии циркуля и линейки, может быть решена при наличии только циркуля».

При этом имеется в виду, что данная фигура состоит только из конечного числа точек, окружностей и их дуг, прямых, отрезков и лучей. Без этой оговорки теорема также может привести к недоразумению.

Решая задачу с помощью циркуля и линейки, мы получаем точки лишь при выполнении следующих построений:

1. Построение точки пересечения двух известных прямых (которые для этого предварительно строятся).
2. Построение общих точек построенной окружности и известной прямой (для чего эта известная прямая строится на одном из предыдущих этапов построения).
3. Построение общих точек двух построенных окружностей.
4. Построение любого конечного числа точек, принадлежащих известной прямой (или известному лучу, или известному отрезку), для чего эта прямая предварительно строится.
5. Построение любого конечного числа точек, принадлежащих построенной окружности (или дуге окружности).
6. Построение точки, заведомо не принадлежащей соединению конечного числа построенных точек, построенных окружностей (или дуг окружностей) и известных прямых (для чего известные прямые предварительно строятся).

Понятно, что для выполнения построений 3 и 5 достаточно располагать только циркулем. Мору и Маскерони оставалось доказать, что и другие построения, указанные в этом списке, т. е. построения 1, 2, 4, 6, также выполнимы исключительно циркулем [25; 42].

1.4.2. Построения с помощью одной линейки

Геодезисты в своей работе тесно связаны с геометрическими построениями и измерениями, причём в практике геодезических работ приходится пользоваться почти исключительно проведением прямых линий.

В связи с этим внимание математиков еще в XVII в. было привлечено к изучению геометрических построений, производимых исключительно линейкой. Такого рода построения рассматривал упоминавшийся уже Мор (в недошедшей до нас книге «Euclides curiosus», о которой упоминается в переписке некоторых математиков того времени). Ряд задач на построение с линейкой рассматривали: И. Ламберт (в 1774г.), Брианшон (1783—1864), написавший книгу «Приложения теории трансверсалей» (в 1818 г.), предназначенную для лиц, занимающихся землемерными работами, французский геометр Понселе (1788—1867) в связи с его исследованиями по проективной геометрии.

Пользуясь только линейкой, нельзя решить всякую задачу, разрешимую с помощью циркуля и линейки. Но исследования этого вопроса показали, что для решения как угодно сложной геометрической задачи на построение, разрешимой циркулем и линейкой, достаточно воспользоваться циркулем не более одного раза. Точнее говоря: всякая геометрическая задача на построение фигуры, состоящей из конечного числа точек, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена одной линейкой, если на плоскости построена какая-либо окружность и отмечен её центр. При этом предполагается, что данная фигура состоит только из конечного числа точек, прямых, лучей, отрезков и дуг окружностей. Это предложение было установлено швейцарским математиком Я. Штейнером (1796—1863) в 1833 г. Без доказательства оно было приведено ещё в 1822 г. Понселе в его «Трактате о проективных свойствах фигур». Поэтому теорему Штейнера называют иногда теоремой Понселе-Штейнера.

Окружность называется известной, если построен её центр и построены концы отрезка, равного радиусу этой окружности. Если пользоваться только линейкой, то такая окружность не может быть построена, хотя с общегеометрической точки зрения она вполне определена этими данными.

Для доказательства теоремы Штейнера достаточно установить, что при наличии линейки и построенной окружности с отмеченным центром можно выполнить следующие построения:

1. Построение общих точек известной окружности и построенной прямой (если такие точки существуют).

2. Построение общих точек двух известных окружностей (если такие точки существуют).

3. Построение любого конечного числа точек, принадлежащих известной окружности.

4. Построение точки, не принадлежащей соединению конечного числа построенных точек, построенных прямых и известных окружностей.

Советский математик Д. Д. Мордухай-Болтовской (1876—1951) в 1910 г. доказал, что теорема Штейнера остаётся в силе, если дана не вся вспомогательная окружность, а как угодно малая её дуга (и отмечен центр окружности). Доказано также, что эта дуга окружности может быть заменена дугой эллипса или гиперболы с отмеченным центром и фокусом или дугой параболы с отмеченной вершиной и фокусом (Н. В. Наумович, 1936 г.).

Пользуясь только линейкой, нельзя построить центр начерченной окружности, если плоскости нет никаких других построенных фигур. В связи с этим интересно отметить, что если построены две пересекающиеся (или касающиеся) окружности, то центр каждой из них может быть построен с помощью только линейки.

Однако существует еще одна теорема, благодаря которой многие задачи могут оказаться разрешимыми исключительно линейкой, если на плоскости дана некоторая вспомогательная фигура. Лемма о трапеции: «Прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей трапеции с точкой пересечения продолженных её боковых сторон, делит оба основания трапеции пополам». Данная лемма позволяет решать задачи, если, например, на плоскости уже даны две параллельные прямые [13; 14].

1.4.3. Построения с недоступными элементами

Общая теория геометрических построений с помощью циркуля и линейки развивается обычно в предположении, что любые две точки плоскости можно соединить прямой, что можно провести окружность, центр которой находится в любой точке и радиус которой имеет любые размеры, что может быть построена и в дальнейшем использована точка, в которой пересекаются две построенные линии. В практических условиях эти предположения могут и не выполняться. В частности, этому могут препятствовать размеры чертежа, в силу чего некоторые элементы данных или искомых фигур могут оказаться за его пределами, как это в действительности нередко случается в чертёжной практике. При измерениях и построениях на местности не во всякую точку можно поместить геодезический инструмент и не всякий прямолинейный путь доступен для прохождения. В связи с этим обстоятельством возникла и развилась математическая теория геометрических построений с недоступными элементами.

Точка называется недоступной, если к ней нельзя применить аксиомы конструктивной геометрии, в частности аксиомы линейки и циркуля. Фигура считается недоступной, если все её точки недоступны. Недоступная точка считается известной, если построены отрезки двух прямых, пересекающихся в этой точке.

Появление недоступных элементов существенно изменяет ход геометрических построений и обычно усложняет их. Однако доказано элементарными методами, что появление на плоскости нескольких недоступных точек не может перевести геометрическую задачу на построение циркулем и линейкой из класса разрешимых в класс неразрешимых.

Теория геометрических построений с недоступными элементами включает в себя основные теоремы проективной геометрии, как свойства полного четырёхвершинника, теорема Дезарга, теорема Паппа-Паскаля, свойства поляр и другие [5].

1.4.4. Построения с помощью других средств

В чертежной практике для построений также широко пользуются угольником, двусторонней линейкой и другими инструментами. Было бы неправильно поэтому рассматривать эти инструменты как не заслуживающие теоретического изучения и считать сочетание циркуля с линейкой единственным теоретически допустимым набором инструментов для геометрических построений.

В настоящее время правильнее всего смотреть на построения с циркулем и линейкой лишь как на один из возможных примеров теории геометрических построений с наперёд заданными средствами, причём этот пример наиболее традиционен. Поэтому нам представляется крайне желательным, чтобы в практике школьного преподавания, наряду с систематическим изучением построений с помощью циркуля и линейки, были затронуты также вопросы о построениях с различными другими инструментами, например, в рамках факультативного курса. Учащиеся относятся к вопросам этого рода с живым интересом, и эти вопросы способствуют развитию геометрической инициативы и изобретательности учащихся [24].

ГЛАВА 2. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ В КУРСЕ ПЛАНИМЕТРИИ

2.1. Технология построения урока по теме «Построения циркулем и линейкой»

Технологии построения урока по теме «Построения циркулем и линейкой» могут отличаться в зависимости от наличия доступа к компьютеру и интерактивной доске и его отсутствия. Наличие техники позволяет создать и показать обучающимся презентацию, на которой будет последовательно показан каждый шаг построения той или иной задачи, однако это не является незаменимым. Доска, мел разного цвета, линейка и циркуль для доски создают из нее такую же интерактивную презентацию с помощью рук учителя.

Самое первое, что должен сделать учитель перед тем, как начнет урок по теме «Построения циркулем и линейкой», – накануне занятия напомнить ученикам, чтобы они обязательно принесли на урок циркули, и самому заранее подготовить мел разного цвета, проверить наличие циркуля для доски и линейки.

Урок по данной теме изначально требует от учителя и учеников большого количества построений, выполненных как на доске, так и в тетрадях, причем учитель должен уделить особое внимание тому, что обучающиеся пишут в тетрадях. Оттого, самым рациональным построением урока для понимания и закрепления материала в связи с тем, что часов на данную тему отводится мало, является комбинированный урок.

Урок может состоять из следующих этапов:

1. Организационный этап.
2. Этап актуализации знаний.
3. Этап объяснения нового материала.

4. Этап первичного закрепления знаний.
5. Этап проверки пройденного материала.
6. Завершающий этап урока.

Организационный этап включает в себя не только приветствие учителем обучающихся, настроя их на работу и проверки посещаемости, но и проверку наличия циркулей у учеников и при их недостатке распределение имеющихся по классу так, чтобы хотя бы один был на парте.

Этап актуализации знаний должен включать в себя повторение того, что же вообще такое построения с помощью циркуля и линейки, почему они нужны, для чего изучаются. Также все необходимые для решения выбранных учителем задач ранее изученные свойства фигур и различные определения.

Во время этапа объяснения нового материала учителю необходимо решить на доске одну или несколько элементарных задач, демонстрируя на доске (или с помощью презентации), как правильно должно происходить построение, на что конкретно стоит обратить внимание. Лучше всего, если учитель полностью разберет анализ построения, доказательство и исследование на количество решений задачи с полной записью на доске, чтобы для обучающихся в дальнейшем был пример, как правильно оформлять такие задачи (если есть только интерактивная доска, то необходимо обеспечить поэтапность каждого шага, чтобы построения и записи о проделанных действиях не появлялись целиком вперед, а как бы имитировали работу учителя у доски или в тетради).

Этап первичного закрепления знаний может состоять из того, что ученики по очереди выходят к доске, с помощью учителя решая дальнейшие задачи, в то время как учитель контролирует не только доску и все, что происходит на ней, а и то, что происходит в классе в тетрадях обучающихся. Важно понимание учениками первичных законов построения и то, как они будут выполняться. С опорой на элементарные построения строятся все остальные, потому необходимо, чтобы начальный этап урока был усвоен в полной мере, и обучающиеся сами научились находить в задачах подсказки к тому, как решать дальше, а это более возможно, когда учитель лишь направляет и помогает, а не полностью рассказывает материал самостоятельно.

Этап проверки пройденного материала позволит учителю выявить общее понимание классом пройденного материала. В связи с тем, что на построения циркулем и линейкой отводится не так много часов, смысла откладывать проверку первичных знаний нет. Она может выглядеть как самостоятельная работа в конце урока на пять минут, когда обучающимся предлагается построить какую-то конкретную задачу из тех, что ранее были решены на уроке. Или же, если позволяет подготовка класса, эта работа может занимать последних 10-15 минут, где учащимся предлагается решить задачу похожую на одну из решенных ранее или более сложную, но с опорой на одну или несколько из тех, что были решены на уроке.

Завершающий этап урока должен завершаться выводом обучающихся о том, для чего они изучали эти задачи, и какую пользу в жизни построения с помощью циркуля и линейки несут [34].

2.1.1. Методические рекомендации для учителя

Самое сложное в профессиональной деятельности учителя – не просто преподнести ребенку сложный материал, не просто поделиться тем багажом знаний, который имеется в арсенале любого учителя, а замотивировать обучающегося к учебной деятельности, к изучению не просто предмета, а каждой конкретной темы на каждом конкретном уроке. Исключением не стала и тема: «Построения циркулем и линейкой».

«Чем же замотивировать учеников? Что сказать и сделать на уроке такого, чтобы детям было интересно и самим хотелось изучить данную тему?» – пожалуй, самые частые вопросы учителей, которые сталкиваются с данной проблемой изо дня в день. Два самых простых способа замотивировать обучающихся, это показать практическую значимость данной темы или же окунуться в историю.

В чем же стоит искать практическую значимость построений с помощью циркуля и линейки? В первую очередь такие задачи используются в строительстве, например, когда собирают металлические конструкции: фермы мостов, каркасы зданий, высотных башен и т.д. Обучающимся можно показать, что то, что планируется изучать на данном уроке, это не просто какие-то абстрактные задачи, а реальные задачи из жизни, преобразованные в геометрическую форму. Возможен вариант моделирования для обучающихся ситуации, в которой они придут к выводу, что им надо решить для выхода из ситуации конкретную задачу, а после показать, что это и есть задача на построение, только немного видоизмененная.

С исторической точки зрения можно обратиться ко временам Евклида. Предложить обучающимся представить себя учениками великого математика и задуматься: такие задачи решались еще тогда, только в чуть более тяжелых условиях. По Евклиду, использовать циркуль можно только для проведения окружности с данным центром и радиусом, уже отложенным от данной точки, то есть, фактически, для проведения окружности с данным центром через данную точку. А вот переносить циркулем отрезки нельзя. Дело в том, что у древних греков циркуль пришел на смену веревке, один конец которой привязывался к колышку, а другим, натягивая, можно было прочертить окружность с центром в этом колышке и радиусом, равным всей веревке или какой-то ее части. Можно попробовать создать эту атмосферу на уроке и изначально решить с обучающимися задачу об откладывании равного отрезка (Приложение Д), чтобы в дальнейшем можно было переносить раствор циркуля в нужную точку, как все в настоящее время привыкли.

В связи с тем, как в современном мире развиваются компьютерные технологии и интернет-платформы, современные обучающиеся наиболее ориентированы на восприятие информации именно таким образом. Оттого будет отличным решением использовать на уроках с построениями такие программы, как GeoGebra или Живая математика, которые позволяют выполнять как построения в режиме реального времени, так и сохранять их заранее, просто действие за действием воспроизводя построения. Такая форма является более наглядной и интересной для обучающихся, что не только повысит их желание приходить на такие уроки, но и общий уровень понимания. Наглядность таких методов и возможность в любой момент изменять данные позволяет выявлять некоторые подводные камни, которые на статичном рисунке не всегда удается заметить.

Еще одним важным моментом, на который учителям стоит обратить внимание, когда они будут изучать с обучающимися данную тему, является сам алгоритм решения каждой задачи на построение. Анализ, построение, доказательство и исследование должны быть выполнены не только для более сложных задач, но и для элементарных, с которых и начинается знакомство с данной темой. Учителю лучше всего с самого начала на примере самой первой задачи показать обучающимся, как стоит делать, чтобы они сразу привыкали к нужному алгоритму действий и учились самостоятельно находить решения. Ведь далеко не все даже элементарные задачи являются очевидными для решения без проведения анализа. Чтобы поделить отрезок пополам, надо еще понять, что точка середины отрезка будет лежать на серединном перпендикуляре к прямой или же в точке пересечения диагоналей ромба, одна из которых является данным отрезком [22].

2.1.2. Проблемы, возникающие у обучающихся при изучении темы «Построения циркулем и линейкой»

Какой бы ни была легкой или сложной тема, к изучению которой приступят обучающиеся, рано или поздно они столкнутся с рядом сложностей, которые могут возникнуть как у каждого в частности, так и у всех разом. В этом пункте рассмотрены некоторые из этих проблем, которые могут помешать обучающимся прийти к верному решению задачи или вообще решить ее каким бы то ни было способом.

Проблемы были выявлены, исходя из результатов уроков, проведенных на параллели седьмых классов в МАОУ Лицее №67 г. Челябинска. Технологическая карта занятий представлена в Приложении Е. Были выявлены основные трудности и ошибки, с которыми сталкивались обучающиеся в течение данных уроков. На занятиях решались в основном элементарные задачи на построение и те, которые основаны на них, однако выявлено целых три основных проблемы, которые систематично встречались в работах, а также при выходе к доске обучающихся, как по отдельности при решении задачи, так и комплексно. Данные проблемы характерны не только для обучающихся седьмого класса, на котором проводилось исследование, но и, в особенности, для обучающихся старших классов, которые уже знают больше, а, значит, имеют и больше возможностей для решения задач на построение.

В дальнейшем проблемы рассмотрены на основе элементарных и простейших задач, однако сама их составляющая описывается так же и для более сложных задач, с которыми сталкиваются обучающиеся в курсе планиметрии в 7-9 классах.

Одной и основных проблем является совершенно нерациональный подход к построению, а так же поиск пути решения задачи. Обучающиеся зачастую не готовы связывать свои знания из тем, которые были изучены ранее, а действовать лишь по проторенному пути уже в этой теме, в то время как задачи на построение, которые не являются элементарными, зачастую требуют глубоких знаний по различным темам, например, по различным свойствам треугольников или четырехугольников. Иногда использование некоторых различных свойств геометрических фигур, изученных ранее, дает возможность выполнить необходимые построения с помощью куда меньшего количества шагов, чем если делать это с помощью других свойств, которые могут казаться куда более очевидными.

Ещё одной проблемой для обучающихся является неспособность заметить во время исследования все возможные решения, если их больше одного. Часто задачи на построение имеют несколько, например, два, а иногда даже четыре решения, и обучающиеся, построив одно из них, не замечают других. Но самым сложным в исследовании все же считается не это. Часто бывает так, что от выбора данных зависит, будут решения или нет. И самое сложное – заметить и определить, в каких случаях не будет решений, а в каких – будет и сколько именно.

С выбором данных связана и еще одна проблема. Громоздкость построения зачастую мешает обучающимся правильно построить тот или иной элемент, потому что в большом количестве прямых и окружностей сложно не перепутать нужную в данный момент линию с какой-то промежуточной.

2.1.3. Способы решения проблем на примере решения задач на построение

1. Нерациональный выбор решения.

Рассмотрим эту проблему на примере построения элементарной задачи 6: «Через данную точку A, лежащую вне прямой a, провести прямую b, параллельную a».

Некоторые обучающиеся при решении этой задачи хотели использовать элементарную задачу 5, то есть основное построение выглядело таким образом (даже если используется какая-то элементарная задача для построения, все действия записываются полностью для наглядности сравнения).

Построение:

1. $a, A \notin a$;
2. $\omega_1(A, AB)$;
3. $\omega_1 \cap a = B, C$;
4. $\omega_2(B, BC)$;
5. $\omega_3(C, BC)$;
6. $\omega_2 \cap \omega_3 = D, E$;
7. $\omega_1 \cap DE = F, G$;
8. $\omega_4(F, FG)$;
9. $\omega_5(G, FG)$;
10. $\omega_4 \cap \omega_5 = K, L$;
11. $KL = b -$ искомая (рисунок 15).

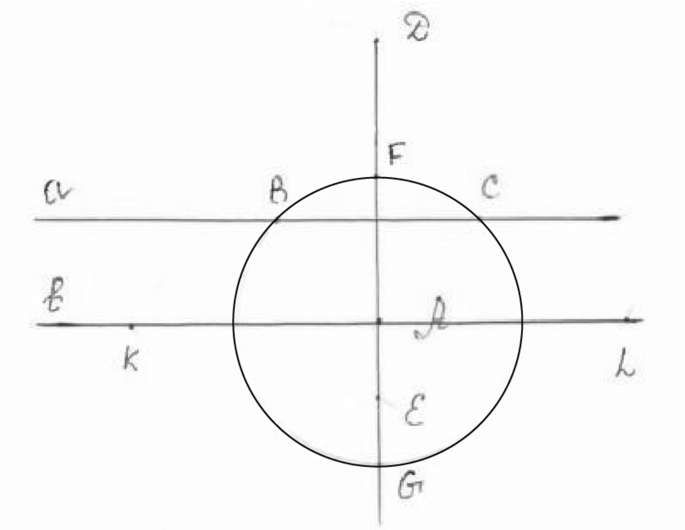

Рисунок 15 – Пример построения при нерациональном анализе

Так решать задачу нецелесообразно, так как есть более рациональное решение, в котором используется куда меньшее количество построений. Его можно заметить, если провести более глубокий анализ. Выполнив дополнительное построение, и построив параллелограмм через эти три точки, можно заметить, что задача сводится к построению четвертой вершины параллелограмма, как точки пересечения двух окружностей.

Построение:

1. $a, A \notin a;$

2. $B \in a, C \in a;$

3. $\omega_1(A, BC);$

4. $\omega_2(B, AC);$

5. $\omega_1 \cap \omega_2 = D;$

6. $AD -$ искомая (рисунок 16).

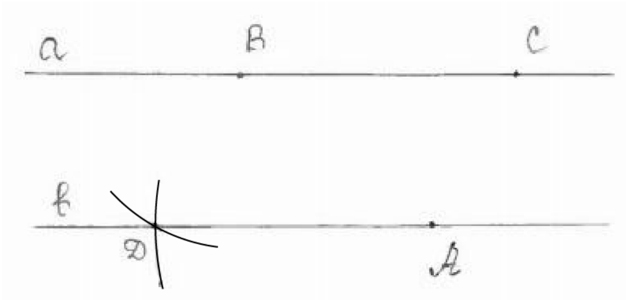

Рисунок 16 – Пример построения при рациональном анализе

Таким образом, элементарная задача 6 имеет более рациональное решение, чем самое очевидное, которое в первую очередь предложат обучающиеся. В случае возникновения подобной ситуации, следует их направить к поиску и других возможных решений и на этапе анализа выбрать, какое решение будет удобнее в построении.

2. Исследование.

Как уже было сказано выше, одну из самых больших трудностей для обучающихся составляют исследования, поиск всех решений, если они имеются.

Рассмотрим на примере элементарной задачи 8.2: «Построить прямоугольный треугольник по катету a и гипотенузе c». Исходя из анализа, задача сводится к построению точки пересечения перпендикуляра к a и окружности с центром на конце катета и радиусом c.

Построение:

1. $a, c;$

2. $[BC] = a;$

3. $A_1C \perp BC;$

4. $\omega_1(B, c);$

5. $A_1C \cap \omega_1 = A;$

6. $[AB];$

7. $\Delta ABC -$ искомый (рисунок 17).

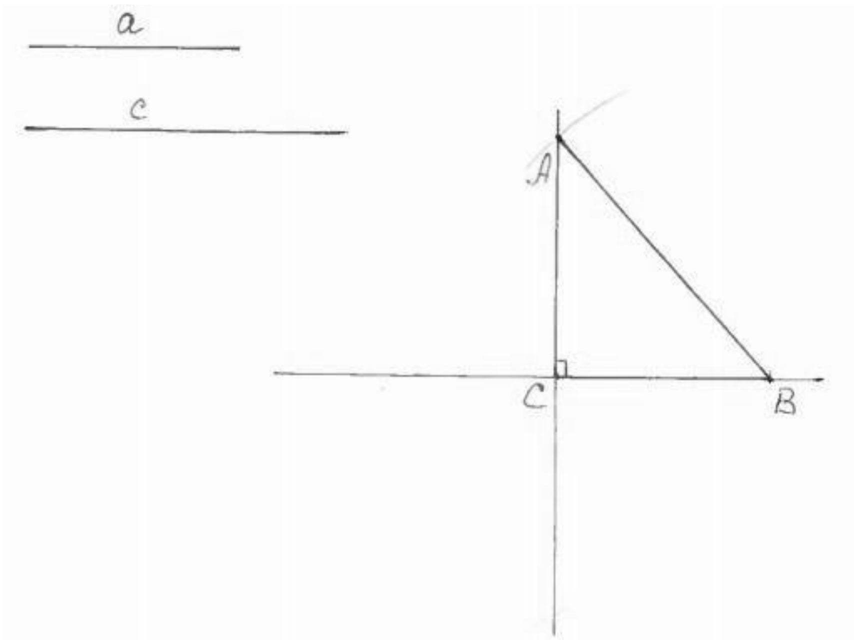

Рисунок 17 – Построение элементарной задачи 8.2

Доказательство: по построению.

Исследование:

Число решений зависит от числа точек пересечения прямой и окружности:

1. $a > c -$ нет решений.
2. $a = c -$ нет решений.
3. $a < c - 2$ равных решения.

В данной ситуации большинство обучающихся напишет, что задача всегда имеет одно решение, если не построили сразу два треугольника. Либо напишут, что задача всегда имеет два решения. Большинство попросту не заметят, что есть ситуации, когда решений может не быть вообще, потому что изначально очевидно, что катет должен быть меньше гипотенузы, и, исходя из этого, обучающиеся заведомо будут брать отрезки определенной длины. Учителю стоит уделить особое внимание этой детали при решении задач на построение со школьниками.

Рассмотрим эту же проблему на примере решения задачи, которая не является элементарной: «Построить треугольник по сторонам a, b и медиане m_b».

Анализ:

Предположим, что задача решена (рисунок 18).

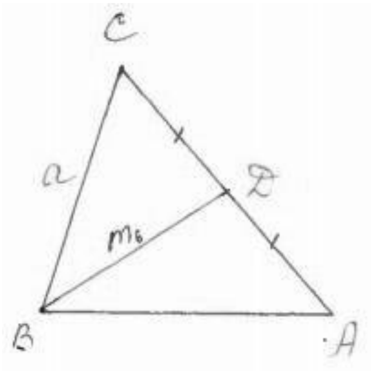

Рисунок 18 – Анализ

Задача сводится к построению ΔCBD по трем сторонам.

Построение:

1. $a, b, m_b;$

2. $b = AC;$

3. $AD=DC;$

4. $\Delta BCD;$

5. $AB;$

6. $\Delta ABC -$ искомый (рисунок 19).

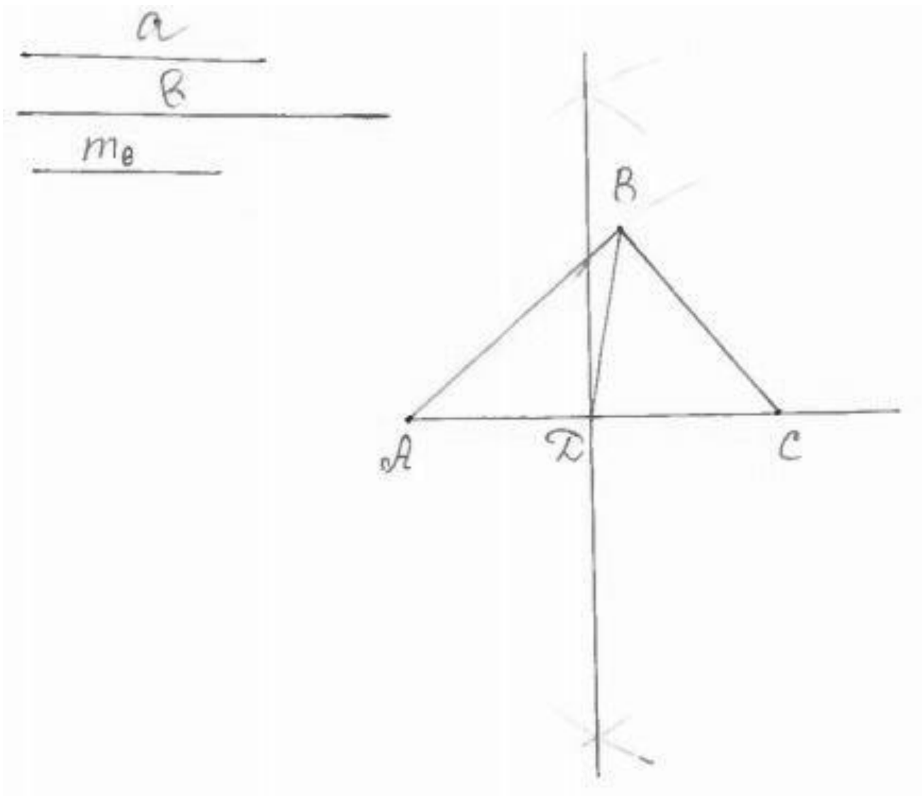

Рисунок 19 – Построение

Доказательство: по построению.

Исследование:

Количество решений зависит от возможности построения ΔCBD:

1. $|m_b - a| < \frac{b}{2} < m_b + a$ – два равных решения.

2. $\frac{b}{2} \geq m_b + a$ или $\frac{b}{2} \leq |m_b - a|$ – нет решений.

На рисунке 20 (как и на рисунке 18) выполнено построение только одного треугольника, и некоторые обучающиеся, соответственно, могут решить, что и решение одно тоже имеется, однако, их либо два, либо нет вообще.

Таким образом, учитель не должен бросать решение задачи после того, как она закончена, на самостоятельное исследование (хотя бы поначалу). Ему необходимо разобрать с обучающимися разные исходы, рассказать, где можно искать дополнительное решение, например, поискав еще точки пересечения окружности с прямой или другой окружностью, которые могут дать еще одно (или более) решение.

3. Громоздкость построения.

Обучающиеся поначалу будут чертить задачи, в которых построений сравнительно мало, поэтому проблемы не возникнет. Но чем дальше, тем больше построений будет в каждой задаче, соответственно, будет расти вероятность запутаться в большом количестве линий. Обучающимся необходимо будет с самого начала показать, что не всегда стоит чертить окружность полностью: иногда достаточно просто небольших дуг – частей окружности, чтобы найти точку пересечения. Вместе с этим, обучающимся стоит наглядно показать, как лучше подбирать масштаб, чтобы было наглядно и понятно, а не надо было подкладывать листы, чтобы начертить огромную окружность или же наоборот искать точку пересечения там, где все совпало, потому что построения слишком мелкие.

Например, в одной из самых первых элементарных задач на построение: «Построить биссектрису данного угла», не имеет смысла рисовать все окружности полностью (рисунок 20), достаточно построить только их части (рисунок 21).

Построение:

1. $\angle ABC;$

2. $A \in [BA);$

3. $[AB] = [BC];$

4. $\omega_1(A, AB);$

5. $\omega_2(C, AB);$

6. $\omega_1 \cap \omega_2 = D;$

7. $[BD) -$ искомый.

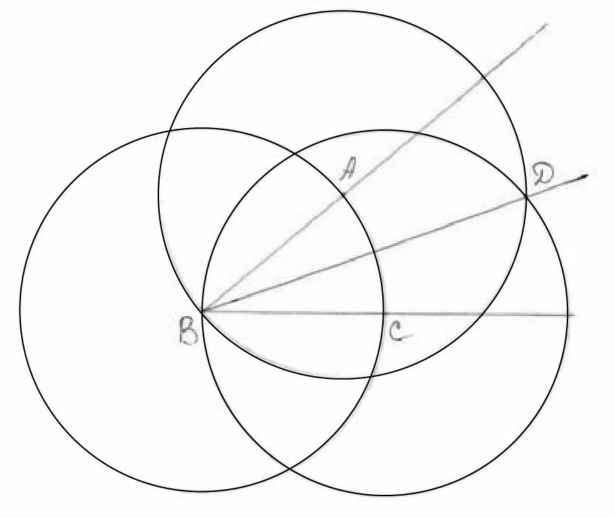

Рисунок 20 – Пример громоздкого построения

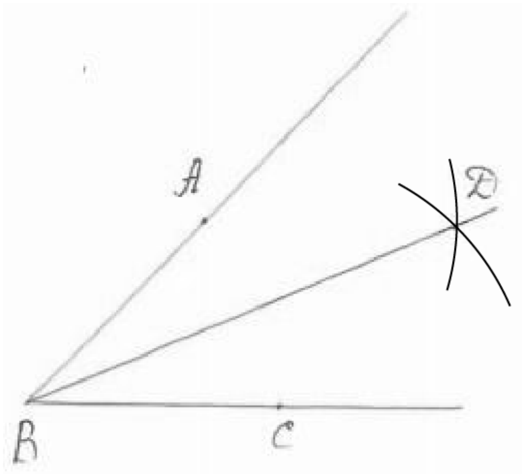

Рисунок 21 – Пример рационального построения

Даже при таком малом количестве построений заметна разница между построением на рисунке 21 и построением на рисунке 22. Кажется очевидным, но обучающиеся поначалу строят именно так, как показано на рисунке 21, а оттого стоит сделать на этом акцент при изучении еще элементарных задач, чтобы в дальнейшем они не терялись в своих построениях.

Однако важно понимать: если проводить только некоторые дуги, а не окружности полностью, можно потерять решения, которые точно легче заметить, если рисовать окружность целиком – высока вероятность не заметить дополнительную точку пересечения. Исходя из этого, важно уделять особое внимание исследованию. В то же время можно пояснить обучающимся, что промежуточные построения стоит рисовать лишь с дугой окружности, а важные для построения окружности (когда идет поиск точек пересечения), стоит чертить все-таки целиком.

Рассмотрим на примере решения еще одной задачи проблемы громоздкости и поиска количества решений.

«Построить параллелограмм по двум диагоналям d_1 , d_2 и высоте h».

Анализ:

Предположим, что задача решена (рисунок 22).

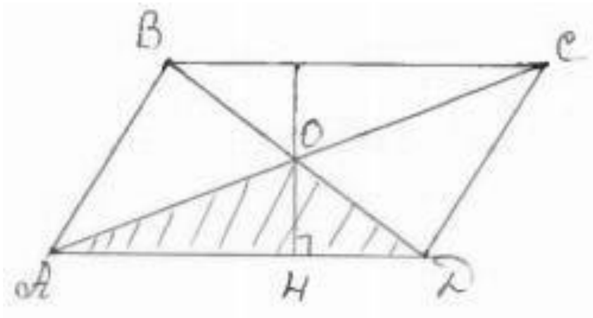

Рисунок 22 – Анализ

Задача сводится к построению двух прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.

Построение:

1. $d_1, d_2, h;$

2. $\Delta AHO;$

3. $\Delta DHO;$

4. $DO = OB;$

5. $AO = OC;$

6. $ABCD -$ искомый (рисунок 23).

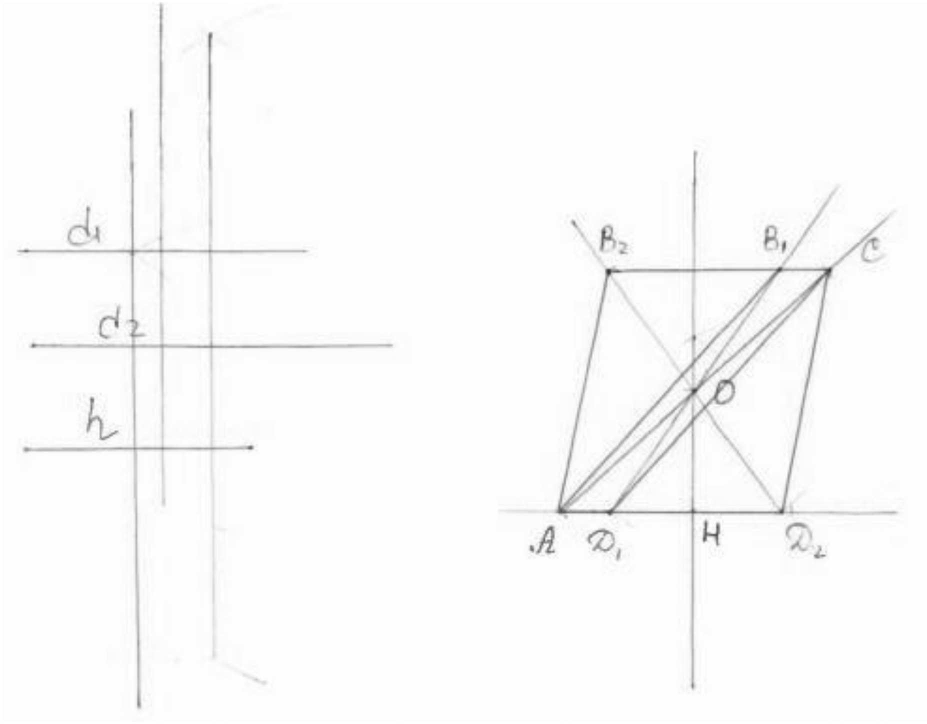

Рисунок 23 – Построение

Доказательство:

Диагонали точкой пересечения O делятся пополам, значит $ABCD -$ параллелограмм.

Исследование:

1. $d_1 \leq h$ или $d_2 \leq h -$ нет решений.
2. $d_1 = d_2 > h -$ пара равных решений.
3. $d_1 > h, d_2 > h, d_1 \neq d_2 -$ две пары равных решений.

Данная задача сложна тем, что не очевидны все решения. На рисунке 24 изображена уже целая пара решений, а если этот момент не обсудить заранее, многие обучающиеся не заметят еще и вторую пару решений. Также, если полноценно рисовать все окружности целиком, то они будут только мешать – таким громоздким и ненаглядным получится построение. По той же логике не следует рисовать сразу две пары решений на одном чертеже – у многих обучающихся будет и так проблема с ориентированием на рисунке при построении пары решений, что потеряться не составит труда. В исследовании же тоже все далеко не так просто, как в ранее рассмотренных задачах. Сложность заключается в том, что одновременно может получиться на одном рисунке две пары решений, и обучающимся необходимо понять, когда и в каком случае будет какое количество решений.

В подобной затруднительной ситуации с такими задачами может выручить построение с помощью интернет-технологий, например, в такой программе, как GeoGebra. На рисунке 24 построены все решения данной задачи (остальные в Приложении Ж), что очень невыгодно строить в тетрадях, зато вполне возможно в программе. Это не только наглядно, потому что можно нужные вещи выделить сильнее, подкрасить цветами, изменить масштаб, повертеть и покрутить рисунок, а потому что можно менять данные, и смотреть, как от изменения данных меняется количество решений. Это поможет не только для самого понимания построения, но и в исследовании, когда надо понять, в каком случае будет какое количество решений.

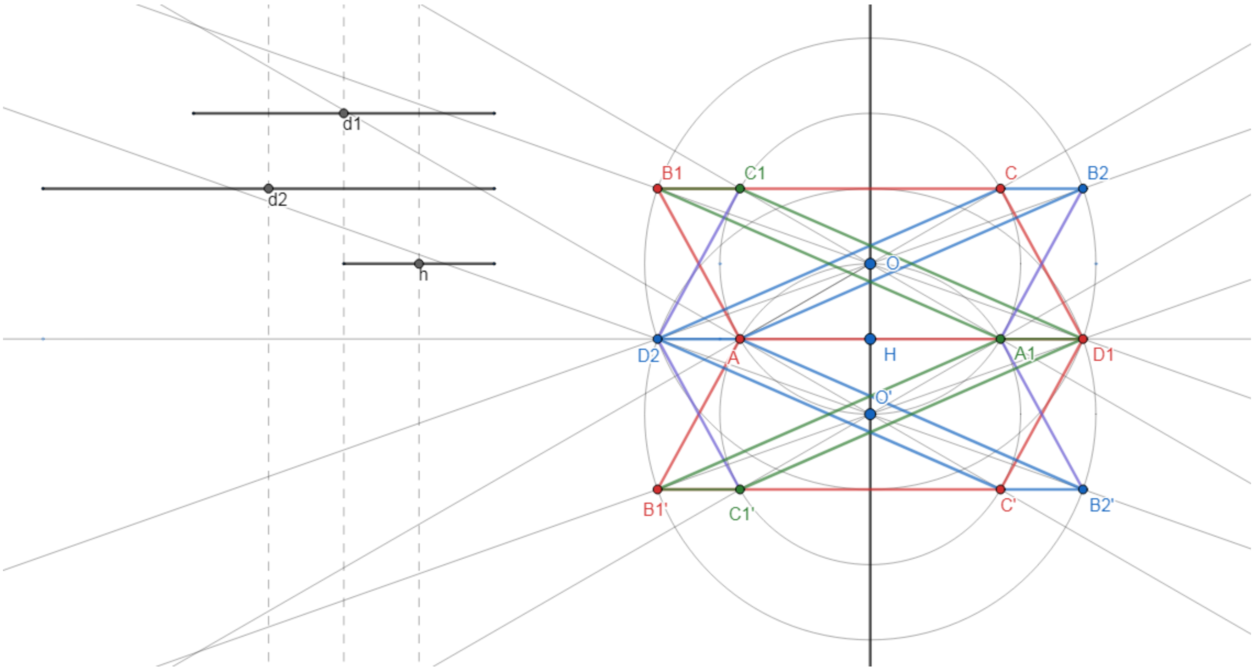

Рисунок 24 – Пример построения в GeoGebra

Таким образом, большая часть сложностей во многом решается при помощи своевременного вмешательства учителя в процесс, его исправлений и объяснений некоторых особо важных моментов. В дальнейшем, когда учащиеся получат уже некий опыт в решении задач на построение, они сами научатся предупреждать появление тех или иных ошибок.

2.2. Программа факультативного курса занятий для 9 класса по теме «Нестандартные задачи на построение»

На курс геометрии в школе отведено заведомо небольшое количество часов, если сравнивать с курсом алгебры. А на построения циркулем и линейкой отведено мало часов в курсе планиметрии, что говорит о том, что обучающимся остается мало времени на практику в построении циркулем и линейкой. В курсе планиметрии обучающиеся только знакомятся с некоторыми элементарными задачами, а на нестандартные или несколько более сложные задачи у них попросту не хватает времени. Однако эти задачи очень хорошо разряжают напряженную (если таковая имеется) обстановку в классе и повышают мотивацию обучающихся к изучению геометрии. При условии, что в учебную программу сложно добавить что-то еще, выгоднее всего создать факультативный курс, на котором обучающиеся смогут не просто научиться строить циркулем и линейкой, но и разовьют такие качества как определенность, последовательность, обоснованность мышления, умение анализировать, строить логические цепочки, а также «разовьют руку» для построений, что очень поможет им при построении сечений в курсе стереометрии в старших классах.

Программа факультативного курса по математике в 9 классах «Нестандартные задачи на построение» разработана в соответствии с Федеральным законом от 29.12.2012 N 273-ФЗ (ред. от 24.04.2020) «Об образовании в Российской Федерации», Приказом Минобрнауки России от 17.12.2010 N 1897 (ред. от 31.12.2015) «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования».

Программа факультативного курса рассчитана на один год, на 34 часа (1 час в неделю). Освоение программы способствует реализации общеинтеллектуального направления развития личности обучающихся, формирование таких качеств математического мышления, как гибкость, критичность, рациональность, логичность.

Основные цели курса:

1. Сформировать у обучающихся представление о том, что такое нестандартные задачи на построение, а также развить основные навыки для их решения.
2. Систематизировать, углубить и расширить знания, полученные на уроке в основном курсе планиметрии.
3. Развить математические способности, логическое мышление, алгоритмическую культуру, интуицию обучающихся.
4. Способствовать формированию умения видеть альтернативные пути решения задач, интегрировать ранее усвоенные способы деятельности в новые, применительно к возникшей проблеме, а также строить субъективно новые способы решения задач в процессе рассмотрения различных нестандартных задач на построение.
5. Сформировать опыт творческой деятельности обучающихся через исследовательскую деятельность при решении нестандартных задач.

Достижение этих целей обеспечено посредством решения следующих задач:

– рассмотреть различные виды нестандартных задач на построение, включая построения одним циркулем и построения одной линейкой;

– систематизировать, углубить и расширить знания обучающихся об этапах решения задач на построение;

– сформировать устойчивый интерес к математике и ее практическому применению;

– формировать опыт творческой деятельности обучающихся через исследовательскую деятельность при решении нестандартных задач;

– развить коммуникативные и общеучебные навыки работы в группе, самостоятельной работы, умений вести дискуссию, аргументировать ответы и т.д.

– воспитывать трудолюбие, терпение, настойчивость, инициативу при решении нестандартных задач и задач повышенного уровня сложности.

Факультативный курс представлен в виде практикума, который позволит систематизировать и расширить знания учащихся в решении различных видов нестандартных задач на построение.

Виды деятельности на занятиях: лекция учителя, беседа, практикум, консультация.

2.2.1. Планируемые результаты освоения курса

Предметные результаты:

1. Формирование представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления.

2. Повторение, систематизация и углубление ранее изученного материала на построение из курса планиметрии основной школы.

3. Освоение методов решения задач на построение одним циркулем и одной линейкой, а также иных нестандартных задач и формирование навыка их применения на практике.

4. Овладение навыками построения и анализа предполагаемого решения поставленной задачи.

Метапредметные результаты:

1. Умение самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в учебной и познавательной деятельности.

2. Умение самостоятельно планировать пути достижения целей, в том числе альтернативные, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач.

3. Умение соотносить свои действия с планируемыми результатами, осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.

4. Умение оценивать правильность выполнения учебной задачи, собственные возможности ее решения.

5. Умение организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками; работать индивидуально и в группе: находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учета интересов; формулировать, аргументировать и отстаивать свое мнение.

Личностные результаты:

1. Формирование ответственного отношения к учению, готовности и способности обучающихся к саморазвитию и самообразованию, осознанному выбору и построению дальнейшей индивидуальной траектории образования.

2. Формирование осознанного, уважительного и доброжелательного отношения к другому человеку, его мнению; готовности и способности вести диалог с другими людьми и достигать в нем взаимопонимания.

3. Формирование коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве со сверстниками и взрослыми в процессе образовательной, учебно-исследовательской, творческой и других видов деятельности.

2.2.2. Содержание курса

1. Раздел 1. Необычные задачи на построение:
   - задачи на построение отрезка определенной длины;
   - задачи на построение без всяких инструментов;
   - задачи на построение углов определенной величины.
2. Раздел 2. Построения с помощью прямого угла:
   - задачи, связанные с прямыми и отрезками;
   - задачи на построение углов.
3. Раздел 3. Задачи на построение одним циркулем:
   - задачи, связанные с прямыми и отрезками;
   - задачи, связанные с построением углов;
   - задачи на построение определенной точки;
   - задачи на построение окружности.
4. Раздел 4. Задачи на построение одной линейкой:
   - задачи, связанные с параллельными прямыми;
   - задачи, связанные с окружностью;
   - прочие задачи.

Тематическое планирование представлено в Таблице 1.

Таблица 1 – Тематическое планирование

Тема	Количество часов
1	*2*
Входной контроль	1
Раздел 1. Необычные задачи на построение	4
Задачи на построение отрезка определенной длины	1
Задачи на построение без всяких инструментов	1
Задачи на построение углов определенной величины	2

Продолжение таблицы 1

1	*2*
Раздел 2. Построения с помощью прямого угла	3
Задачи, связанные с прямыми и отрезками	1
Задачи на построение углов	1
Промежуточный контроль	1
Раздел 3. Задачи на построение одним циркулем	8
Задачи, связанные с прямыми и отрезками	2
Задачи, связанные с построением углов	2
Задачи на построение определенной точки	1
Задачи на построение окружности	2
Промежуточный контроль	1
Раздел 4. Задачи на построение одной линейкой	18
Задачи, связанные с параллельными прямыми	4
Задачи, связанные с окружностью	5
Прочие задачи	8
Итоговый контроль	1
Всего часов:	34

Методические рекомендации:

Список всех задач, разбитых по разделам, которые рекомендуются для изучения в течение данного факультативного курса, представлены в Приложении 3. Они подобраны и распределены согласно сложности каждой задачи. Рекомендуется решать их с обучающимися в данном в Приложении 3 порядке. Рассмотрим некоторые из них, согласно разделам.

Раздел 1. Необычные задачи на построение.

Всего в разделе двенадцать задач, на которые отводится четыре часа. Данные задачи решаются с помощью различных инструментов, но не являются аналогичными тем, которые проходятся в основном курсе планиметрии.

Первые три задачи подобраны на построение отрезка определенной длины, как с помощью линейки, на которой есть конкретные деления, так и с помощью привычных циркуля и линейки. Приведем решение третьей задачи, которая решается с помощью циркуля и линейки.

Задача 3.

Дан отрезок, равный 1. Постройте отрезки, равные $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$.

Анализ:

Согласно Теореме Пифагора:

Отрезок равный $\sqrt{2}$ является гипотенузой равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами, равными 1.

Отрезок равный $\sqrt{3}$ является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами, равными 1 и $\sqrt{2}$.

Отрезок равный $\sqrt{5}$ является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами, равными 1 и 2.

Построение:

1. a;
2. ΔAOB;
3. ΔAOC;
4. ΔBOD;
5. AB, AC, BD – искомые (рисунок 25).

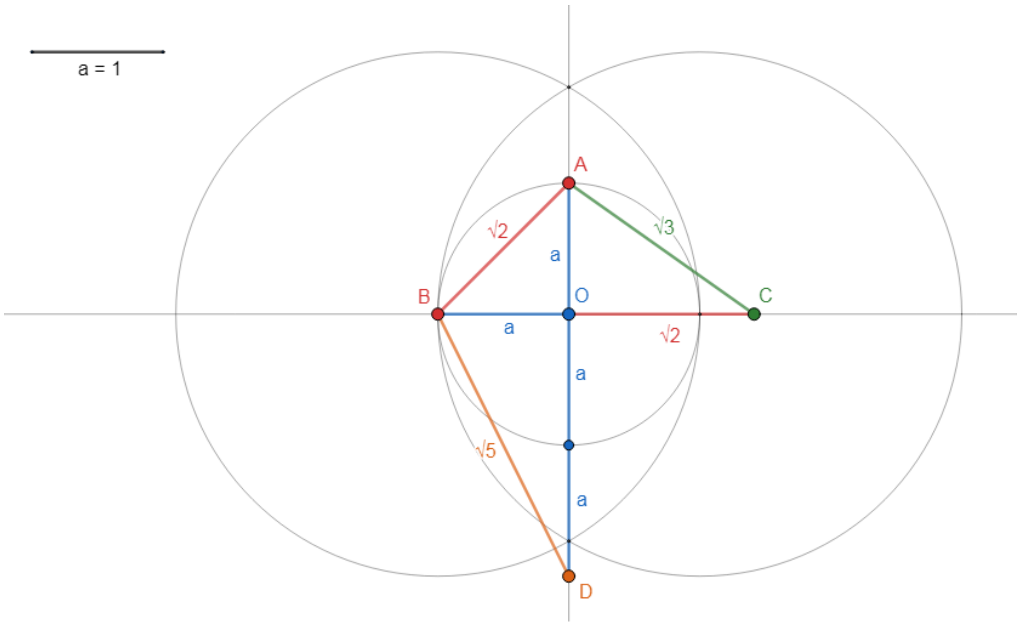

Рисунок 25 – Построение задачи 3

Доказательство:

AB – гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами, равными 1, по построению, тогда $AB = \sqrt{2}$;

AC – гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами, равными 1 и $\sqrt{2}$, по построению, тогда $AC = \sqrt{3}$;

BD – гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами, равными 1 и 2, по построению, тогда $BD = \sqrt{5}$.

Исследование:

Задача всегда имеет одно решение.

Второй час первого раздела отводится на построение без всяких инструментов. Такие задачи предполагают под собой построение на листе прозрачной бумаги. Рекомендуется заранее приготовить определенное количество бумаги для обучающихся или проследить, чтобы обучающиеся принесли бумагу каждый сам для себя. Всего таких задач в разделе четыре – с четвертой по седьмую.

Третий и четвертый час отводятся на задачи на построение углов определенной величины. Большая часть задач решается с помощью угольника, однако есть и задача на построение с недоступными точками.

Раздел 2. Построения с помощью прямого угла.

Всего в разделе задач, на которые отводится два часа. Еще один час предусмотрен для промежуточного контроля.

Рассмотрим одну из задач на построение углов, решение которой опирается на решение пятнадцатой задачи.

Задача 18.

Дан острый угол AOB. С помощью прямого угла постройте:

а) угол, вдвое больший угла AOB;

б) угол, вдвое меньший угла AOB.

Анализ: для а)

Дополнительное построение (рисунок 26): ΔAOC – равнобедренный, $AO = OC$. OB – биссектриса $\angle AOC$, медиана и высота ΔAOC.

Задача сводится к построению вершины C равнобедренного ΔAOC.

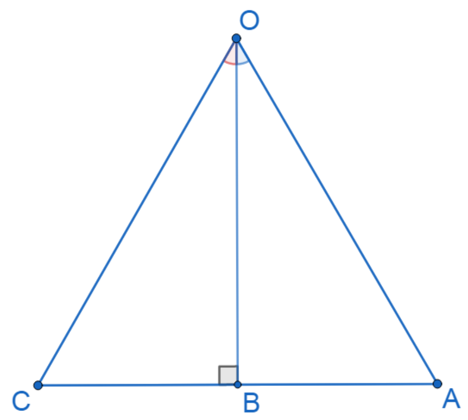

Рисунок 26 – Анализ задачи 18 а)

Построение:

1. $\angle AOB$;
2. $AK \perp OB$;
3. $KC = AK$;
4. OC;
5. $\angle AOC$ – искомый (рисунок 27).

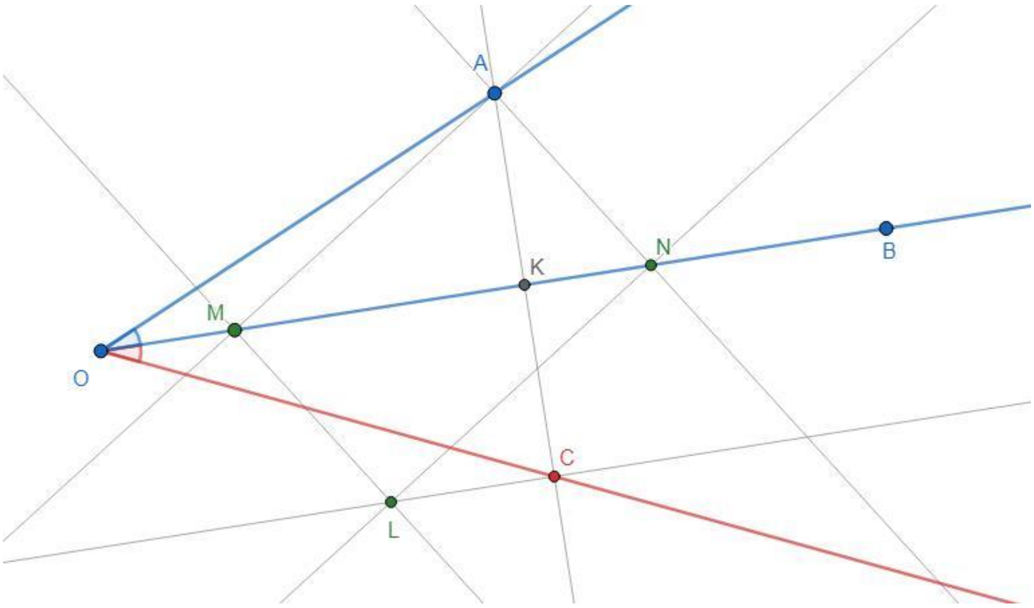

Рисунок 27 – Построение задачи 18 а)

Доказательство:

$OK \perp AC$ – по построению, $AK = KC$ по построению => $OK -$ высота и медиана. Тогда ΔAOC – равнобедренный => $OK -$ биссектриса, $\angle AOC = 2\angle AOB.$

Исследование:

Задача всегда имеет одно решение.

б) угол, вдвое меньший угла AOB.

Анализ:

Дополнительное построение (рисунок 28): $\Delta ABB_1 -$ прямоугольный, $AO -$ медиана.

Задача сводится к построению точки A как вершины прямоугольного ΔABB_1, где $BO = OB_1$.

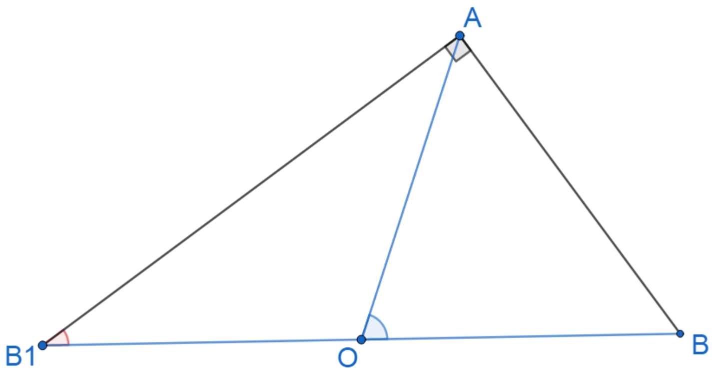

Рисунок 28 – Анализ задачи 18 б)

Построение:

1. $\angle AOB$;
2. $B_1O = OB$;
3. $\angle BAB_1, A \in OA$;
4. $\angle AB_1B$ – искомый (рисунок 29).

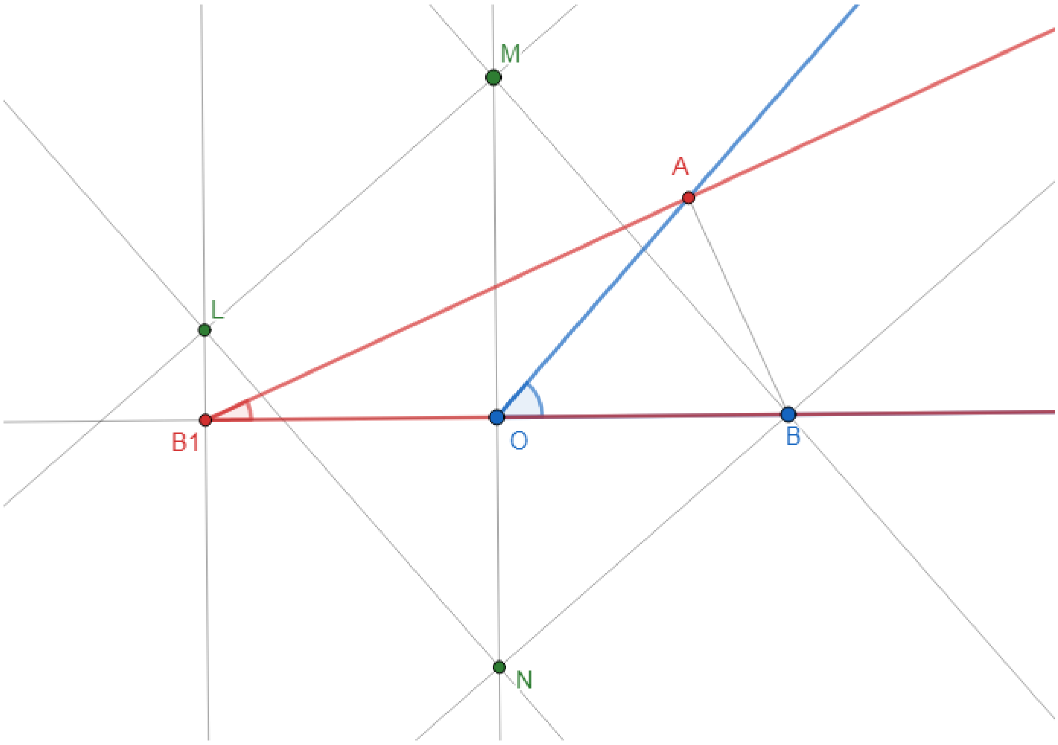

Рисунок 29 – Построение задачи 18 б)

Доказательство:

ΔABB_1 – прямоугольный по построению, $BO = OB_1$ по построению $=> AO$ – медиана, проведенная из вершины прямого угла.

Рассмотрим ΔAOB. $AO = OB => \Delta AOB$ – равнобедренный. $\angle OBA = \angle OBA$, тогда $\angle AOB = 180° - 2\angle OBA = 2(90° - \angle OBA)$.

Рассмотрим ΔABB_1. $\angle BAB_1 = 90° => \angle AB_1B = 90° - \angle OBA$.

Тогда $\angle AOB = 2\angle AB_1B$.

Исследование:

Задача всегда имеет одно решение.

Равенство отрезков KC и AK в решении задачи под буквой а), и равенство отрезков B_1O и OB в решении под буквой б) строится полностью согласно задаче 15 под буквой б). Исходя из этого, учителю рекомендуется прорешать все задачи раздела заранее, чтобы понимать, какая задача будет решаться на основе какой другой – это поможет выстроить работу на занятиях более грамотно.

Раздел 3. Задачи на построение одним циркулем.

Всего третий раздел рассчитан на восемь часов, на которые отведено десять задач. Саму тему можно разделить на четыре подраздела. Два часа отводится на задачи на построение прямых и отрезков, еще два часа на построение углов. Час рассчитан на построение определенной точки, и еще два часа – на построение окружностей. Еще час отведен на второй промежуточный контроль.

Рассмотрим решение одной из задач на построение определенной точки.

Задача 27.

Пользуясь только циркулем, разделите пополам данный отрезок, то есть постройте для данных точек A и B такую точку C, что точки A, B, C лежат на одной прямой и $AC = BC$.

Анализ:

Рассмотрим четырехугольник $AMDN$ (рисунок 30), в котором $AM = AN = AB, MD = DN = AD, AB = BD$.

Задача сводится к построению ромба $AMCN$, где $AC = CB$.

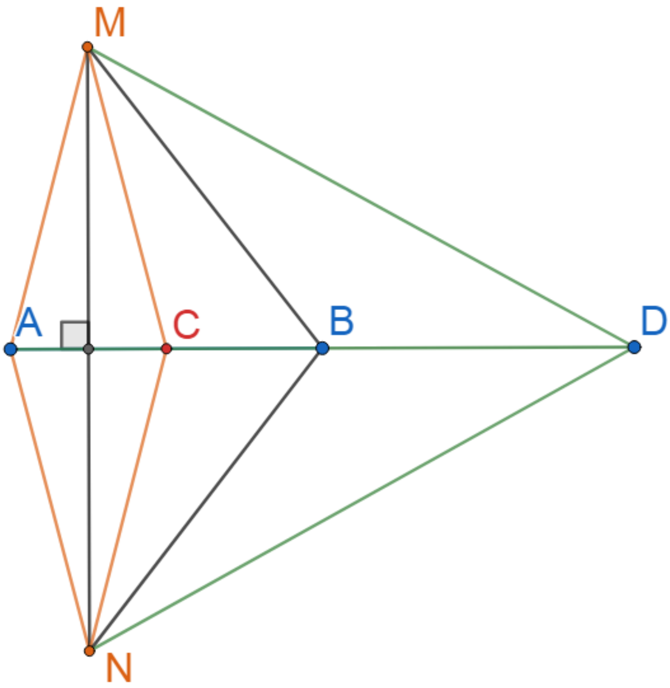

Рисунок 30 – Анализ задачи 27

Построение:

1. AB;
2. $DB = BA$;
3. $\omega_1(A, AB) \cap \omega_2(D, AD) = M, N$;
4. $\omega_3(M, AM) \cap \omega_4(N, AN) = A, C$;
5. C − искомая (рисунок 31).

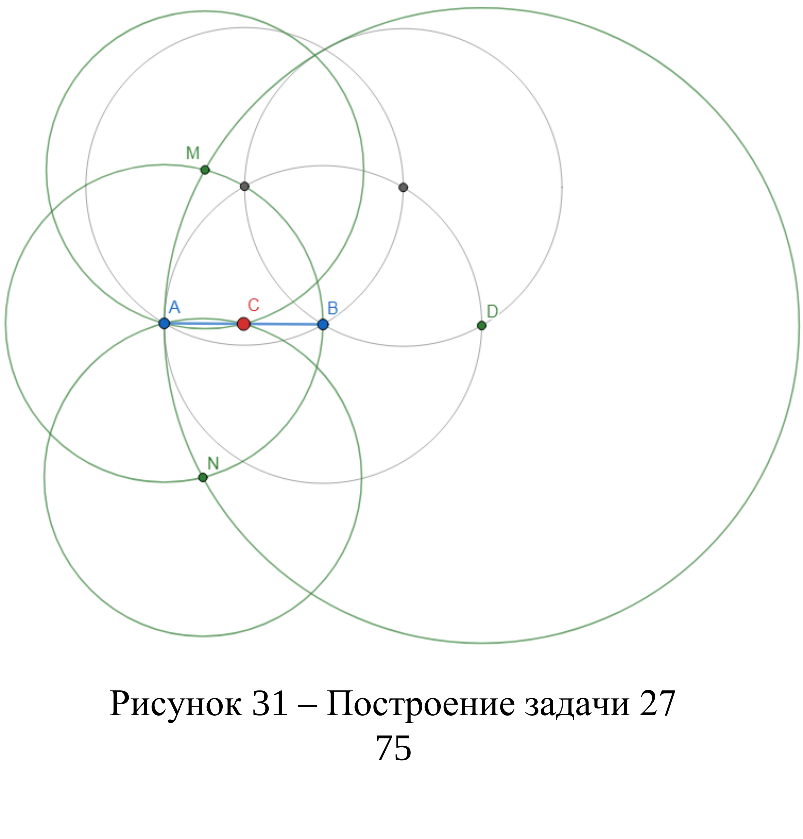

Рисунок 31 – Построение задачи 27

Доказательство:

$AB = BD$ по построению. Точки A, C, D лежат на одной прямой, так как лежат на серединном перпендикуляре к отрезку MN.

$\Delta AMD \sim \Delta CAM$ по двум углам ($\angle MAD -$ общий, а т.к. треугольники равнобедренные, то $\angle MAD = \angle AMC = \angle ACM$). Тогда, т.к. $AM = AB$ как радиусы, то $AC : AB = AM : AD = 1 : 2$.

Исследование:

Задача всегда имеет одно решение.

Равенство отрезков $DB = BA$ строится полностью на основе задачи 22 под буквой а): построение с помощью одного циркуля отрезка, который в два раза длиннее данного отрезка. То есть решение данной задачи без решения задачи 22 будет затруднено.

Раздел 4. Задачи на построение одной линейкой.

Данный раздел включает в себя двадцать три задачи, рассчитанные на восемнадцать часов, один час из которых отведен на итоговый контроль. Раздел включает в себя две основные подтемы: задачи на построение с параллельными прямыми и задачи на построение с данной окружностью. На них отводится четыре и пять часов соответственно. Остальные восемь часов рассчитаны на прочие задачи, которые также являются задачами на построение одной линейкой, но уже куда более сложные или же комбинированные, потому выносятся в последующее изучение.

Задачи на построение с параллельными прямыми основаны на Лемме о трапеции: «Прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей трапеции с точкой пересечения продолженных её боковых сторон, делит оба основания трапеции пополам». Рассмотрим одну из них.

Задача 32.

Даны две параллельные прямые и отрезок на одной из них. С помощью одной линейки разделите этот отрезок на три равные части.

Анализ:

Исходя из того, что $l_1 \parallel l_2$, то исходя из подобия треугольников если $KE = EH = HF$, то $AM = MN = NB$ (рисунок 32).

Задача сводится к построению равных отрезков $KE, EH, HF \in l_2$.

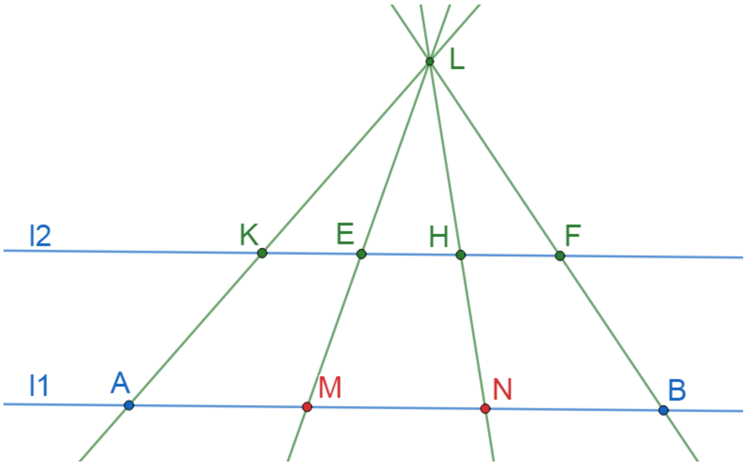

Рисунок 32 – Анализ задачи 32

Построение:

1. $l_1 \parallel l_2, A, B \in l_1$;
2. $AE \cap BF = D$;
3. $AF \cap BE = G$;
4. $DG \cap l_2 = H$;
5. $DG \cap l_1 = I$;
6. $BH \cap IE = J$;
7. $JA \cap l_2 = K$;
8. $AK \cap BF = L$;
9. $LE \cap l_1 = M$;
10. $LH \cap l_1 = N$;
11. M, N – искомые (рисунок 33).

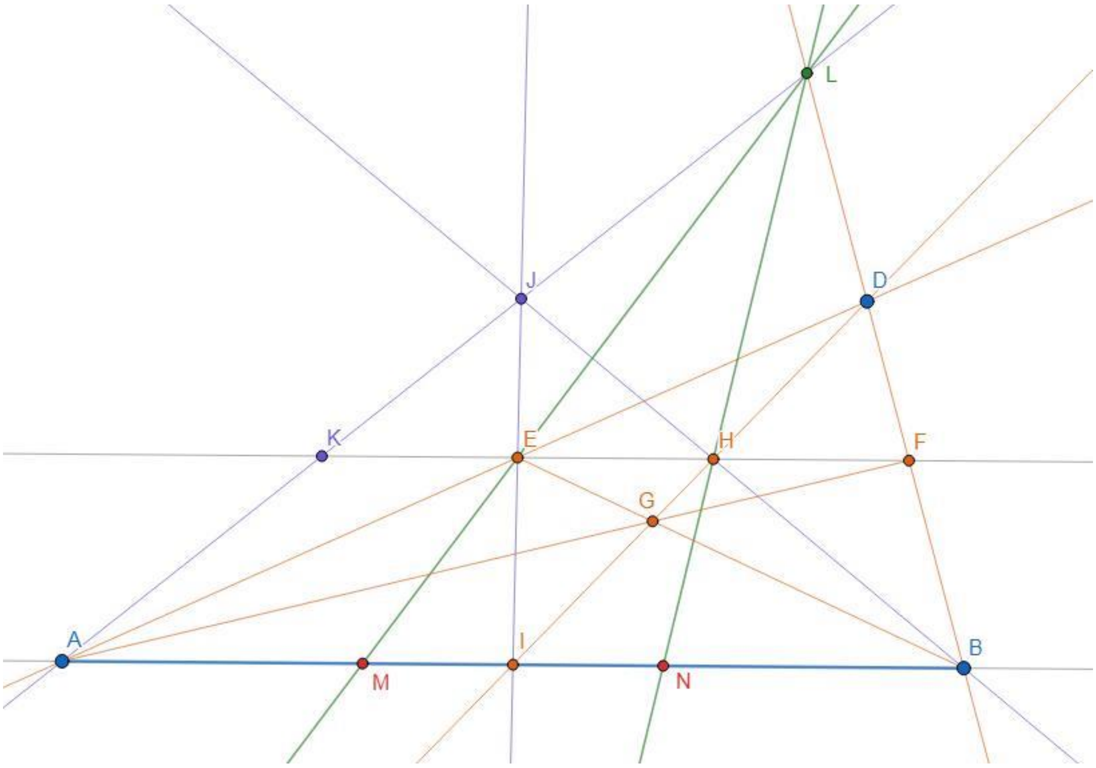

Рисунок 33 – Построение задачи 32

Доказательство:

$EH = HF$ по построению, согласно лемме о трапеции. Аналогично $KE = EH$ по построению. Тогда $KE = EH = HF$. Исходя из подобия треугольников, $AM = MN = NB$.

Исследование:

Задача всегда имеет одно решение.

2.2.3. Формы контроля

Входной контроль.

Первое занятие необходимо посвятить повторению: что такое задачи на построение, как правильно пользоваться циркулем и линейкой при построении, какова схема решения таких задач, какие существуют методы. Вспомнить и построить некоторые элементарные задачи и геометрические места точек.

Также необходимо рассказать обучающимся, что такое нестандартные задачи на построение, чем они отличаются от тех, которые уже решали, что они в себя включают.

Промежуточный контроль.

Первый промежуточный контроль планируется проводить после изучения разделов 1 и 2, которые сами по себе являются небольшими. Раздел 1 больше является вводным, он в основном знакомит обучающихся с различными простейшими нестандартными задачами и методами их решения. Раздел 2 подразумевает уже усвоение обучающимися новых знаний, потому в конце изучения данного раздела предусмотрена некая форма контроля. Так как это факультативный курс, то она не предусматривает под собой контрольную или самостоятельную работу. Выгоднее контроль знаний провести в виде небольшой игры.

Обучающиеся делятся на команды по 3-5 человек (в зависимости от количества посещающих курс). На столах у каждой команды имеется не более трех циркулей и трех линеек (если в команде три человека, то не более одного комплекта), небольшая пачка чистых листов А4, несколько листов прозрачной бумаги (кальки), по карандашу или ручке на каждого участника. Учитель дает каждой команде (рисует заранее на бумаге или кальке, если того требует задача) по 10 задач подобных тем, какие решались в течение предыдущих занятий. Цель команды – решить как можно больше задач за отведенное время (35 минут). По истечении времени все материалы с решениями изымаются учителем. Побеждает та команда, у которой больше правильно решенных задач.

Данная форма контроля хороша тем, что она не только проверяет качество усвоения новых знаний, но и вырабатывает командный дух обучающихся, заставляет каждую команду в рамках ограниченного количества инструментов под рукой выработать победную стратегию по последовательности решения задач. Развивается логическое и творческое мышление, а также повышается общий эмоциональный фон класса.

Следующий промежуточный контроль предполагается после изучения раздела «Задачи на построение одним циркулем». Также проводится в виде игры, которая больше напоминает математическую эстафету.

Обучающиеся делятся поровну на две команды (если число обучающихся нечетное, то в той команде, где человека не хватает, один из учеников будет участвовать в эстафете дважды). Каждой команде выделяется по парте в начале класса и в конце. На партах в начале класса лежат циркуль, пачка листов А4 и условия задач, которые необходимо решить (учитель заранее готовит несложные задачи, подобные тем, какие решались до этого, по количеству участников команд). Как только учителем дается отмашка, что можно приступать к решению задач, от каждой команды к этому столу отправляется лишь один участник, который выбирает себе задачу и решает ее. Как только он ее решил, а учитель подтвердил, что решение верно, участник возвращается к своей команде, а его место занимает следующий и решает одну из оставшихся задач. Таким образом продолжается, пока все участники не решат по одной задаче (у последнего участника команды уже не будет права выбора – ему придется решать лишь ту задачу, которую не решат остальные участники). Победит та команда, которая первая завершит эстафетную цепочку и решит все задачи. За командами (которые практически в полном составе остаются в конце класса) остается право подсказывать решающему, но передавать ему что-либо запрещается.

Таким образом, такая форма контроля требует от каждого обучающегося хотя бы минимума знаний для того, чтобы решить по одной задаче. Учитель (как и все присутствующие) сможет увидеть, кто в какой мере усвоил материал, и это позволит ему скорректировать дальнейшую работу на факультативном курсе.

Итоговый контроль.

Данный вид контроля подразумевает не только контроль знаний обучающихся по последнему разделу, но также и общее подведение итогов факультативного курса.

Подготовка к этому последнему занятию займет у обучающихся две недели. В назначенный срок учитель предлагает ученикам решить самостоятельно задачу: «Дана окружность с центром и угол вне ее. Построить биссектрису данного угла». Обучающиеся делятся на несколько групп по 2-4 человека, в которых они и должны попробовать найти решение и построить его. Основные задачи-«помощники» уже были решены на факультативных занятиях ранее. Обучающимся предстоит самим выяснить, какие из них им пригодятся при решении данной задачи. На это группам отводится две недели, в течение которых они могут подходить к учителю с вопросами в случае появления затруднений. Учитель может лишь направлять, но не подсказывать решение, ведь основная цель данного задания в том, чтобы обучающиеся сами дошли до решения данной конкретной задачи.

На итоговом факультативном занятии каждая из команд приносит и показывает свои результаты (вне зависимости от того, получилось решить задачу или нет). Между теми группами, которые смогли верно решить задачу, устраивается некоторое соревнование: за отведенный час как можно сильнее упростить данное решение, то есть найти решение данной задачи с помощью наименьшего количества построений. Если же есть группы, которые не справились с данной задачей, за этот час учитель помогает им его найти, и с помощью учителя обучающиеся находят решение данной задачи. В конце занятия каждая из команд, которая искала наименьшее число построений данной задачи, оглашает свой результат, после чего демонстрирует его всей аудитории. Выигравшей команде (той, у которой построений меньше, чем у всех остальных) возможны призы на усмотрение учителя [36].

Данный вид проектной деятельности апробирован в рамках НИР по теме «Формирование профессиональных компетенций бакалавров средствами проектной деятельности при обучении профильным математическим дисциплинам», заявка № 21-04-2019 от 19.04.2019 при поддержке ФГБОУ ВО «Шадринский государственный педагогический университет», руководитель гранта Шумакова Е.О.

Такой вид контроля предпочтителен тем, что позволяет обучающимся самим погрузиться в некоторые фрагменты исследовательской деятельности, проявить свои творческие способности, развивает логическое и математическое мышление, а также помогает выявить наиболее заинтересованных в исследованиях личностей.

2.2.4. Общий комментарий к факультативному курсу

Реализация данного факультативного курса может повысить интерес обучающихся к изучению математики (геометрии в частности), мотивацию к изучению чего-то нового вне школьной программы и привести к увеличению общего положительного результата как на занятиях математикой, так и на других школьных предметах. Данный курс синтезирует в себе элементы игровой, познавательной, ценностно-ориентировочной, преобразовательной, учебной, коммуникативной и творческой деятельности, что является важнейшим фактором для развития личности обучающихся.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построения циркулем и линейкой в школьном курсе планиметрии – небольшой, но бесспорно важный, а главное, интересный для обучающихся раздел геометрии. В ходе данного исследования:

1. Изучены материалы, касающиеся того, что же такое задачи на построение, их виды, особенности, основные методы и этапы их решения. Вместе с этим разобраны виды нестандартных задач на построение.

2. Изучены и проанализированы учебно-методические комплексы по геометрии. В рамках данной темы выявлены сходства и различия учебников для общеобразовательных учреждений и учебника с углубленным изучением материала. Выявлено, что в седьмом классе встречается большая часть различных задач (в основном элементарных) на построение, в то время как в восьмом и девятом классах процент таких задач относительно остального материала сравнительно меньше. В учебнике же с углубленным изучением рассматривается более широкий спектр методов и средств: например, инверсия и гомотетия.

3. Выведена технология построения урока по теме «Построения циркулем и линейкой» и разработаны основные методические рекомендации учителю по вопросу мотивации обучающихся к изучению данной темы.

4. На основе проведенных уроков в седьмых классах МАОУ Лицее №67 г. Челябинска выявлены основные проблемы, с которыми сталкиваются обучающиеся при изучении данной темы, и на примерах решения задач разработаны методы и рекомендации по их решению или предупреждению их появления.

5. Разработана программа факультативного курса по геометрии для девятого класса по теме «Нестандартные задачи на построение» и рекомендации к ней.

Таким образом, задачи исследования были выполнены, гипотеза получила свое подтверждение, цель работы достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Александров А.Д. Геометрия: Геометрия. Экспериментальное учебное пособие для учащихся VII класса средних учебных заведений / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – М.: МИРОС, 1994. – 200 с.

2. Александров А.Д. Геометрия: Учеб. пособие для 8 кл. с углубл. изучением математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2002. – 240 с.

3. Александров А.Д. Геометрия: Учеб. пособие для 9 кл. с углубл. изучением математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2004. – 240 с.

4. Алексеева Е. Е. Использование задач на построение для достижения результатов обучения геометрии, соответствующих ФГОС / Е. Е. Алексеева // Конференциум АСОУ: сборник научных трудов и материалов научно-практических конференций. – 2017. – № 1. – С. 1003-1015.

5. Аргунов Б. И. Геометрические построения на плоскости. Пособие для студентов педагогических вузов / Б. И. Аргунов, М. Б. Балк. – М.: Учпедгиз, 1957. – 267 с.

6. Атанасян Л.С. Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.

7. Безумова О. Л. Обучение геометрии с использованием возможностей GEOGEBRA: учебно-методическое пособие / О. Л. Безумова, Р. П. Овчинникова [и др.] // Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова». Архангельск : КИРА. – 2011. – 140 с.

8. Блинков А. Д. Геометрические задачи на построение / А. Д. Блинков, Ю. А. Блинков. — М.: МЦНМО, 2010. — 152 с.

9. Блинков А. Д. Основы решения геометрических задач на построение / А. Д. Блинков // Школьные технологии. – 2014. – № 5. – С. 137-143.

10. Боженкова, Л. И. Методика формирования универсальных учебных действий при обучении геометрии / Л. И. Боженкова. — Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — 207 c. — ISBN 978-5-9963-2739-3. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/37058.html (дата обращения: 22.12.2019). — Режим доступа: для авторизир. пользователей.

11. Винтиш Т. Ю. Геометрические построения на плоскости / Т. Ю. Винтиш, Г. И. Прокопенко. — Ч.: ЧГПУ «Факел», 1996. – 52 с.

12. Воистинова Г. Х. Обучение решению задач на построение с практическим содержанием / Г. Х. Воистинова, М. Ю. Солощенко // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 3-4. – С. 817-821; URL: http://www.fundamental-research.ru/ru/article/view?id=33762 (дата обращения: 09.05.2020).

13. Дворянинов С. В. О невозможности построения центра окружности одной линейкой / С. В. Дворянинов // Математическое образование. – 2019. – № 1(89). – С. 9-12.

14. Дурникина Н. И. Построения одной линейкой / Н. И. Дурникина, Р. С. Тренбач // Поиск (Волгоград). – 2018. – № 1(8). – С. 12-16

15. Егорова К.В. Сравнительный анализ тем «геометрическое построение линейкой и циркулем» в различных школьных учебниках / Егорова К.В., Казаров Б.А. // Актуальные проблемы экономики, социологии и права. – 2019. – № 4. – С. 30-33.

16. Егорова, К.В. Сравнительный анализ тем «Геометрическое построение линейкой и циркулем» в различных школьных учебниках / К. В. Егорова, Б. А. Казаров // Актуальные проблемы экономики, социологии и права. – 2019. – № 4. – С. 30-33.

17. Егупова М.В. Организация проектной деятельности по математике в школе: проблемы и трудности в работе учителя / М.В. Егупова // Вестник Оренбургского государственного педагогического университета. Электронный научный журнал. – 2016. – Т.17. – № 1. – С. 226-235.

18. Есаян А. Р. Преобразования объектов в GEOGEBRA / А. Р. Есаян, Н. Н. Добровольский // Чебышевский сборник. – 2017. – Т. 18. – № 2(62). – С. 129-143.

19. Жафяров А. Ж. Движение и подобие плоскости: учебно-дидактический комплекс. / А. Ж. Жафяров, А. В. Абрамов, А. В. Дмитриева, Л. В. Полюдова, А. И. Хасанов, А. Н. Яруткин // Новосибирский государственный педагогический университет, Научно-исследовательский институт прикладной дидактики СО РАО. Новосибирск: НГПУ. – 2001. – 257 с.

20. Жафяров А. Ж. Преобразования плоскости: учебно-дидактический комплекс. / А. Ж. Жафяров, А. В. Дмитриева, А. И. Хасанов [и др.] // Новосибирск: НГПИ. – 1992. – 144 с.

21. Жижилкин И. Д. Инверсия / И. Д. Жижилкин // М.: Изд-во МЦНМО. – 2009. – 72 с.

22. Изтурганова Д. Б. Методика изучения и решения задач на построение геометрических фигур / Д. Б. Изтурганова, Ж. Байшемиров // Kazakhstan Science Journal. – 2019. – Т. 2. – № 10(11). – С. 26-36.

23. Исаева М.А. О некоторых аспектах решения задач на построение циркулем и линейкой / М. А. Исаева // Психолого-педагогический взгляд на профессионально-ориентированное образование. Сборник статей по итогам Международной научно-практической конференции: в 2 частях. – 2017. – С. 146-148.

24. Канин Е. С. Задачи на построение ограниченным набором классических инструментов / Е. С. Канин // Математический вестник

педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2011. – № 13. – С. 338-343.

25. Карпова А. В. Применение инверсии в задачах на построение одним циркулем / А. В. Карпова, Т. Н. Куренева, Т. С. Трошкина // Физико-математическое образование: школа – ВУЗ Материалы VI Региональной научно-практической конференции. – 2016. – С. 31-34.

26. Малинина И. С. Нестандартные задачи на уроках геометрии и способы их решения / И. С. Малинина // Наука и школа. – 2013. – С. 108-110.

27. Малых А. Е. Из истории конструктивной геометрии и её приложений / А. Е. Малых, Е. М. Маленьких // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2016. – № 18. – С. 38-43.

28. Малых А. Е. Из истории линейки, циркуля и транспортира / Е. Малых, Е. В. Безенкова // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2017. – № 1(36). – С. 47-54.

29. Малых А. Е. Из истории формирования приближенных методов построения правильных многоугольников классическими средствами / А. Е Малых, М. И. Глухова // Современные тенденции физико-математического образования: школа - вуз. – 2015. – С. 46-51.

30. Мерзляк А. Г. Геометрия: 7 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – М. Вентана-Граф, 2015. – 192 с.

31. Мерзляк А. Г. Геометрия: учеб. для 8 кл. общеобразоват. учеб. Заведений с обуч. На рус. яз.: пер. с укр. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Х.: Гимназия, 2016. – 224 с.

32. Мерзляк А. Г. Геометрия: учеб. для 9 кл. общеобразоват. учеб. Заведений с обуч. На рус. яз.: пер. с укр. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Х.: Гимназия, 2017. – 240 с.

33. Мотошев А. Ф. Метод деления произвольного угла на три равные части / А. Ф. Мотошев // Точная наука. – 2018. – № 33. – С. 30-33.

34. Нестерова Н. В. Методика обучения решению задач методами геометрических преобразований плоскости / Н. В. Нестерова, Н. Н. Дербеденева // Теория и практика современной науки. – 2016. – № 8(14). – С. 412-416.

35. Островская А.А Построения циркулем и линейкой / А. А. Островская, А. С. Цыкина, Р. В. Михайлов // Аллея науки. – 2020. – Т. 2. – № 1(40). – С. 55-62.

36. Павлова А. А. Организация учебных проектов по математике в школе / А. А. Павлова // Математическое образование в школе и вузе: опыт, проблемы, перспективы (MATHEDU' 2019) Материалы IX Международной научно-практической конференции, посвященной 215-летию Казанского университета. Ответственный редактор Л.Р. Шакирова. – 2019. – С. 147-152.

37. Погорелов А. В. Геометрия: Учеб. для 7-11 кл. общеобразоват. учреждений / А. В. Погорелов – 5-е изд.– М.: Просвещение, 1995. – 383 с.

38. Техтиеков В. И. Способы нахождения образов фигур при преобразовании плоскости гомотетии / В. И. Техтиеков, Р. Р. Назармухамедов // Информация и образование: границы коммуникаций. – 2019. – № 11(19). – С. 230-233.

39. Филь Е. А. Применение гомотетии при решении олимпиадных задач по планиметрии / Е. А. Филь, Н. Н. Куприенко // Наука. Образование. Молодежь. Материалы XIII Международной научной конференции молодых ученых и аспирантов. – 2016. – С. 337-341.

40. Холявина С. В. Применение метода инверсии в геометрии циркуля / С. В. Холявина // Альманах современной науки и образования. – 2011. – № 3. – С. 92-95.

41. Черепанов К. П. Исследование в задачах на построение циркулем и линейкой / К. П. Черепанов // Юный ученый. – 2020. – № 3 (33). – С. 46-51.

42. Шевкин А. Вокруг задач Наполеона / А. Шевкин // Математика. Методический журнал для учителей математики. – 2017. – № 2(780). – С. 29-31.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Анализ УМК: Л.С. Атанасян

Анализ УМК представлен в Таблице А.1.

Таблица А.1 – Анализ УМК: Л.С. Атанасян

Тема	Задачи, разобранные в учебнике	Кол-во часов
1	*2*	*3*
7 класс		
Раздел: «Треугольники»		
Построение циркулем и линейкой. Примеры задач на построение.	1. На данном луче от его начала отложить отрезок, равный данному 2. Построение угла, равного данному 3. Построение биссектрисы угла 4. Построение перпендикулярных прямых 5. Построение середины отрезка	4
Раздел: «Соотношения между сторонами и углами треугольника»		
Построение треугольника по трем элементам. Задачи на построение.	1. Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними 2. Построение треугольника по трем сторонам 3. Построение прямой, параллельной данной, на данном расстоянии 4. Построение треугольника по стороне, прилежащему к ней углу и высоте, проведенной к этой стороне 5. Построение треугольника по двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне	6
8 класс		
Раздел: «Подобные треугольники»		
Применение подобия к доказательству теорем и решению задач. Задачи на построение	Разделить данный отрезок на два отрезка, пропорциональные данным двум отрезкам	1

Продолжение таблицы А.1

1	*2*	*3*
9 класс		
Раздел: «Длина окружности и площадь круга»		
Правильные многоугольники. Построение правильных многоугольников.	1. Построение правильного шестиугольника, сторона которого равна данному отрезку 2. Дан правильный n-угольник. Построить правильный 2n-угольник	2
Раздел: «Движения»		
Понятие движения. Параллельный перенос и поворот.	1. Задачи на осевую симметрию 2. Задачи на центральную симметрию 3. Задачи на параллельный перенос 4. Задачи на поворот	8

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Анализ УМК: А.В. Погорелов

Анализ УМК представлен в Таблице Б.1.

Таблица Б.1 – Анализ УМК: А.В. Погорелов

Тема	Задачи, разобранные в учебнике	Кол-во часов
1	*2*	*3*
7 класс		
Раздел: «Геометрические построения»		
Геометрические построения	1. Построение треугольника по трем сторонам 2. Построение угла, равного данному 3. Построение биссектрисы угла 4. Деление отрезка пополам 5. Построение перпендикуляра к прямой	10
Геометрическое место точек. Метод геометрических мест	1. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек, есть прямая, перпендикулярная к отрезку, соединяющему эти точки, и проходящая через его середину. 2. Даны три точки. Построить четвертую, которая одинаково удалена от двух данных и находится на данном расстоянии от третьей.	
8 класс		
Раздел: «Четырехугольники»		
Построение четвертого пропорционального отрезка	Даны отрезки a, b, c. Построить отрезок $x = \frac{bc}{a}$	2

Продолжение таблицы Б.1

1	*2*	*3*
Раздел: «Движение»		
Симметрия относительно точки. Симметрия относительно прямой. Поворот. Параллельный перенос.	1. Задачи на осевую симметрию 2. Задачи на центральную симметрию 3. Задачи на параллельный перенос 4. Задачи на поворот	7
9 класс		
Раздел: «Многоугольники»		
Построение некоторых правильных многоугольников	1. Построение правильного вписанного шестиугольника 2. Построение правильного вписанного треугольника 3. Построение правильного вписанного четырехугольника 4. Построение правильного описанного многоугольника 5. Дан правильный n-угольник. Построить правильный 2n-угольник	2

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Анализ УМК: А.Г. Мерзляк

Анализ УМК представлен в Таблице В.1.

Таблица В.1 – Анализ УМК: А.Г. Мерзляк

Тема	Задачи, разобранные в учебнике	Кол-во часов
1	*2*	*3*
7 класс		
Раздел: «Окружность и круг. Геометрические построения»		
Геометрическое место точек. Окружность и круг.	1. Серединный перпендикуляр отрезка является геометрическим местом точек, равноудаленных от концов этого отрезка. 2. Биссектриса угла является геометрическим местом точек, принадлежащих углу и равноудаленных от его сторон. 3. Окружность называется геометрическим местом точек, равноудаленных от заданной точки. 4. Кругом называется геометрическое место точек, расстояние от которых до заданной точки не больше данного положительного числа.	7
Задачи на построение	1. Построение угла, равного данному, одна из сторон которого является данным углом. 2. Построение серединного перпендикуляра данного отрезка. 3. Деление данного отрезка пополам. 4. Даны прямая и не принадлежащая ей точка. Через эту точку проведите прямую, перпендикулярную данной. 5. Даны прямая и принадлежащая ей точка. Через эту точку проведите прямую, перпендикулярную данной. 6. Построение биссектрисы данного угла. 7. Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету. 8. Построение треугольника по стороне и высотам, проведенным к двум другим сторонам. 9. Построение треугольника по углу, высоте и биссектрисе, проведенной из вершины этого угла.	

Продолжение таблицы В.1

1	*2*	*3*
Метод геометрических мест в задачах на построение	1. Построение треугольника по трем данным его сторонам. 2. Построение фигуры, все точки которой принадлежат данному углу, равноудалены от его сторон и находятся на заданном расстоянии a от его вершины. 3. Построение центра окружности радиуса R, проходящей через данную точку M и касающуюся данной прямой a. 4. Построение треугольника по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и радиусу описанной окружности.	
8 класс		
Раздел: «Четырехугольники»		
Четырехугольник и его элементы	Построение четырехугольника по двум соседним сторонам и четырем углам, каждый из которых меньше развернутого.	2
Центральные и вписанные углы	Построение касательной к данной окружности, проходящей через данную точку, лежащую вне окружности.	
Раздел: «Подобие треугольников»		
Теорема Фалеса. Теорема о пропорциональных отрезках.	Деление данного отрезка на три равных отрезка.	1
9 класс		
Раздел: «Правильные многоугольники»		
Правильные многоугольники и их свойства	1. Построение правильного вписанного шестиугольника 2. Построение правильного вписанного треугольника 3. Построение правильного вписанного четырехугольника 4. Дан правильный n-угольник. Построить правильный 2n-угольник 5. Построение правильного вписанного восьмиугольника 6. Построение правильного вписанного двенадцатиугольника	2

Продолжение таблицы В.1

1	*2*	*3*
Раздел: «Геометрические преобразования»		
Движение (перемещение) фигуры. Параллельный перенос.	Даны угол ABC и прямая p, не параллельная ни одной из сторон этого угла. Постройте прямую p_1, параллельную прямой p, так, чтобы стороны угла отсекали на ней отрезок заданной длины a.	8
Центральная симметрия. Поворот.	1. Точка M принадлежит углу ABC. На сторонах BA и BC угла постройте такие точки E и F, чтобы точка M была серединой отрезка EF. 2. Даны прямая a и точка O вне ее. Постройте образ прямой a при повороте вокруг точки O против часовой стрелки на угол 45°. 3. Точка P принадлежит углу ABC, но не принадлежит его сторонам. Постройте равносторонний треугольник, одна вершина которого является точкой P, а две другие принадлежат сторонам BA и BC угла ABC.	
Подобие фигур.	Задачи на гомотетию.	
Применение преобразований фигур при решении задач	На сторонах AB, BC и CA остроугольного треугольника ABC постройте такие точки M, N и P соответственно, чтобы периметр треугольника MNP был наименьшим.	

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Анализ УМК: А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик

Анализ УМК представлен в Таблице Г.1.

Таблица Г.1 – Анализ УМК: А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик

Тема	Задачи, разобранные в учебнике	Кол-во часов
1	*2*	*3*
7 класс		
Раздел: «Начала геометрии»		
Окружность и круг. Сфера и шар	Построение треугольника по трем сторонам	1
Углы	1. Построение угла, равного данному 2. Деление угла пополам 3. Построение прямого угла 4. Построение перпендикуляра в данной точке 5. Деление угла на 2, 4, 8, 16...	2
Раздел: «Треугольники»		
Равенство треугольников	1. Построение равностороннего треугольника 2. Построение треугольника, равного данному, в заданном месте	3
Равнобедренный треугольник	1. Деление отрезка пополам 2. Построение перпендикуляра к прямой через точку, не лежащую на данной прямой	
Сумма углов треугольника	1. Построение треугольника по стороне и двум углам 2. Построение прямоугольника по двум отрезкам	
Раздел: «Параллельность»		
Построение параллельных отрезков и прямых	Построение прямой, параллельной данной	2
Признак и построение прямоугольника	2 способа построения прямоугольника	

Продолжение таблицы Г.1

1	*2*	*3*
	8 класс	
	Раздел: «Многоугольники и окружности»	
Правильные многоугольники	1. Построение правильного шестиугольника 2. Построение правильного треугольника 3. Построение правильного четырехугольника 4. Построение правильного 2n-угольника 5. Построение правильного пятиугольника	1
	9 класс	
	Раздел «Преобразования»	
Виды движений	1. Задачи на параллельный перенос 2. Задачи на осевую симметрию 3. Задачи на поворот 4. Задачи на центральную симметрию	23
Классификация движений	Задачи на скользящее отражение	
Симметрия фигур	Задачи на восстановление фигуры с использованием симметрии	
Подобие	1. Даны три отрезка a, b, c. Построить такой отрезок x, что $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ 2. Задачи на гомотетию	
Инверсия	1. Построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных окружностей. 2. Построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся трех данных окружностей.	

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Построение отрезка равного данному

Итак, пусть надо отложить от точки A отрезок, равный BC. Проведем отрезок AB и построим на нем равносторонний треугольник ABD. Построим окружность G с центром в B и радиусом BC. Продлим прямую DB до пересечения с окружностью G в точке H. Ясно, что $BH = BC$ (т. к. H и C лежат на одной и той же окружности с центром B). Теперь построим окружность K с центром D и радиусом DH. Продлим прямую DA до пересечения с окружностью K в точке L. Ясно, что $DL = DH$ (т. к. L и H лежат на одной и той же окружности с центром D). Поэтому $AL = DL - AD = DH - BD = BH = BC$, и отрезок AL – искомый (рисунок Д.1).

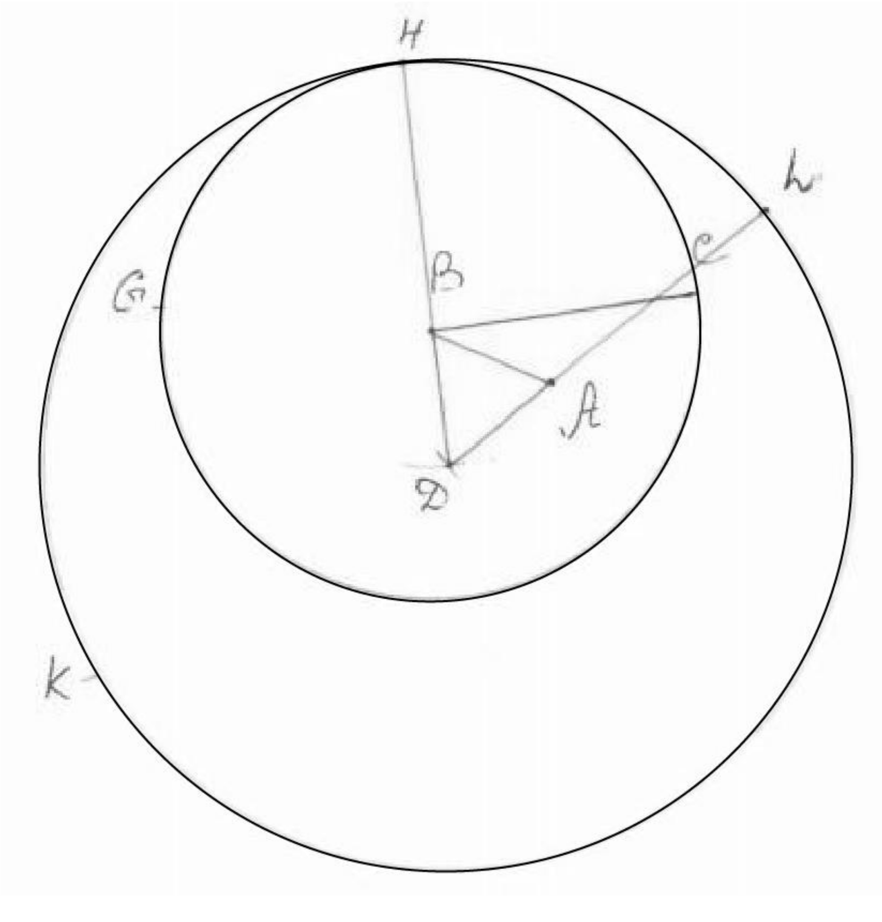

Рисунок Д.1 – Построение отрезка равного данному

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Технологическая карта урока

Учитель: Павлова Анна Андреевна.

Класс: 7 «А», 7 «Б», 7 «В».

Школа: МАОУ «Лицей №67 г. Челябинска».

Дата: 28.11.19, 5.12.19, 12.12.19.

Предмет: геометрия.

Место и роль урока в изучаемой теме: урок повторения и закрепления материала.

Цель урока: организовать деятельность учащихся по повторению и закреплению построений.

Автор УМК Геометрия, 7 класс, А.Г. Мерзляк.

Тема урока: Задачи на построение циркулем и линейкой.

Задачи:

Личностные: умения контролировать процесс и результат учебной математической деятельности; умения ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры.

Регулятивные Универсальные учебные действия (УУД): умения самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в учёбе, развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности; способности планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера

Познавательные УУД: умения выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимания необходимости их проверки

Коммуникативные УУД: развития способности организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками: определять цели, распределять функции и роли участников, взаимодействовать и находить общие способы работы; умения работать в группе: находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учёта интересов; слушать партнёра; формулировать, аргументировать и отстаивать своё мнение.

Формы работы учащихся: фронтальная, групповая, индивидуальная

Ресурсы: доска, мел, бумага А4.

Характеристика этапов урока представлена в Таблице Е.1.

Таблица Е.1 – Характеристика этапов

Этап (учебная ситуация)	Деятельность учителя	Деятельность учащихся
Организационный момент. Цель: мотивировать учащихся к учебной деятельности.	Приветствие, перекличка, организация рабочего места.	Обучающиеся садятся на места, готовятся к уроку, слушают учителя.
Актуализация знаний Цель: повторить основные элементарные задачи на построение	Работа с классом. Повторение и решение основных элементарных задач на построение: 1. Построение биссектрисы угла 2. Построение перпендикуляра к прямой 3. Построение параллельной прямой 4. Построение треугольника по элементам 5. Построение прямоугольного треугольника по элементам	Ответы учащихся. Решение задач у доски и на листах А4.
Этап закрепления изученного материала. Цель: закрепить полученные ранее знания.	Работа с классом. Решение задач на построение: 1. Построить треугольник по сторонам a, b и медиане m_b 2. Построить параллелограмм по двум диагоналям d_1 , d_2 и высоте h	Учащиеся решают задания у доски и на листах А4 с комментариями. Идет взаимообучение.
Этап контроля и оценки. Итог урока (рефлексия деятельности) Цель: зафиксировать новое содержание, изученное на уроке; организовать рефлексию и самооценку учениками	Подведение итогов, благодарность за урок.	Анализируют свою работу на уроке, благодарят за урок

ПРИЛОЖЕНИЕ Ж

Построение задачи в программе GeoGebra

На рисунке Ж.1 изображено построение, как будет у обучающихся в тетрадях.

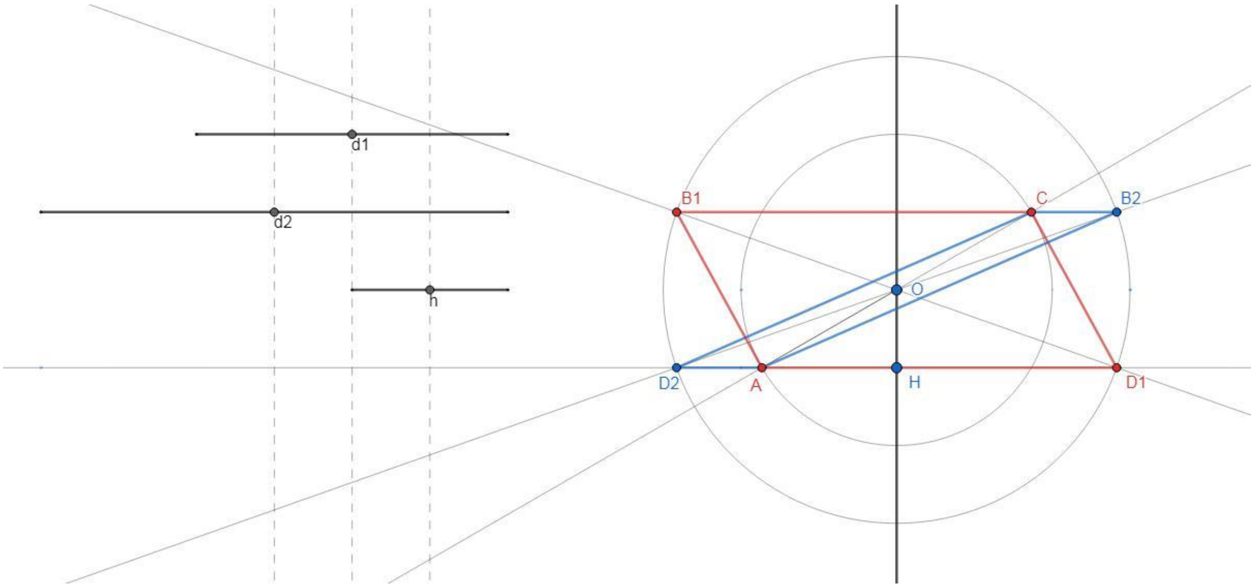

Рисунок Ж.1 – Вариант построения А

На рисунке Ж.2 отмечено, что есть также и равные им решения.

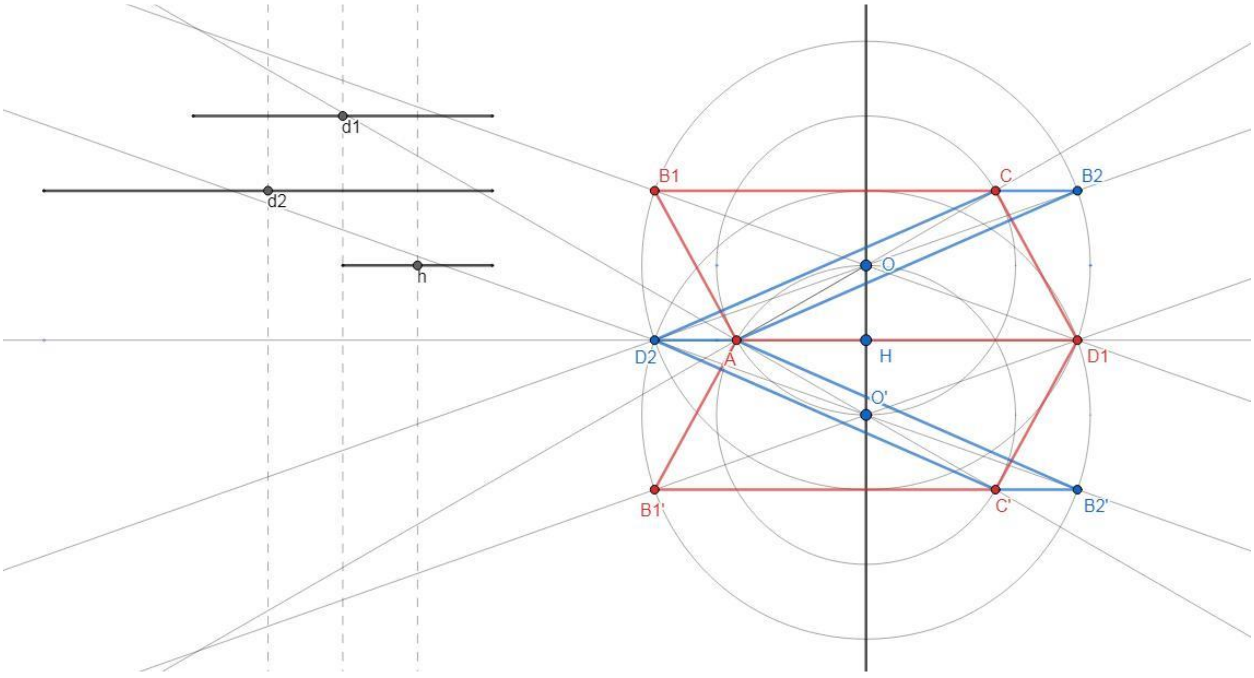

Рисунок Ж.2 – Вариант построения Б

На рисунке Ж.3 построен случай, когда данные диагонали равны.

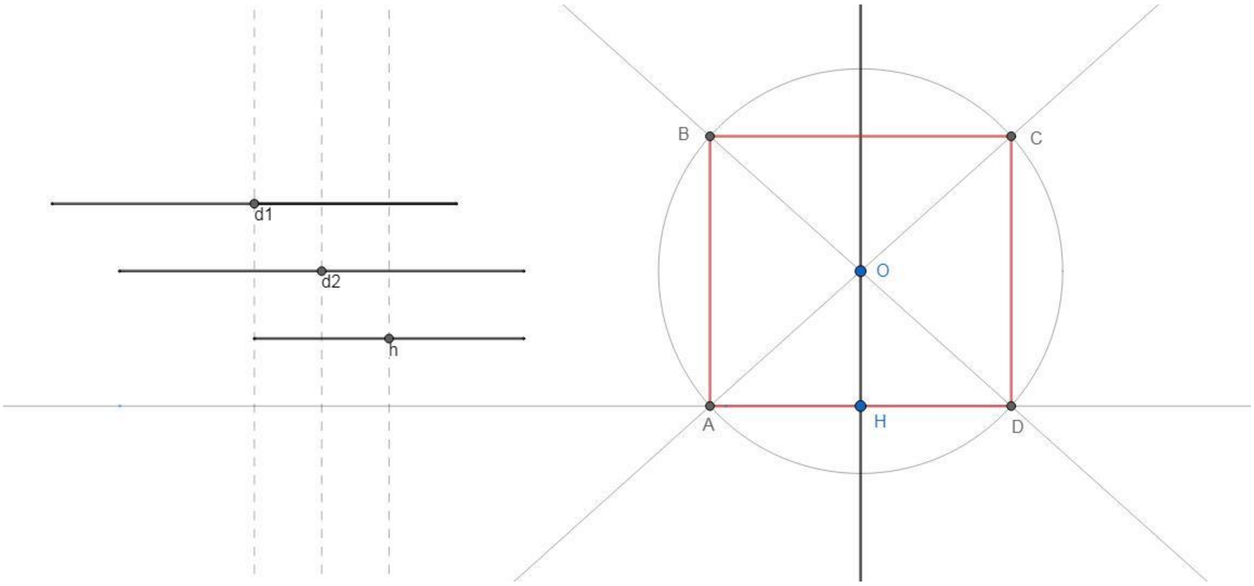

Рисунок Ж.3 – Вариант построения В

На рисунке Ж.4 построена пара равных решений в случае, когда данные диагонали равны.

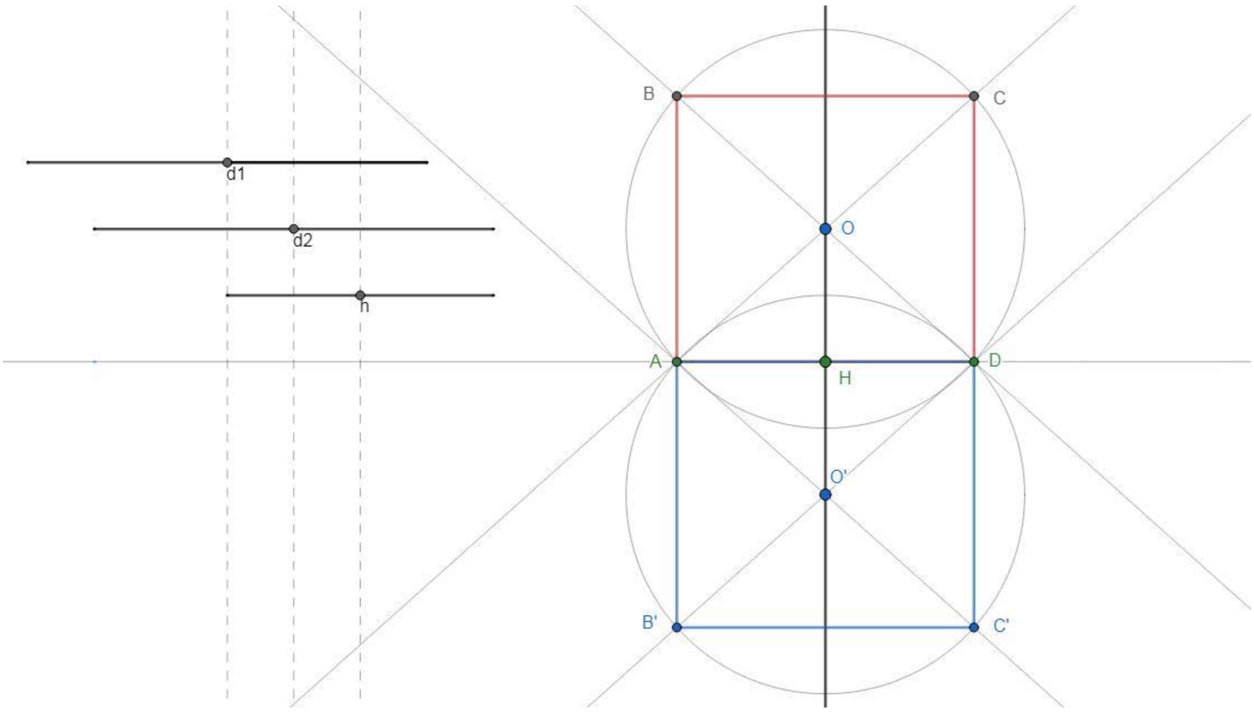

Рисунок Ж.4 – Вариант построения Г

На рисунке Ж.5 построены два решения, которые не строятся в тетрадях для того, чтобы не загромождать построение, и не запутаться в нем.

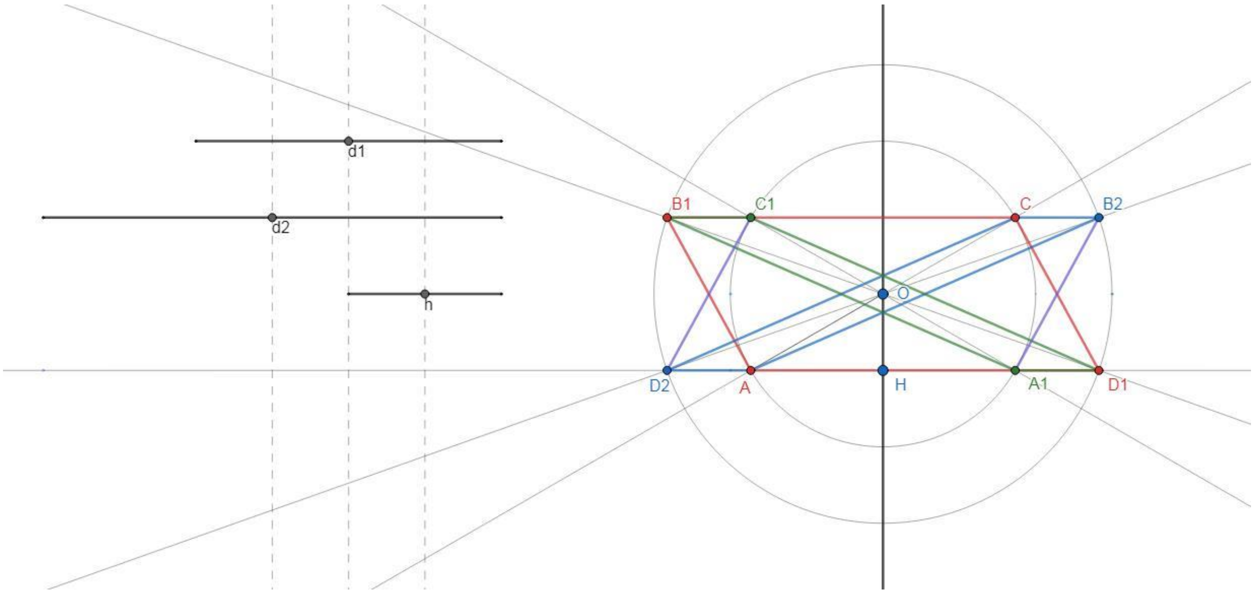

Рисунок Ж.5 – Вариант построения Д

На рисунке Ж.6 изображены все решения данной задачи.

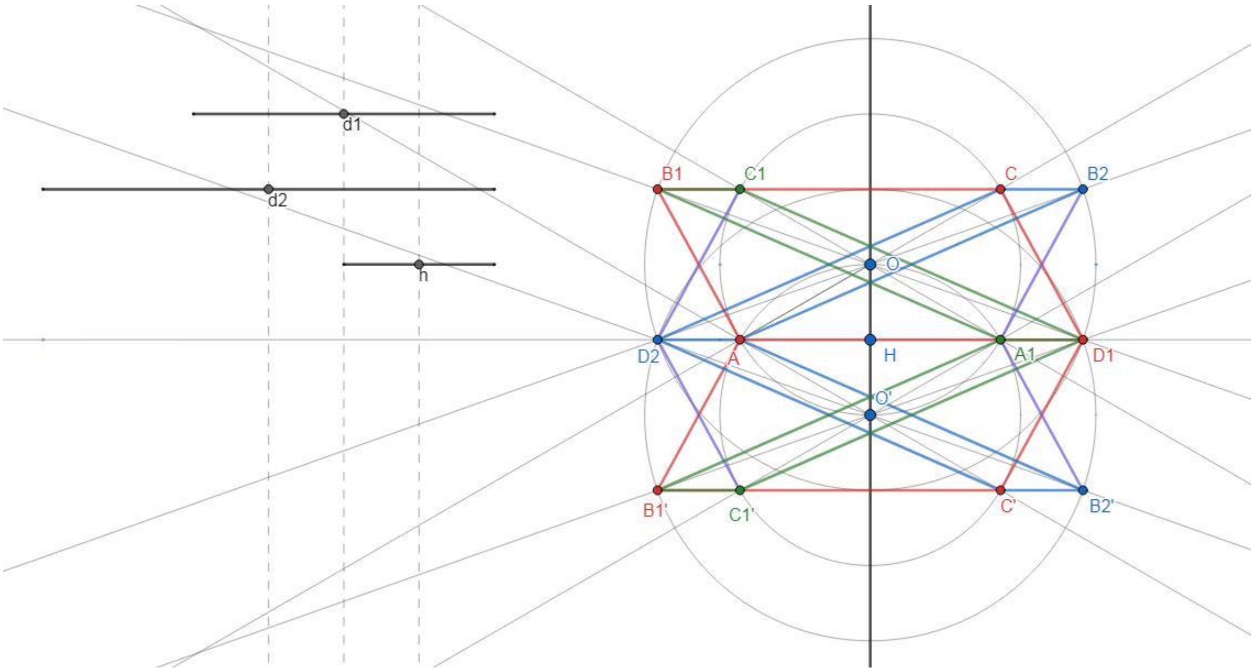

Рисунок Ж.6 – Вариант построения Е

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Список рекомендуемых задач

Необычные задачи на построение.

1. На линейке отмечены три деления: 0, 2 и 5. Как отложить с её помощью отрезок, равный 6?

2. На деревянной линейке отмечены три деления: 0, 7 и 11 сантиметров. Как отложить с её помощью отрезок, равный: а) 8 см; б) 5 см?

3. Дан отрезок, равный 1. Постройте отрезки, равные $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$.

4. На прозрачной бумаге дана дуга некоторой окружности. Постройте без всяких инструментов центр этой окружности.

5. На листе прозрачной бумаги нарисован угол, вершина которого недоступна (находится вне чертежа). Как без всяких инструментов построить биссектрису этого угла?

6. На прозрачной бумаге нарисован треугольник. Без всяких инструментов постройте центр его вписанной окружности.

7. На прозрачной бумаге нарисован треугольник. Без всяких инструментов постройте центр его описанной окружности.

8. Имеется угольник с углом в 40°. Как с его помощью построить угол, равный: а) 80°; б) 160°; в) 20°?

9. Имеется угольник с углом в 70°. Как построить с его помощью угол в 40°?

10. Имеется угольник с углом в 19°. Как построить с его помощью угол в 1°?

11. Дан угол, равный 19°. Разделите его на 19 равных частей с помощью циркуля и линейки.

12. С помощью циркуля и линейки постройте биссектрису данного угла, вершина которого лежит вне чертежа.

Построения с помощью прямого угла

13. С помощью прямого угла проведите через данную точку A прямую, параллельную данной прямой l.

14. Разделить отрезок пополам с помощью угольника. (С помощью угольника можно проводить прямые и восстанавливать перпендикуляры, опускать перпендикуляры нельзя).

15. Дан отрезок AB. С помощью прямого угла постройте:

а) середину отрезка AB;

б) отрезок AC, серединой которого является точка B.

16. Даны отрезок AB, прямая l и точка O на ней. С помощью прямого угла постройте на прямой l такую точку X, что $OX = AB$.

17. Дан острый угол AOB. С помощью прямого угла постройте:

а) угол, вдвое больший угла AOB;

б) угол, вдвое меньший угла AOB.

18. Даны угол AOB и прямая l. С помощью прямого угла проведите прямую l_1 так, что угол между прямыми l и l_1 равен углу AOB.

19. Дан отрезок OA, параллельный прямой l. С помощью прямого угла постройте точки, в которых окружность радиуса OA с центром O пересекает прямую l.

Построение одним циркулем.

20. Разделите окружность с данным центром на шесть равных частей, пользуясь только циркулем.

21. Пользуясь только циркулем, удвойте данный отрезок, то есть постройте для данных точек A и B такую точку C, чтобы точки A, B, C лежали на одной прямой (B между A и C) и $AC = 2AB$.

22. а) Постройте с помощью одного циркуля отрезок, который в два раза длиннее данного отрезка.

б) Постройте с помощью одного циркуля отрезок, который в n раз длиннее данного отрезка.

23. Нарисован угол, и еще имеется только циркуль.

а) какое наименьшее число окружностей надо провести, чтобы наверняка определить, является ли данный угол острым?

б) как определить, равен ли данный угол 31° (разрешается проводить сколько угодно окружностей)?

24. Дан угол величиной 54°. Пользуясь только циркулем, разделите его на три равные части (т.е. найдите такие точки, чтобы лучи, проходящие через вершину данного угла и эти точки, разделили угол три равные части).

25. Постройте с помощью одного циркуля точку, симметричную точке A относительно прямой, проходящей через данные точки B и C.

26. С помощью одного циркуля

а) постройте точки пересечения данной окружности S и прямой, проходящей через данные точки A и B;

б) постройте точку пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2, где A_1, B_1, A_2 и B_2 – данные точки.

27. Пользуясь только циркулем, разделите пополам данный отрезок, то есть постройте для данных точек A и B такую точку C, что точки A, B, C лежат на одной прямой и $AC = BC$.

28. С помощью одного циркуля постройте окружность, в которую переходит данная прямая AB при инверсии относительно данной окружности с данным центром O.

29. С помощью одного циркуля постройте окружность, проходящую через три данные точки.

Построение одной линейкой.

30. Даны две параллельные прямые l и l_1. С помощью одной линейки разделите пополам данный отрезок AB, лежащий на l.

31. Даны две параллельные прямые l и l_1. С помощью одной линейки проведите через данную точку M прямую, параллельную прямым l и l_1.

32. Даны две параллельные прямые и отрезок на одной из них. С помощью одной линейки разделите этот отрезок на три равные части.

33. Даны две параллельные прямые. С помощью одной линейки разделите отрезок, лежащий на одной из них, на n равных частей.

34. Из листа бумаги в клетку вырезали квадрат 2×2. Используя только линейку без делений и не выходя за пределы квадрата, разделите диагональ квадрата на 6 равных частей.

35. Пользуясь только линейкой, разделите сторону квадратного стола на n равных частей. Линии можно проводить только на поверхности стола.

36. Дана окружность с центром и прямая, которая ее пересекает. Построить параллельную прямую.

37. Дана окружность с центром. Построить биссектрису центрального угла.

38. Дана окружность с центром. Построить биссектрису вписанного угла.

39. Дана окружность с центром и прямая, не пересекающая ее. Построить на прямой два любых равных отрезка

40. С помощью одной линейки опустите перпендикуляр из данной точки на прямую, содержащую данный диаметр данной окружности, если точка не лежит ни на окружности, ни на данной прямой.

41. На доске была нарисована окружность с отмеченным центром, вписанный в неё четырёхугольник и окружность, вписанная в него, также с отмеченным центром. Затем стерли четырёхугольник (сохранив одну вершину) и вписанную окружность (сохранив её центр). Восстановите какую-нибудь из стертых вершин четырёхугольника, пользуясь только линейкой и проведя не более шести линий.

42. Дана окружность и две неравные параллельные хорды. Используя только линейку, разделите эти хорды пополам.

43. Даны две параллельные прямые и отрезок, лежащий на одной из них. Удвойте этот отрезок с помощью одной линейки.

44. Даны окружность, ее диаметр AB и точка P. С помощью одной линейки проведите через точку P перпендикуляр к прямой AB.

45. В треугольник ABC вписана окружность и отмечен её центр I и точки касания P, Q, R со сторонами BC, CA, AB соответственно. Одной линейкой постройте точку K, в которой окружность, проходящая через вершины B и C, касается (внутренним образом) вписанной окружности.

46. Докажите, что если на плоскости даны какая-нибудь окружность S и ее центр O, то с помощью одной линейки можно:

а) из любой точки провести прямую, параллельную данной прямой, и опустить на данную прямую перпендикуляр;

б) на данной прямой от данной точки отложить отрезок, равный данному отрезку;

в) построить отрезок длиной $\frac{ab}{c}$, где a, b, c — длины данных отрезков;

г) построить точки пересечения данной прямой l с окружностью, центр которой — данная точка A, а радиус равен длине данного отрезка;

д) построить точки пересечения двух окружностей, центры которых — данные точки, а радиусы — данные отрезки.

47. На плоскости начерчен треугольник и в нём отмечены две точки. Известно, что какой-то из углов треугольника равен 58°, какой-то из остальных – 59°, какая-то из отмеченных точек является центром вписанной окружности, а другая – центром описанной. Используя только линейку без делений, определите, где какой угол и где какая точка.

48. На плоскости нарисован правильный шестиугольник, длина стороны которого равна 1. При помощи одной только линейки постройте отрезок, длина которого равна $\sqrt{7}$.

49. На плоскости даны неравнобедренный треугольник, его описанная окружность, и отмечен центр его вписанной окружности. Пользуясь только линейкой без делений и проведя не больше семи линий, постройте диаметр описанной окружности.

50. На каждой стороне треугольника ABC отмечены две различные точки. Известно, что это основания высот и биссектрис.

а) пользуясь только линейкой без делений, определите, где высоты, а где биссектрисы;

б) решите пункт а), проведя только три прямых.

51. На плоскости нарисованы неравнобедренный треугольник ABC и вписанная в него окружность ω. Пользуясь только линейкой и проведя не более восьми линий, постройте на ω такие точки $A', B', C',$ что лучи $B'C', C'A'$, $A'B'$ проходят через A, B, C соответственно.

52. Дан прямоугольный треугольник с гипотенузой AC, проведена биссектриса треугольника BD; отмечены середины E и F дуг BD окружностей, описанных около треугольников ADB и CDB соответственно (сами окружности не проведены). Постройте одной линейкой центры окружностей.