Ю.В. Корчемкина, К.А. Звягин

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАЧАЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ:

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Челябинск

2023

УДК 51(07)(021)
ББК 74.262.21я73:22.1я73
К 70

Рецензенты:

Фортыгина С.Н., канд. пед. наук, доцент

Овсяницкая Л.Ю., канд. техн. наук, доцент

Корчемкина Ю. В. Теоретические основы начального математического образования: конспект лекций и рабочая тетрадь: учебное пособие / Ю. В. Корчемкина, К. А. Звягин. – Челябинск : Изд-во ЗАО «Библиотека А. Миллера», 2023. – 90 с.

ISBN 978-5-93162-391-7

Учебное пособие предназначено для студентов образовательных организаций высшего образования, обучающихся по направлению подготовки 44.03.02 Психолого-педагогическое образование, профиль «Психология и педагогика начального образования», 44.03.01 Педагогическое образование, профиль «Начальное образование», а также 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) с первым профилем «Начальное образование».

Учебное пособие ориентирует бакалавров на овладение содержанием программы разделов «Множества и операции над ними», «Подходы к построению системы натуральных чисел», «Величины» математических дисциплин, входящих в состав основной профессиональной образовательной программы бакалавриата.

Пособие предназначено для подготовки бакалавров области начального образования. Учебное пособие соответствует требованиям ФГОС ВО.

ISBN 978-5-93162-391-7

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕМА 1. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Конспект лекций

Те или иные группы объектов, рассматриваемые как единое целое: геометрические фигуры, действительные числа, четные числа и т.д. – называют *множествами*.

Понятие множества является одним из основных понятий математики и поэтому не определяется через другие.

Объекты, из которых образовано множество, называют его элементами.

Обозначения:

Множества: прописные буквы латинского алфавита (A, B, C, D, …, Z).

Множество, не содержащее ни одного объекта, называют пустым и обозначают знаком $\emptyset$.

Элементы множества: строчные буквы латинского алфавита ($a, b, c, \ldots, z$).

Объект a принадлежит множеству A: $a \in A$.

Объект a не принадлежит множеству A: $a \notin A$.

Числовые множества:

N – множество натуральных чисел;

Z_0 – множество целых неотрицательных чисел (Z_0= N + нуль);

Z – множество целых чисел (Z = Z_0 + целые отрицательные числа);

Q – множество рациональных чисел (Q = Z + дробные числа);

R – множество действительных чисел (R= Q+ иррациональные числа).

Множества бывают конечными и бесконечными.

Считают, что множество определяется своими элементами, т. е. множество задано, если о любом объекте можно сказать, принадлежит о этому множеству или не принадлежит.

Конечное множество можно задать, перечислив все его элементы. Если множество бесконечно, то его элементы перечислить нельзя.

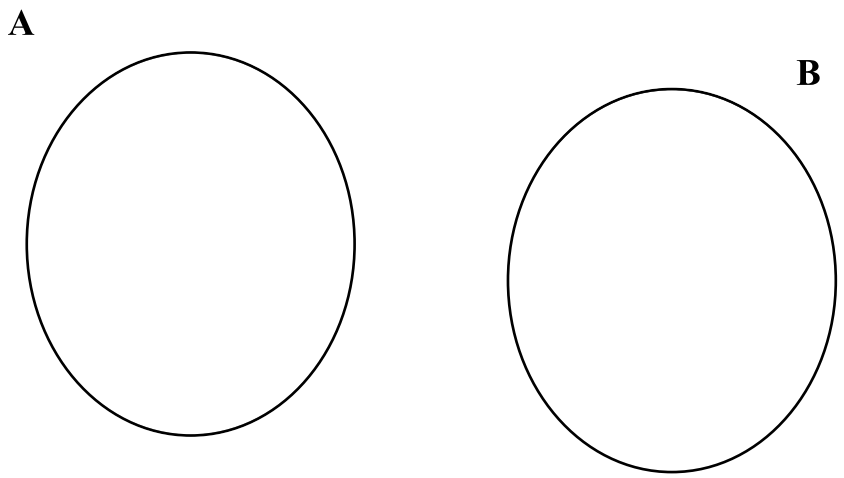
Характеристическое свойство – это такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит.

Чтобы задать некоторое множество, достаточно либо перечислить все его элементы, либо указать характеристическое свойство его элементов.

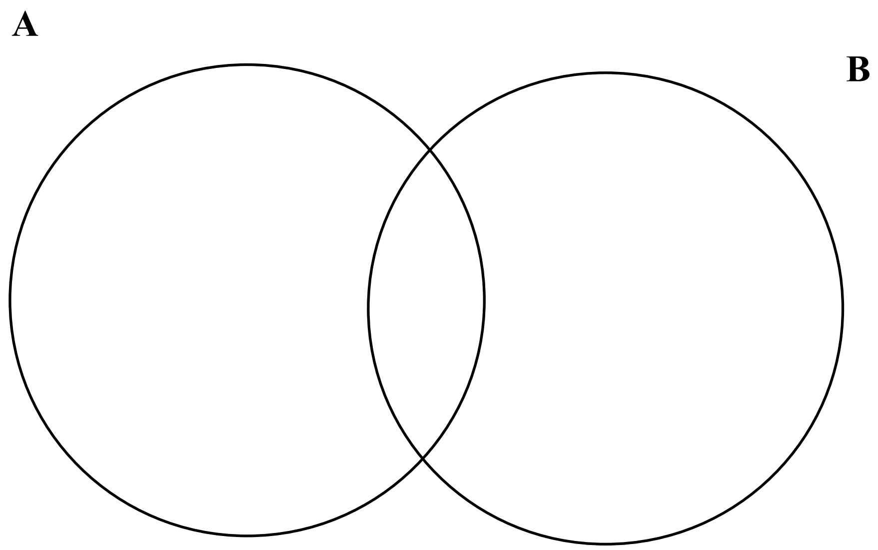
Отношения между множествами и их изображение с помощью кругов Эйлера:

1. Непересекающиеся множества.

Если множества не имеют общих элементов, то есть элементов, принадлежащих и тому, и другому множеству, то говорят, что они не пересекаются.

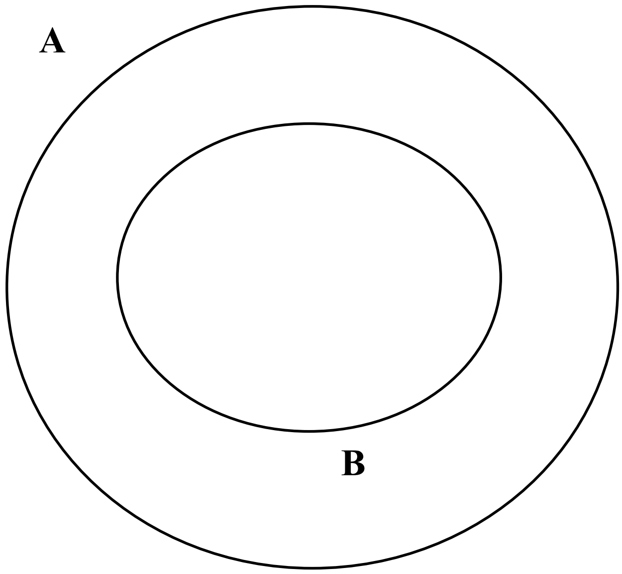


2. Пересекающиеся множества.



3. Множество В является подмножеством А ($B \subset A$).

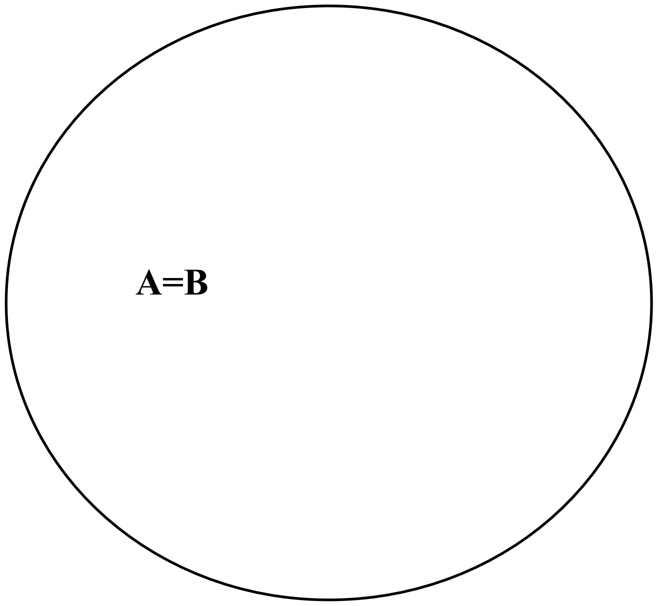
Множество В называется подмножеством множества А, если каждый элемент множества В является также элементом множества А.



Считают, что пустое множество является подмножеством любого множества, т. е. $\emptyset \subset A$, и что любое множество является подмножеством самого себя, т.е. $A \subset A$. Поэтому среди всех подмножеств заданного множества А должно быть обязательно пустое множество и само множество А.

4. Множество А=В.

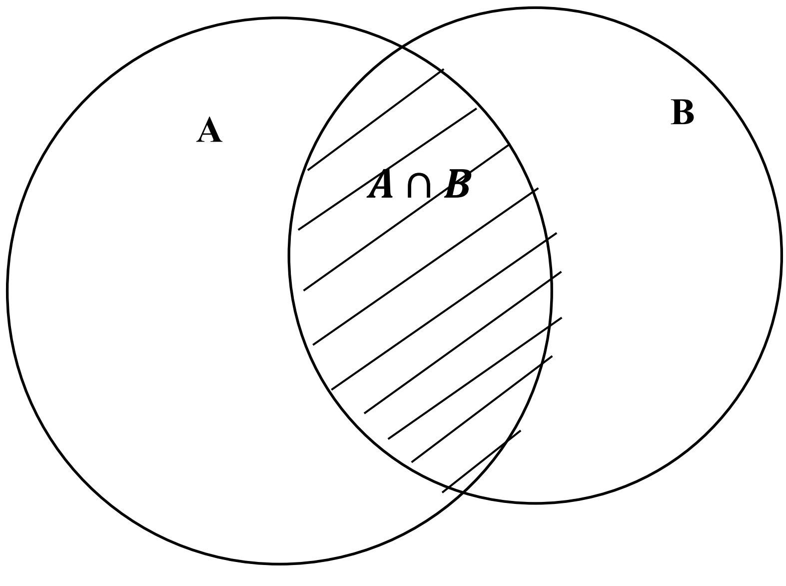
Множества А и В называются равными, если $A \subset B$ и $B \subset A$



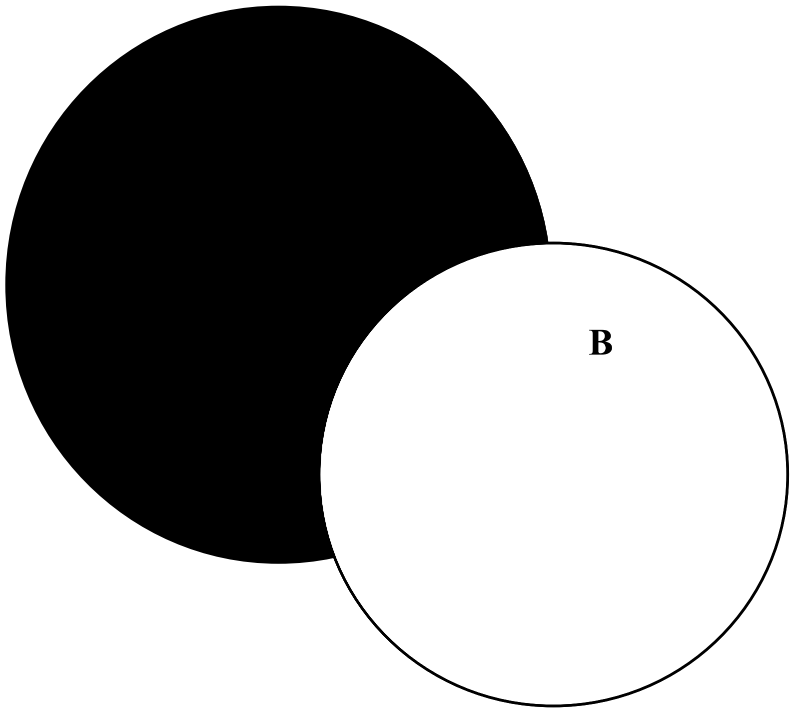
Операции над множествами

Из элементов двух и более множеств можно образовать новые множества. Эти новые множества являются результатом операций над множествами.

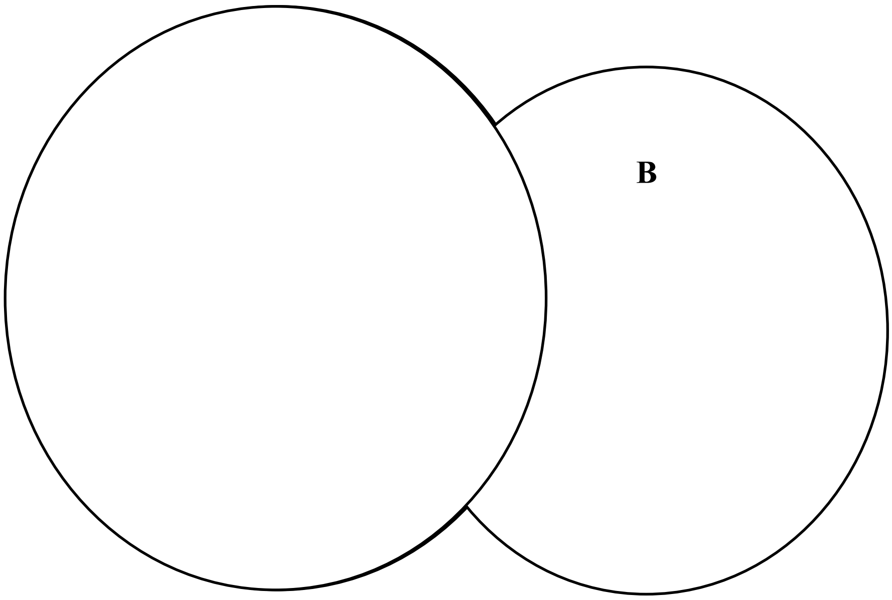
1. Пересечением множеств A и B $(A \cap B)$ называется множество, содержащее только такие элементы, которые принадлежат множеству А и множеству В.



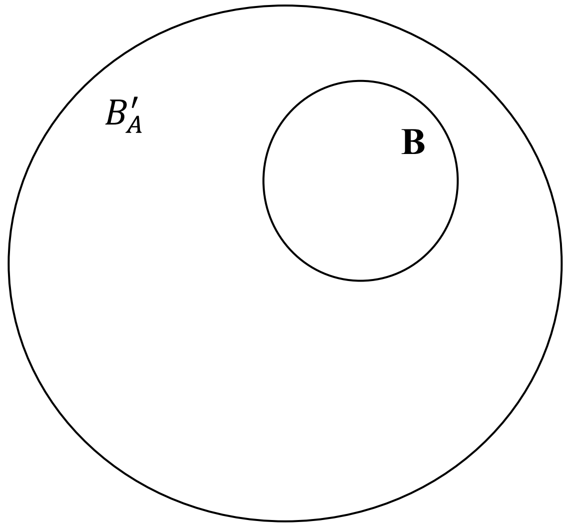
2. Объединением множеств А и В ($A \cup B$) называется множество, содержащее такие элементы, которые принадлежат множеству А или множеству В.



3. Разностью множеств А и В ($A \setminus B$) называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству А и не принадлежат множеству В.



4. Дополнением множества В до множества А (B'_A) называется множество, содержащее только те элементы множества А, которые не принадлежат множеству В.



Классификация – это действие распределения объектов по классам на основании сходств объектов внутри класса и их отличия от объектов других классов.

Считают, что множество Х разбито на классы $X_1, X_2, \ldots, X_n$, если:

– подмножества $X_1, X_2, \ldots, X_n$ попарно не пересекаются;

– объединение подмножеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ совпадает с множеством Х.

Если не выполнено хотя бы одно из этих условий, классификацию считают неправильной.

Если на множестве Х задано одно свойство, то это множество разбивается на два класса. Первый – класс объектов, обладающих этим свойством, второй – дополнение первого класса до множества Х. во втором классе содержатся такие объекты множества Х, которые заданным свойством не обладают. Такую классификацию называют *дихотомической* [7].

Декартово произведение множеств

Упорядоченную пару, образованную из элементов a и b, принято записывать, используя круглые скобки: (a; b). Элемент a называют *первой координатой* (компонентой) пары, а элемент b – *второй координатой* (компонентой) пары.

Упорядоченные пары можно образовывать как из элементов одного множества, так и двух множеств.

Декартовым произведением множеств A и B $(A \times B)$ называется множество всех пар, первая компонента которых принадлежит множеству A, а вторая компонента принадлежит множеству B.

Способы представления декартова произведения двух множеств:

– перечисление элементов;
– таблица;
– граф;
– график [4].

Упорядоченные наборы часто называют *кортежами* и различают по длине. *Длина кортежа* – это число элементов, из которых он состоит.

Декартовым произведением множеств A_1, A_2, … , A_n называется множество всех кортежей длины n, первая компонента которых принадлежит множеству A_1, вторая – множеству A_2, …, n-я – множеству A_n [7].

Рабочая тетрадь

1. Множества заданы посредством указания его характеристического свойства. Можно ли задать эти множества посредством перечисления элементов? Если возможно, сделайте это [3].

а. Множество простых однозначных чисел.

б. Множество четных чисел, меньших 25.

в. Множество двузначных чисел, кратных 9.

2. Укажите характеристическое свойство множества:

а. $A = \{100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900\}$.

б. $B = \{a, e, ё, и, о, у, ы, э, ю, я\}$.

в. $\mathrm{C} = \{80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89\}$.

3. Запишите в символической форме множества A и B, если:

а. A – множество натуральных чисел, больших 5.

б. B – множество натуральных чисел, больших 5 и не больших 7.

в. A – множество натуральных чисел, меньших 7.

4. Множества A и B заданы посредством перечисления элементов. Найдите пересечение множеств.

а. $A = \{\text{а}, \text{б}, \text{к}, \text{п}, \text{я}\}; B = \{\text{к}, \text{м}, \text{н}, \text{я}\}$.

б. $A = \{ 33, 55, 77, 99\}; B = \{11, 22, 33, 77\}$.

в. $A = \{bb, bc, bd, cc, cd, dd\}; B = \{aa, ab, bb, bc, cc, cd\}$.

5. Множества А и В заданы посредством указания характеристического свойства. Являются ли множества А и В пересекающимися?

а. A – множество простых однозначных чисел, В – множество четных однозначных чисел.

б. A – множество ромбов, В – множество прямоугольников.

6. Изобразите с помощью кругов Эйлера следующие множества [3]:

I. Множества
   1. Жилые дома.
   2. Одноэтажные дома.

II. Множества
   1. Числа, кратные 7.
   2. Числа, кратные 11.

III. Множества:

1. Птицы.
2. Животные.

IV. Множества:

1. Хоккеисты.
2. Школьники.

V. Множества:

1. $A = \{15, 26, 27, 38, 49, 50\}$.
2. $B = \{20, 24, 26, 38, 50, 52, 64\}$.

VI. Множества:

1. Деревья.
2. Березы.

VII. Множества:

1. Книги.
2. Книги в жанре фэнтези.

VIII. Множества:

1. Четные двузначные числа.
2. Четные числа, меньшие 120.

IX. Множества:

1. $A = \{1, 5, 9, 13, 17\}$.
2. $B = \{4, 10, 16\}$.

X. Множества:

1. Прямоугольные треугольники.
2. Равнобедренные треугольники.

XI. Множества:

1. $A = \{5, 7, 9, 11, 13, 15, 110\}$.

2. В – множество трехзначных чисел.

XII. Множества:

1. Хищные животные.

2. Полосатые животные.

XIII. Множества:

1. $A = \{r, s, t, u, v\}$.

2. $B = \{r, v, x, y\}$.

7. Установите, в каких отношениях находятся множества А и В и изобразите эти множества с помощью кругов Эйлера, если:

а) $A = \{x | x \in N, x < 3\}$, $B = \{x | x \in N, 2 \leq x \leq 5\}$;

б) $A = \{x | x \in N, x < 7\}$, $B = \{x | x \in N, 2 \leq x \leq 5\}$;

в) $A = \{x | x \in N, x < 5\}$, $B = \{x | x \in N, x \leq 7\}$;

г) $A = \{x | x \in N, x < 3\}$, $B = \{x | x \in N, x \geq 4\}$.

8. Даны множества A, B и C. Изобразите отношения между множествами с помощью кругов Эйлера [3].

а) $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{c, d, e, f\}$, $C = \{c, d\}$;

б) $A = \{x, y, z, a, b, c\}$, $B = \{a, b, e, f\}$, $C = \{x, y, p, q\}$;

в) $A = \{m, n, o, p, q, r\}$, $B = \{o, p, s, t\}$, $C = \{s, t\}$;

г) $= \{x, y, z, a, b, c\}$, $B = \{a, b, e, f\}$, $C = \{x, y, s, t\}$.

ТЕМА 2. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ СМЫСЛ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА, НУЛЯ И ОПЕРАЦИЙ НАД ЧИСЛАМИ

Конспект лекций

Множество A называют *конечным*, если оно равномощно некоторому отрезку $N(a)$ натурального ряда

Установление взаимно-однозначного соответствия между непустым конечным множеством A и отрезком натурального ряда $N(a)$ называется *счетом* элементов множества A.

Теорема 1. Всякое непустое конечное множество равномощно одному и только одному отрезку натурального ряда.

Если непустое конечное множество A равномощно отрезку $N(a)$, то натуральное число a называют *числом элементов множества* A и пишут $n(A) = a$.

Натуральное число –

– число элементов в множестве A, получаемое при счёте;

– общее свойство класса конечных равномощных множеств.

Число «нуль» с теоретико-множественных позиций рассматривается как число элементов пустого множества: $0 = n(\emptyset)$.

Если воспользоваться терминологией, принятой в школьном курсе математики, то последнее определение отношения «меньше» можно сформулировать так: число a меньше числа b тогда и только тогда, когда при счете число a называют раньше числа b.

Таким образом, с теоретико-множественных позиций отношение «меньше» приобретает смысл: если $a = n(A)$, $b = n(B)$

и множество А равномощно собственному подмножеству множества В, то а $< b$.

Теорема 2. Пусть А и В – конечные множества, не имеющие общих элементов. Тогда их объединение тоже конечно, причем $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Из рассмотренной теоремы следует, что с теоретико-множественных позиций *сумма* натуральных чисел a и b представляет собой число элементов в объединении конечных непересекающихся множеств А и В, таких что $a = n(A)$, $b = n(B)$:

$$a + b = n(A) + n(B) = n(A \cup B), \text{если } A \cap B = \emptyset.$$

Взаимосвязь сложения целых неотрицательных чисел и объединения множеств позволяет также обосновывать выбор действий при решении текстовых задач определенного вида [7].

Задача 1. Катя нашла 3 гриба, а Маша 4. Сколько грибов нашли девочки?

Пояснение: В задаче рассматриваются 3 множества: А – грибов Кати, В – грибов Маши и их объединение, оно находится сложением.

Так как n(A)=3, n(B)=4 и $A \cap B = \emptyset$, то $n(A \cup B) = 3 + 4$.

Сумма 3+4 – математическая модель данной задачи. Вычислив значение этого выражения, получим ответ на вопрос задачи: 3+4=7. Следовательно, девочки нашли 7 грибов.

Теорема 3. Пусть А – конечное множество и В – его собственное подмножество. Тогда множество А\В тоже конечно, причем выполняется равенство n(А\В) = n(А) – n(В).

Из рассмотренной теоремы следует, что с теоретико-множественных позиций *разность* натуральных чисел a и b представляет собой число элементов в дополнении подмножества B до множества A, если a=n(A), b=n(B) и B ⊂ A

$$a - b = n(A) - n(B) = n(A \backslash B), \text{если } B \subset A, B \neq A, B \neq \emptyset.$$

Задача 2. У школы росло 7 деревьев, из них 4 березы, остальные липы. Сколько лип росло у школы?

В задаче рассматривается три множества: множество A всех деревьев; множество B берез, оно является подмножеством множества A; и множество C лип – оно представляет собой дополнение множества B до A. В задаче требуется найти число элементов в этом дополнении.

Так как по условию n(A) = 7, n(B) = 4 и B ⊂ A, то $n(\mathrm{C}) = n(\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}) = n(\mathrm{A}) - n(\mathrm{B}) = 7 - 4$.

Разность $7 - 4$ – это математическая модель данной задачи. Вычислив значение этого выражения, получим ответ на вопрос задачи: $7 - 4 = 3$. Следовательно, у школы росло 3 липы.

С теоретико-множественной позиции можно рассмотреть и смысл отношений «больше на» и «меньше на».

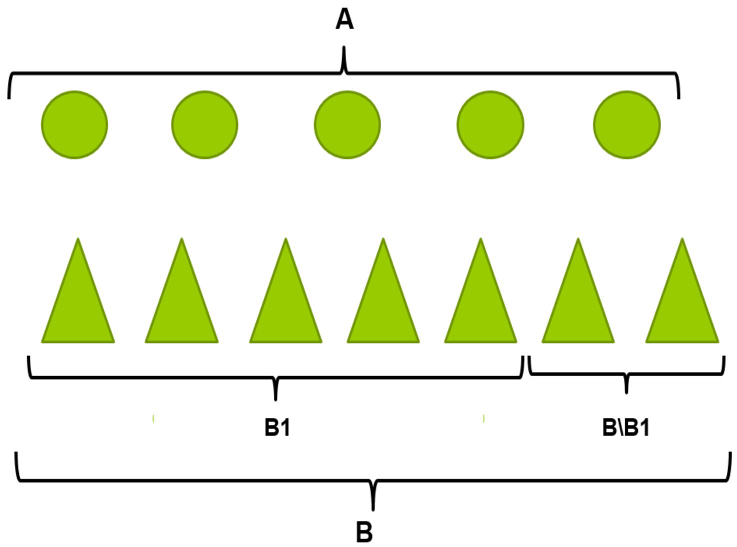
С теоретико-множественной точки зрения «a меньше b на c» или «b больше a на c» означает, что если a=n(A), b=n(B), то в множестве B содержится столько элементов, сколько их в A, и еще C элементов. Следовательно, чтобы узнать на сколько одно число меньше или больше другого, надо из большего числа вычесть меньшее.

Взаимосвязь действий над множествами с действиями над числами, теоретико-множественный смысл отношений «меньше на» и «больше на» позволяют обосновывать выбор действий при решении задач с этими отношениями [7].

Задача 3. На столе 5 чашек, а ложек на 2 больше. Сколько на столе ложек?

Множество А – чашки. Множество В – ложки. В первом множестве 5 элементов, т.е. n(А)=5. Элементы во втором множестве найти по условию, что в нем на 2 элемента больше, чем в первом.

Отношение «больше на 2» означает, что в множестве В элементов столько же, сколько их в А, и еще 2 элемента.



Это означает, что ложек на столе столько же, сколько и чашек, и еще 2. Используя правило подсчета элементов в объединении непересекающихся множеств, получаем:

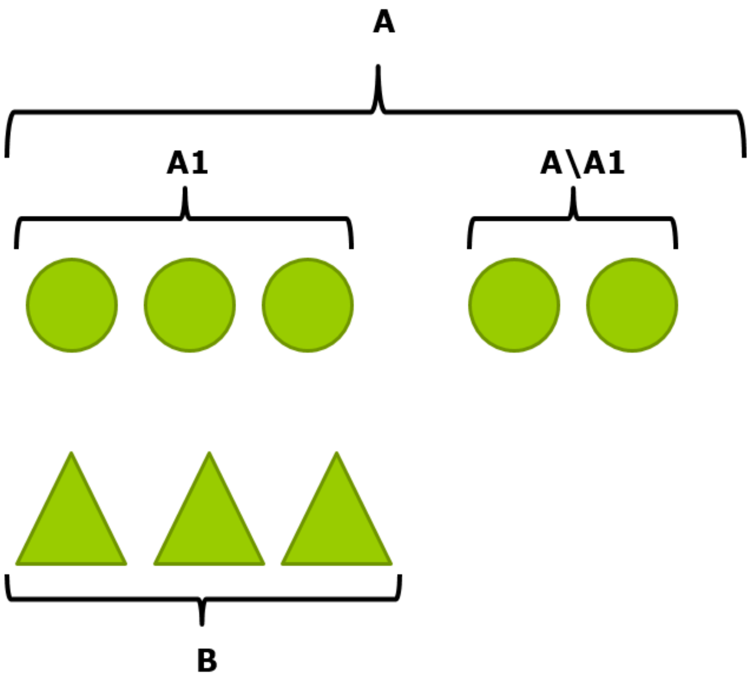
$$n(\text{В}) = n(\text{В}_1) + n(\text{В} \setminus \text{В}_1) = 5 + 2.$$

Так как 5 + 2 = 7, то получим ответ на вопрос задачи: на столе 7 ложек.

Задача 4. На столе 5 чашек, а ложек на 2 меньше. Сколько ложек на столе?

Множество чашек – А. Множество ложек – В. В первом множестве 5 элементов, т.е n(A) = 5. Во втором множестве на 2 элемента меньше.

Отношение «меньше на» означает, что в множестве В элементов столько же, сколько их в А, но без двух.



Применимо к тем множествам, о которых идет речь в задаче, это означает, что ложек на столе столько же, сколько чашек, но без двух.

Таким образом, $n(\text{B}) = n(\text{A1}) = n(\text{A}) - n(\text{A} \setminus \text{A1}) = 5 - 2.$

Так как $5 - 2 = 3$, то получим ответ на вопрос задачи: на столе 3 ложки.

Теорема 4. Если b > 1, то произведение чисел a и b равно сумме b слагаемых, каждое из которых равно a.

Таким образом, получаем следующее определение умножения целых неотрицательных чисел.

Если a, b – целые неотрицательные числа, то *произведением* $a \cdot b$ называется число, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $a \cdot b = \underbrace{a + a + \cdots + a + a}_{b \text{ слагаемых}}$, если b > 1;

2) $a \cdot b =$ a, если b = 1;

3) $a \cdot b = 0$, если b = 0.

Таким образом, с теоретико-множественных позиций $a \cdot b$ (b > 1) представляет собой число элементов в объединении b множеств, каждое из которых содержит по a элементов и никакие два из них не пересекаются.

$a \cdot b = n\,(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_b)$, если $n(A_1) = n(A_2) = \ldots = n(A_b)$ = a и A_1, A_2, ..., A_b попарно не пересекаются.

Задача 5. На одно пальто пришивают 4 пуговицы. Сколько пуговиц нужно пришить на 3 пальто?

В задаче речь идет о трех множествах, в каждом из которых 4 элемента. Требуется узнать число элементов в объединении этих трех множеств. Если $n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = 4$, то $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n\,(A_2) + n(A_4) = 4 + 4 + 4 = 4 \cdot 3$. Произведение $4 \cdot 3$ является математической моделью данной задачи. Так как $4 \cdot 3 = 12$, то получаем ответ на вопрос: на 3 пальто надо пришить 12 пуговиц.

Теорема 5. Пусть A и B – конечные множества. Тогда их декартово произведение также является конечным множеством, причем выполняется равенство:

$$n(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \ = \ n(\mathrm{A}) \cdot n(\mathrm{B}).$$

Из рассмотренной теоремы следует, что теоретико-множественной точки зрения произведение $\mathrm{a} \cdot b$ целых неотрицательных чисел есть число элементов в декартовом произведении множеств A и B, таких, что n(A) = a, n(B) = b.

$$\mathrm{a} \cdot b \ = \ n(\mathrm{A}) \cdot n(\mathrm{B}) = n(\mathrm{A} \times \mathrm{B}).$$

С теоретико-множественной точки зрения *деление* чисел оказывается связанным с разбиением конечного множества на равночисленные попарно непересекающиеся подмножества и с его помощью решаются две задачи: отыскание числа элементов в каждом подмножестве разбиения (*деление на равные части*) и отыскание числа таких подмножеств (*деление по содержанию*) [7].

Таким образом, если a = n(A) и множество A разбито на попарно непересекающиеся равночисленные подмножества и если:

b – число элементов в каждом подмножестве, то частное $\mathrm{a}\colon b$ – это число таких подмножеств;

b – число подмножеств, то частное $\mathrm{a}\colon b$ – это число элементов в каждом подмножестве.

Задача 6. 12 карандашей разложили в 3 коробки поровну. Сколько карандашей в каждой коробке?»

В задаче рассматривается множество, в котором 12 элементов. Это множество разбивается на 3 равночисленных подмножества. Требуется узнать число элементов в каждом таком подмножестве. Это число, как установлено выше, можно найти при помощи деления – 12:3. Вычислив значение этого выражения, получаем ответ на вопрос задачи - в каждой коробке по 4 карандаша.

Задача 7. В коробке 12 карандашей, их надо разложить в коробки, по 3 карандаша в каждую. Сколько коробок понадобится?

Множество из 12 элементов разбивается на подмножества, в каждом из которых по 3 элемента. Требуется узнать число таких подмножеств. Его можно найти при помощи деления – 12:3. Вычислив значение этого выражения, получаем ответ на вопрос задачи – понадобится 4 коробки.

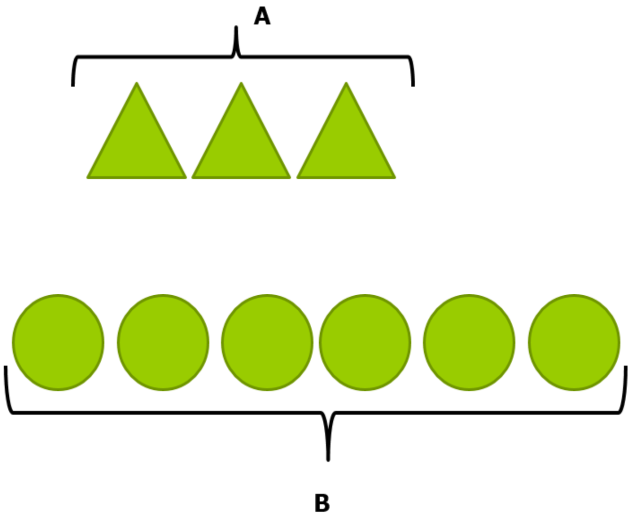
С теоретико-множественной точки зрения можно рассмотреть и смысл отношений *«больше в»* и *«меньше в»* [7].

Если же a = n(A), b = n(B) и известно, что «a меньше b в c раз», то поскольку a < b, то в множестве B можно выделить собственное подмножество, равномощное множеству A, но так как a меньше b в c раз, то множество B можно разбить на c подмножеств, равномощных множеству A.

Так как c – это число подмножеств в разбиении множества B, содержащего b элементов, а в каждом подмножестве – a элементов, то c = b : a.

Задача 8. На участке растут 3 ели, а берез в 2 раза больше. Сколько берез растут на участке?

В задаче речь идет о двух множествах: множестве елей (A) и множестве берез (B). Известно, что n (A) = 3 и что в множестве B элементов в 2 раза больше, чем в множестве A. Требуется найти число элементов в множестве B, т.е. n (B).



Так как в множестве B элементов в 2 раза больше, чем в множестве A, то множество B можно разбить на 2 подмножества, равномощных множеству A. Поскольку в каждом из подмножеств содержится по 3 элемента, то всего в множестве B будет 3+3 или $3 \cdot 2$ элементов. Выполнив вычисления, получаем ответ на вопрос задачи: на участке растет 6 берез.

Теоретико-множественное истолкование можно дать и делению с остатком. Разделить натуральное число a на натуральное число b с остатком – это значит найти такие натуральные целые неотрицательные числа q и r, что $a = b \cdot q + r$, где $0 < r < b$.

Пусть $a = n(A)$ и множество разбито на множества A_1, A_2, ..., A_q, R так, что множества A_1, A_2, ..., A_q, равночисленны, а множество R содержит меньше элементов, чем каждое из множеств $A_1, A_2, \dots, A_q$.

Тогда, если $n(A_1) = n(A_2) = \dots = n(A_q)$, а $n(R) = r$, то $a = b \cdot q + r$, где $0 < r < b$, причем число q равночисленных множеств является неполным частным при делении a на b, а число элементов в R – остатком при этом делении [7].

Рабочая тетрадь

I. Объясните с теоретико-множественной позиции, почему данные задачи решаются сложением [1].

1. В одной коробке осталось 6 конфет, а в другой – 12. Сколько конфет осталось в двух коробках.

2. У девочки было несколько карандашей. Когда 2 карандаша она отдала, у нее осталось 5 карандашей. Сколько карандашей было у девочки?

II. Объясните, почему нижеприведенные задачи решаются с помощью вычитания [1].

1. В саду росло 15 яблонь, 3 яблони засохли. Сколько яблонь осталось в саду?

2. На автовокзале было 26 автобусов. Когда несколько автобусов отправились в рейс, то осталось 12 автобусов. Сколько автобусов отправились в рейс?

3. В коробке 7 желейных конфет, их на 2 больше, чем конфет «птичье молоко». Сколько конфет «птичье молоко» в коробке?

III. Обоснуйте с теоретико-множественной позиции выбор арифметического действия [2]:

1. В вазе было несколько апельсинов. Когда в вазу положили еще 6 апельсинов, то в ней стало 9 апельсинов. Сколько апельсинов было в вазе?

2. У девочки было несколько карандашей. Когда 3 из них она подарила, у нее осталось 3 карандаша. Сколько карандашей было у девочки?

3. Снежную крепость строили 12 девочек, их на 5 меньше, чем мальчиков. Сколько мальчиков строили крепость?

IV. Объясните с теоретико-множественной позиции, почему данные задачи решаются умножением [2].

1. Учительница дала каждому ученику по 2 ручки. Сколько ручек получили 4 ученика?

2. Для детского сада купили 6 коробок цветных мелков по 10 штук в каждой коробке. Сколько всего мелков купили?

V. Объясните с теоретико-множественной позиции, почему задачи решаются делением [1].

1. Девочка напечатала 32 фотографии и разложила их в альбом по 4 фотографии на каждую страницу. Сколько страниц было заполнено?

2. Катя разложила 18 открыток в 6 конвертов, поровну в каждый конверт. Сколько открыток оказалось в одном конверте?

3. На выставке представлены 35 моделей гоночных машин, а грузовиков в 5 раз меньше. Сколько моделей грузовиков представлено на выставке?

4. В военно-морском параде участвовало 4 крейсера и 16 линкоров. Во сколько раз линкоров на параде было больше, чем крейсеров?

VI. Обоснуйте выбор действий при решении данных задач [1].

1. На каждой полке шкафа стояло по 3 вазочки и по 7 глиняных фигурок. Сколько предметов стояло на 4 полках шкафа?

2. В библиотеке было 48 художественных книг. 8 человек взяли по две книги. Сколько книг осталось в библиотеке?

3. Мама испекла 36 блинов. Каждому из 4 детей досталось поровну блинов. Причем каждые 3 блина каждый из детей запивал чашкой компота. Сколько чашек компота выпил каждый ребенок?

4. На качелях и каруселях катались 100 школьников. На качелях сидели по 4 человека. Сколько школьников каталось на каруселях, если было занято 16 качелей?

ТЕМА 3. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПОНЯТИЮ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА

Конспект лекций

При аксиоматическом способе построении какой-либо математической теории соблюдаются определённые правила:

1. Некоторые понятия теории выбираются в качестве основных и принимаются без определения.

2. Каждому понятию теории, которое не содержится в списке основных, дается определение, в нем разъясняется его смысл с помощью основных и предшествующих данному понятий.

3. Формулируются аксиомы-предложения, которые в данной теории принимаются без доказательства; в них раскрываются свойства основных понятий.

4. Каждое предложение теории, которое не содержится в списке аксиом, должно быть доказано; такие предложения называют теоремами и доказывают их на основе аксиом и теорем, предшествующих рассматриваемой.

Система аксиом называется *непротиворечивой*, если из нее нельзя логически вывести два взаимно исключающих друг друга предложения.

Непротиворечивая система аксиом называется *независимой*, если никакая из аксиом этой системы не является следствием других аксиом этой системы.

Систему аксиом называют *полной*, если в её рамках всегда можно доказать или данное утверждение, или его отрицание.

При аксиоматическом построении одной и той же теории можно использовать разные системы аксиом. Но они должны быть равносильными. Кроме того, при выборе той или иной системы аксиом математики учитывают, насколько просто и наглядно могут быть получены доказательства теорем в дальнейшем. Но если выбор аксиом условен, то сама наука или отдельная теория не зависят от каких-либо условий, – они являются отражением реального мира [7].

В качестве основного понятия при аксиоматическом построении арифметики натуральных чисел взято отношение *«непосредственно следовать за»*, заданное на непустом множестве N.

Суть отношения «непосредственно следовать за» раскрывается в следующих аксиомах:

Аксиома 1. В множестве N существует элемент, непосредственно не следующий ни за каким элементом этого множества. Будем называть его единицей, и обозначать символом 1.

Аксиома 2. Для каждого элемента a из N существует единственный элемент a', непосредственно следующий за a.

Аксиома 3. Для каждого элемента a из N существует не более одного элемента, за которым непосредственно следует a.

Аксиома 4. Всякое подмножество M множества N совпадает с N, если обладает свойствами:

1) 1 содержится в M;

2) из того, что a содержится в M, следует, что и a' содержится в M.

Сформулированные аксиомы часто называют *аксиомами Пеано*. Используя отношение «непосредственно следовать за» и аксиомы 1-4, можно дать следующее определение натурального числа:

Множество N, для элементов которого установлено отношение «непосредственно следовать за», удовлетворяющее аксиомам 1-4, называется *множеством натуральных чисел*, а его элементы – *натуральными числами*.

Если натуральное число b непосредственно следует за натуральным числом a, то число a называется *непосредственно предшествующим (или предшествующим)* числу b.

Теорема 1. Единица не имеет предшествующего натурального числа.

Теорема 2. Каждое натуральное число a, отличное от 1, имеет предшествующее число b, такое, что $b' = a$.

Сложением натуральных чисел называется алгебраическая операция, обладающая следующими свойствами:

1. $(\forall\, a \in N)\ [a + 1 = a']$
2. $(\forall\, a, b \in N)\ [a + b' = (a + b)']$.

Число $a + b$ называется *суммой* чисел a и b, а сами числа a и b – *слагаемыми*.

Теорема 3. Сложение натуральных чисел существует, и оно единственно.

Теорема 4. (свойство ассоциативности сложения): $(\forall\ \mathrm{a}, b, \mathrm{c} \in N)\ [(\mathrm{a} + b) + \mathrm{c} = \mathrm{a} + (b + \mathrm{c})]$.

Теорема 5. (свойство коммутативности сложения): $(\forall\ \mathrm{a}, b \in N)\ [\mathrm{a} + b = b + \mathrm{a}]$.

Теорема 6. $(\forall\ \mathrm{a}, b \in N)\ [\mathrm{a} + b \neq b]$.

Теорема 7. (свойство сократимости сложения): $(\forall\ \mathrm{a}, b, \mathrm{c} \in N)\ [\ \mathrm{a} = b => \mathrm{a} + \mathrm{c} = b + \mathrm{c}\ ]$.

Умножением натуральных чисел называется алгебраическая операция, обладающая свойствами:

1. $(\forall\ a \in N)\ [a \cdot 1 = a]$.
2. $(\forall\ \mathrm{a}, b \in N)\ [\mathrm{a} \cdot b' = \mathrm{a} \cdot b + \mathrm{a}]$.

Число $a \cdot b$ называется *произведением* чисел a и b, а сами числа a и b – *множителями*.

Теорема 8. Умножение натуральных чисел существует, и оно единственно.

Теорема 9. (свойство дистрибутивности умножения справа относительно сложения): $(\forall\ a, b, \mathrm{c} \in N)\ [(\mathrm{a} + b) \cdot \mathrm{c} = \mathrm{a} \cdot \mathrm{c} + b \cdot c]$.

Теорема 10. (свойство дистрибутивности умножения слева относительно сложения): $(\forall\ \mathrm{a}, b, \mathrm{c} \in N)\ [\mathrm{a} \cdot (b + \mathrm{c}) = a \cdot b + \mathrm{a} \cdot \mathrm{c}]$.

Теорема 11. (свойство ассоциативности умножения): $(\forall\ a, b, \mathrm{c} \in N)\ [(a \cdot b) \cdot c = \mathrm{a} \cdot (b \cdot c)]$.

Теорема 12. (свойство коммуникативности умножения): $(\forall\ a, b \in N)\ [a \cdot b = b \cdot a]$.

Теорема 13. (свойство сократимости умножения): $(\forall\ \mathrm{a}, b, \mathrm{c} \in N)\ \mathrm{a} = b => ac = bc$.

Свойства множества натуральных чисел

Число a *меньше* числа b ($a < b$) тогда и только тогда, когда существует натуральное число c, такое, что $a + c = b$. При этих условиях говорят также, что b больше a и пишут $b > a$.

Теорема 14. $(\forall\ a \in N)\ [a < a']$.

Теорема 15. Для любых натуральных чисел a и b имеет место одно и только одно из трёх отношений: $a < b$, $a = b$, $a > b$.

Теорема 16. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Теорема 17. Если $a < b$, то неверно, что $b < a$.

Теорема 18. (свойство монотонности сложения).

1) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$;

2) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$.

Теорема 19. (свойство монотонности умножения).

1) $a < b \Rightarrow ac < bc$;

2) $a > b \Rightarrow ac > bc$.

Теорема 20 (обратная 18 и 19).

$a + c < b + c$ или $ac < bc \Rightarrow a < b$.

Теорема 21. Для любых натуральных чисел a и b существует натуральное число n, такое, что $nb > a$.

Данное свойство натуральных чисел называют *свойством Архимеда.*

Вычитанием натуральных чисел a и b называется операция, удовлетворяющая условию: $a - b = c$, тогда и только тогда, когда $b + c = a$.

Число $a - b$ называют разностью чисел a и b, число a – *уменьшаемым*, а число b – *вычитаемым*.

Теорема 22. Разность натуральных чисел $a - b$ существует тогда и только тогда, когда $b < a$.

Теорема 23. Если разность натуральных чисел a и b существует, то она единственна.

Теорема 24. Пусть a, b, c – натуральные числа.

1. Если $c < a$, то $(a + b) - c = (a - c) + b$.
2. Если $c < b$, то $(a + b) - c = a + (b - c)$.
3. Если $c < a$ и $c < b$, то можно использовать любую из данных формул.

Теорема 25. Пусть a, b, c – натуральные числа. Если $a > b + c$, то $a - (b + c) = (a - b) - c$ или $a - (b + c) = (a - c) - b$.

Делением натуральных чисел a и b называется операция, удовлетворяющая условию: $a : b = c$ тогда и только тогда, когда $bc = a$.

Число a:b называют *частным* чисел a и b, число a – *делимым*, число b – *делителем*.

Теорема 26. Для того чтобы существовало частное двух натуральных чисел a и b, необходимо, чтобы $b < a$.

Теорема 27. Если частное натуральных чисел a и b существует, то оно единственно.

Теорема 28. Если числа a и b делятся на число c, то и их сумма $a + b$ делится на c, причем частное, получаемое при делении суммы $a + b$ на число c, равно сумме частных, получаемых при делении a на c и b на c, т.е. $(a + b) : c = a : c + b : c$.

Теорема 29. Если натуральные числа a и b делятся на число c и $a > b$, то разность $a - b$ делится на c, причем частное, получаемое при делении разности на число c, равно разности частных, получаемых при делении a на c и b на c, т.е. $(\mathrm{a} - b) : \mathrm{c} = \mathrm{a} : \mathrm{c} - b : \mathrm{c}$.

Теорема 30. Если натуральное число a делится на натуральное число c, то для любого натурального числа b произведение ab делится на c.

При этом частное, получаемое при делении произведения ab на число c, равно произведению частного, получаемого при делении a на c, и числа b: $(\mathrm{a}b) : \mathrm{c} = (\mathrm{a} : \mathrm{c}) \cdot b$.

Теорема 31. Деление на нуль невозможно.

Пусть a – целое неотрицательное число, a b – число натуральное.

Разделить a на b с остатком – это значит найти такие целые неотрицательные числа q и r, что $\mathrm{a} = ’ \cdot q + r$, причем $0 < r < b$.

Теорема 32. Для любого целого неотрицательного числа a и натурального b существуют целые неотрицательные числа q и r, такие, что $\mathrm{a} = bq + r$, причем $0 < r < b$. И эта пара чисел q и r единственная для заданных a и b [7].

Метод математической индукции

Теорема 33. Если утверждение $A(n)$ с натуральной переменной n истинно для n = 1 и из того, что оно истинно для n = k (k – произвольное натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего числа $n = k‘$, то утверждение $A(n)$ истинно для любого натурального числа n.

Метод доказательства, основанный на этой теореме, называется *методом математической индукции*.

Состоит оно из двух частей:

1) доказывают, что утверждение $\mathrm{A}(n)$ истинно для n = 1, т.е. что истинно высказывание $A(1)$;

2) предполагают, что утверждение $\mathrm{A}(n)$ истинно для n = k, и, исходя из этого предположения, доказывают, что утверждение $\mathrm{A}(n)$ истинно и для n = k+1, т.е. что истинно высказывание $\mathrm{A}(k) \; => \; \mathrm{A}(k+1)$.

Если $\mathrm{A}(1)$ ^ $\mathrm{A}(k) \; => \; \mathrm{A}(k \; + \; 1)$ – истинное высказывание, то делают вывод о том. что утверждение $\mathrm{A}(n)$ истинно для любого натурального числа n.

Отрезком Na *натурального ряда* называется множество натуральных чисел, не превосходящих натурального числа a.

Множество A называется *конечным*, если оно равномощно некоторому отрезку Na натурального ряда.

Установление взаимно-однозначного соответствия между непустым конечным множеством A и отрезком натурального ряда Na называется *счетом* элементов множества A.

Теорема 34. Всякое непустое конечное множество равномощно одному и только одному отрезку натурального ряда [7].

Если непустое конечное множество A равномощно отрезку Na, то натуральное число a называют числом элементов множества A и пишут $n(\mathrm{A}) \; = \; \mathrm{a}$.

Рабочая тетрадь

Докажите следующие утверждения с помощью метода математической индукции для любого $n \epsilon N$ [2].

1. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Шаг 1. $n = 1$	
Шаг 2. $n = k$	
Шаг 3. $n = k + 1$	

$2.\ 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$

Шаг 1. $n = 1$	
Шаг 2. $n = k$	
Шаг 3. $n = k + 1$	

$$3.\ 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Шаг 1. $n=1$ Шаг 2. $n=k$ Шаг 3. $n=k+1$	

4. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$[7].

Шаг 1. $n=1$ Шаг 2. $n=k$ Шаг 3. $n=k+1$	

$$5.\ 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Шаг 1. $n = 1$	
Шаг 2. $n = k$	
Шаг 3. $n = k + 1$	

$$6.\ 2 + 7 + 14 + \cdots + (n^2 + 2n - 1) = \frac{n(2n^2+9n+1)}{6}.$$

Шаг 1. $n = 1$ Шаг 2. $n = k$ Шаг 3. $n = k + 1$	

7. $5^n + 2 \cdot 3^n - 3 \,\vdots\, 8$ при любом натуральном n.

Шаг 1. $n = 1$ Шаг 2. $n = k$ Шаг 3. $n = k + 1$	

$8. \ 10^n + 18n - 28 \ \vdots \ 27$ при любом натуральном n.

Шаг 1. $n = 1$ Шаг 2. $n = k$ Шаг 3. $n = k + 1$	

ТЕМА 4. НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО КАК МЕРА ВЕЛИЧИНЫ

Конспект лекций

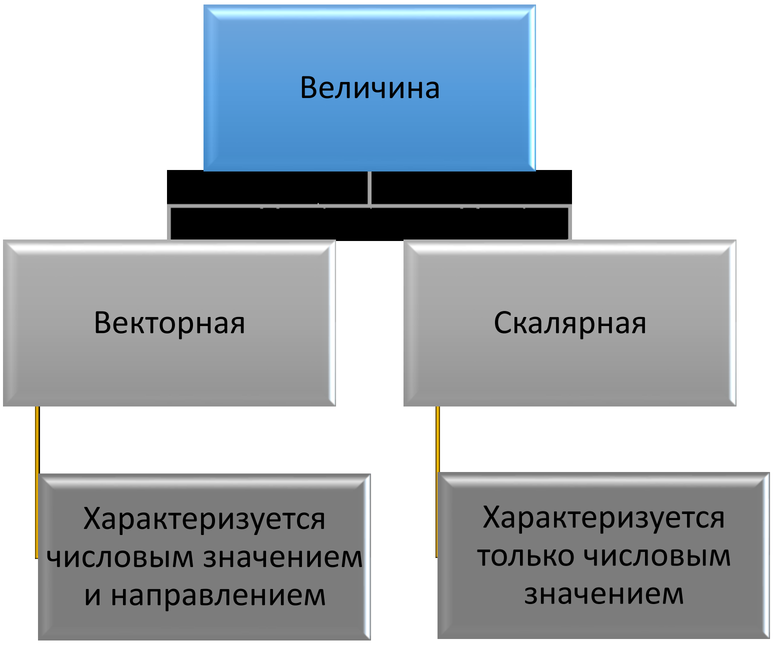
Величина – особое свойство реальных объектов и явлений.

Важным свойством величин является обладание интенсивностью (величины можно сравнивать, измерять).

Математика занимается решением задач:

1. Подсчёт числа элементов конечных множеств (используют количественное число).
2. Измерение величин (используют метод исчерпывания).

Для измерения величин выбирают единицы измерения.

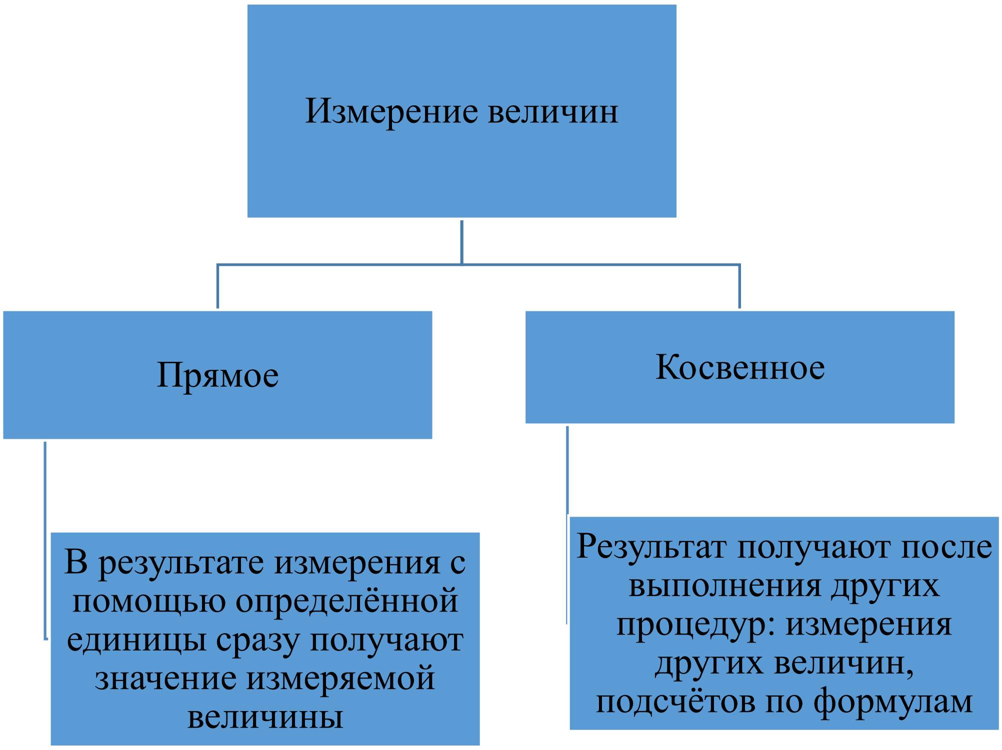


Непустое множество G – система *положительных скалярных величин* с отношением линейного порядка и сложения, если любые три элемента a, b, c из множества G соответствуют аксиомам.

Аксиомы системы положительных скалярных величин:

1. $a<b$, либо $a=b$, либо $b<a$ (сравнение величин).
2. ($a<b$ и $b<c$), то $a<c$ (транзитивность отношения).
3. $a+(b+c)=(a+b)+c$ (ассоциативность отношения).
4. $a+b=b+a$ (коммуникативность отношения).
5. $a<a+b$ (монотонность сложения).
6. Если $a<b$, то существует единственный элемент c, при котором $a+c=b$ (возможность вычитания), $b-a=c$.
7. Для каждого элемента a, принадлежащего множеству G, и каждого натурального числа n существует элемент b из множества G, при котором $nb=a$ (возможность деления), $b=a:n$.
8. Для любых элементов a и b множества G существует натуральное число n, при котором $a<nb$ (аксиома Архимеда).

9. Если бесконечные последовательности $a_1a_2\dots$ и $b_1n_2\dots$ обладают свойством, что для каждого элемента c из множества G существует натуральное число n, при котором $(a_n\text{-}b_n)<c$, то существует единственный элемент x_0 из множества G, при котором $a_k<x_0<b_k$ для любого натурального числа k (аксиома Кантора).



Величины, которые выражают одно и то же свойство объектов, называются величинами одного рода или *однородными величинами*. Напомним основные положения, связанные с однородными величинами.

1. Для величин одного рода имеют место отношения «равно», «меньше» и «больше», и для любых величин A и B справедливо одно и только одно из отношений: A < B, A = B, A > B.

2. Отношение «меньше» для однородных величин транзитивно: если A < B и B < C, то A < C.

3. Величины одного рода можно складывать, в результате сложения получается величина того же рода. Иными словами, для

любых двух величин A и B однозначно определяется величина $C = A + B$, которую называют суммой величин A и B.

Сложение величин коммутативно и ассоциативно.

4. Величины одного рода можно вычитать, получая в результате величину того же рода. Определяют вычитание через сложение.

Разностью величин A и B называется такая величина $C = A - B$, что $A = B + C$.

Разность величин A и B существует тогда и только тогда, когда $A>B$.

5. Величину можно умножать на положительное действительное число, в результате получают величину того же рода. Более точно, для любой величины A и любого положительного действительного числа x существует единственная величина $B = x \cdot A$, которую называют произведением величины A на число x.

6. Величины одного рода можно делить, получая в результате число. Определяют деление через умножение величины на число [7].

Величины как свойства объектов обладают еще одной особенностью – их можно оценивать количественно. Для этого величину надо измерить. Чтобы осуществить измерение, из данного рода величин выбирают величину, которую называют *единицей измерения*. Мы будем обозначать ее буквой E. Если задана величина A и выбрана единица величины E (того же рода), то измерить величину А – это значит найти такое положительное действительное число х, что $А = х \cdot Е$.

Число х называется *численным значением величины А* при единице величины Е. Оно показывает, во сколько раз величина А больше (или меньше) величины Е, принятой за единицу измерения.

Если $А = х \cdot Е$, то число х называют также мерой величины А единице Е и $Х = m_Е(А)$.

Величина, которая определяется одним численным значением, называется *скалярной величиной*.

Если при выбранной единице измерения скалярная величина принимает только положительные численные значения, то ее называют *положительной скалярной величиной*.

Положительными скалярными величинами являются длина, площадь, объем, масса, время, стоимость и количество товара и др. Измерение величин позволяет переходить от сравнения величин к сравнению чисел, от действий над величинами к соответствующим действиям над числами, и наоборот.

Если величины А и В измерены при помощи единицы величины Е, то отношения между величинами А и В будут такими же, как и отношения между их численными значениями, и наоборот: $А = В \Rightarrow m(А) = m(В)$; $А < В \Rightarrow m(А) < m(В)$; $А > В \Rightarrow m(А) > m(В)$.

Если величины А и В измерены при помощи единицы величины Е, то для нахождения численного значения суммы А + В достаточно сложить численные значения величин А и В: $А + В = С \Rightarrow m(А + В) = m(А) + m(В)$.

Если величины А и В таковы, что В $=$ х $\cdot$ А, где х – положительное действительное число, и величина измерена при помощи единицы величины Е, то, чтобы найти численное значение величины В при единицы Е, достаточно число х умножить на число m(A): В $=$ х $\cdot$ А $\Rightarrow$ m (В) $=$ х $\cdot$ m(А).

Замечание. В математике при записи произведения величины А на число х принято число писать перед величиной, т.е. х $\cdot$ А. Но разрешается писать и так: А $\cdot$ х. Тогда численное значение величины А умножают на х, если находят значение величины А $\cdot$ х.

Один и тот же объект может обладать несколькими свойствами, которые являются величинами. Если величины выражают разные свойства объекта, то их называют величинами разного рода, или *разнородными величинами*.

Смысл натурального числа, полученного в результате измерения величины

Считают, что отрезок х состоит из отрезков x_1, x_2, ... , x_n, если он является их объединением и никакие два из них не имеют общих внутренних точек, хотя и могут иметь общие концы.

Пусть задан отрезок х, его длину обозначим Х. Выберем из множества отрезков некоторый отрезок е, назовем его единичным отрезком, а длину обозначим буквой Е.

Определение. Если отрезок х состоит из а отрезков, каждый из которых равен единичному отрезку е, то число а называют численным значением длины Х данного отрезка при единице длины Е.

Пишут: Х $=$ а $\cdot$ Е или а $= m_{\text{Е}}$(Х).

Натуральное число как результат измерения длины отрезка (или как мера длины отрезка) показывает, из скольких единичных отрезков состоит отрезок, длина которого измеряется. При выбранной единице длины Е это число единственное.

Замечания:

1. При переходе к другой единице длины численное значение длины заданного отрезка изменяется, хотя сам отрезок остается неизменным.

2. Если отрезок x состоит из a отрезков, равных e, а отрезок y – из b отрезков, равных e, то a = b тогда и только тогда, когда отрезки x и y равны.

Аналогично можно истолковать смысл натурального числа и в связи с измерением других величин [7].

Теорема 1. Если отрезок x состоит из отрезков y и z и длины отрезков y и z выражаются натуральными числами, то мера длины отрезка x равна сумме мер длин его частей.

Из этой теоремы следует, что *сумму натуральных чисел* a и b можно рассматривать как меру длины отрезка x, состоящего из отрезков y и z мерами длин которых являются числа a и b.

$a + b = m_{\mathrm{E}}(Y) + m_{\mathrm{E}}(Z) = m_{\mathrm{E}}(Y + Z).$

Аналогичный смысл имеет сумма натуральных чисел, полученных в результате измерения других положительных скалярных величин.

Теорема 2. Если отрезок x состоит из отрезков y и z и длины отрезков x и y выражаются натуральными числами, то мера длины отрезка z равна разности мер длин отрезков x и y.

Из этой теоремы следует, что *разность натуральных чисел* а и b можно рассматривать как меру длины такого отрезка z, что z + y = x, если мера длины отрезка x равна a, мера длины отрезка y равна b.

$a - b = m_{\mathrm{E}}(Y) - m_{\mathrm{E}}(Z) = m_{\mathrm{E}}(Y - Z).$

Теорема 3. Если отрезок x состоит из a отрезков, длина которых равна E, а отрезок длины E состоит из b отрезков, длина которых равна E_1, то мера длины отрезка x при единице длины E_1, равна $a \cdot b$.

Из этой теоремы следует, что *умножение натуральных чисел* связано с переходом в процессе измерения к новой единице длины: если натуральное число а – мера длины отрезка x при единице длины E, натуральное число b – мера длины E при единице длины E_1, то произведение $a \cdot b$ – это мера длины отрезка x при единице длины E_1: $a \cdot b = m_{\mathrm{E}}(X) \cdot m_{\mathrm{E}1}(E) = m_{\mathrm{E}1}(X)$.

Теорема 4. Если отрезок x состоит из a отрезков, длина которых равна E, а отрезок длины E_1 состоит из b отрезков длины E, то мера длины отрезка x при единице длины E_1 равна a:b.

Из этой теоремы следует, что *деление натуральных чисел* связано с переходом в процессе измерения к новой единице длины: если натуральное число а – мера длины отрезка x при единице длины E, а натуральное число b – мера новой единицы длины E_1 при единице длины E, то частное a:b – это мера длины отрезка x при единице длины E_1: a $: b = m_{\mathrm{E}}(X) : m_{\mathrm{E}1}(E) = m_{\mathrm{E}1}(X)$.

Такая трактовка частного возможна только для деления по содержанию.

Умножение и деление натуральных чисел – мер величин связано с переходом от одной единицы величины к другой в процессе измерения одной и той же величины.

Выбор действий умножения и деления при решении текстовых задач с величинами можно обосновывать иначе, используя понятие умножения и деления величины на натуральное число.

Умножить величину А на натуральное число х – это значит получить такую величину В того же рода, что $B = x \cdot A$ или $B = A \cdot x$, причем $B = \underbrace{A + A + \cdots + A}_{x \text{ слагаемых}}$.

Чтобы найти численное значение величины В при единице величины Е, достаточно численное значение величины А, полученное при той же единице Е, умножить на число х, т.е. если $B = A \cdot x$, то $m_{\mathrm{E}}(B) = m_{\mathrm{E}}(A) \cdot x$.

Если $B = A \cdot x$, где х – натуральное число, В и А – величины одного рода, то с помощью деления решают две задачи:

– *деление по содержанию*: зная А и В, находят число х ($x =$ В : А), причем $x = m_{\mathrm{E}}(B) : m_{\mathrm{E}}(A)$; это;

– *деление на равные части*: зная В и х, находят А ($A =$ В $: x$), причем $m_{\mathrm{E}}(A) = m_{\mathrm{E}}(B) : x$.

Пользуясь описанным подходом к трактовке умножения и деления натуральных чисел, можно обосновывать выбор действия и при решении текстовых задач с отношениями «больше в» и «меньше в» [7].

1. Назовите величины, о которых идет речь в предложениях:

а. В одной банке 10 кг варенья, а в другой – 5 кг.

б. Высота сосны 15 м, а березы 10 м.

в. За одну книгу заплатили 599 р., а за другую – 687 р.

г. Дедушке 65 лет, а внучке 18 лет.

д. В одной книге 333 страницы, а в другой – 399 страниц.

2. Сравните следующие величины (поставьте знак «равно», «больше», «меньше»):

а) 6 мин 3 с ____ 362 с;

б) 256 ц ____ 25 т;

в) 50 мин ___ $\frac{2}{3}$ ч;

г) 9 т 8 ц ____986 кг;

д) $\frac{5}{8}$т ____ 800 кг;

е) 1 т 250 кг ____ 12 500 г;

ж) 7300 мм ____7 км 30 м;

з) 72 км/ч ____ 1000 м/мин;

и) 540 дм 60 см ____ 55 м;

к) 36 км/ч ____ 10 м/с;

л) 1500 мм ____ 18 дм;

м) 60 км/ч ____ 1000 м/с;

н) 10000 с ____ 3 ч;

о) 1 сут ____1339 мин;

п) 540 дм^2 ____ 54 м^2;

р) 12 ц ____ 127087 г;

с) 2 недели ____ 330 ч;

т) 1 год ____ 52 недели;

у) 228 мм ____ 2 м 8 см;

ф) 60 км/ч ____ 17 м/с.

х) 32 км ____ 3200000 см.

ц) 105 недель ____ 2 года.

ч) 10 ц ____1001 кг.

3. Найдите значения выражений там, где это возможно:

а) 2 км 822 м + 14 км 564 м;

б) 7 т 24 ц – 3 т 12 ц;

в) 11 км 20 м – 10 км 150 м;

г) 28 кг 382 м – 12 кг 222 г.

ТЕМА 5. ВЕЛИЧИНЫ, РАССМАТРИВАЕМЫЕ В НАЧАЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ: МАССА ТЕЛА, ВРЕМЯ, СКОРОСТЬ. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ВЕЛИЧИНАМИ

Конспект лекций

Масса тела

Понятие *массы* тесно связано с понятием *веса* – силы, с которой тело притягивается Землёй. Вес тела зависит от массы и расположения тела на земной поверхности и относительно земной поверхности. Сила F, с которой притягиваются тела, пропорциональна произведению масс тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между телами, т.е. $F = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}$, где γ – гравитационная постоянная. Пусть m_1 – масса Земли, $m_2 = m$ – масса тела в определенной точке земной поверхности. Тогда $g = \frac{y m_1}{r^2}$ – постоянная величина, которую называют ускорением свободного падения. Силу F в этом случае обозначают буквой Р и называют *весом тела*. Вес тела прямо пропорционален его массе, т. е. $P = mg$.

Если взять другое тело, имеющее массу m', то его вес $P' = m'g$.

Отношение весов двух тел равно отношению их масс: $P : P' = m : m'$. Если веса двух тел равны, то равны и массы этих тел.

Рассмотрим вес нескольких тел, вместе взятых. Так как сила является аддитивной величиной, то вес Р равен сумме весов отдельных тел, т. е. $P = \sum_{i=0}^{n} P_i = g \sum_{i=0}^{n} m_i = mg$, где m – масса суммарного тела [5].

Эти факты являются основой для сравнения масс тел путем их взвешивания с помощью весов. Основная единица измерения массы – 1 *килограмм* (кг). Другие единицы массы являются производными (кратными и дольными) основной: 1 *грамм* (г) – одна тысячная доля килограмма ($1\,\text{г} = 10^{-3}$ кг); 1 *тонна* (т) – тысяча килограмм ($1\,\text{г} = 10^{3}$ кг); 1 *центнер* (ц) – 100 кг ($1\,\text{г} = 10^{2}$ кг).

1 грамму равна масса $1\ \text{см}^3$ воды при температуре 4°С. Масса $1\ \text{м}^3$ аналогичной воды составляет 1 тонну.

Время

Любые процессы и движения происходят во времени. Под *временем* понимают то, что отделяет одно событие от другого. Время является положительной скалярной величиной. На практике измеряют промежутки времени. В системе измерений СИ основной единицей времени является 1 *секунда* (сек.). Секунда в два раза превышает период полураспада ядер полония, а период полураспада ядер радона в четыре раза превышает секунду.

Наряду с секундой при измерении времени используются и другие единицы: 1 *минута* (мин.) = 60 сек.; 1 *час* = 60 мин.; 1 *сутки* = 24 часа; 1 *неделя* = 7 суток; 1 *месяц* равен 28, 29, 30 или 31 суткам; 1 *год* – 365 или 366 суток; 1 *век* составляют 100 лет.

За сутки Земля совершает полный оборот вокруг своей оси. Год – это время обращения Земли вокруг Солнца с точностью до 5-6 минут. Год длится 12 месяцев. Дни между месяцами года распределены неравномерно. В хозяйственной деятельности приняты такие единицы времени как декада (10 дней) и квартал (3 месяца) [5].

Скорость, расстояние

Все изменения в окружающей среде происходят во времени. Часто на выполнение одного и того же действия затрачивается разное время, поэтому вводят понятие *скорости* протекания какого-либо процесса, действия.

Пусть в начальный момент времени t = 0 тело находилось в точке A, а в момент времени t тело будет находиться в точке B. Длина отрезка AB – это *расстояние*, пройденное телом за время t при прямолинейном движении. Если в единицу времени тело проходит одно и то же расстояние в одном и том же направлении, то такое движение называют *равномерным прямолинейным*. Путь, пройденный телом за единицу времени, называют *скоростью*. Если обозначить буквой S расстояние, пройденное телом за время t при равномерном прямолинейном движении, а скорость буквой V, то отношения между тремя переменными в символьном виде выражаются формулами: $V = S/t, S = V \cdot t$.

При равномерном прямолинейном движении скорость тела постоянна, а расстояние, пройденное телом, прямо пропорционально скорости движения и времени. Если к началу равномерного прямолинейного движения уже прошло расстояние S_0, то формула движения примет вид: $S = S_0 + V \cdot t$.

Скорость также может меняться во времени: одни участки пути тело может проходить с одной скоростью, а другие – с другой.

Если в единицу времени скорость изменяется на одну и ту же величину, то говорят о *равноускоренном* движении [5].

Единицами скорости являются 1 км/час (километр в час), 1 м/с (метр в секунду).

Стоимость, производительность труда, работа

Понятие стоимости связано с понятием товара. Товар – продукт труда, изготовляемый не для собственного потребления, а с целью обмена на другие продукты. Каждый товар обладает стоимостью, и она интересует создателя лишь постольку, поскольку связана со способностью товара обмениваться на другие товары. Данное свойство товара (обмениваемость) получило название его *меновой стоимости*. Обмен товаров означает, что они количественно сравниваются между собой. Стоимость товара – это положительная скалярная величина. На множестве стоимостей определены операции сложения, вычитания, умножения, деления.

Стоимость товара прямо пропорциональна цене и количеству. *Цена* – это стоимость единицы меры товара. Для каждого товара своя единица меры. Эти меры могут укрупняться и дробиться в соответствии с количеством товара.

Изготовление товара происходит во времени. Для изготовления товара может быть затрачено разное время, то есть изготовление товара связано с *производительностью труда*. Объём изготовленного товара называют *работой*, которая прямо пропорциональна производительности труда и времени. Если известна производительность труда, то всегда можно подсчитать работу, выполненную за указанное время.

Рабочая тетрадь

1. На три склада доставлен груз. На первый и второй склады доставлено 400 т, на второй и третий – 300 т, а на первый и третий – 440 т. Сколько тонн груза было доставлено на каждый склад в отдельности?

Объекты задачи	Решение
Утверждения:	
Требования:	
Модель	

2. В булочную привезли 280 кг сухарей в пакетах по 2 кг в каждом пакете. К концу недели осталось 40 кг сухарей. Сколько пакетов с сухарями было продано?

Объекты задачи	Решение
Утверждения: Требования: Модель	

3. Десять слив имеют такую же массу, как три яблока и одна груша, а шесть слив и одно яблоко – как одна груша. Сколько слив нужно взять, чтобы их масса была равна массе одной груши?

Объекты задачи	Решение
Утверждения: Требования: Модель	

4. Имеющийся в магазине картофель был расфасован в 24 пакета по 5 кг и 3 кг. Масса всех пакетов по 5 кг оказалась равна массе всех пакетов по 3 кг. Сколько было тех и других пакетов?

Объекты задачи	Решение
Утверждения: Требования: Модель	

5. Масса сосновой шпалы 27,8 кг, а дубовой 45,5 кг. Масса доставленных шпал равна 384,2 кг. Сколько среди этих шпал сосновых и сколько дубовых?

Объекты задачи	Решение
Утверждения:	
Требования:	
Модель	

6. Имеется 2 разных сплава меди. В первом на 40% меньше содержание меди, чем во втором. После того, как их сплавили вместе, получили сплав, содержащий 36% меди. Определите процентное содержание меди в первом и во втором сплавах, если известно, что в первом сплаве было 6 кг меди, а во втором – 12 кг [2].

Объекты задачи	Решение
Утверждения: Требования: Модель	

7. Сколько сейчас времени, если до конца суток осталось $\frac{4}{5}$ того, что уже протекло от начала суток?

Объекты задачи	Решение
Утверждения:	
Требования:	
Модель	

8. Когда отцу было 37 лет, то сыну было только 3 года, а сейчас сыну в три раза меньше лет, чем отцу. Сколько лет сейчас каждому из них?

Объекты задачи Утверждения: Требования: Модель	Решение

9. Яша идёт от дома до школы 30 мин, а Петя – 40 мин. Петя вышел из дома на 5 мин раньше Яши. Через сколько минут Яша догонит Петю?

Объекты задачи Утверждения: Требования: Модель	Решение

10. 30 пирожных стоят на 30 руб. дороже, чем 40 пирожков. Те же 30 пирожных стоят на 21 руб. дороже, чем 50 таких же пирожков. Сколько стоят одно пирожное и один пирожок [6]?

Объекты задачи	Решение
Утверждения: Требования: Модель	

11. Велосипедист должен попасть в место назначения к определенному сроку. Известно, что если он поедет со скоростью 15 км/ч, то приедет на час раньше, а если скорость будет 10 км/ч, то опоздает на час. С какой скоростью должен ехать велосипедист, чтобы приехать вовремя?

Объекты задачи	Решение
Утверждения: Требования: Модель	

12. Собака погналась за лисицей, находящейся от нее на расстоянии 120 м. Через сколько времени собака догонит лисицу, если лисица пробегает в минуту 320 м, а собака – 350 м [2]?

Объекты задачи	Решение
Утверждения: Требования: Модель	

13. По дороге в одном и том же направлении идут два мальчика. В начале расстояние между ними было 2 км, но так как скорость идущего впереди мальчика 4 км/ч, а скорость второго 5 км/ч, то второй нагоняет первого. С начала движения до того, как второй мальчик догонит первого, между ними бегает собака со средней скоростью 8 км/ч. От идущего позади мальчика она бежит к идущему впереди, добежав, возвращается обратно, и так бегает до тех пор, пока мальчики не окажутся рядом. Какое расстояние пробежит за все это время собака [2]?

Объекты задачи Утверждения: Требования: Модель	Решение

14. Из двух труб в бочку течёт вода. Одной первой трубой бочка наполнилась бы водой за 24 мин, второй – за 15 мин. Однако в бочке дыра, из которой вся вода вытечет за 2 часа. Наполнится ли бочка и за какое время, если будет наполняться из обеих труб и вода будет вытекать в дыру?

Объекты задачи	Решение
Утверждения:	
Требования:	
Модель	

15. Две бригады, работая вместе, закончили ремонт участка за 6 дней. Одной первой бригаде для выполнения 40% всей работы потребовалось бы времени на 2 дня больше, чем одной второй бригаде для выполнения $13\frac{1}{3}\%$ всей работы. Определите, за сколько дней могла бы отремонтировать участок каждая бригада, работая одна [2]?

Объекты задачи	Решение
Утверждения:	
Требования:	
Модель	

16. В бассейне проведены две трубы. Первой трубой он наполняется на 12 часов быстрее, чем второй. После того, как первая труба действовала 10 ч, ее закрыли и открыли вторую, которая наполнила оставшуюся часть бассейна за 16 ч. За сколько часов каждая труба, действуя отдельно, может наполнить пустой бассейн?

Объекты задачи Утверждения: Требования: Модель 	Решение

17. Поезд проходит мост длиной 450 м за 45 с, а мимо столба – за 15 с. Вычислить длину поезда и его скорость [2].

Объекты задачи	Решение
Утверждения:	
Требования:	
Модель	

18. Пройдя половину пути, пароход увеличил скорость на 25% и поэтому прибыл к пристани на полчаса раньше срока. Сколько времени потребовалось пароходу на весь путь [6]?

Объекты задачи Утверждения: Требования: Модель 	Решение

19. Два покупателя купили 9 клубков шерсти по одинаковой цене. Один заплатил за шерсть 400 руб., а другой – 320 руб. Сколько клубков шерсти купил каждый покупатель?

Объекты задачи	Решение
Утверждения:	
Требования:	
Модель	

20. За 2 пары босоножек заплатили 1380 руб. Сколько заплатят за 3 пары туфель, если цена пары босоножек на 370 руб. ниже цены пары туфель?

Объекты задачи Утверждения: Требования: Модель	Решение

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алексеева Г. Ю. Сборник задач и упражнений по математике: для сузов / Г. Ю. Алексеева, Т. П. Быкова, Н. И. Хрипченко. – Москва : Экзамен, 2008. – 190 с. – ISBN 978-5-377-00803-3.

2. Звягин К. А. Математика (подходы к построению системы натуральных чисел, расширение множества натуральных чисел) / К. А. Звягин, Ю. В. Корчемкина, С. В. Крайнева. – Челябинск : ЗАО «Библиотека А. Миллера», 2021. – 63 с. – ISBN 978-5-93162-543-0.

3. Корчемкина Ю. В. Рабочая тетрадь по математике / Ю. В. Корчемкина. – Челябинск : Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2017. – 94 с. – ISBN 978-59069-0-8.

4. Математика. Сборник задач: учеб. пособие / Л. П. Стойлова, Е. А. Конобеева, Т. А. Конобеева, И. В. Шадрина. – Москва : Издательский центр «Академия», 2013. – 240 с. – ISBN 978-5-7695-9891-3.

5. Попова А. А. Математика : Основные этапы развития. Геометрические фигуры. Величины и их измерение : учеб. пособие / А. А. Попова. – Челябинск : Изд-во Челяб. гос. пед. ун-та, 2010. – 155 с. – ISBN 5-85716-682-9.

6. Сборник арифметических задач и упражнений / Сост. В. Н. Худяков. – Челябинск: ЧГПИ, 1990. – 114 с.

7. Стойлова Л. П. Математика: учебник / Л. П. Стойлова. – Москва : Издательский центр «Академия», 2013. – 464 с. – ISBN 978-5-7695-9911-8.

Учебное издание

Корчемкина Юлия Валерьевна

Звягин Константин Алексеевич

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАЧАЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ:

конспект лекций и рабочая тетрадь

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издательство ЗАО «Библиотека А. Миллера»
454091, г. Челябинск, ул. Свободы, 159

Подписано в печать 21.10.2023. Формат 60x84/16
Бумага офсетная. Объем 5,23 усл. печ. л. Тираж 100 экз.
Заказ № 435.
Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ЮУрГГПУ
454080, Челябинск, пр. Ленина, 69