МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

ОРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ НАД ОШИБКАМИ КАК СРЕДСТВО ДОСТИЖЕНИЯ ПРЕДМЕТНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05 Педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата

«Математика»

Форма обучения: Заочная

Выполнила:
Студентка группы ЗФ-513/087-5-1
Немова Татьяна Николаевна

Проверка на объем заимствований:
69.36% авторского текста
Работа рекомендована к защите
рекомендована/не рекомендована
«25» мая 2020г.
И.о.зав. кафедрой математики и методики обучения математике
Шумакова Екатерина Олеговна

Научный руководитель:
Мартынова Елена Владимировна,
старший преподаватель

Челябинск
2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
ГЛАВА 1. ОШИБКИ УЧАЩИХСЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ 6
1.1 Типичные ошибки при обучении математике и причины их возникновения 6
1.2 Процесс работы над ошибками как средство достижения предметных результатов.. 10
1.3 Способы устранения ошибок учащихся при обучении математике для достижения предметных результатов 16
ГЛАВА 2. МЕТОДИКА РАБОТЫ ПО ИСПРАВЛЕНИЮ И ПРЕДУПРЕЖДЕНИЮ ОШИБОК ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ 22
2.1 Анализ результатов ЕГЭ с учетом возможных ошибок и рекомендации по их недопущению 22
2.2 Методика работы с ошибками учащихся для достижения результатов при изучении темы «Логарифмы».. 29
2.3 Внеурочная работа как вид организации работы по формированию приемов поиска ошибок 38
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 44
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ... 46

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время, как и прежде, существует проблема ошибок и трудностей учащихся при обучении математики. Но на сегодняшний день накоплен опыт в методологии преподавания математики, было разработано много различных методов предотвращения и исправления ошибок и трудностей для учащихся. Но школьники не перестают допускать ошибки. Назревает вопрос: хорошо или плохо совершать ошибки? Никто не даст четкого ответа. Ответ будет зависеть от того, что мы называем «ошибка».

Под ошибкой мы будем понимать результат неправильного (ошибочного) действия. Причин допущения ошибок много, будь то это невнимательность, рассеянность, или простое физиологическое состояние – усталость. Тем не менее, для достижения положительных результатов, а это знание математики, необходимо совершенствовать не только умственные способности, но и работу по недопущению ошибок. Школьникам в этом деле нужна помощь учителя.

Устранение ошибок является одним из основных способов устранения разрыва между знаниями и навыками учащихся. Эта работа полезна, только если она всегда находится в центре внимания учителя и ученика. Необходимо выполнить процесс изучения правил с использованием специальной модели, используя технику, которая активирует рефлексивную деятельность учащихся для предотвращения и исправления ошибок, возникающих в результате формального принятия правил.

Самоконтроль – навык, который необходимо развивать каждому ученику для предотвращения и исправления ошибок. Самостоятельная работа школьников над ошибками обеспечивает более осознанный анализ ошибок и анализ собственного поведения для решения конкретной проблемы, что благотворно влияет на качество знаний и стимулирует развитие логического мышления.

Систематическое повторение – главный помощник в ликвидации пробелов знаний и ошибок. Об этом должен помнить каждый учитель.

Правильная организация работы над ошибками не заставит ждать положительного эффекта, а это значит, что допускать неправильные действия ученик станет меньше, и сможет довести свои действия при решении тех или иных задач до автоматизма и забыть о проблеме.

Проблема моего исследования заключается в следующем: метод обработки ошибок не может диагностировать причину их появления. Особое внимание уделяется формированию у учащихся рефлексивной деятельности и их использованию в работе для предотвращения и исправления некорректной работы на уроках математике.

Объект исследования: процесс обучения математике в основной общеобразовательной школе.

Предмет исследования: методика работы над ошибками как средство достижения предметных результатов по математике.

Гипотеза исследования заключается в следующем: если проанализировать материалы в процессе обучения математике, научить школьников находить ошибки и целенаправленно и систематически организовывать свою работу, это поможет повысить уровень подготовки по математике.

Цель исследования: развитие методов обучения математике создаст условия для усовершенствования рефлексивной деятельности школьников, что поможет предотвращать и устранять типичные ошибки для достижения результатов дисциплины.

Исходя из целей были поставлены следующие задачи:

1. Выявить причины возникновения ошибок у учащихся при обучении математике.
2. Рассмотреть процесс работы над ошибками учащихся.
3. Изучить способы устранения ошибок учащихся при обучении математике для достижения предметных результатов.
4. Проанализировать результаты ЕГЭ по математике и выявить «слабые места» при выполнении заданий.

5. Представить методику работы с ошибками учащихся для достижения результатов при изучении темы «Логарифмы».

В данной работе использовались следующие методы: изучение и отбор литературы, анализ, синтез, методы теоретического обобщения.

В соответствии с целью и задачами данного исследования определена структура дипломной работы, которая состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

ГЛАВА 1. ОШИБКИ УЧАЩИХСЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

1.1 Типичные ошибки при обучении математике и причины их возникновения

Действия, направленные на устранение ошибок, требуют их систематизации. В таком случае основную роль должны играть группы ошибок, которые объединены общими причинами их появления, общей методологией работы над ними. Такая систематизация ошибок позволит определить средства для их исправления и предотвращения этих ошибок в будущем.

В качестве основания для систематизации ошибок в традиционной методике обучения выделялись следующие принципы:

- предметный (сущность ошибки);
- причинный (причина, по которой возникла та или иная ошибка);
- тематический (тема, изучение которой спровоцировало совершить ошибку);
- деятельностный (вид учебной деятельности, при выполнении которой были допущены ошибки);
- количественный (число учащихся, которые допустили одну и ту же ошибку).

При методической работе с ошибками выделяют два основных понятия:

1) сущность ошибки – правило, требование, прием решения, которые были нарушены или не соблюдены;
2) причина появления – субъективное состояние интеллектуальной сферы человека или ситуация его деятельности.

Причины возникновения ошибок можно назвать побудителем, который «склоняет» к выполнению неправильных действий. Суть математических ошибок нетрудно установить по внешнему выражению действий учащихся: неверное произношение формулировок, неправильно выполненное какое-либо действие и т. п.

Внешне причины ошибок зачастую не проявляются. Задача учителя выявить, что стало причиной ошибочных действий. Тогда он сможет верно организовать работу по недопущению различных ошибок.

Причины возникновения ошибок у обучающихся могут быть разными, так как они связаны с психологическими, педагогическими и методическими особенностями самого процесса обучения.

Психологический анализ математических ошибок, обучающихся ставит своей целью определить природу и объяснить причины их появления.

Выяснить ошибку – обозначает, в первую очередь, довести до сознания школьников ее причину, а потом противопоставить возникшим у него неверным обобщениям, аналогиям то или другое правило. Собственно, диагностика действительных причин ошибок у каждого из учеников предоставляет возможность осуществлять удачную адресную коррекцию как сложившихся у учеников умственных действий по решению предметных задач, так и знаний, на основе которых эти действия формируются [7].

Для формирования устойчивых навыков учащиеся должны решить достаточное количество задач одного типа по изучаемой теме. Но в психологии было установлено, что выполнение однотипных задач приводит к ряду негативных явлений: школьники начинают решать проблемы по аналогии с предыдущими, не задумываясь об этом, опуская некоторые существенные аргументы, из-за этого ошибки появляются в решениях. Подобные психологические причины ошибок вытекают из следующих недостатков учебных пособий:

- в тексте учебников алгоритмы и правила вводятся без рассмотрения необходимого количества примеров;

- в учебниках превалирует однообразие форм предъявления задачи;
- в системе задач не выдержана оптимальная комбинация задач, для решения которых необходима репродуктивная и продуктивная деятельности;
- отсутствуют задачи, помогающие ученикам понять способ решения (рефлексивные задачи);
- система упражнений в учебнике не предоставляет нужной пропедевтической и закрепительной работы [11].

Возможны психологические причины математических ошибок, которые могут быть связаны:

- с психологическими факторами (ослабление психических функция: внимания, памяти, мышления);
- интерференцией навыков – тормозящее взаимодействие навыков, при котором уже сложившиеся навыки осложняют формирование новых навыков либо уменьшают их эффективность;
- доминированием ассоциативных связей над смысловыми.

Причины возникновения ошибок в процессе обучения могут быть связаны не только с учебной деятельностью школьника, но и с работой учителя с учеником. Потому что учебная деятельность ученика осуществляется во взаимодействии с учителем, организатором и руководителем этой деятельности является учитель. Именно учитель ставит цели и задачи предстоящей деятельности, дает учащимся для этой деятельности всю требующуюся информацию, задания для конкретных действий [7].

Причины возникновения ошибок, обусловленные несовершенством организации учебного процесса:

1) отсутствие работы учителя по предупреждению у учеников

стремления к автоматическому применению изучаемых фактов;

2) у обучающихся не формируются навыки самоконтроля, требующиеся для развития рефлексивной деятельности;
3) ведется недостаточная подготовительная работа для осознанного овладения материалом, не рассчитано его целесообразное закрепление и связь с будущим материалом;
4) в учебном процессе применяются только готовые задачи;
5) учащихся не учат составлять задачи;
6) задачи главным образом задействуют для закрепления готовых знаний или для их повторения [11].

Кроме того, к математическим ошибкам учеников можно отнести следующее:

1) отсутствие на уроках, ведущих к незнанию материалов и пробелов в знаниях;
2) поверхностный, не думающий взгляд на новый материал, приводящий к непониманию его;
3) грязный и неряшливый подчерк;
4) чрезмерная нагрузка и недостаток сна приводят к снижению внимания и скорости мышления;
5) кратковременное или полное переключение внимания с одного вида деятельности на другой (академическая или внешкольная деятельность);
6) выполнение умственных операций на низкой скорости;
7) мотивация к изучению учебного материала низкая.

Типичная математическая ошибка учащихся свидетельствует о том, что метод, используемый учителями, не совершенен. Быстрое устранение ошибок является лишь необходимым и недостаточным условием для преподавания гуманизма в преподавании математики. В конце концов, гуманизация образования происходит через ориентацию образования в зависимости от личности конкретного ребенка. Идея реализации гуманизма призвана включать в себя источник нормативных актов, регулирующих работу обучения математике, упорядоченную систему структуры личности и законы ее развития [6].

Польский математик Г. Штейнгауз, указывая значимость работы над математическими ошибками для оживления мыслительной деятельности учеников, писал, что «если учащегося заверить, что в предложенном ему доказательстве есть ошибка, то можно быть уверенным даже без специальной проверки, что материал будет изучен полностью и очень тщательно». Поэтому формирование списков математических ошибок и их применение в образовательных целях является одним из важных факторов повышения качества обучения.

1.2 Процесс работы над ошибками как средство достижения предметных результатов

Метод обработки ошибки не диагностирует причину ошибки. Нужно обратить должное внимание на формирование рефлексивных действий, которые не уделяются учащимся, и их использование в профилактике и коррекции использования положительных математических ошибок.

При отсутствии соответствующей степени независимости в неправильной работе поведение школьников не находится под каким-либо контролем, и ошибки, которые они делают, могут игнорироваться. Причины их появления неясны, что приводит к их повторению.

Напротив, независимая работа учащихся над ошибками обеспечивает более осознанный анализ их действий для решения конкретной проблемы, что оказывает благотворное влияние на качество полученных знаний и стимулирует логическое мышление, желание и способность учеников понять проблему, спланировать ее решение, подумать о возможных вариантах действий и предсказать их результаты.

Например, ученик многократно применяет к преобразованию алгебраических выражений формулы квадрата суммы и разности двух чисел, но получив задание представить в виде многочлена $(-a-3)^2$, теряется. Следует предложить учащемуся ответить на вопрос: «Что вызывает затруднение?» и «Как преобразовать выражение, чтобы можно было применить одну из формул в том виде, в каком они предложены в учебнике?»

Другой пример неосознанного применения алгоритма: получив уравнение $sinx = 1{,}2,$ ученик автоматически ищет его корни по хорошо известной формуле, не обращая внимания на недопустимые значения $sinx.$ Полезно предложить ученику представить наглядное решение на тригонометрическом круге (рисунок 1).

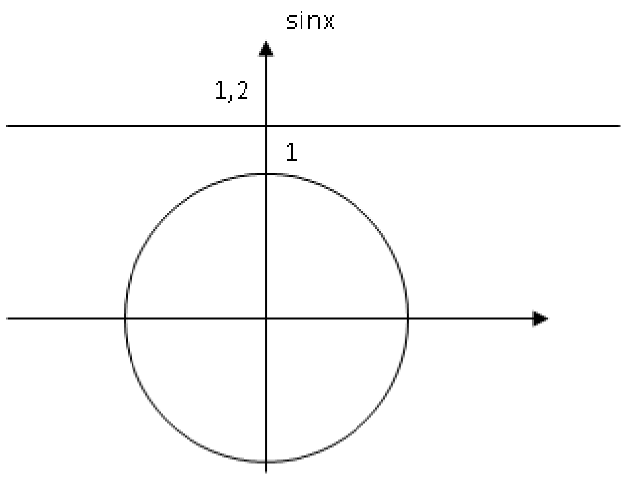

Рисунок 1

Для исправления и предупреждения многих ошибок важно сформировать у школьников навыки самоконтроля. Эти навыки состоят из двух частей:

1. Умения обнаружить ошибку.
2. Умения её объяснить и исправить.

В процессе обучения применяются несколько приемов для самоконтроля учеников, которые помогают обнаружить допущенные ошибки и вовремя их исправить. К ним относятся:

1. Проверка вычислительных и тождественных преобразований путем выполнения обратных действий или преобразований.
2. Проверка правильности решения задач путём составления и решения задачи, обратной к данной.
3. Оценка результатов решения задач с точки зрения здравого смысла.
4. Проверка аналитического метода решения путем решения графическим способом.

Выработке навыков самоконтроля помогает и приём приближённой оценки ожидаемого результата. Установление возможных пределов ожидаемого ответа предупреждает недочёты описок, пропуска цифр. Грубая оценка ожидаемых результатов также может помочь развить самоконтроль. Установка возможных пределов для ожидаемого ответа сможет предотвратить ошибки описания и пропуск чисел. Каждый из этих приемов позволяет использование рефлексии учебной деятельности у учеников, понимание причин своей неудачи и нахождение способов выхода из этого положения, обнаружение и устранение ошибок логического и арифметического характера, внесение необходимых дополнений и коррективов в план и способ действия в случае расхождения эталона и его продукта.

Например, рассмотрим задачу:

За неделю завод выпустил 130 холодильников, выполнив месячный план на 25%. Сколько холодильников должен выпустить завод за месяц по плану?

Ученик написал $\frac{130*100}{25} = 52$, ошибка становится очевидной, если перед решением ученик прикинет в уме: *«За неделю завод выпустил 130 холодильников. Следовательно, за месяц он выпустит больше. Значит, ответ должен быть больше, чем 130»*.

Такая прикидка в уме полезна при решении задач с дробными числами и процентами. Благодаря использование различных приемов проверки правильности выполнения задания, оценивание полученного результата, внесение необходимых дополнений и коррективов в план у учащихся формируется умение оценивать правильность выполнения учебной задачи, собственные возможности её решения, владение основами самоконтроля.

Несколько профилактических мер могут свести появление ошибок к минимуму, например:

1) грамотно сформулированные и хорошо читаемые тексты письменных заданий удобны для восприятия;
2) регулярный разбор типичных ошибок;
3) при объяснении нового материала необходимо предугадать ошибку и подобрать несколько заданий на отработку правильного усвоения понятия;
4) акцентировать внимание на каждом элементе формулы;
5) выполнение разнотипных заданий позволит совершать ошибки по минимуму;
6) прочному усвоению способствуют правила, удобные для запоминания, четкие алгоритмы, благодаря которым заведомо придешь к намеченной цели.

В математике отношения между материалами особенно сильны. Без знания предыдущей темы невозможно изучить и понять следующую. Поэтому избежать повторения в каждом уроке невозможно. При объяснении нового материала следует использовать ряд определений и теорем, которые были изучены ранее. Например, перед изучением темы «Теоремы сложения» следует повторить следующие теоретические вопросы:

1) четные и нечетные функции;
2) изменение тригонометрических функций при возрастании и убывании аргумента;
3) знаки тригонометрических функций;
4) таблицы значений тригонометрических функций.

А также выполнить задания:

1) определите четность и нечетность тригонометрической функции:
   a) $y = -cosx + x^2$;
   b) $y = sin^2x$;
   c) $y = \frac{tgx}{x}$.
2) найдите область определения функции $y = x^2 + 2x - 4$;
3) при каких значениях x функции $y = sinx$ и $y = cosx$ принимают одинаковые значения?

Ошибки учащихся могут указывать не только на отсутствие знаний, но и на потенциальные возможности. Ошибки также являются индикатором проблем, с которыми сталкиваются школьники, и иногда они вызывают проблемы, которые помогут сформулировать дальнейшие действия.

Ученики увлеченно относятся к задачам типа «найти ошибки». Эти задачи должны иметь возможность соотносить свои действия с запланированными результатами, отслеживать их деятельность для достижения запланированных результатов, определять, как предпринять действия для установки определенных требований, и корректировать свои действия в зависимости от меняющихся обстоятельств.

Речь идёт не только о софизмах, но и об ошибках, которые допускают сами учащиеся. Не надо специально исправлять каждое ошибочное утверждение учащегося, лучшим образом будет поставить это утверждение на рассмотрение всего класса и добиться осознанного исправления ошибки.

Если они и не допускают ошибок, то всё же нередко целесообразно проверить, насколько они «устойчивы» против типичных ошибок.

Например, найти ошибки:

a) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$;

b) $16a^8 + 32ab^2 - 16b^4 = (4a^4 + 4b^2)$;

c) $x^2 - 10xy + 100y^2 = (x - 10y)^2$;

d) $(x^2 - 5)^2 = x^4 - 25$.

Процесс поиска и исправления ошибок учениками под руководством учителя может быть поучительным для школьников. В результате чего изучение и анализ ошибок будет являться эффективным инструментом развития познавательного интереса к изучению математики.

Таким образом, грамотно продуманная организация урока по изучению нового материала сыграет важную роль в предотвращении в будущем ошибок у учащихся. Школьники должны активно участвовать в самом процессе изучения. Не стоит бояться, что поначалу школьники будут ошибаться и делать недоказанные выводы. Важно, чтобы эти ошибки в понимании материала изначально исправлялись, и учащиеся осознанно воспринимали новый предмет.

Метод исследования нового материала может происходить через проблемную ситуацию, а решение этой проблемы должно производиться учениками под руководством учителя. На этих занятиях учащиеся проходят следующие этапы: обнаружение новых, возможных ошибок, поиск новых разумных опровержений этих ошибок и повторный поиск, который уже вывел правильный процесс гипотезы, и, наконец, доказательство. Всё это способствует развитию математического мышления и достижению предметных результатов.

1.3 Способы устранения ошибок учащихся при обучении математике для достижения предметных результатов

В работах Груденова Я.И. [3] указано несколько способов устранения ошибок учащихся при обучении математике:

- однотипность упражнений;
- принцип непрерывного повторения;
- контрпримеры;
- принцип сравнения;
- принцип полноты.

Разберёмся в каждом из пунктов в отдельности.

I. Однотипность упражнений

Для того, чтобы сформировать прочные навыки необходимы однотипные упражнения. Это общеизвестный факт. Но в то же время такие упражнения могут привести к механическим бессознательным решениям, ошибкам и т.д. Из-за этого устанавливаются противоположные методы достижения принципа единства практики. Авторы учебников и задачников часто придерживаются самых противоположных взглядов на единство задач. Это можно интерпретировать как метод обучения математике, в котором отсутствуют единые теоретические рекомендации.

При изучении каждой темы на уроках математики школьники должны приобрести навыки и умения решения проблем. С помощью ассоциации это возможно только в том случае, если они неоднократно решали этот тип задач. Количество однотипных упражнений можно постепенно сокращать, поскольку учащиеся развивают и накапливают знания и навыки по этому вопросу. Учителя по своему опыту знают, что при изучении новых материалов учащиеся с низким уровнем успеваемости должны выполнять больше учебных задач, чем успешные студенты. Но дизайн плана урока позволяет всем ученикам иметь одинаковое количество заданий дома, и в ходе самого урока сильные ученики могут решить больше задач. Исходя из этого, мы можем сделать вывод, что «слабые» ученики меньше тренируются, что является одной из причин их отставания и медленного развития. Эта разница между потребностью и реальностью должна привести к снижению внимания.

Чтобы обеспечить постоянное внимание всех учащихся и формирование у них мощных навыков и способностей, необходимо поддерживать единый тип учебной системы и устранять ее негативные последствия при применении других принципов.

II. Принцип непрерывного повторения

В однотипную систему заданий по новым темам с первого момента их изучения включаются задачи из предыдущих разделов. Целью данных включений является устранение негативного влияния ассоциаций и аналогичных задач. В тоже время проводится систематическое и непрерывное повторение изучаемого материала.

Условия применимости принципа непрерывного повторения:

1. Порядок упражнений определяется не автором учебника, а учителем – только учитель, учитывая знания и уровень развития учащегося при подготовке к уроку, может изменить количество заданий одного типа.
2. Основная цель урока – изучение новой темы, в связи с этим большая часть задач должна быть по новой теме.
3. Из пройденных тем предпочтительно подбирать такие упражнения, которые по отдельным внешним признакам сходны с упражнениями новой темы.
4. При решении комбинаторных задач, насыщенных различными материалами из предыдущей главы, принцип непрерывного повторения достигается самими собой, но когда удается решать последовательно много комбинированных задач, то

необходимость чередование заданий разных типов ощущается наиболее остро.

5. При применении принципа непрерывного повторения общее количество задач того или иного типа фактически не уменьшается в сравнении с однотипной системой – только упражнения такого типа распределяются на более длительное время.

III. Контрпримеры

Контрпример – задача, помогающая выявить и устранить имеющиеся у школьника ошибочные ассоциации. В роли контрпримеров могут выступать задачи с неполными или противоречивыми данными и любые другие упражнения, которые смогут спровоцировать у учеников ошибку. Учитель должен именно спровоцировать, а учащиеся должны догадаться, что это своего рода игра. Они, наоборот, стараются не ошибиться, в этот момент внимание учеников усиливается. В то же время, некоторые важные организационные методы также должны быть рассмотрены. В основном, контрпримеры выполняются в классе под наблюдением педагога, и ошибки анализируются сразу. Тогда ученики будут помнить, что это не о самой ошибке, а о правильном способе анализа и решения проблемы. По этой причине не рекомендуется включать контрпримеры в домашнюю работу.

Если учитель соблюдает правила игры и ученики не могут догадаться по его внешнему поведению, что был подан контрпример, то они начинают ожидать этого в другой части урока. Это ожидание увеличивает внимание школьников.

При часто используемых контрпримерах интенсивное внимание может стать привычкой. Так развивается внимание студентов. Конечно, контрпримеры не используются в одиночку. Они лишь редко появляются в системе заданий.

IV. Принцип сравнения

Принцип сравнения в психолого-педагогической литературе понимается как чередование практики прямых и обратных операций и любых других задач, когда желательно показать их взаимосвязь, сходство и различие. Некоторые авторы используют термин «альтернативное сопоставление», чтобы подчеркнуть важность альтернативной практики.

В зависимости от изучаемых материалов, цели урока и других соображений учитель может выбрать любой из трех принципов: непрерывное повторение, сравнение и включение контрпримеров в систему практики. Каждый из этих принципов сочетается с однотипной системой, чтобы помочь уменьшить ее недостатки и сохранить положительное влияние.

При одновременном изучении некоторых тем принципом сравнения легко пользоваться: складывать и вычитать дроби, умножать и делить на положительные и отрицательные числа, решать задачу поиска дробей из чисел и чисел и передавать значение их дробей и т.д.

Систематическое включение контрпримеров в систему упражнений приводит к тому, что ожидая их, школьники начинают все чаще контролировать свои результаты, получаемые при решении задач, реже допускают ошибки по невнимательности. Таким образом у них развиваются внимание и самоконтроль. Систематическое включение контрпримеров в систему практики заставляет учащихся контролировать свои результаты и реже совершать ошибки из-за невнимательности. Таким образом, они развивают внимание и самоконтроль.

V. Принцип полноты

Система практики удовлетворяет принципу полноты тогда, когда сумма ее задач и способов решения этих проблем не приводит к формированию неправильной ассоциации, и позволяет школьникам твердо усвоить все проблемы, которые необходимо изучить.

Обычно принцип целостности нарушается учителем. Из-за медленных темпов работы в классе и сокращения многих курсов большинство учителей не успевают рассмотреть некоторые задачи в школьных учебниках с учащимися. В то же время не каждый учитель может выбрать задачу, не нарушив при этом определенной целостности системы, приведенной в учебнике.

Система упражнений должна удовлетворять дидактическим принципам:

1. Задачи должны подбираться с последовательным нарастанием трудности.
2. Многие авторы подчеркивают, что система упражнений должна включать в себя задачи, которые допускают «элегантные» решения. Обсуждение рациональных, «элегантных» способов решения проблем, поднятых отдельными учениками в классе, повышает интерес всего класса и повышает внимание учеников.
3. Стоит обратить особое внимание на принципы обучения доступности. В основном, есть две причины нарушения. Первое иногда связано с недостатками плана: сначала предоставляются учебники для задач, к которым многие учащмеся не имеют доступа, а затем рекомендует их пропустить. Второе часто связано с тем, что учителя не учитывают способности учеников в своих классах.

В своей статье «О типичных ошибках обучающихся по математике» Мугаллимова С.Р. [8] видит следующие пути предупреждения и коррекции ошибок обучающихся. Для предупреждения ошибок, которые могут возникнуть у школьников и закрепиться в дальнейшем:

1. Необходимо ответственно и обдуманно подходить к методическим приемам организации деятельности учащихся на следующих этапах изучения нового материала:
   - введение нового понятия;

- формирование операции;
- формирование алгоритма решения (типовой) задачи.

2. Следует продумать использование в работе набор «провоцирующих заданий», в которых явно выражены типичные (правильные и неправильные) рассуждения.
3. Периодически включать задания на поиск ошибок в готовых решениях.
4. Необходимо специально организовать хорошо продуманную работу над ошибками после проведения самостоятельной работы.
5. Необходимо включить наиболее проблемные задания, в которых проявляются типичные ошибки, устный счёт, математические диктанты и другие формы работ.

Эти меры сводят к минимуму возникновение ошибок. Кроме того, каждый учитель знает, что систематическая и повторная доставка материалов является ключом к устранению пробелов и, следовательно, ошибок. Взаимосвязь предыдущего с последующем в математике сильна как ни в другой любой науке. Это означает, что повторение является неизбежной частью организации курсов как меры предотвращения ошибок с целью достижения результатов в обучении математике.

ГЛАВА 2. МЕТОДИКА РАБОТЫ ПО ИСПРАВЛЕНИЮ И ПРЕДУПРЕЖДЕНИЮ ОШИБОК ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

2.1 Анализ результатов ЕГЭ с учетом возможных ошибок и рекомендации по их недопущению

С целью выявления возможных ошибок учащихся и возможности использования их при организации работы над ошибками для достижения предметных результатов был проведен анализ типичных ошибок участников ЕГЭ в 2019 году.

Несмотря на отсутствие изменений в структуре и содержаний контрольно-измерительных материалов (КИМ), результаты экзамена в 2019 году существенно отличаются от результатов 2018 г. Это связано с тем, что до 2018 г. учащиеся могли выбирать и сдавать оба уровня сложности экзамена – базовый или профильный. В 2019 году школьники могли сдавать только один из уровней. Данные изменения повлияли на качество подготовки к ЕГЭ как базового, так и профильного уровней.

По результатам детального анализа типичных ошибок участников ЕГЭ было выявлено, что большинство сдающих экзамен не справились со следующими заданиями: стереометрические задачи, задачи на наглядное представление о производной, геометрические задачи на соотношения в прямоугольном треугольнике и расчет элемента фигуры в пространстве, задачи, требующие организованного перебора или логического анализа.

Для анализа и выработки рекомендаций были отобраны задания, в которых были обнаружены типичные и статистически значимые ошибки. Анализ также включал задачи, в ходе которых наблюдалось очевидное отсутствие ответа, а также ряд задач, в которых допущенная ошибка была незначительной, но указала на возможные серьезные упущения в методике преподавания математики [12].

Примеры заданий из экзамена по математике 2019 года.

Задание №2.

На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Магадане с 5 по 18 ноября 1977 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки на рисунке соеденены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода среднесуточная температура в Магадане была меньше -14,4 градуса Цельсия (рисунок 2).

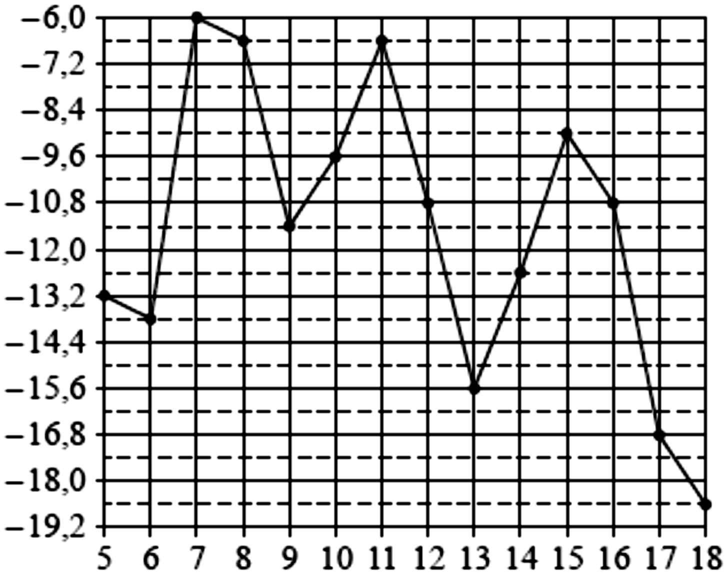

Рисунок 2

Большинство участников ЕГЭ дали неправильный ответ 11. Скорее всего к ошибке привело непонимание разницы между сравнением отрицательных чисел и их модулей. Еще к одной из причин неверного ответа можно отнести невнимательное чтение условия задания. Зачастую данную ошибку провоцирует многократное прорешивание прошлогодних вариантов вместо систематического повторения. Экзаменуемый проглядывает текст простого задания, заранее предугадав ответ.

По данному заданию можно сделать вывод, что при организации подготовки не стоит использовать однотипные варианты подряд. Лучше сделать акцент на повторение темы: «Сравнение отрицательных чисел».

Задание №6

В ромбе $ABCD$ угол CDA равен 78°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах (рисунок 3).

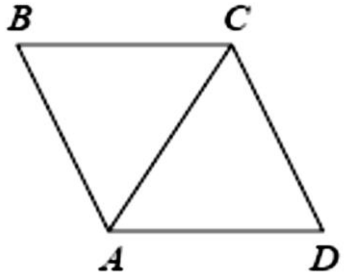

Рисунок 3

Ошибочный ответ 78 мог быть дан из-за опоры на рисунок, где треугольник ACD внешне похож на равносторонний. Ответ 102 получается, если искать угол BCD и забыть разделить его на 2.

Неправильный ответ 78 может быть из-за рисунка. Треугольник ACD выглядит как равносторонний. Но в условии ничего об этом не сказано. Следовательно, экзаменуемый определил это на глаз. Если посмотреть на угол BCD и забыть разделить его на 2, ответ будет 102.

Многие учащиеся не могут сформулировать правильное отношение, используя геометрические рисунки в качестве элементов для упорядочения изображений друг друга. Они рассматривают это как точный рисунок со всеми правилами конструкции и размеров. Задача учителя – объяснить роль рисунков для задач. Это должно быть реализовано с 7-го класса, когда начинается курс геометрии. Необходимо использовать методические приемы, требующие от учащихся перерисовывать рисунки, изменяя длину и угол без искажения самого рисунка [4].

Исключить ошибку из-за невнимательности – самая трудная из задач для учителя (ответ 102). Такие ошибки могут быть допущены наиболее подготовленными выпускниками. Подобные ошибки будут обнаружены только тогда, когда решение и ответ перепроверены. Рекомендуется обратить внимание на важность проверки. Это следует рассматривать как обязательную часть выполнения задачи.

Задание №7

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ *и касательная к нему в точке с абсциссой* x_0 *. Найдите значение производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0 (рисунок 4).

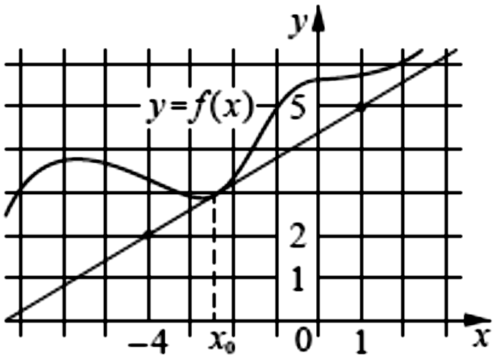

Рисунок 4

Неправильный ответ связан с нахождением абсциссы или ординаты точки касания. Эти ответы учащиеся дают наугад из-за того, что не усваивается тема производной и как её увидеть на чертеже.

Чтобы не допустить ошибок в этих задачах, необходимо включать визуальную практику, математическую диктовку и другие мелкомасштабные материалы для повторения и консолидации в начале урока. Здесь важно развивать навыки, продолжительность и частоту борьбы с появлением естественной привычки материалов.

Вот еще один пример из задания №7.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ *и касательная к нему в точке с абсциссой* x_0 *. Найдите значение производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0 (рисунок 5).

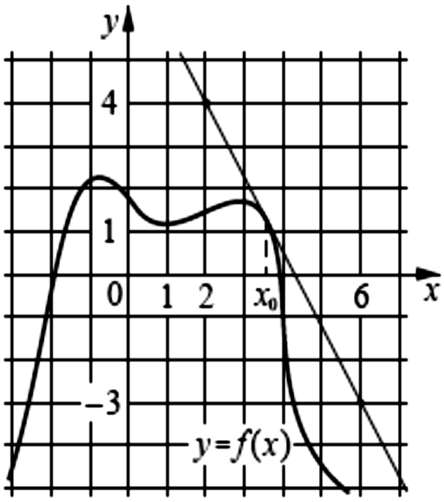

Рисунок 5

Опять же, неправильный ответ - «1,75» - потеря знака минус. Эта ошибка возникает в алгоритмах, которые механически воспроизводят производную с помощью поиска в прямоугольном треугольнике, забывая направление касательной.

В таких задачах учитель должен рекомендовать участникам ЕГЭ разбивать решение задачи на 2 этапа. В первом этапе ученику необходимо определить знак, во втором – определить модуль производной.

Задание №8

Цилиндр и конус имеют общие основания и высоту. Объем цилиндра равен 18. Найдите объем конуса (рисунок 6.1).

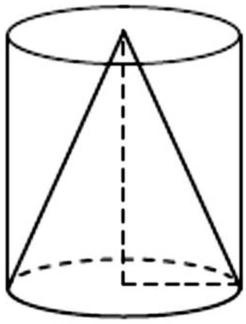
Рисунок 6.1

Неверный ответ 9 указывает на ошибку в визуальном решении. Фактически площадь осевого сечения конуса в два раза меньше площади осевого сечения цилиндра. Учащийся, давший ответ 9, может перенести этот атрибут в объем, потому что объем на плоскости визуально воспринимается через площадь фигуры.

Рассмотрим подобную задачу

Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объем конуса равен 6. Найдите объем цилиндра (рисунок 6.2)

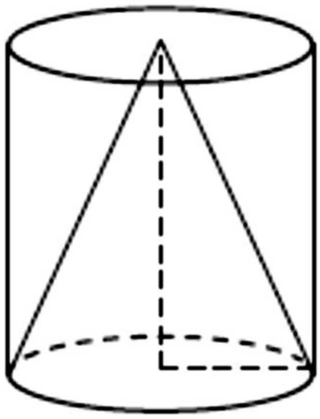

Рисунок 6.2

Аналогичная ошибка была описана в предыдущем анализе задачи. Опираясь на визуальное представление, учащиеся умножают объем на 2 вместо 3, как если бы это была площадь поперечного сечения.

В этом случае стоит отметить, что в трехмерном пространстве объем визуально сравнивать сложнее, чем площадь на плоскости. В решении этих проблем стоит упоминать частный случай знаменитой задачи Архимеда: «Объём вписанного в цилиндр шара в полтора раза, а объем вписанного конуса в три раза меньше объема цилиндра» [4]. Эта знаменитая проблема должна рассматриваться не только в курсе стереометрии, но и в основной школе в курсе геометрии.

Задание №9

Найдите значение выражения $16log_7\sqrt[4]{7}$.

Скорее всего на первом этапе действия решения были верными:

$16 * \frac{1}{4} log_7 7$. Последующая ошибка – плод инертности мышления.

Вместо деления 16 на 4, участники экзамена извлекли из 16 корень 4-ой степени.

Найдите значения выражения $log_{0,2}50 - log_{0,2}2$.

Ответ 25 – результат классической ошибки «промежуточный ответ»: $log_{0,2}50 - log_{0,2}2 = log_{0,2}25$. Выполнив в уме эту операцию, школьники записывают ответ – 25. Так же встречаются более абсурдные ответы, такие как 48. Простая демонстрация незнания свойств логарифмов.

Общие рекомендации могут быть предоставлены для вышеуказанных задач. Чтобы устранить ошибки при решении логарифмов, применение их атрибутов занимает много времени и привычки. За эти годы школа была оснащена необходимыми инструментами для укрепления навыков и развития механических навыков - словесного подсчета, математической диктовки, тестов, других вопросов и задач при ответах на доске и т.д. Все эти инструменты должны быть в полной мере использованы для развития технических навыков для корня, степени, логарифма, тригонометрических функций и пр.

Данный анализ показывает, что организацию работы над ошибками следует выполнять своевременно, по мере изучения тем в школьном курсе математики. По статистике большинство ошибок происходит из-за невнимательности как ученика, так и учителя. Не стоит откладывать в долгий ящик проработку допущенных ошибок. Ведь для успешной сдачи экзамена требуется весь курс школьной математики, так как темы тесно взаимосвязаны друг с другом. Без знания предыдущей темы, последующая не сможет усвоиться в полном объеме. Для достижения конечного положительного результата необходимо правильно определять промежуточные цели, уметь составлять план и последовательность действий, выполнять задания по заданному образцу, оценивать и в случае необходимости корректировать полученный результат, использовать рефлексию учебной деятельности, используя различные приемы проверки правильности выполненных задач, находить и устранять ошибки логического и арифметического характера, самостоятельно выбирать способы решения заданий.

2.2 Методика работы с ошибками учащихся для достижения результатов при изучении темы «Логарифмы»

Тема «Логарифмы. Логарифмические уравнения» - одна из обязательных и сложных тем в курсе алгебры средней школы. На изучении данной темы по разным программа отводится мало часов.

При изучении и анализе учебного плана школы №2 г.Коркино было выявлено, что на данную тему отводится 3 часа. Казалось бы, целых 3 часа, но для достижения хорошего усвоения знаний по данной теме недостаточно.

Учитель должен на первых парах начать устранять пробелы в усвоении темы, так как данные задания выносятся на ЕГЭ.

Рассмотрим подробнее изучение темы.

Для начала определим цели урока:

- образовательные – сформировать понятие логарифма, изучить основные свойства логарифмов и способствовать формированию умения применять свойства логарифмов при решении задач;
- развивающие – развитие логического мышления, техники вычисления, умения рационально работать;
- воспитательные – содействовать воспитанию интереса к математике, чувство самоконтроля, самопроверки и ответственности.

Если при подготовке к уроку учителем правильно будут сформированы цели и четко поставлены задачи урока, то не должно быть пробелов у учащихся в понимании темы.

Тип урока: урок изучения и первичного закрепления новых знаний.

Учебник: Алгебра и начало математического анализа. 10 класс: учебник для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни/ [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 430 с.: ил. – ISBN 978-5-09-021132-1 [10].

Оборудование: компьютер, мультимедийный проектор.

Проверим готовность учащихся к уроку. У них должны быть рабочая тетрадь, учебник, ручка, карандаш.

Согласно программе и плану изучение начинается с формирования понятия «Логарифм».

К сожалению, сразу дать понятие логарифма мы не можем. Как уже не раз было сказано о том, что изучение новой темы невозможно без предыдущей, поэтому понятие будет вытекает из темы «Степень. Показатель степени».

Для повторения пройденного материала учитель задает вопросы:

1. *Дайте определение степени. Что называют основанием и показателем?* (корень n-ой степени из числа *a* называется такое число, n-ая степень которого равна *a.* Например,

   $3^4 = 81$.)
2. *Сформулируйте свойства степени.*

Для того, чтобы определить тему урока, ученикам предлагается решить уравнения, которые появятся на экране:

1) $2^x = 4$ (ответ: 2);
2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$ (ответ: -3);
3) $\left(\sqrt{7}\right)^x = 49$ (ответ: 4);
4) $2^x = -16$ (ответ: нет корней);
5) $2^x = 5$.

С 1-го по 4-ое уравнение определить корни было вполне понятно. А в пятом уравнении? Возможный вариант ответа учащихся: нет корней. Возникла проблема: как же можно решить подобного рода уравнения?

Имеет ли оно корни? Если имеет, то какие это корни? Как их можно найти?

Если ученики не могут догадаться, как решать такого рода уравнение, можно дать им подсказку решить уравнение графически. Ведь как правило о таком методе решения уравнений зачастую забывают.

Учитель предлагает рассмотреть график функции (рисунок 7.1)

$$y = a^x, (a > 0, a \neq 1)$$

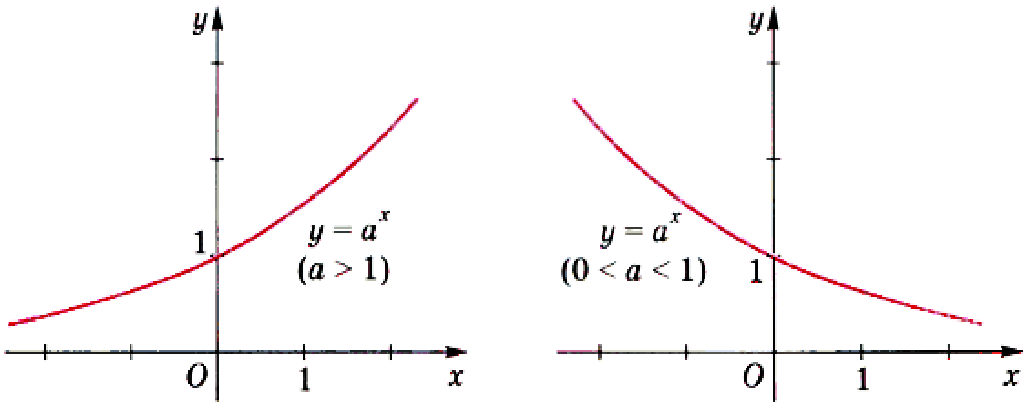

Рисунок 7.1

и сообщает о том, что можно найти число a^α для любого действительного числа α. Этот же график можно использовать для решения обратной задачи: «*Для данных положительных чисел* b *и* a $(a \neq 1)$ *найти число* α*, такое, что* $b = a^\alpha$*».*

Для нахождения данной задачи надо отметить на оси *Oy* точку, имеющую координаты (0;*b*), и через нее провести прямую $y = b$, параллельную оси *Ox*. Она пересечет график функции $y = a^x$ в единственной точке *M* (рисунок 7.2).

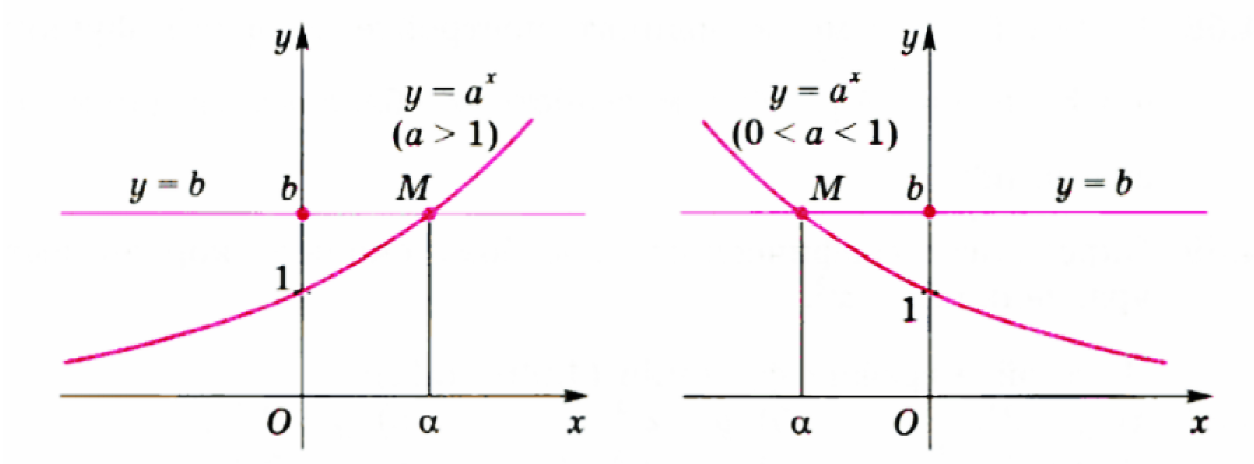

Рисунок 7.2

Абсцисса α точки M и удовлетворяет условию $b = a^{\alpha}$. Полученное таким образом число α единственное, удовлетворяющее этому условию.

Теперь попробуем решить наше 5-ое уравнение (рисунок 7.3).

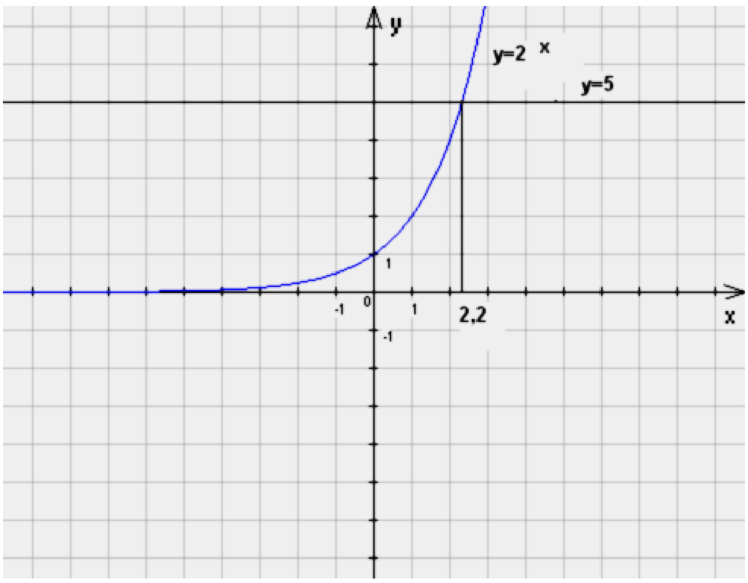

Рисунок 7.3

Ответом к данному уравнению буде приблизительно равный 2,2.

Вопрос от учителя: «Что представляет собой корень данного уравнения?»

Ответ учащихся: «Это показатель степени, в которую надо возвести число 2, чтобы получить 5.»

Так учитель верно подвел школьников к понятию логарифма и непременно к основному его свойству.

«Следовательно, для любого положительного числа b существует, и при том только одно, число α, такое, что $b = a^{\alpha}$. Это число называется логарифмом числа b по основанию a.»

Учитель предлагает ученикам занести следующие записи в тетрадь – это число, тема урока: «Логарифмы и их свойства», словесное определение логарифма и формулы.

Логарифмом положительного числа b *по основанию* a $(a > 0, a \neq 1)$ *называют число* α *такое, что* $b = a^{\alpha}$.

Логарифм положительного числа b *по основанию* a $(a \neq 1, a > 0)$ *обозначают так:*

$$\alpha = log_a b.$$

Из определения логарифма следует, что для $a > 0, a \neq 1, b > 0$

$$a^{log_a b} = b.$$

Тема урока: Логарифмы и их свойства.

Приведем несколько примеров вычисления логарифмов:

а. $log_2 1 = 0$;

б. $log_{0,01} 0{,}01 = 1$;

в. $log_{10} 0{,}001 = -3$;

г. $log_e e^3 = 3$.

Учитель спрашивает ребят, смогут ли они ответить, почему при решении данных логарифмов получается такой ответ?

Так же учитель обращает внимание на логарифмы под буквой в. и г. Эти логарифмы имеют специальные названия – десятичный и натуральный.

Дадим определение каждому:

Логарифм положительного числа b по основанию e называют натуральным логарифмом числа b и обозначают lnb.

Логарифм положительного числа b по основанию 10 называют десятичным логарифмом числа b и обозначают lgb.

Дадим определение свойств логарифмов, запишем их в виде формул и приведем примеры:

1. Логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел

$$log_a(M * N) = log_a M + log_a N .$$

Например,

$$log_{10}5 + log_{10}20 = log_{10}(5 * 20) = log_{10}100 = 2.$$

2. Логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя

$$log_a\left(\frac{M}{N}\right) = log_a M - log_a N .$$

Например,

$$log_3 54 - log_3 2 = log_3\left(\frac{54}{2}\right) = log_3 27 = 3.$$

3. Логарифм степени положительного числа равен произведению показателя степени на логарифм этого числа

$$log_a M^{\gamma} = \gamma log_a M.$$

Например,

$$log_2 4^3 = 3log_2 4 = 3 * 2 = 6.$$

Для положительных чисел a, b и M, таких, что $a \neq 1$, $b \neq 1$, справедливо следующее равенство:

$$log_a M = \frac{log_b M}{log_b a}.$$

Это равенство называется формулой перехода логарифма от одного основания к другому.

Заменив в равенстве выше число *M на число* b *(b ≠ 1)* и учитывая, что $log_b b = 1$, получим равенство

$$log_a b = \left(\frac{1}{log_b a}\right).$$

Для того, чтобы разобраться, как работают свойства логарифмов, рассмотрим несколько примеров из учебника.

№5.17

а) $log_6 2 + log_6 3$;

б) $log_8 \frac{8}{7} + log_8 \frac{7}{8}$.

Решение:

а) $log_6(2 * 3) = log_6 6 = 1$;

б) $log_8\left(\frac{8}{7} * \frac{7}{8}\right) = log_8 1 = 0$.

№5.18

д) $log_7 \frac{49}{50} - log_7 \frac{7}{50}$;

е) $log_3 \frac{81}{100} - log_3 \frac{3}{100}$.

Решение:

д) $log_7\left(\frac{\frac{49}{50}}{\frac{7}{50}}\right) = log_7 7 = 1$;

е) $log_3\left(\frac{\frac{81}{100}}{\frac{3}{100}}\right) = log_3 27 = 3$.

№5.19

Используя свойство (3) логарифмов, преобразуйте выражение:

а) $log_2 3^2$;

б) $log_4 5^6$;

в) $log_3 4^5$.

Решение:

а) $2log_2 3$;

б) $6log_4 5$;

в) $5log_3 4$.

Решая примеры из учебника, мы проверяем и устанавливаем действия свойств логарифмов, тем самым даем еще раз запомнить учащимся их написание, название и формулировки.

Выполним следующее задание, которое показано на экране.

Перед вами решенные примеры, среди которых есть те, в которых допущена ошибка. Ваша задача определить, какие равенства решены верно, а какие нет. В неправильно решенных заданиях исправить ошибки:

1) $log_2 32 + log_2 2 = log_2 64 = 6$;
2) $log_5 5^3 = 2$;
3) $log_3 45 - log_3 5 = log_3 40$;
4) $3log_2 4 = log_2 (4 * 3;)$
5) $log_3 15 + log_3 3 = log_3 45$;
6) $2log_5 6 = log_5 12$;
7) $3log_2 3 = log_2 2; 7$
8) $log_2 16^2 = 8$.

Подобного рода упражнения даются учащимся для развития контроля над собой, развития техники правильности вычисления математических примеров, для умения рационально работать.

Продолжим работу с учебником. Решаем номера с выходом к доске №5.22, №5.23, №5.24.

Выход к доске – один из способов, позволяющий развивать у школьников ответственное отношение к учебной работе, умение правильно выстраивать связный логический монолог при решении задания, и при необходимости поддерживать диалог с преподавателем. Помимо этого, во время ответа у доски одного учащегося прочие, глядя и слушая его, также учатся невольно про себя проговаривать изученный материал, последовательный алгоритм решения, что так же провоцирует лучшему запоминанию материала, дает возможность в будущем предвидеть «опасное место» в примере, не допустить ошибку или при проверке вовремя ее исправить.

Для подведения итогов работы на уроке, учащимся предлагается написать синквейн – это пятистрочная стихотворная форма, которая описывает суть изучаемых понятий.

Первая строка синквейна – одно существительное, которое выражает тему синквейна.

Вторая строка – два прилагательных, выражающие главную мысль.

Третья строка – три глагола, которые описывают действия.

Четвертая строка – фраза, несущая определенный смысл.

Пятая строка – ассоциация с первой строкой, выраженная в форме существительного.

Например: Логарифм.
Десятичный, натуральный.
Вычисляет, упрощает, уравнивает.
Логарифмирование – вычисление логарифмов.
Просто, как 2х2.

Подобного рода рефлексия развивает у детей не только критическое мышление, но и образное. Данная форма работы поможет учителю понять, на сколько верно и правильно был отобран и преподнесен материал, количество учеников, которые освоили данную тему. Так же учитель сможет определить, на сколько было легко или тяжело усвоить тему «сильным» и «слабым» учащимся.

В конце урока задается домашнее задание.

§5.1-5.2, записи в тетради, №5.17 (в, г), №5.18 (а-г), №5.26.

Поэтому при изучении логарифма и его свойств необходимо учитывать психологические особенности материального восприятия. Когда учащиеся самостоятельно проходят все стадии, которые формируют эту концепцию, они вырабатывают логарифмическую уверенность в себе. Выбор упражнений соответствует психологической основе методических задач и формул слухового восприятия и цифровой комбинации зрительного восприятия.

2.3 Внеурочная работа как вид организации работы по формированию приемов поиска ошибок

По мере роста интереса школьников к логической структуре науки и продвижения по ступеням вверх школьной программы возрастает применение математических софизмов.

Что же такое софизм?

Софизм – слово греческого происхождения, в переводе означающее хитроумную выдумку, ухищрение или головоломку.

Раскрыть софизм – значит указать ошибку в рассуждении. Осознание ошибки достигается противопоставлением ложному рассуждению истинного.

Математические софизмы обычно основаны на неправильном использовании слов, неточной формулировке, скрытых проявлениях невозможных действий, незаконном обобщении, особенно при переходе от ограниченного числа объектов к неограниченному количеству, и маскировке неправильных рассуждений.

Математические софизмы бывают следующих видов: арифметические, геометрические, логические.

I. Арифметические софизмы

Арифметические софизмы рассматриваются на примере ложных рассуждений.

1. Квадратные рубли

Как известно, всякие два равенства можно перемножать почленно. Применим эту теорему к двум равенствам:

$$\text{а рублей} = 100\text{а копеек},$$

$$1 \text{ рубль} = 100 \text{ копеек}.$$

Мы получим новое равенство:

$$\text{а рублей} = (100\text{а} * 100) \text{ копеек}$$

или

$$\text{а рублей} = 10\,000\text{а копеек},$$

что явно неверно.

Отметим, что, взяв вместо денежных единиц единицы длины, мы не получим ничего неверного:

$$\text{а м} = 100\text{а см},$$

$$1 \text{ м} = 100\text{см},$$

$$\text{а кв. м} = (100\text{а} * 100) \text{ кв. м}$$

или

$$\text{а кв. м} = 10\,000\text{а кв. см}.$$

Получив от умножения чисел, выражающих метры, число, выражающее уже не линейные, а квадратные метры, мы догадываемся в чем была допущена ошибка, имея дело с деньгами: умножить *а* рублей на 1 рубль нельзя, так как никаких «квадратных рублей» и «квадратных копеек» не существует.

2. 40:8=41

Маленький Петя очень не любил считать устно.

Решая задачу о дележе 40 орехов между 8 мальчиками поровну, он и в этом случае обратился к схеме письменного деления.

Выполнение действия деления у него выглядело так (рисунок 8):

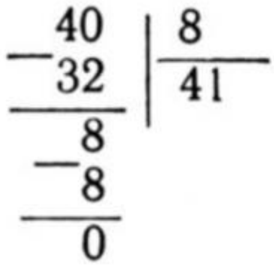

Рисунок 8

Полученный ответ смутил Петю. Он хорошо понимал, что не может каждый мальчик получить больше орехов, чем их было у всех вместе, но своей ошибки в делении так и обнаружить не мог.

Помогите маленькому Пете понять свою ошибку.

Грубая ошибка Пети не сразу бросится в глаза, и объяснить ее затрудняются многие.

В основе рассуждения Пети лежит правильная мысль. Она состоит в том, что точное деление (без остатка) сводится к последовательному вычитанию делителя из делимого до получения разности, равной нулю.

Производя деление 40 на 8, Петя должен был установить, сколько раз из 40 можно вычесть 8. Он установил, что так можно сделать 4 раза $(8 * 4 = 32)$ и еще один раз $(8 * 1 = 8)$, то есть выполнил деление так:

$$40:8 = (32+8):8 = 32:8+8:8 = 4+1.$$

Однако в силу неправильного использования записи при вычислении единицы первого слагаемого возведены Петей в ранг десятков: $4+1$ оказались у него приравненными $4 * 10 + 1 = 41$. В этом его ошибка [2].

II. Геометрические софизмы

Геометрические софизмы – это логический вывод, доказывающий противоречивые утверждения, связанные с геометрическими фигурами и действиями над ними.

3. Софизм об исчезающем квадрате

Большой квадрат составлен из четырёх одинаковых четырёхугольников и маленького квадрата (рисунок 9.1).

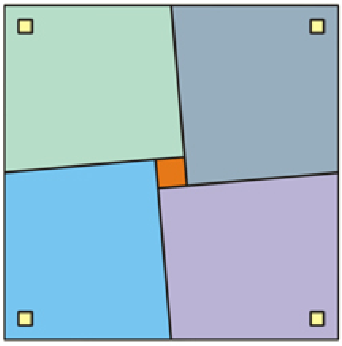

Рисунок 9.1

Если четырёхугольники развернуть (рисунок 9.2), то они заполнят площадь, занимаемую маленьким квадратом, хотя площадь большого квадрата визуально не изменится.

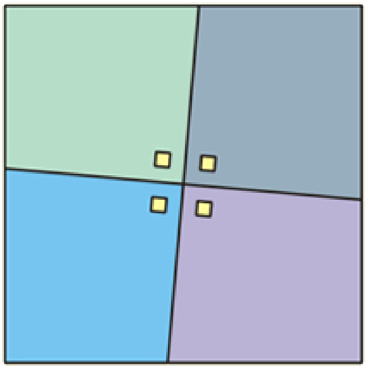

Рисунок 9.2

В чем ошибка?

Необходимо внимательно посмотреть на ход действий.

Одинаковая ли площадь у обоих квадратов? Нет, так как сторона и площадь нового квадрата меньше стороны и площади того, который был изначально. При решении данного софизма необходимо воспользоваться разрезанием этого квадрата, сложить и сравнить с исходным квадратом.

4. Задача о треугольнике

Дан прямоугольный треугольник 13x5 клеток, составленный из 4 частей (рисунок 10.1)

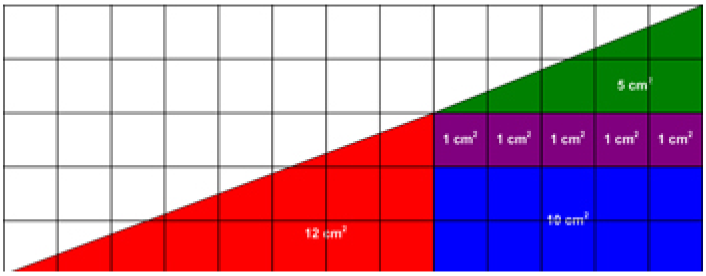

Рисунок 10.1

После перестановки частей при визуальном сохранении изначальных пропорций появляется дополнительная клетка (рисунок 10.2)

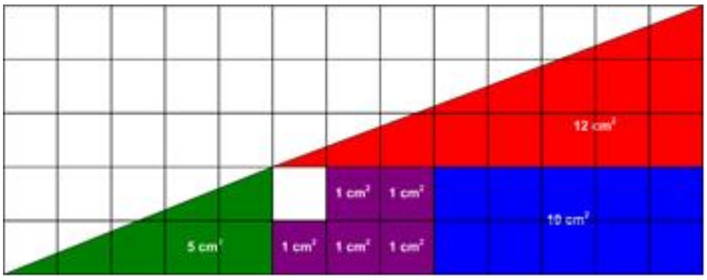

Рисунок 10.2

Откуда взялась пустая клетка?

Если же посмотреть внимательно на чертежи, то можно заметить гипотенузы больших треугольников не совпадают. На самом деле новая фигура будет являться ломаным четырёхугольником [1] (рисунок 10.3).

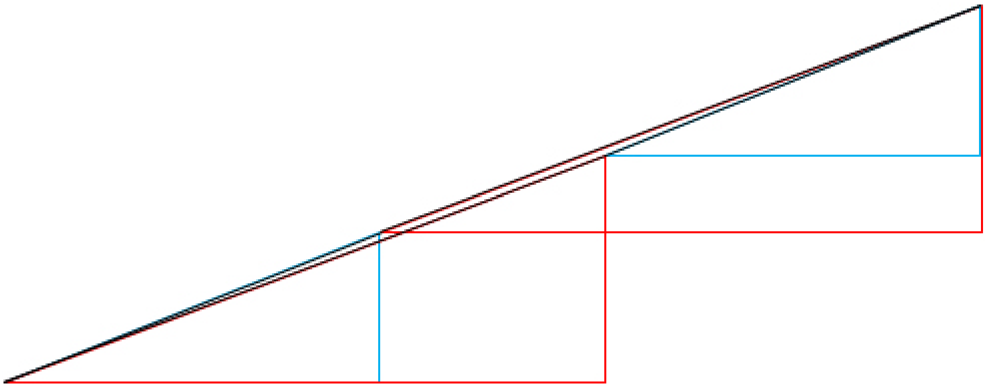

Рисунок 10.3

III. Логические софизмы

5. Полупустое и полуполное

Полупустое есть то же, что и полуполное. Если равны половины, значит равны и целые. Значит, пустое есть то же, что и полное.

6. Три = двум

Рассмотри тождество:

$$9 + 6 - 15 = 6 + 4 - 10;$$

$$3 \times 3 + 3 \times 2 - 3 \times 5 = 2 \times 3 + 2 \times 2 - 2 \times 5;$$

$$3 \times (3 + 2 - 5) = 2 \times (3 + 2 - 5) \mid \div (3 + 2 - 5);$$

$$3 = 2.$$

Как же так вышло?

Ошибка допущена при делении верного равенства

$$3 \times (3 + 2 - 5) = 2 \times (3 + 2 - 5)$$

на число $(3 + 2 - 5) = 0$. А как известно, на нуль делить нельзя! [9].

Приведенный выше вопрос ясно показывает, что математические софизмы заставляют особенно внимательно читать текст, следовать напоминаниям о точности формулировок в записях и соблюдать все условия применения определенных теорем.

Упражнения на раскрытие софизмов не дают гарантии от возникновения подобных ошибок в будущем, но дают шанс предвидеть их.

Использование математических софизмов включает в себя изнурительную работу, когда задаешь вопросы по освещению неправильных тем. Найти готовый ответ на вопрос сразу нельзя. Здесь необходимо терпеть известные запасы принятых теоретических материалов, самостоятельного мышления и сознательных манипуляций, и математических факторов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе обучения математике известная поговорка «Умные учатся на чужих ошибках» практически не работает. Математические трудности школьников при изучении материала всегда находятся в зоне повышенного внимания у педагогического состава. Ведь груз ответственности лежит на хрупких плечах учителей. Первоочередной задачей педагога не только доступно преподнести новый материал, но и включить в сам процесс учебной деятельности учащегося, организовать процесс самостоятельного овладения школьниками новых знаний, в процесс применения полученных знаний в решении познавательных и жизненных проблем, что способствует достижению предметных результатов.

В качестве цели исследования было выдвинуто развитие методов обучения математике, которые создадут условия для усовершенствования рефлексивной деятельности школьников, что поможет предотвращать и устранять типичные ошибки для достижения результатов дисциплины.

По ходу проведенного анализа было выяснено, что цель исследования была достигнута благодаря решению задач:

1. Выявлению причин возникновения ошибок у учащихся при обучении математике.
2. Рассмотрению процесса работы над ошибками учащихся.
3. Изучению способов устранения ошибок учащихся при обучении математике для достижения предметных результатов.
4. Анализу результатов ЕГЭ по математике.
5. Представлению методики работы с ошибками учащихся для достижения предметных результатов.

В ходе работы были выявлены причины возникновения ошибок у учащихся, изучены способы работы над ними.

Правильная и слаженная работа школьников и учителя над типичными ошибками с помощью методов исследования приводит к улучшению результатов обучения математике и развитию логического мышления, что помогает достичь предметных результатов.

В процессе самостоятельной работы по отысканию и исправлению ошибок, определении цели своей деятельности, её планировании, оцениванию и корректированию полученных результатов приводит к формированию следующих навыков:

- контролировать способы решения поставленных задач;
- оценивать правильность выполненных действий;
- вносить корректировки в исполнении по ходу и в конце реализации действий;
- осуществлять контроль по результату и по способу действия.

Чтобы добиться предотвращения и исправления ошибок учеников, учителя должны постоянно контролировать их самостоятельную деятельность, определять наиболее постоянные и типичные ошибки и записывать личные и распространенные ошибки. Также необходимо прогнозировать и предотвращать ошибки, используя упражнения, которые предотвращают односторонние ассоциации и неправильные обобщения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Словари и энциклопедии на Академике: URL: https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/1496403/ Wikimedia Foundation. 2010 (дата обращения: 23.04.2020).
2. Брадис В. М. и др. Ошибки в математических рассуждениях / В. М. Брадис, В. Л. Минковский, А. К. Харчева. — 2-е изд., перераб. — М. : Учпедгиз, 1959. — 176 с.
3. Груденов Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики: Кн. Для учителя. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.
4. Дубнов Я.С. Ошибки в геометрических доказательствах. Советский учебник // книга для учеников средней школы. – 3-е изд., стереотип. – М. : ФИЗМАТГИЗ, 1961. – 71 с.
5. Зеленский А. С. Формирование навыков самоконтроля у старшеклассников // Математика в школе. – 2014. – №9. – С. 26 – 30.
6. Колосова В. А. Совершенствование системы методической работы с математическими ошибками школьников (на материале курса математики 5-6 кл. средней школы) : дис. канд. пед. наук : 13.00.02 / Колосова Вера Анатольевна; науч. рук. М. И. Зайкин; Арзамасский государственный педагогический институт им. А. П. Гайдара. – Арзамас, 1997. – 192 с.
7. Майкова Н. С. Виды ошибок учащихся при обучении решению геометрических задач, их причины и способы предупреждения / Н. С. Майкова // Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. – 2008. – № 73-2. – С.116 – 118.
8. Мугаллимова С.Р. О типичных ошибках обучающихся по математике // Сургутский институт экономики, управления и права. – 2015. – URL:http://www.surgpu.ru/media/medialibrary/2015/03/Статья_Мугаллимова.pdf (дата обращения: 15.04.2020).
9. Непряхин Н. Убеждай и побеждай: Секреты эффективной

аргументации / Никита Непряхин. — 2-е изд. — М. : Альпина Паблишер, 2012 — 254 с. ISBN 978-5-9614-1793-7.

10. Никольский С.М. и др. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учебник для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – 8-е изд. – М. : Просвещение, 2009. – 430 с. : ил. – ISBN 978-5-09-021132-1.
11. Тарасова О. А. Предупреждение типичных ошибок учащихся в процессе обучения алгебре посредством формирования и использования рефлексивной деятельности : автореф. дис. канд. пед. наук : 13.00.02 / Тарасова Ольга Анатольевна; НГПУ. – Новосибирск, 2004. – 189 с.
12. Ященко И. В. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2019 года по математике / И. В. Ященко, И. Р. Высоцкий, А. В. Семёнов // Педагогические измерения. – 2019. – №3. – С. 23 – 40.