МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика изучения пределов числовых последовательностей и пределов функций в профильных классах средней школы

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»
Форма обучения очная

Проверка на объем заимствований:
68% авторского текста
Работа рекомендована к защите
«26» апреля 2022 г.
и. о. зав. кафедрой математики и МОМ
_________ Суховиенко Е. А.

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513/086-5-1
Чипизубова Ксения Владимировна

Научный руководитель:
доцент, к.ф.-м.н., доцент кафедры МиМОМ
Вагина Мария Юрьевна

Челябинск
2022

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Современное общество ставит перед школой задачу профилизации будущих выпускников.

Главной целью профильного обучения является обеспечение общедоступности для учащихся получения полноценного образования в соответствии с их индивидуальными склонностями и потребностями, обеспечение профессиональной ориентации и самоопределения обучающихся, установление преемственности между общим и профессиональным образованием.

Необходимым условием создания образовательного пространства, способствующего самоопределению учащегося, является введение профильной подготовки.

Введение в классах старшей ступени обучения профильной дифференциации образования предусматривает право и возможность старшеклассникам самостоятельно выбирать различные направления и уровень обучения (профильный или базовый) с учетом индивидуальных интересов, склонностей и способностей. Такая образовательная ситуация формирует потребность в методическом обеспечении учебного процесса, осуществляемого учителями в условиях профильной дифференциации.

Основная задача обучения математики в школе заключается в обеспечении прочного и сознательного овладения учащимися системой математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности каждому члену современного общества, достаточных для изучения смежных дисциплин и продолжения образования.

Понятие предела является одним из ключевых понятий всей математики. Мы имеем в виду не только школьную программу по математике, но и высшую математику, и, самое главное, математику как науку, способ рассуждения, метод познания мира, часть общечеловеческой культуры.

Предел функции и предел последовательности являются фундаментальными понятиями математики. Кроме математического и прикладного значения они несут в себе и культурологическую нагрузку, поэтому знакомство с ними является необходимым ученикам, изучающим математику в старшей школе. Изучение этого материала в школе можно рассматривать и как подготовительный этап для освоения этих понятий в курсах высшей математики. Особенно важно это для тех, кто будет изучать сокращенный курс высшей математики, в котором эти понятия рассматриваются формально, основное внимание уделяется решению задач на вычисление пределов.

Целью дипломной работы является изучение существующей методики изучения пределов числовых последовательностей и пределов функций в профильных классах средней школы и разработка комплекса заданий, способствующих развитию навыков работы с пределами.

Объектом исследования является процесс обучения математике в старшей школе.

Предметом исследования является методика изучения пределов числовых последовательностей и пределов функций в профильных классах средней школы.

Гипотеза исследования: всестороннее изучение пределов числовых последовательностей и пределов функций с использованием разнообразных методических материалов будет способствовать развитию устойчивых навыков работы с пределами и эффективной подготовке старшеклассников в соответствии с выбранным профилем обучения.

Поставленная цель определяет следующие **задачи исследования**:

– изучить психолого-педагогические и возрастные особенности детей старшего школьного возраста;

– выявить особенности социального заказа как основы профильного обучения;

– рассмотреть формирование УУД у обучающихся в рамках реализации ФГОС через призму профильного обучения;

– проанализировать методические особенности изучения пределов числовых последовательностей и пределов функций в профильных классах средней школы в наиболее распространенных учебных изданиях, включенных в Федеральный перечень учебников;

– разработать комплекс заданий для формирования навыков работы с пределами в классах с углубленным изучением математики.

Методы исследования: наблюдение, сравнение, анализ, синтез, обобщение, описание.

Структура исследования: работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложения. Первая глава исследования содержит три параграфа и представляет собой психолого-педагогические основы профильной дифференциации обучения, во второй главе представлена практическая область по теме исследования.

ГЛАВА I. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОФИЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ ОБУЧЕНИЯ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

1.1 Психолого-педагогические и возрастные особенности детей старшего школьного возраста

Старший школьный возраст – пора выработки взглядов и убеждений, формирование мировоззрения. В связи с необходимостью самоопределения у ребенка возникает потребность разобраться в окружении и в самом себе.

Старший школьный возраст имеет большое значение в процессе формирования личности. Это переходный период между детством и взрослостью. Выготский Л.С., описывая потребности и мотивы, возникающие в этот период, связывал их с развитием новообразований, главные из которых – развитие рефлексии, и на ее основе – самосознания как побудительного мотива к саморазвитию [8].

Этот период является значимым для развития самосознания подростка, его рефлексии, предпосылок к саморазвитию. Оно способствует наиболее полному развитию и реализации учащимися своих потенциальных возможностей, позволяет приобрести мобильность и конкурентоспособность, увеличивает шансы получения более высокооплачиваемой и престижной профессии на рынке труда.

Значимые изменения в старшем школьном возрасте переживают познавательные процессы человека. Дифференциация учебных дисциплин, потребность овладения научными понятиями разных наук и их специфичной системой символов, способствуют развитию теоретического мышления.

Учебная деятельность, включающая в себя процесс усвоения знаний и способов их использования, дает возможность старшему школьнику устанавливать более широкие и глубокие связи между имеющимися и вновь получаемыми знаниями, более осознанно контролировать свою мыслительную деятельность и управлять ею [7].

Постепенно у школьника формируются навыки самостоятельно оперировать предположениями и критически их оценивать.

Все более отчетливо прослеживается самостоятельность в учебной деятельности.

Процесс преподавания в системе обучения старшеклассников должен быть нацелен на интеллектуальное развитие, развитие логического и образного мышления, которое свойственно для учебной деятельности обучающихся, в том числе обучении математике.

В теории и методике обучения математике крайне недостаточно внимания обращается на эмоциональную сторону обучения, не рассматриваются эмоциональные особенности личности обучающегося, а их необходимо принимать во внимание, так как именно эмоции придают учебному процессу важность.

Среди таких психологических оценок обучения имеет большое значение такие понятия, как интерес и мотивация. Они являются главными в любой деятельности.

Старший школьный возраст меняет ориентированность интересов обучающегося. Появляется вопрос о предназначении, будущей квалификации, круг интересов становится шире, из-за чего может наблюдаться небольшое снижение познавательного интереса.

Анализируя объективные причины, оказывающие влияние на познавательный интерес, согласно В. А. Гусеву, приходим к заключению, что познавательный интерес – это эффективная сила для формирования личности и ее самоопределения [9].

Заинтересовать старшеклассников, сформировать его интерес к обучению, мотивировать его – задача не из самых простых.

Педагогу необходимо сопоставить математику как специальный тип знаний и род занятий, продемонстрировать связь математики с реальными жизненными ситуациями. Обучение должно быть построено так, чтобы обучающийся мог самостоятельно достигать поставленные цели.

В.А. Гусев в своем труде «Теория и методика обучения математике» приходит к выводу, что в процессе обучения возникают противоречия и они являются внутренней движущей силой. Противоречия возникают между сложившимся уровнем целостности процесса обучения и новым нарождающимся, закрепляющимся [9].

Действительно, имеющиеся и возникающие противоречия, их разрешение могут подтолкнуть школьника к перестройке всей системы отношений к окружающему миру, к учебному предмету, к людям.

В процессе обучения математике главное противоречие – это противоречие между тем, что есть, и тем, что должно быть. Оно и является ведущей движущей силой развития личности, а также побудителем в приобретении знаний. При этом причины этого противоречия могут быть абсолютно разные.

Например, к внешним относятся учитель, родители; к внутренним - самооценка, самоконтроль и саморегулирование. Еще можно столкнуться с более частными противоречиями. К ним относятся потребность выражать свое мнение и свое отношение к происходящему; и умалчивание об этом. Считается неловким произнести: «я не знаю», «я не понял», «мне не интересно» и т.п. Это одно из значительных противоречий, которое должен разрешить обучающийся на занятиях. Тогда это будет способствовать формированию общих ключевых качеств личности, которые необходимы ей в любой жизненной ситуации. Помимо того, без такой четкой самооценки невозможно говорить о развитии общих и математических способностей.

К числу определенных различных отличительных особенностей к обучению старшеклассников отнесём выборочное отношение к учебным предметам. Значительно реже встречается общее, соразмерное позитивное отношение ко всем учебным предметам. У старшеклассников есть и иная серьёзная причина выборочного отношения к учебным предметам – наличие у многих юношей и девушек установившихся интересов, связанных с их выбором будущей профессиональной деятельности.

Описывая интересы старшеклассников, сначала следует добавить, что именно в этом возрасте юноши и девушки, как правило, определяют свой специфический устойчивый интерес к той или иной области деятельности. Что и приводит к формированию познавательно-профессиональной направленности личности, определяет выбор профессии, жизненный путь после окончания школы. Наличие такого специфического интереса стимулирует систематическое стремление к расширению и углублению познаний в конкретной области: старший школьник активно знакомится с необходимой литературой, охотно занимается в соответствующих кружках, изыскивает возможность посещать дополнительные занятия и т.п.

Следует помнить, что дополнительное математическое образование должно предлагать ученику содержание образования по максимальному уровню. Работа проводится на высоком уровне сложности, но оценивается лишь обязательный результат, и полученный успех. Это дает возможность сформировать у учащихся установку на достижение успеха, что оказывает влияние на развитие мотивационной сферы.

Углубленное образование доступно для всех желающих, главное, чтобы было стремление и интерес. При этом успехи обучающегося сравниваются только с предыдущим уровнем его знаний и умений, а стиль, темп, качество его работы не подвержены критике.

Познавательные интересы у старшеклассников принимают более широкий, устойчивый и действенный характер. Развитие познавательных интересов, рост осознанной связи с обучением стимулирует со временем становление свободных познавательных процессов и способность управлять ими.

К концу обучения старшеклассники полностью охватывают область собственных познавательных процессов, таких как восприятие, память, воображение, мышление, а также внимание, подвергая их характерным задачам жизни и деятельности.

Заметно развивается и совершенствуется способность к переключению и распределению внимания и это необходимо учитывать при организации различных занятий в системе дополнительного математического просвещения школьников.

Отметим еще одну особенность внимания, характерную для старшеклассников, – его избирательность. Избирательность внимания у некоторых учащихся проявляется и в том, что, воспринимая учебный материал, они всегда стараются оценить его значимость, понять его через призму практической значимости. Установив, что данный раздел важен, ученик активно воспринимает его. Если же школьнику кажется, что материал несущественный, он ослабляет свое внимание. Обычно внимание старшего школьника непроизвольно сосредоточивается на предмете именно тогда, когда речь идет о применении на практике конкретных знаний из этой области.

Понимание важности рассматриваемого учебного материала необходимо закладывать обучающимся данной возрастной категории, так как у старшеклассников уже имеется достаточный уровень математической подготовки для рассмотрения углубленных вопросов математической теории.

Математическое образование призвано решить целый комплекс задач по углубленному математическому образованию, всестороннему развитию индивидуальных способностей школьников и максимальному удовлетворению их интересов и потребностей. Реализация принципа индивидуализации обучения актуальна для всех составляющих образовательных программ старшеклассников, особое место занимает математическое образования.

Например, участие абитуриентов в олимпиадах, проводимых вузами, позволяет развивать их индивидуальные способности, сконцентрироваться на заданиях их будущей профессиональной деятельности, которую они выбирают [16].

Индивидуализация обучения, в первую очередь, ориентирована на выявление, учет и формирование тех индивидуальных особенностей учащихся, от которых в большей степени зависит успешность обучения. В то же время индивидуализация обучения математике, являясь составной частью целостного процесса индивидуализации обучения, направлена на формирование индивидуальности учащихся.

К концу обучения старшеклассник должен овладеть умением самостоятельно думать, овладеть методикой и техникой самостоятельной интеллектуальной работы, самостоятельным приобретением знаний, т.е. овладеть умением самообучаться. И такая организация обучения, нацеленная на формирование и развитие этих умений.

Широкие возможности дополнительное образование дает для развития информационно-коммуникационной компетентности, которая позволяет удовлетворить потребность выпускников в самоутверждении и самосовершенствовании, формировать необходимые для современного общества личностные качества и специальные умения.

Использование в дополнительном математическом образовании различных средств информационных технологий поможет обучающимся, как отмечает Е.И. Скафа, развить как информационную, так и аналитическую культуру, что является важным для дальнейшего образования старшеклассников [18].

Эта позиция учитывается при проектировании электронно-образовательных контента по математике в системе математического образования школьников [10].

В математическом образовании необходимо принять во внимание, что старшеклассники склонны обращать большое внимание на обоснованность и доказательность тех или иных положений. Они стремятся удостовериться в истинности того, с чем им приходится знакомиться на дополнительных занятиях. Надлежит не только удовлетворять, но и поощрять эту характерную старшекласснику требовательность, полезную для его интеллектуального развития к убедительной аргументированности, обоснованности и доказательности усваиваемых знаний, необходимость иметь собственную точку зрения.

При изучении точных наук ученику труднее демонстрировать присущую ему критичность и существование своей специальной точки зрения, чем при изучении гуманитарных предметов.

1.2 Социальный заказ как основа профильного обучения

В настоящее время подготовка старших школьников к жизненному и профессиональному самоопределению остается актуальной социально-педагогической проблемой, выдвигая на первый план задачи обеспечения вариативности образовательного пространства.

Требует изменений общая для многих российских школ практика, когда выбор профиля осуществляется старшеклассниками случайно, а профильное обучение в основном ориентировано на углубление и расширение знаний, но не обеспечивает условий для осуществления старшеклассниками профессиональных проб.

Тормозящим фактором в профессиональной ориентации выступает также и тот факт, что на старшей ступени главные усилия школьников затрачиваются на подготовку к ГИА и ЕГЭ, при этом важный вопрос выбора профессии, определяющий жизненные перспективы молодого человека, практически не решается.

Положение дел усугубляется тем, что до сих пор не решен кадровый вопрос подготовки компетентных специалистов в сфере профориентации, отсутствуют штатные должности специалистов по сопровождению профессионального самоопределения, данная функция распределена по различным должностям работников образования, что приводит к размыванию ответственности, снижению мотивации педагогов к ведению профориентационной работы.

Следовательно, у значительной части школьников выбор будущей профессиональной сферы деятельности и соответствующего образования происходит интуитивно, под влиянием случайных факторов и стереотипов. Поэтому совершенно справедливы выводы целого ряда ученых о том, что сложившаяся система профилизации школьного образования не способствует успешному социально-профессиональному самоопределению и дальнейшей конкурентоспособности молодежи на рынке труда [7].

Вместе с тем в федеральных государственных образовательных стандартах общего образования подчеркивается необходимость профориентации и отмечается, что школьники должны ориентироваться в мире профессий, понимать значение профессиональной деятельности в интересах устойчивого развития общества и природы.

В сформулированных требованиях стандартов обозначена значимость старшей ступени общего образования для продолжения обучения в образовательных учреждениях профессионального образования, профессиональной деятельности и успешной социализации.

Введение профильного обучения в соответствии с требованиями ФГОС СОО коренным образом изменяет деятельность общеобразовательной организации, так как позволяет «приблизить» образовательную деятельность к потребностям ученика.

В соответствии с частью 3 статьи 66 Федерального закона от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» среднее общее образование направлено на дальнейшее становление и формирование личности обучающегося, развитие интереса к познанию и творческих способностей обучающегося, формирование навыков самостоятельной учебной деятельности на основе индивидуализации профессиональной ориентации содержания среднего общего образования, подготовку обучающегося к жизни в обществе, самостоятельному жизненному выбору, продолжению образования и началу профессиональной деятельности.

Профильное обучение – средство индивидуализации обучения, позволяющее за счет изменений в структуре, содержании и организации образовательного процесса более полно учитывать интересы, склонности и способности обучающихся, создавать условия для обучения старшеклассников в соответствии с их профессиональными интересами и намерениями в отношении продолжения образования.

Профильная школа должна обладать современной инфраструктурой с функциональной школьной архитектурой, медиатекой и библиотекой, высокотехнологичным учебным оборудованием, интерактивными учебными пособиями, условиями для занятий спортом и творчеством.

Для обучающихся 10-11 классов профильной школы на первый план выходит профессионально-учебная деятельность, в школе создается более комфортная атмосфера, планомерно реализуется образовательная и воспитательная работа с учетом возраста обучающихся, создаются оптимальные условия для сохранения здоровья и развития обучающихся.

Профильные классы (группы) обеспечивают:

– осуществление профилизации обучающихся, расширенный уровень подготовки по выбранному профилю;

– развитие творческих способностей в соответствии с их интересами и склонностями;

– формирование у обучающихся навыков самостоятельной и научно-исследовательской работы;

– создание обучающимся оптимальных условий для получения среднего общего образования в соответствии с требованиями федеральных государственных образовательных стандартов, с учетом запросов и интересов обучающихся и их родителей (законных представителей).

Организация личностно ориентированного образовательного процесса, создающего среду для построения учеником собственной траектории образования – основная идея по реализации профильного обучения на уровне среднего общего образования.

Современное общество ставит перед школой задачу профилизации будущих выпускников. Главной целью профильного обучения является обеспечение общедоступности для учащихся получения полноценного образования в соответствии с их индивидуальными склонностями и потребностями, обеспечение профессиональной ориентации и самоопределения обучающихся, установление преемственности между общим и профессиональным образованием [5].

Необходимым условием создания образовательного пространства, способствующего самоопределению учащегося, является введение профильной подготовки.

Основная образовательная программа на старшей ступени предусматривает изучение обязательных учебных предметов, входящих в учебный план (учебных предметов по выбору из обязательных предметных областей, дополнительных учебных предметов, курсов по выбору и общих для включения во все учебные планы учебных предметов, в том числе на углубленном уровне), а также внеурочную деятельность [6].

Школа, осуществляя образовательную деятельность, должна обеспечить реализацию одного или нескольких учебных профилей. Образовательная организация часть выявляет предпочтения обучающихся и использует этот анализ для планирования того, какие именно профили будут реализовываться. Профильными общеобразовательными предметами являются курсы повышенного уровня, углубляющие знания базовых общеобразовательных предметов. Деятельность и учителей, и учеников по освоение профильных предметов направлена на овладение знаниями и умениями, определенными в федеральном государственном образовательном стандарте среднего общего образования.

Перечень профилей, согласно ФГОС СОО, которые может предложить школа обучающимся на среднем уровне образования представлена в Таблице 1.

Таблица 1 – Перечень профилей по ФГОС СОО

№	Профиль	Профильные предметы
1	Естественно-научный	Математика, химия, биология
2	Гуманитарный	Русский язык и литература, иностранный язык, обществознание, история, право
3	Социально-экономический	Математика, экономика, право, география
4	Технологический	Математике, физика, информатика

Также выделяют универсальный профиль, он ориентирован на тех обучающихся, кто еще не определился с выбором дальнейшей профессии, и область интересов не находит отражение в других профилях подготовки. Именно поэтому требования ФГОС СОО выбрать 3-4 предмета для углубленного изучения не распространяются на данный профиль. Универсальный профиль позволяет ученику ограничиться изучением основных предметов, не исключая углубленного изучения каких-либо дисциплин.

Учебный план профиля обучения или индивидуальный учебный план должны содержать одиннадцать или двенадцать учебных предметов и предполагать изучение не менее одного учебного предмета из каждой предметной области. Обязательным для включения во все учебные планы являются: русский язык, литература, математика, история, иностранный язык, физическая культура, основы безопасности жизнедеятельности и астрономия.

Также учебный план профиля обучения (кроме универсального) должен содержать не менее ¾ учебных предметов на углубленном уровне изучения из соответствующей профилю обучения предметной области или смежной с ней предметной области.

В естественно-научном, социально-экономическом и технологическом профилях учебный предмет «Математика» в 10-11-х классах изучается как единый предмет на углубленном уровне в объёме 6 часов в неделю с сохранением еженедельной организационной и содержательной структуры преподавания.

На тему «предел функции и непрерывность» в классах с углубленным изучением математики отводится 5 часов. Тема «Предел последовательности» изучается в объеме 5 часов.

Основываясь на принципах преемственности образовательных программ начального общего, основного общего, среднего (полного) общего, профессионального образования, новые стандарты определяют формирование нового содержания профильного образования. Следует рассмотреть отдельные положения ФГОС, выступающие в качестве ориентиров к обновлению современной профильной школы.

Методологической основой стандарта является системно-деятельностный подход, обеспечивающий формирование готовности обучающихся к саморазвитию и непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности. То есть речь идет об образовании, которое развивает личность как индивидуальность, самостоятельную в проектировании жизненных и профессиональных задач.

Сформулированные в стандарте требования к результатам освоения основной образовательной программы (личностным, метапредметным, предметным) позволяют определить наиболее значимые содержательные направления подготовки педагогов к реализации профориентационной работы.

Так, например, среди личностных результатов освоения основной образовательной программы старшеклассником ключевым назван осознанный выбор будущей профессии и возможностей реализации собственных жизненных планов. Другим важным личностным результатом обозначено отношение к профессиональной деятельности как возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем.

Одним из основных принципов, обеспечивающих эффективность обучения вообще и математике в частности, является принцип профессиональной направленности.

Перечисленные задачи требуют от учителя эффективных трудовых действий на содержательном (отбор и построение курса математики) и методическом (разработка соответствующего методического обеспечения) уровнях организации процесса обучения с учетом специфики математики как науки и учебного предмета.

Под профессионально ориентированным обучением будем понимать «целенаправленное взаимодействие преподавателя и обучающегося, обеспечивающее качественную предметную подготовку с использованием принципа профессиональной направленности с одновременным осознанием роли и ценности предмета (математики) для предстоящей профессиональной деятельности» [8].

1.3 Формирование УУД у обучающихся в рамках реализации ФГОС через призму профильного обучения

Развитие личности в системе образования обеспечивается, прежде всего, через формирование, развитие и становление универсальных учебных действий, которые являются инвариантной основой образовательного и воспитательного процесса.

В соответствии с этим, процесс учения понимается не только как усвоение системы знаний, умений и навыков, составляющих инструментальную основу компетенций обучающегося, но и как процесс развития личности, обретения духовно-нравственного опыта и социальной компетентности.

Социальное развитие – формирование российской и гражданской идентичности на основе принятия обучающимися демократических ценностей, развития толерантности жизни в поликультурном обществе, воспитания патриотических убеждений, освоение основных социальных ролей, норм и правил.

Личностное развитие:

– развитие готовности и способности обучающихся к саморазвитию и реализации творческого потенциала в духовной и предметно-продуктивной деятельности, высокой социальной и профессиональной мобильности на основе непрерывного образования и компетенции уметь учиться;

– формирование образа мира, ценностно-смысловых ориентации и нравственных оснований личностного морального выбора;

– развитие самосознания, позитивной самооценки и самоуважения, готовности открыто выражать и отстаивать свою позицию, критичности к своим поступкам;

– развитие готовности к самостоятельным поступкам и действиям, принятию ответственности за их результаты;

– целеустремленности и настойчивости в достижении целей, готовности к преодолению трудностей и жизненного оптимизма;

– формирование нетерпимости и умения противостоять действиям и влияниям, представляющим угрозу жизни, здоровью и безопасности личности и общества в пределах своих возможностей.

Познавательное развитие:

– формирование у обучающихся научной картины мира;

– развитие способности управлять своей познавательной и интеллектуальной деятельностью;

– овладение методологией познания, стратегиями и способами познания и учения;

– развитие репрезентативного, символического, логического, творческого мышления, продуктивного воображения, произвольных памяти и внимания, рефлексии.

Коммуникативное развитие – формирование компетентности в общении, включая сознательную ориентацию обучающихся на позицию других людей как партнёров в общении и совместной деятельности, умение слушать, вести диалог в соответствии с целями и задачами общения, участвовать в коллективном обсуждении проблем и принятии решений, строить продуктивное сотрудничество со сверстниками и взрослыми на основе овладения вербальными и невербальными средствами коммуникации, позволяющими осуществлять свободное общение на русском, родном и иностранных языках [9].

Развитие системы универсальных учебных действий в составе личностных, регулятивных, познавательных и коммуникативных действий осуществляется в рамках нормативно-возрастного развития личностной и познавательной сфер выпускника школы.

Процесс обучения задаёт содержание и характеристики учебной деятельности обучающихся 10-11 классов и тем самым определяет основу универсальных учебных действий.

Универсальные учебные действия (далее – УУД) – это умение учиться, то есть способность человека к самосовершенствованию через усвоение нового социального опыта.

Программа формирования УУД дополняет традиционное содержание образовательно-воспитательных программ и служит основой для разработки программ по учебным предметам, курсам, а также программ внеурочной деятельности на ступени среднего общего образования.

Программа формирования УУД сформирована в соответствии ФГОС СОО и содержит значимую информацию о характеристиках, функциях и способах оценивания УУД на уровне среднего общего образования, а также описание особенностей, направлений и условий реализации учебно-исследовательской и проектной деятельности.

Изменения, происходящие в современной социальной жизни, вызвали необходимость разработки новых подходов к системе обучения и воспитания.

Универсальные учебные действия целенаправленно формируются в дошкольном, младшем школьном, подростковом возрастах и достигают высокого уровня развития к моменту перехода обучающихся на уровень среднего общего образования. Помимо полноты структуры и сложности выполняемых действий, выделяются и другие характеристики, важнейшей из которых является уровень их рефлексивности (осознанности).

Именно переход на качественно новый уровень рефлексии выделяет старший школьный возраст как особенный этап в становлении УУД.

Для удобства анализа универсальные учебные действия условно разделяют на регулятивные, коммуникативные, познавательные.

В целостном акте человеческой деятельности одновременно присутствуют все названные виды универсальных учебных действий. Они проявляются, становятся, формируются в процессе освоения культуры во всех ее аспектах.

Процесс индивидуального присвоения умения учиться сопровождается усилением осознанности самого процесса учения, что позволяет подросткам обращаться не только к предметным, но и к метапредметным основаниям деятельности.

Универсальные учебные действия в процессе взросления из средства (того, что самим процессом своего становления обеспечивает успешность решения предметных задач) постепенно превращаются в объект (в то, что может учеником рассматриваться, анализироваться, формироваться как бы непосредственно). Этот процесс, с одной стороны, обусловлен спецификой возраста, а с другой – глубоко индивидуален, взрослым не следует его форсировать.

На уровне среднего общего образования в соответствии с цикличностью возрастного развития происходит возврат к универсальным учебным действиям как средству, но уже в достаточной степени отрефлексированному, используемому для успешной постановки и решения новых задач (учебных, познавательных, личностных).

На этом базируется начальная профессионализация: в процессе профессиональных проб сформированные универсальные учебные действия позволяют старшекласснику понять свои дефициты с точки зрения компетентностного развития, поставить задачу доращивания компетенций.

Другим принципиальным отличием старшего школьного возраста от подросткового является широкий перенос сформированных универсальных учебных действий на внеучебные ситуации. Выращенные на базе предметного обучения и отрефлексированные, универсальные учебные действия начинают испытываться на универсальность в процессе пробных действий в различных жизненных контекстах.

К уровню среднего общего образования в еще большей степени, чем к уровню основного общего образования, предъявляется требование открытости: обучающимся целесообразно предоставить возможность участвовать в различных дистанционных учебных курсах (и это участие должно быть объективировано на школьном уровне), осуществить управленческие или предпринимательские пробы, проверить себя в гражданских и социальных проектах, принять участие в волонтерском движении и т.п.

Динамика формирования универсальных учебных действий учитывает возрастные особенности и социальную ситуацию, в которых действуют и будут действовать обучающиеся, специфику образовательных стратегий разного уровня (государства, региона, школы, семьи).

При переходе на уровень среднего общего образования важнейшее значение приобретает начинающееся профессиональное самоопределение обучающихся (при том что по-прежнему важное место остается за личностным самоопределением). Продолжается, но уже не столь ярко, как у подростков, учебное смыслообразование, связанное с осознанием связи между осуществляемой деятельностью и жизненными перспективами. В этом возрасте усиливается полимотивированность деятельности, что, с одной стороны, помогает школе и обществу решать свои задачи в отношении обучения и развития старшеклассников, но, с другой, создает кризисную ситуацию бесконечных проб, трудностей в самоопределении, остановки в поиске, осуществлении окончательного выбора целей.

Недостаточный уровень сформированности регулятивных универсальных учебных действий к началу обучения на уровне среднего общего образования существенно сказывается на успешности обучающихся.

Переход на индивидуальные образовательные траектории, сложное планирование и проектирование своего будущего, согласование интересов многих субъектов, оказывающихся в поле действия старшеклассников, невозможны без базовых управленческих умений (целеполагания, планирования, руководства, контроля, коррекции).

На уровне среднего общего образования регулятивные действия должны прирасти за счет развернутого управления ресурсами, умения выбирать успешные стратегии в трудных ситуациях, в конечном счете, управлять своей деятельностью в открытом образовательном пространстве.

Развитие регулятивных действий тесно переплетается с развитием коммуникативных универсальных учебных действий. Старшеклассники при нормальном развитии осознанно используют коллективно-распределенную деятельность для решения разноплановых задач: учебных, познавательных, исследовательских, проектных, профессиональных.

Развитые коммуникативные учебные действия позволяют старшеклассникам эффективно разрешать конфликты, выходить на новый уровень рефлексии в учете разных позиций. Последнее тесно связано с познавательной рефлексией.

Старший школьный возраст является ключевым для развития познавательных универсальных учебных действий и формирования собственной образовательной стратегии. Центральным новообразованием для старшеклассника становится сознательное и развернутое формирование образовательного запроса

Формирование познавательных универсальных учебных действий. Задачи должны быть сконструированы таким образом, чтобы формировать у обучающихся умения:

– объяснять явления с научной точки зрения;

– разрабатывать дизайн научного исследования;

– интерпретировать полученные данные и доказательства с разных позиций и формулировать соответствующие выводы.

На уровне среднего общего образования формирование познавательных УУД обеспечивается созданием условий для восстановления полидисциплинарных связей, формирования рефлексии обучающегося и формирования метапредметных понятий и представлений.

Для обеспечения формирования познавательных УУД на уровне среднего общего образования рекомендуется организовывать образовательные события, выводящие обучающихся на восстановление межпредметных связей, целостной картины мира.

Например:

– полидисциплинарные и метапредметные погружения и интенсивы;

– методологические и философские семинары;

– образовательные экспедиции и экскурсии;

– учебно-исследовательская работа обучающихся, которая предполагает:

– выбор тематики исследования, связанной с новейшими достижениями в области науки и технологий;

– выбор тематики исследований, связанных с учебными предметами, не изучаемыми в школе: психологией, социологией, бизнесом и др.;

– выбор тематики исследований, направленных на изучение проблем местного сообщества, региона, мира в целом.

Формирование коммуникативных универсальных учебных действий. Принципиальное отличие образовательной среды на уровне среднего общего образования – открытость. Это предоставляет дополнительные возможности для организации и обеспечения ситуаций, в которых обучающийся сможет самостоятельно ставить цель продуктивного взаимодействия с другими людьми, сообществами и организациями и достигать ее. Открытость образовательной среды позволяет обеспечивать возможность коммуникации:

– с обучающимися других образовательных организаций региона, как с ровесниками, так и с детьми иных возрастов;

– представителями местного сообщества, бизнес-структур, культурной и научной общественности для выполнения учебно-исследовательских работ и реализации проектов;

– представителями власти, местного самоуправления, фондов, спонсорами и др.

Такое разнообразие выстраиваемых связей позволяет обучающимся самостоятельно ставить цели коммуникации, выбирать партнеров и способ поведения во время коммуникации, освоение культурных и социальных норм общения с представителями различных сообществ.

К типичным образовательным событиям и форматам, позволяющим обеспечивать использование всех возможностей коммуникации, относятся:

– межшкольные (межрегиональные) ассамблеи обучающихся;

– материал, используемый для постановки задачи на ассамблеях, должен носить полидисциплинарный характер и касаться ближайшего будущего;

– комплексные задачи, направленные на решение актуальных проблем, лежащих в ближайшем будущем обучающихся: выбор дальнейшей образовательной или рабочей траектории, определение жизненных стратегий и т.п.;

– комплексные задачи, направленные на решение проблем местного сообщества;

– комплексные задачи, направленные на изменение и улучшение реально существующих бизнес-практик;

– социальные проекты, направленные на улучшение жизни местного сообщества.

К таким проектам относятся:

а) участие в волонтерских акциях и движениях, самостоятельная организация волонтерских акций;

б) участие в благотворительных акциях и движениях, самостоятельная организация благотворительных акций;

в) создание и реализация социальных проектов разного масштаба и направленности, выходящих за рамки образовательной организации;

г) получение предметных знаний в структурах, альтернативных образовательной организации.

Формирование регулятивных универсальных учебных действий. На уровне среднего общего образования формирование регулятивных УУД обеспечивается созданием условий для самостоятельного целенаправленного действия обучающегося.

Для формирования регулятивных учебных действий целесообразно использовать возможности самостоятельного формирования элементов индивидуальной образовательной траектории. Например:

а) самостоятельное изучение дополнительных иностранных языков с последующей сертификацией;

б) самостоятельное освоение глав, разделов и тем учебных предметов;

в) самостоятельное обучение в заочных и дистанционных школах и университетах;

г) самостоятельное определение темы проекта, методов и способов его реализации, источников ресурсов, необходимых для реализации проекта;

д) самостоятельное взаимодействие с источниками ресурсов: информационными источниками, фондами, представителями власти и т.п.;

е) самостоятельное управление ресурсами, в том числе нематериальными;

ж) презентация результатов проектной работы на различных этапах ее реализации.

Учебно-исследовательская и проектная деятельность обучающихся старшеклассников как механизм формирования УУД обусловлены, в первую очередь, открытостью образовательной организации на уровне среднего общего образования. На уровне основного общего образования делается акцент на освоении учебно-исследовательской и проектной работы как типа деятельности, где материалом являются, прежде всего, учебные предметы.

На уровне среднего общего образования исследование и проект приобретают статус инструментов учебной деятельности полидисциплинарного характера, необходимых для освоения социальной жизни и культуры

Выводы по I главе

Таким образом, проанализировав психолого-педагогическую и методическую литературу по проблеме исследования, мы пришли к выводу, что в процессе организации школьного углубленного математического образования требуется особое влияние уделять тем теоретическим концепциям, принципам и педагогическим подходам, которые являются основой для математического развития старшеклассников, их совершенствования, сформированное информационной и аналитической культуры, метапредметных компетенций.

Такой подход способствует установлению взаимодействия вуза и школы, позволяя обеспечивать самоопределение и самореализацию старшеклассников, стимулировать их интеллектуальную и творческую активность и формировать готовность к участию в инновационных процессах.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ

2.1 Анализ материалов о пределах в наиболее распространенных учебных изданиях, включенных в Федеральный перечень учебников

Разделы «Предел последовательности», «Предел функции» неоднократно включались и исключались из школьной программы. В 80-х гг. прошлого века изучение пределов было исключено из школьных учебников (кроме учебников для школ с углубленным изучением математики). Понятия производной и интеграла вводились без использования определения предела.

В настоящее время программы школьной математики предлагают достаточно разнообразный объем материала и различные подходы к изучению пределов: от краткого упоминания предела последовательности и предела функции до подробного изучения пределов, их свойств, способов вычисления и т.д.

Под редакцией А.Г. Мордковича выпускаются учебники для профильных и общеобразовательных классов. В основном теоретическая часть и базового и профильного пособия совпадает, но все же есть и некоторые различия. В учебниках профильного уровня автором подробно рассматривается числовая последовательность, ей даже посвящен отдельно параграф. Также подробно рассматривается определение сложной функции, после изучения которых даются обратные формулы для дифференцирования тригонометрических функции. Отличительной чертой этого учебника является то, что в нем содержится множество примеров, заранее разобранных автором.

В соответствии с программой С.М. Никольского предел последовательности изучается в 10-м классе. Сначала вводится понятие бесконечно малой величины, а затем определение предела: «если переменную x_n можно записать в виде суммы $x_n = a + a_n$ $(n = 1, 2, 3, ..)$, где a – некоторое число, a_n – бесконечно малая, то говорят, что x_n имеет своим пределом число a».

После определяется бесконечно большая величина. Свойства пределов суммы, разности, произведения, частного содержатся в разделе для углубленного изучения. Далее рассматривается сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. В качестве предела последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n \to \infty$, появляется число e. После этого понятие предела используется при определении степени с иррациональным показателем.

В учебнике 11-го класса этой же программы с использованием наглядного примера на интуитивном уровне разъясняется, что такое предел функции, рассматриваются примеры на вычисление пределов функций в точке и при $x \to \infty$.

С помощью определения односторонних пределов вводится второе понятие предела функции в точке. Следует отметить, что замечательные пределы в примерах теоретического материала появляются очень органично, т. к. этот материал предварительно излагался ранее. После вводятся формальные определения предела функции: «на языке $\varepsilon - \delta$» и «на языке последовательностей». Перечисляются свойства пределов функции, примеры их применения к вычислению пределов, вводится понятие непрерывной функции. Учебники этой программы содержат значительное число заданий на закрепление теоретического материала.

В учебнике Виленкина Н.Я. для профильных классов имеется обширный теоретический материал. Как и во всех учебниках для профильного уровня автор уделяет основное внимание решению задач. Не один пункт не остается без подробного разбора различных примеров и заданий, которые даются ученикам для самостоятельного решения. Обязательным является наличие задач повышенной трудности.

В начале курса математического анализа изучаются основные определения и понятия предела. Отдельно автор уделяет внимание и рассматривает как частный случай предел функции на бесконечности в точке.

В программе Колягина Ю.М. и др. понятие предела последовательности впервые используется в 10 классе при вычислении суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Формальное определение предела последовательности $(\varepsilon - \delta)$ вводится в 11 классе. В этом же пункте учебника содержится решение задач на вычисление пределов последовательностей с помощью определения предела — задач, практически равносильных заданиям из учебников по высшей математике для вузов. Далее приведены свойства сходящихся последовательностей, теоремы о пределе монотонной последовательности, проиллюстрированные примером из планиметрии — вычисление площади круга. В качестве предела последовательности появляется число e. Сформулирована теорема о пределе суммы, разности, произведения, частного последовательностей, приводятся некоторые способы вычисления пределов. Практических заданий для самостоятельного вычисления пределов последовательностей немного. После этого с использованием наглядных заданий идет подготовка школьников к восприятию понятия предела функции на языке $(\varepsilon - \delta)$. Вводятся понятия односторонних конечных пределов, бесконечного предела в конечной точке, предела в бесконечности.

Учебник Колмогорова А.Н. и др. по сравнению с другими учебными изданиями содержит наименьшее количество материала о пределах последовательности и функции. При определении непрерывной функции используется термин «предельный переход». Понятие предела здесь еще не используется, а практические задания сформулированы, например, следующим образом:

«К какому числу стремится функция f, если $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, x \to 1$?».

Определения производной и интеграла вводятся без использования понятия предела. После определения производной, в разделе «Сведения из истории» сообщаются: определения предела последовательности и предела функции, свойства пределов функций. Практических заданий для закрепления этого материала не предусмотрено. Материал о пределах последовательности и функции в данном учебнике носит ознакомительный характер.

В учебнике Мордковича А.Г. предел последовательности, а затем предел функции изучаются непосредственно перед изучением производной. В отличие от предыдущих учебных изданий, здесь отсутствует строгое определение предела последовательности, зато есть понятные учащимся пояснения и наглядные примеры. В теоретическом материале содержится геометрическая интерпретация предела на примерах последовательностей

$$y_n = \frac{1}{n};\ y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n;\ y_n = \frac{2n}{n+1}.$$

Далее формулируются свойства сходящихся последовательностей. В качестве иллюстрации теоремы Вейерштрасса о сходимости монотонной последовательности приведен традиционный пример — вычисление площади круга. Свойства пределов последовательностей сопровождаются решением соответствующих заданий; вычисляется сумма бесконечно убывающей геометрической последовательности. В отличие от других учебников, первый предел функции, с которым знакомятся школьники — это предел функции на бесконечности $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$, интуитивно более понятный из имеющегося у учащихся жизненного опыта, чем предел в точке. При введении этого предела используется геометрическая иллюстрация — горизонтальная асимптота $y = b$ функции $f(x)$. Далее с помощью наглядных примеров вводятся понятия: предела функции в точке и непрерывной функции. После темы «Приращение аргумента. Приращение функции» учащиеся приступают к изучению производной.

Материал данного учебника доступен и для самостоятельного изучения, подобран с учетом возраста и практического опыта старших школьников и соответствует наглядно-интуитивному уровню обоснования, значительно более понятному и доступному для учащихся старших классов.

В целом можно заметить, что в учебниках для общеобразовательных классов и классов профильного направления в основном схожи. Но материал для профильных классов все же более обширен.

Проанализировав учебники для классов профильного направления мы выявили, что материал по темам «Предел функции» и «Предел последовательности» дается на наглядно-интуитивном уровне. В каждом учебнике есть свои минусы и плюсы.

Например, в учебнике Колмогорова можно отметить хорошее и наиболее полное изложение теории, автор достаточно подробно рассматривает математические факты, в учебнике приведено множество уже разобранных примеров. Нельзя не отметить наличие доказательств, которые отсутствуют у других авторов. В учебнике Алимова кратко излагается теория, но автор приводит обширный список разнообразных примеров и заданий. То есть учебник Алимова более значим именно с практической точки зрения. Мордкович в основном использует понятие предела, но не смотря на все это материал представляется на наглядно-интуитивном уровне, в силу сжатости материала и небольшого разнообразия примеров и задач.

Главным отличием учебников А.Г. Мордковича выделено то, что тема «Предел числовых последовательностей» сопровождается большим количеством доказательств, содержит дополнительный материал и имеют большое количество заданий разного уровня сложности.

В целом основные принципы изучения темы «Предел числовых последовательностей» у всех авторов схожи, различия, безусловно, присутствуют, но по большей степени не в графическом представлении пределов, что облегчает интуитивное понятие пределов и минимальные разъяснения по решению задач по пределам числовых последовательностей и применения учащимися изучаемых понятий в практике.

2.2 Методика изучения пределов числовых последовательностей и пределов функций в профильных классах средней школы

Место числовых последовательностей в школьном курсе математики можно представить в виде двух этапов:

I этап (пропедевтический) включает в себя интуитивно-практический уровень, без теоретических обоснований:

1) дошкольное обучение:

– прямой и обратный счет в пределах 1-го и 2-го десятков;

– начальная школа:

– натуральный ряд чисел;

– последовательности четных и нечетных чисел.

2) 5-8 классы:

– последовательности квадратов и кубов чисел;

– последовательности, получаемые при вычислении приближенных значений величин с точностью до 0,1, 0,01, 0,001 и т.д.

II этап (основной).

3) 9 класс:

– знакомство с понятием последовательности, способами её задания;

– подробное рассмотрение особых последовательностей – прогрессий и их применение к решению задач.

Темы программы на базовом уровне:

– числовая последовательность;

– арифметическая прогрессия;

– сумма n первых членов арифметической прогрессии;

– геометрическая прогрессия;

– сумма n первых членов геометрической прогрессии.

Дополнительные темы программы:

– способы задания числовой последовательности и её свойства;

– числа Фибоначчи;

– предел последовательности;

– бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и её сумма;

– метод математической индукции и его применение к решению задач на последовательности.

III этап (завершающий).

4) 10-11 класс: организация целостной системы знаний о последовательностях и их применения к решению геометрических, физических, экономических и других прикладных задач.

Темы программы на базовом уровне:

– понятие о пределе последовательности;

– существование предела монотонной ограниченной последовательности;

– длина окружности и площадь круга как пределы последовательностей;

– бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и её сумма.

Дополнительные темы программы:

– понятие о пределе последовательности;

– существование предела монотонной ограниченной последовательности;

– теоремы о пределах последовательностей.

Остановимся на некоторых основополагающих принципах методологии изучения пределов числовых последовательностей и пределов функций в профильных классах средней школы.

Примем, что строгое определение предела для обычного школьника тяжеловато. Его можно, а при достаточном количестве часов даже нужно давать в математических и физико-математических старших классах. Но вот понимание, что такое предел, что такое производная, должны быть сформированы на интуитивном уровне раньше, в среднем звене школы. Этого требует элементарная логика: ведь к концу 9-го класса уже пройдена вся планиметрия (площади фигур и длины кривых) и часть физики (кинематика, а следовательно, и понятие скорости).

Чтобы добиться интуитивного понимания чего бы то ни было, необходимо иметь об этом наглядное представление.

Предел – понятие само по себе достаточно абстрактное, поэтому крайне важно дать школьнику достаточно много «картинок», иллюстрирующих это понятие.

Наконец, многие школьники по окончании школы пойдут в ВУЗы, где им будет даваться понятие предела уже на научном уровне, со строгими определениями, теоремами. Важно сделать так, чтобы у школьника сложилась гармоническая картина, чтобы понятие предела, как его дают в школе, уточняло и дополняло те строгие формулировки, которые имеются в математическом анализе, и не противоречили им.

Для осуществления вышесказанного предлагается следующее.

Во-первых, необходимо добиться, чтобы в сознании школьника прочно засело: понятия «предел», «стремится к…», «сходится к…» — суть синонимы. Для этого каждый раз, как только возникает какое-то одно из этих понятий, необходимо переформулировать предложение и через соответствующий синоним (при помощи связок типа «говоря иначе»).

Во-вторых, использовать эти понятия там, где они возникают, и делать это независимо от возраста школьника и его знаний. Разумеется, при этом следует пояснять свои слова так, чтобы обучающийся их понимал.

В-третьих, за всё время обучения необходимо приводить как можно большее число примеров разного рода сходимостей, различных пределов. Аналогично за время надо привести достаточное количество примеров, когда какой-то объект не является пределом, или какая-то последовательность не имеет предела вовсе. Упор здесь разумно делать на визуализацию, на геометрические картинки, на воображение.

В современном образовательном процессе, применяются такие методы и формы обучения, которые способствуют познавательному процессу у школьников, к ним относятся следующие методы обучения:

Информационно-развивающие методы, которые делятся на два класса:

1. Передача информации в готовом виде (лекция, объяснение, демонстрация учебных кинофильмов и видеофильмов, слушание записей и др.).

2. Самостоятельное добывание знаний (самостоятельная работа с книгой, с обучающей программой, с информационными базами данных – использование информационных технологий) [12].

Проблемно-поисковые методы: проблемное изложение учебного материала (эвристическая беседа), учебная дискуссия, лабораторная поисковая работа (предшествующая изучению материала), организация коллективной мыслительной деятельности в работе малыми группами, – игра, исследовательская работа [6].

Репродуктивные методы: пересказ учебного материала, выполнение упражнения по образцу, лабораторная работа по инструкции, упражнения на интернет-тренажерах.

Творчески-репродуктивные методы: вариативные упражнения, анализ математических ситуаций [20].

Составной частью методов обучения являются приемы учебной деятельности учителя и учащихся.

Методические приемы – действия, способы работы, направленные на решение конкретной задачи. За приемами учебной работы скрыты приемы умственной деятельности (анализ и синтез, сравнение и обобщение, доказательство, абстрагирование, конкретизация, выявление существенного, формулирование выводов, понятий, приемы воображения и запоминания) [9].

Современные методы обучения, главным образом, ориентированы на обучение не готовым знаниям, а деятельности по самостоятельному приобретению новых знаний, т.е. познавательной деятельности [16].

Специальные методы – это адаптированные для обучения основные методы познания, применяемые в самой математике, характерные для математики методы изучения действительности (построение математических моделей, способы абстрагирования, используемые при построении таких моделей, аксиоматический метод) [18].

В образовательном процессе для преподавания математики в условиях все большей цифровизации обучающей среды могут использоваться различные типы образовательных интернет-ресурсов.

Наглядные методы обучения математике реализуются через следующие интернет-ресурсы:

– интерактивные компьютерные программы, которые в игровой форме подготавливает к сдаче тестов и экзаменов по математике;

– виртуальные музеи математики, ленты времени;

– иллюстрации учебного материала, выполненные с помощью инструментов дополненной реальности;

– приложения в игровой форме для мобильных устройств и т.д.,

Практические методы обучения (упражнения, лабораторные и практические работы, расчетные задачи) модифицируются в следующих интернет-ресурсах:

– интерактивные тесты;

– компьютерные тренажеры;

– компьютерные интерактивные обучающие игры (генератор QR-викторин);

– виртуальные экскурсии (например, по парку Архимеда);

– вебинары.

Подобные интернет ресурсы позволяет обучающимся оперативно работать с информацией и представлять результаты работы.

Современной тенденцией в школьном образовании становится смешанное обучение, в рамках которого наиболее распространенной становится модель перевернутого обучения.

Данная модель основана на электронном обучении с чередованием очных и дистанционных форм. Освоение учащимися основного теоретического материала осуществляется самостоятельно дома посредством ознакомления с видео лекциями, размещенными на электронных образовательных ресурсах (Яндекс, Инфоурок). Обучение в классе ориентировано на обсуждение изученного дома теоретического материала и отработку его в практической деятельности.

В основе модели перевернутого обучения лежат активные методы обучения, проектная и исследовательская совместная деятельность обучающихся. Существуют онлайн-сервисы, которые позволяют обучающимся совместно работать в группе при обсуждении проблемных вопросов.

Учитель при этом выступает в роли наставника, консультанта.

Методы на практике реализуется в различных формах. Форма представляет собой конкретную практическую совокупность действий учителя и учащихся и условий их осуществления. Пример: фронтальные, групповые, индивидуальные методы и формы.

Метод детерминирует и подчиняет себе форму. Реализация метода требует определенных форм, каждому из сложившихся методов адекватны определенные формы. Но форма обладает по отношению к методу определенной автономностью и устойчивостью. Например, урок – устойчивая форма, осуществляющаяся при применении самых различных методов. Все эти формы в равной степени можно применить к темам «Пределы числовых последовательностей» и «Пределы функций» в профильных классах средней школы [12].

Современные средства обучения и воспитания кладутся в основу классификации технологий по их типам:

– вербальные (аудио);
– наглядные (в том числе видео обучение);
– аудиовизуальные;
– программированные;
– электронно-обучающие;
– компьютерные;
– телекоммуникационные;
– дистанционные;
– спутниковые;
– действенно-практические.

Все эти средства являются внешними по отношению к обучаемому.

Таким образом, нами были выявлены формы, методы и средства обучения к темам «Пределы числовых последовательностей» и «Пределы функций» в курсе алгебры профильной школы.

2.3 Разработка комплекса заданий по темам «Предел функции» и «Предел последовательности»

Знание и понимание пределов числовых последовательностей и пределов функций позволяет более продуктивно решать многие задачи. Это связано с многочисленным применением этих понятий не только в математике, но и в физике, в экономике и других науках. Также без понимания теории пределов учащимся сложно понять тему «Производная».

Следует отметить, что знание нестандартных методов и приемов решения задач способствует развитию нового, нешаблонного мышления.

Целью большинства учителей является подготовка старшеклассников к успешной сдаче ЕГЭ, и темы «Пределы функций» и «Пределы числовых последовательностей» изучаются вскользь, но многие из учеников в дальнейшем обучении будут изучать курс высшей математики, в котором им обязательно пригодятся знания пределов функций и пределов последовательностей.

Комплекс заданий разработан на 20 вариантов (Таблица 2). Он поможет учащимся обобщить знания по темам «Предел функции» и «Предел числовой последовательности».

Данные задания могут применяться учителем как в образовательном процессе посредством контрольных, самостоятельных работ, так и в виде индивидуального домашнего задания для закрепления изученных тем. В Приложении 1 предложен конспект урока по теме «Предел функции в точке» с использованием комплекса заданий в виде домашнего задания.

Задания разбиты по двум блокам:

1. Предел последовательности.
2. Предел функции.

В каждом блоке задания идут по увеличению сложности:

1. Задачи легкого уровня (задачи на повторение).
2. Задачи среднего уровня.
3. Задачи высокого уровня (или повышенной сложности).

Таблица 2 – Комплекс заданий на 20 вариантов

Задание	Ответ
1	*2*
Вариант 1	
Предел последовательности	

1. Найдите сумму геометрической прогрессии, если $b_4 = \frac{1}{8}$, $q = -\frac{1}{2}$.	Ответ: $-\frac{2}{3}$.
2. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{5}{n^3} + 6\right)$.	Ответ: 6.
3. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n^2-4}{4n^3+3n-5}$.	Ответ: $\frac{3}{4}$.
4. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot3^n+3\cdot4^n}{2^n-6\cdot4^n}$.	Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Продолжение таблицы 2

1	*2*
Предел функции	
1. Вычислить $\lim_{x\to4}(x^2 - 3x + 8)$.	Ответ: 12.
2. Вычислить $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4x-1}{5x^4-3x}$.	Ответ: 0.
3. Вычислить $\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$.	Ответ: 4.
4. Вычислить $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4x+5}-\sqrt{5-2x}}{2x+x^2}$.	Ответ: $\frac{3}{2\sqrt{5}}$.
Вариант 2	
Предел последовательности	
1. Найдите сумму геометрической прогрессии, если $b_5 = \frac{1}{3}$, $q = \frac{1}{3}$.	Ответ: 40,5.
2.Вычислить $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n} + \frac{8}{\sqrt{n}} + \frac{9}{n^3}\right)$.	Ответ: 0.
3. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2-1}{2n^3-5n+4}$.	Ответ: $\frac{1}{2}$.
4. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-4\cdot6^n}{4^n+7\cdot6^n}$.	Ответ: $-\frac{4}{7}$.
Предел функции	
1. Вычислить $\lim_{x\to3}(x^2 - 5x + 7)$.	Ответ: 1.
2. Вычислить $\lim_{x\to\infty}\frac{8x^5-4x^3+3}{2x^3+x^3-7}$.	Ответ: ∞.

3. Вычислить $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2+x-2}$.	Ответ: $\frac{2}{3}$.
4. Вычислить $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.	Ответ: $\frac{4}{3}$.
Вариант 3	
Предел последовательности	
1.Найдите сумму геометрической прогрессии, если $b_3=-1$, $q=\frac{1}{7}$.	Ответ: $-57\frac{1}{6}$.

Продолжение таблицы 2

1	*2*
2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{3}{\sqrt{n}}-4+\frac{7}{n^2}\right)$.	Ответ: -4.
3. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-n+1}{4n^2+n-1}$.	Ответ: ∞.
4. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{7^n-4\cdot 5^n}{6^n+3\cdot 7^n}$.	Ответ: $\frac{1}{3}$.
Предел функции	
1. Вычислить $\lim_{x\to 2}(x^2+9x-3)$.	Ответ: 19.
2. Вычислить $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+7}{3x^4-2x^2+x}$.	Ответ: 0.
3. Вычислить $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x-2}$.	Ответ: 1.
4. Вычислить $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.	Ответ: $-\frac{1}{16}$.
Вариант 4	
Предел последовательности	
1. Найдите сумму геометрической прогрессии, если $q=-\frac{1}{3}$, $b_2=-\frac{1}{6}$.	Ответ: $\frac{3}{8}$.
2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}-\frac{5}{n^3}+\frac{13}{n^4}.\right)$	Ответ: 0.
3. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3n^2+1}{n^5-100n-1}$.	Ответ: 0.

4. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{12^n+7\cdot 6^n}{3\cdot 12^n-4\cdot 7^n}$.	Ответ: $\frac{1}{3}$.
Предел функции	
1. Вычислить $\lim_{x\to 4}(x^2+3x-20)$.	Ответ: 24.
2. Вычислить $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7}$.	Ответ: ∞.
3. Вычислить $\lim_{x\to 4}\frac{x^2+3x-28}{x^3-64}$.	Ответ: $\frac{11}{48}$.
4. Вычислить $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$.	Ответ:-2.

Продолжение таблицы 2

1	*2*
Вариант 5	
Предел последовательности	
1. Найдите сумму геометрической прогрессии, если $b_5=-8$, $q=-2$.	Ответ: $-\frac{1}{6}$.
2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(6-\frac{7}{n^2}-\frac{3}{n}-\frac{3}{\sqrt{n}}\right)$.	Ответ: 6.
3. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3-10n+1}$.	Ответ: 0.
4. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^n-5\cdot 4^n}{3\cdot 4^n+7\cdot 2^n}$.	Ответ:$-\frac{5}{3}$.
Предел функции	
1. Вычислить $\lim_{x\to 2}(3x^2-5x+2)$.	Ответ: 4.
2. Вычислить $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^5-4x^3+3}{2x^2+3x-7}$.	Ответ: ∞.
3. Вычислить $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^2-9x+10}$.	Ответ: -20.
4. Вычислить $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$.	Ответ: $\frac{1}{4}$.
Вариант 6	
Предел последовательности	

1. Найдите сумму геометрической прогрессии, если $b_5 = \frac{1}{81}$, $q = \frac{1}{3}$.	Ответ: 1,5.
2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n} - 10 - \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^5}\right)$.	Ответ: -10.
3. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2}$.	Ответ: 1.
4. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{7^n-2\cdot 9^n}{9^n+5\cdot 6^n}$.	Ответ: -2.
Предел функции	
1. Вычислить $\lim_{x\to 8}(x^2 - 7x + 9)$.	Ответ: 17.

Продолжение таблицы 2

1	*2*
2. Вычислить $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-3x^2+7}{2x^4+3x^2+1}$.	Ответ: 0.
3. Вычислить $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x-8}{x^3-8}$.	Ответ: $\frac{1}{3}$.
4. Вычислить $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$.	Ответ: 0.
Вариант 7	
Предел последовательности	
1. Найдите сумму геометрической прогрессии, если $b_5 = \frac{\sqrt{2}}{16}$, $q = \frac{1}{2}$.	Ответ: $2\sqrt{2}$.
2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4 + \frac{7}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{12}{n^5}\right)$.	Ответ: 4.
3. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-4-2n^2}{n^2+4n}$.	Ответ: -2.
4. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{6\cdot 3^n+5\cdot 4^n}{2\cdot 3^n-4^n}$.	Ответ: -5.
Предел функции	
1. Вычислить $\lim_{x\to 2}(2x^2 + 10x - 3)$.	Ответ: 25.
2. Вычислить $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-x^6+3}{x^2-2x+5}$.	Ответ: $-\infty$.

3. Вычислить $\lim_{x\to 4} \frac{x^2+3x-28}{x^2-4x}$.	Ответ: $\frac{11}{4}$.
4. Вычислить $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$.	Ответ: $\frac{2}{3}$.
Вариант 8	
Предел последовательности	
1. Найдите сумму геометрической прогрессии, если $b_4 = \frac{9}{8}$, $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$.	Ответ: $\sqrt{3}$.
2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^4} - \frac{2}{n} + \frac{3}{\sqrt{n}} - \frac{4}{n^3}\right)$.	Ответ: 0.
3. Вычислить $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+5n^2+2}{n^3-2n+1}$.	Ответ: 3.

Продолжение таблицы 2

1	*2*
4. Вычислить $\lim_{n\to\infty} \frac{8^n-3\cdot 7^n}{2\cdot 8^n+4\cdot 5^n}$.	Ответ: $\frac{1}{2}$.
Предел функции	
1. Вычислить $\lim_{x\to 9}(x^2 - 5x - 20)$.	Ответ: 16.
2. Вычислить $\lim_{x\to\infty} \frac{8x^6+3x^2+5}{2x^4-x^3+3}$.	Ответ: ∞.
3. Вычислить $\lim_{x\to 1} \frac{2x^2+x-3}{x^3-1}$.	Ответ: $\frac{5}{6}$.
4. Вычислить $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-4}{x^2-9}$.	Ответ: $\frac{1}{148}$.
Вариант 9	
Предел последовательности	
1. Найдите сумму геометрической прогрессии, если $b_4 = 0{,}01$, $q = 0{,}1$.	Ответ: $11\frac{1}{9}$.
2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{12}{\sqrt{n}} - 4 + \frac{7}{n^3}\right)$.	Ответ: -4.
3. Вычислить $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-5n+3}{n^5+4n-5}$.	Ответ: 0.

4. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+2\cdot 7^n}{5\cdot 7^n-3\cdot 4^n}$.	Ответ: $\frac{2}{5}$.
Предел функции	
1. Вычислить $\lim_{x\to 6}(x^2-7x+7)$.	Ответ: 1.
2. Вычислить $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x^3-5}{2x^2+x-7}$.	Ответ: ∞.
3. Вычислить $\lim_{x\to 1}\frac{2x^4-x^2-1}{x^4-1}$.	Ответ: $\frac{3}{4}$.
4. Вычислить $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{\sqrt{x-1}-2}$.	Ответ: 40.
Вариант 10	
Предел последовательности	

Продолжение таблицы 2

1	*2*
1. Найдите сумму геометрической прогрессии, если $b_3=\frac{2}{3}$, $q=\frac{1}{3}$.	Ответ: 9.
2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^3}+\frac{7}{n}-\frac{5}{\sqrt{n}}+1\right)$.	Ответ: 1.
3. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{12n^2+n-1}{n^2+2n+1}$.	Ответ: 12.
4. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3\cdot 8^n}{8^n-3\cdot 7^n}$.	Ответ: 3.
Предел функции	
1. Вычислить $\lim_{x\to 3}(3x^2-6x+1)$.	Ответ: 10.
2. Вычислить $\lim_{x\to\infty}\frac{4x-5x^5+3}{2x^2+3x-7}$.	Ответ: $-\infty$.
3. Вычислить $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x-2}$.	Ответ: 1.
4. Вычислить $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$.	Ответ: 7.
Вариант 11	

Предел последовательности	
1. Найдите сумму геометрической прогрессии, если $b_3 = \frac{1}{3}$, $q = \frac{1}{3}$.	Ответ: 4,5.
2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(17+\frac{1}{\sqrt{n}}-6+\frac{4}{n^3}\right)$.	Ответ: 11.
3. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{1-2n^2-n}{n^2+4n+3}$.	Ответ: -2.
4. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot4^n-7\cdot6^n}{5^n-4\cdot6^n}$.	Ответ: $\frac{7}{4}$.
Предел функции	
1. Вычислить $\lim_{x\to4}(x^2-4x+5)$.	Ответ: 5.
2. Вычислить $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-5x^3+7}{x^4+3x^2+1}$.	Ответ: ∞.
3. Вычислить $\lim_{x\to1}\frac{2x^2+x-3}{x^2-x}$.	Ответ: 2,5.

Продолжение таблицы 2

1	*2*
4. Вычислить $\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$.	Ответ: $-\frac{\sqrt{7}}{91}$.
Вариант 12	
Предел последовательности	
1. Найдите сумму геометрической прогрессии, если $b_3 = -0{,}04$, $q = 0{,}2$.	Ответ: $-1{,}25$.
2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n}-\frac{7}{n^3}+6-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$.	Ответ: 6.
3. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{n^2+2n}$.	Ответ: 1.
4. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot4^n+9\cdot2^n}{2\cdot3^n-5\cdot4^n}$.	Ответ: $-\frac{3}{5}$.
Предел функции	
1. Вычислить $\lim_{x\to7}(2x^2-9x-25)$.	Ответ: 10.
2. Вычислить$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-3x^2+9}{7x^5+3x^2+5}$.	Ответ: 0.

3. Вычислить $\lim_{x\to 4}\frac{x^3-64}{x^2+3x-28}$.	Ответ: $\frac{48}{11}$.
4. Вычислить $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$.	Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{20}$.
Вариант 13	
Предел последовательности	
1. Найдите сумму геометрической прогрессии, если $b_4 = 0{,}005$, $q = -0{,}1$.	Ответ: $-\frac{50}{11}$.
2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}-\frac{7}{n^3}+\frac{9}{n^4}\right)$.	Ответ: 0.
3. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{7n^3-2n+3}{8n^3+3n^2+1}$.	Ответ: $\frac{7}{8}$.
4. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{7\cdot 9^n-11^n}{7\cdot 11^n-9^n}$.	Ответ: $-\frac{1}{7}$.
Предел функции	

Продолжение таблицы 2

1	*2*
1. Вычислить $\lim_{x\to 2}(x^2+5x-6)$.	Ответ: 8.
2. Вычислить $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x^3+5}{2x^2+x+7}$.	Ответ: ∞.
3. Вычислить $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-9x+10}{x^3-8}$.	Ответ: $-0{,}05$.
4. Вычислить $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.	Ответ: 3.
Вариант 14	
Предел последовательности	
1. Найдите сумму геометрической прогрессии, если $b_3 = \frac{2}{9}$, $q = -\frac{1}{3}$.	Ответ: 1,5.
2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{n}}+\frac{7}{n^3}-\frac{5}{n^4}\right)$.	Ответ: 0.
3. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-7}{n^2+3n}$.	Ответ: 2.

4. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 8^n+2\cdot 7^n}{6\cdot 8^n-3\cdot 5^n}$.	Ответ: $\frac{1}{2}$.
Предел функции	
1. Вычислить $\lim_{x\to 5}(2x^2-4x-15)$.	Ответ: 15.
2. Вычислить $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-2x^2+7}{x^4+2x-5}$.	Ответ: 0.
3. Вычислить $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+2x-3}$.	Ответ: $0{,}25$.
4. Вычислить $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$.	Ответ: $-\sqrt{3}$.
Вариант 15	
Предел последовательности	
1. Найдите сумму геометрической прогрессии, если $b_3=\frac{20}{9}$, $q=-\frac{1}{3}$.	Ответ: 15.
2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{3}{\sqrt{n}}+7-\frac{7}{n^2}\right)$.	Ответ: 7.

Продолжение таблицы 2

1	*2*
3. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{10n^2-13}{n^3-6n^2-8n+1}$.	Ответ: 0.
4. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 9^n+5\cdot 6^n}{7^n-2\cdot 9^n}$.	Ответ: $-\frac{3}{2}$.
Предел функции	
1. Вычислить $\lim_{x\to 6}(x^2-5x-3)$.	Ответ: 3.
2. Вычислить $\lim_{x\to\infty}\frac{5x-x^5+8}{x^4+2x^2-3}$.	Ответ: $-\infty$.
3. Вычислить $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3-x^2+x-1}$.	Ответ: $\frac{3}{2}$.
4. Вычислить $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x}$.	Ответ: $-\frac{1}{7}$.
Вариант 16	
Предел последовательности	

1. Найдите сумму геометрической прогрессии, если $b_4 = -\frac{11}{500}$, $q = -\frac{1}{10}$.	Ответ: 20.
2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}-3-\frac{4}{\sqrt{n}}\right)$.	Ответ: -3.
3. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+3n-4}{2n^3+5n^2}$.	Ответ: ∞.
4. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^n-4^n}{7\cdot 4^n+2\cdot 3^n}$.	Ответ: $-\frac{1}{7}$.
Предел функции	
1. Вычислить $\lim_{x\to 3}(3x^2-2x+7)$.	Ответ: 28.
2. Вычислить $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+5}{2x^2+6x+1}$.	Ответ: ∞.
3. Вычислить $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^3-3x-2}$.	Ответ: 1.
4. Вычислить $\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$.	Ответ: $-\frac{6}{5}$.
Вариант 17	
Предел последовательности	

Продолжение таблицы 2

1	*2*
1. Найдите сумму геометрической прогрессии, если $b_4 = -\frac{16}{125}$, $q = \frac{1}{5}$.	Ответ: -20.
2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}+\frac{7}{n^3}+9\right)$.	Ответ: 9.
3. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{7n^5-4n^3+2}{3n-7n^5-5}$.	Ответ: -1.
4. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{12\cdot 4^n+9\cdot 5^n}{6\cdot 5^n-10\cdot 3^n}$.	Ответ: $\frac{3}{2}$.
Предел функции	
1. Вычислить $\lim_{x\to 2}(x^2+7x-2)$.	Ответ: 16.
2. Вычислить $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-3x+6}{2x^4-3x+4}$.	Ответ: 0.
3. Вычислить $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$.	Ответ: $\frac{4}{3}$.

4. Вычислить $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$.	Ответ: $-3\sqrt{5}$.
Вариант 18	
Предел последовательности	
1. Найдите сумму геометрической прогрессии, если $b_3=\frac{28}{9}$, $q=\frac{2}{3}$.	Ответ: 21.
2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(16-\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}\right)$.	Ответ: 16.
3. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-4n+3}{3n^2+n-5}$.	Ответ: $\frac{2}{3}$.
4. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 7^n+6\cdot 4^n}{7\cdot 5^n+2\cdot 7^n}$.	Ответ: $\frac{5}{2}$.
Предел функции	
1. Вычислить $\lim_{x\to 7}(x^2-8x+10)$.	Ответ: 3.
2. Вычислить $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+3x-5}{x^6+2x^2}$.	Ответ: 0.
3. Вычислить $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{2x^2+x-3}$.	Ответ: 0,4.

Продолжение таблицы 2

1	*2*
4. Вычислить $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$.	Ответ: $\frac{1}{6}$.
Вариант 19	
Предел последовательности	
1. Найдите сумму геометрической прогрессии, если $b_4=\frac{8}{81}$, $q=\frac{1}{3}$.	Ответ: 4.
2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(7+\frac{3}{n^2}-\frac{15}{n}+\frac{9}{\sqrt{n}}\right)$.	Ответ: 7.
3. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-7n}{4n^3+5n-8}$.	Ответ: 0.
4. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{9\cdot 12^n-4\cdot 7^n}{5\cdot 9^n-12^n}$.	Ответ: 9.
Предел функции	
1. Вычислить $\lim_{x\to 5}(x^2+8x-16)$.	Ответ: 49.

2. Вычислить $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-4x^3+2}{3x^2+4x-7}$.	Ответ: ∞.
3. Вычислить $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{3x^2-2x-8}$.	Ответ: 3.
4. Вычислить $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$.	Ответ: $\frac{1}{9}$.
Вариант 20	
Предел последовательности	
1. Найдите сумму геометрической прогрессии, если $b_4=\frac{1}{64}$, $q=-\frac{1}{2}$.	Ответ: $\frac{1}{12}$.
2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{4}{n^3}+\frac{13}{n}\right)$.	Ответ: 0.
3. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^4-7n^2+n}{4n^4+3n}$.	Ответ: $\frac{5}{4}$.
4. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 5^n-8\cdot 9^n}{7\cdot 4^n-2\cdot 9^n}$.	Ответ: 4.
Предел функции	

Продолжение таблицы 2

1	*2*
1. Вычислить $\lim_{x\to 4}(2x^2-4x-9)$.	Ответ: 7.
2. Вычислить $\lim_{x\to\infty}\frac{8x^3-3x^2+4}{2x^4-5x^2+1}$.	Ответ: 0.
3. Вычислить $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x^2+3x-28}$.	Ответ: $\frac{4}{11}$.
4. Вычислить $\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$.	Ответ: $\frac{1}{10}$.

Рассмотрим пример работы с каждым заданием одного варианта.

2.3.1 Предел последовательности

Задание 1. Найдите сумму геометрической прогрессии, если $b_4=\frac{1}{8}$, $q=-\frac{1}{2}$.

Решение.

Для решения задачи воспользуемся формулой n-го члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Подставим имеющиеся значения в формулу, выразим и найдем b_1

$$\frac{1}{8} = b_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^{4-1};$$

$$b_1 = \frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{8}{1}\right) = -1;$$

Затем воспользуемся формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$S_\infty = \frac{b_1}{1-q};$$

$$S_\infty = \frac{-1}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3};$$

Ответ: $-\frac{2}{3}$.

Задание 2. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{5}{n^3} + 6\right)$.

Решение.

Вспомним, что предел суммы равен сумме пределов, тогда:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{5}{n^3} + 6\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right) - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n^3}\right) + \lim_{n\to\infty} 6.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k} = 0$ $(k = 1,2,3, \dots)$, а $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right) - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n^3}\right) + \lim_{n\to\infty} 6 = 0 + 0 - 0 = 6.$$

Ответ: 6.

Задание 3. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n^2-4}{4n^3+3n-5}$.

Решение.

Разделив числитель и знаменатель дроби на n^3 получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}-\frac{4}{n^3}}{4+\frac{3}{n^2}-\frac{5}{n^3}}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0\ (k=1,2,3,\dots)$, то числитель имеет предел, равный 3, а предел знаменателя равен 4. В силу свойств пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n^2-4}{4n^3+3n-5}=\frac{3}{4}.$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

Задание 4. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^n+3\cdot 4^n}{2^n-6\cdot 4^n}$.

Решение.

Преобразуем выражение:

$$\frac{3^n+3\cdot 4^n}{2^n-6\cdot 4^n}=\frac{4^n\left(\frac{3^n}{4^n}+3\right)}{4^n\left(\frac{2^n}{4^n}-6\right)}=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+3}{\left(\frac{2}{4}\right)^n-6}.$$

Запишем полученный предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+3}{\left(\frac{2}{4}\right)^n-6}\right).$$

Предел частного равен частному пределов, если последние существуют и предел знаменателя отличен от нуля. :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+3}{\left(\frac{2}{4}\right)^n-6}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n+3\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2}{4}\right)^n-6\right)}.$$

Предел суммы равен сумме пределов:

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n+3\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2}{4}\right)^n-6\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)+\lim\limits_{n\to\infty}3}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2}{4}\right)^n\right)+\lim\limits_{n\to\infty}(-6)}.$$

Вспомним, что

$\lim\limits_{n\to\infty}C=C;$

$\lim\limits_{n\to\infty}(q^n) = 0,$ если $|q| < 1.$

Тогда:

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) + \lim\limits_{n\to\infty} 3}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2}{4}\right)^n\right) + \lim\limits_{n\to\infty}(-6)} = \frac{0+3}{0-6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

2.3.2 Предел функции

Задание 1. Вычислить $\lim_{x\to 4}(x^2 - 3x + 8)$.

Решение.

Предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{x\to 4}(x^2 - 3x + 8) = \lim_{x\to 4} x^2 + \lim_{x\to 4}(-3x) + \lim_{x\to 4} 8.$$

Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x\to 4} x^2 + \lim_{x\to 4}(-3x) + \lim_{x\to 4} 8 = \lim_{x\to 4} x \lim_{x\to 4} x + \lim_{x\to 4}(-3x) + \lim_{x\to 4} 8.$$

Т.к. $\lim\limits_{x\to 4} x = 4$, то

$$\lim_{x\to 4} x \lim_{x\to 4} x + (-3)\lim_{x\to 4} x + \lim_{x\to 4} 8 = 4\cdot 4 - 3\cdot 4 + 8 = 12.$$

Ответ: 12.

Задача 2. Вычислить $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4x-1}{5x^4-3x}$.

Решение.

Найдем старшие степени. В числителе это x^3, в знаменателе – x^4.

Вынесем в числителе и знаменателе старшую из этих степеней, в данном случае – x^4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4x-1}{5x^4-3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(5-\frac{3}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}-\frac{1}{x^4}}{5-\frac{3}{x^3}}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k} = 0\ (k = 1,2,3,\dots)$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}-\frac{1}{x^4}}{5-\frac{3}{x^3}}=\frac{0+0-0}{5-0}=0.$$

Ответ: 0.

Задача 3. Вычислить $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$.

Решение:

Подставляя в предел значение 1 вместо x, получаем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для ее раскрытия разложим числитель на множители. Найдем корни уравнения x^2+2x-3:

$$D=2^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16;$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}\Rightarrow\ x_1=-3;\ x_2=1.$$

Тогда числитель примет вид:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}.$$

Сократим числитель и знаменатель на $(x-1)$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=\ \lim_{x\to 1}(x+3).$$

Предел суммы равен сумме пределов.

$$\lim_{x\to 1}(x+3)=\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}3.$$

Т.к. $\lim\limits_{x\to 1}x=1$, то

$$\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}3=1+3=4.$$

Ответ: 4.

Задача 4. Вычислить $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x+5}-\sqrt{5-2x}}{2x+x^2}$.

Решение.

Подставляя в предел значение 1 вместо x, получаем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для раскрытия неопределенности умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю, т.е. на $\sqrt{4x+5}+\sqrt{5-2x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x+5}-\sqrt{5-2x}}{2x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4x+5}-\sqrt{5-2x}\right)\left(\sqrt{4x+5}+\sqrt{5-2x}\right)}{(2x+x^2)\left(\sqrt{4x+5}+\sqrt{5-2x}\right)}.$$

Раскроем скобки в числителе, приведем подобные слагаемые. В знаменателе вынесем x из первой скобки.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4x+5}-\sqrt{5-2x}\right)\left(\sqrt{4x+5}+\sqrt{5-2x}\right)}{(2x+x^2)\left(\sqrt{4x+5}+\sqrt{5-2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x+5-5+2x}{x(2+x)\left(\sqrt{4x+5}+\sqrt{5-2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6}{(2+x)\left(\sqrt{4x+5}+\sqrt{5-2x}\right)}.$$

Подставляя вместо x значение 0, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{6}{(2+x)\left(\sqrt{4x+5}+\sqrt{5-2x}\right)}=\frac{6}{2\cdot 2\cdot\sqrt{5}}=\frac{3}{2\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\frac{3}{2\sqrt{5}}$.

Выводы по II главе

Анализ учебников показал, что основные принципы изложения тем «пределы числовых последовательностей» и «предел функций» у авторов схожи. Отличия возникают в основном в изучении темы «предел числовых последовательностей». У некоторых авторов предел последовательности впервые используется в 10 классе при вычислении суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Во всех учебниках хорошо изложена теория, приводится большое количество примеров. Также содержится большое количество заданий разного уровня сложности.

Рассмотрение учебников, а также изучение форм, методов и средств обучения к темам «Пределы числовых последовательностей» и «Пределы функций» позволило разработать комплекс заданий для обобщения знаний по этим темам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Профильное обучение направлено на реализацию личностно-ориентированного учебного процесса, при расширении возможности индивидуальной образовательной траектории. Современная школа имеет возможность предоставить обучающимся разнообразные программы, определенную индивидуализацию и дифференциацию обучение через профильное обучение, поскольку оно обладает потенциалом для создания условий обучения старшеклассников в соответствии с их профильными интересами и намерениями в отношении продолжения образования.

Важным для педагогов является знание концептуальных основ и владение технологиями формирования универсальных учебных действий в профессиональном самоопределении школьников. ФГОС, в свою очередь, определяет следующие профили подготовки: естественно-научный, гуманитарный, социально-экономический, технологический и универсальный. В естественно-научном, социально-экономическом и технологическом профилях учебный предмет «Математика» в 10-11-х классах изучается как единый предмет на углубленном уровне.

Темы «Пределы числовых последовательностей» и «Пределы функций» в профильных классах средней школы является одной из ключевых тем математического анализа. Данная тема имеет широкое применение во многих отраслях науки.

Анализ учебников показал, что основные принципы изложения тем «пределы числовых последовательностей» и «предел функций» у авторов схожи. Отличия возникают в основном в изучении темы «предел числовых последовательностей». У некоторых авторов предел последовательности впервые используется в 10 классе при вычислении суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Во всех учебниках хорошо изложена теория, приводится большое количество примеров. Также содержится большое количество заданий разного уровня сложности.

На основе изученных материалов нами был разработан комплекс заданий для обобщения знаний по темам «Предел числовых последовательностей» и «Предел функций». Данный комплекс заданий может применяться как в образовательном процессе посредством контрольных, самостоятельных работ, так и в виде индивидуального домашнего задания для закрепления изученных тем.

Исходя из всего выше сказанного, мы можем сделать вывод, что цель выпускной квалификационной работы была достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учебник для общеобразовательных учреждений : базовый и профильный уровни / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. – 8-е изд. – Москва : Просвещение, 2014. – 430 с. – Текст: непосредственный.
2. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : учебное пособие для общеобразовательных организаций / Колмогоров А. Н. [и др.]; под ред. А. Н. Колмогорова. – Москва : Просвещение, 2016. – 384 с. – Текст: непосредственный.
3. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учебник для общеобразовательных организаций: базовый и углубленный уровни / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин. – Москва : Просвещение, 2019. – 384 с. – Текст : непосредственный.
4. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учебник для общеобразовательных учреждений : базовый и профильный уровни / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. – 8-е изд. – Москва : Просвещение, 2014. – 464 с. – Текст : непосредственный.
5. **Алексеенко, А. С.** Дидактические особенности изучения действительных чисел в школьном курсе математики / А. С. Алексеенко, М. В. Лихачева. – Текст : непосредственный // Социально-гуманитарные исследования и технологии. – 2017. – № 1. – С. 65–70.
6. **Алексеенко, А. С.** Об изучении алгебраических структур в школьном курсе математики / А. С. Алексеенко, М. В. Лихачева. – Текст : непосредственный // Современные инновации. – 2017. – № 3 (17). – С. 24–28.
7. **Болотов, В. А.** Перспективы перехода школы на профильное обучение / В. А. Болотов. – Текст : непосредственный // Воспитание школьников. – 2015. – №1. – С. 2–8.

8. **Выготский, Л. С.** Полное собрание сочинений : пособие по психологии. В 6 частях. Часть 4. Детская психология / Л. С. Выготский. – Москва : Общество с ограниченной ответственностью "Левъ", 2015. – 752 с. – ISBN 978-5-91914-016-0. – Текст : непосредственный.

9. **Гусев, В. А.** Теория и методика обучения математике: психолого-педагогические основы / В. А. Гусев. – Москва : БИНОМ. Лаборатория, 2014. – 456 с. – Текст : непосредственный.

10. **Коваленко, А. А.** Психолого-педагогические предпосылки организации дополнительного математического образования старшеклассников / А. А. Коваленко // Дидактика математики: проблемы и исследования : международный сборник научных работ. – 2021. – № 53. – С. 63–70. – Текст : непосредственный

11. Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования // Официальные документы в образовании. – 2002. – №27. – С. 13–33. – Текст : непосредственный

12. **Манушкина, М. М.** К методике преподавания темы «Предел функции» / И.И Вайнштейн, М.М. Манушкина. – Текст : непосредственный // Сибирский педагогический журнал. – 2011. – №5 – С. 64–69.

13. **Мордкович, А. Г.** Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – Москва : Мнемозина, 2009. – 424 с. – Текст : непосредственный.

14. **Мордкович, А. Г.** Алгебра и начала математического анализа. 11 класс (профильный уровень) : методическое пособие для учителя / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – Москва : Мнемозина, 2010. – 191 с. – Текст : непосредственный.

15. **Мордкович, А. Г.** Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений

(профильный уровень). / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – Москва : Мнемозина, 2012. – 287 с. – Текст : непосредственный.

16. **Пермякова, М. Ю.** О некоторых особенностях подготовки учащихся к олимпиадам по математике / М. Ю. Пермякова, О. А. Кириллова. – Текст : непосредственный // Мир науки, культуры, образования. – 2019. – № 6 (79). – С. 100–103.

17. Приказ Министерства образования и науки от 31 марта 2014 года № 253 «Об утверждении федерального перечня учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования (с изм. и доп.)».

18. **Скафа, Е. И.** Методика обучения математике: эвристический подход. Общая методика : учебное пособие / Е. И. Скафа. – Донецк : ДонНУ, 2020. – 440 с. – Текст : непосредственный.

19. ФГОС СОО, утвержден приказом Министерства образования и науки РФ от 17 мая 2012 года № 413 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования» с изменениями и дополнениями от 29 декабря 2014г., от 31 декабря 2015г., от 29 июня 2017 года.

20. **Чаплыгин, В. Ф.** Основные понятия анализа в школьном курсе математики. Некоторые методические подходы / В. Ф. Чаплыгин. – Текст : непосредственный // Ярославский педагогический вестник. – 2003. – № 1 (34). – С. 2–7.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Конспект урока по теме «Предел функции в точке»

Тема урока: Предел функции в точке.

Основная литература: Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учебник для общеобразовательных организаций: базовый и углубленный уровни / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин. – Москва : Просвещение, 2019. – 384 с. – Текст : непосредственный.

Цель урока: формирование у учащихся наглядно – интуитивных представлений о пределе функции в точке.

Задачи урока.

Предметные:

– ввести понятие предела функции в точке;

– рассмотреть геометрическую иллюстрацию понятия предела функции в точке;

– рассмотреть правила о нахождении предела суммы, произведения и частного двух функций;

– рассмотреть примеры нахождения предела функции в точке.

Личностные:

– формирование ответственного отношения к учению;

– саморазвитие и самообразование на основе мотивации к обучению и познанию предела функции.

Метапредметные:

– уметь определять понятия, классифицировать, строить логическое рассуждение и делать вывод;

– уметь организовать совместную деятельность с учителем и сверстниками;

– умение вычислять пределы функций.

Тип урока: урок открытия новых знаний.

Ход урока:

1. *Организационный этап.*

– Здравствуйте, ребята. Тема нашего урока: «Предел функции в точке». Сегодня на уроке мы познакомимся с понятиями «предел функции в точке», а также рассмотрим правила вычисления предела функции в точке.

2. *Мотивация изучения темы.*

– Эта тема очень важна для дальнейшего изучения алгебры: понятие предела функции имеет большое значение в изучении понятия производной и без знания предела функции рассмотрение этого понятия невозможно.

3. *Актуализация знаний.*

– Перед тем как начать изучать новую тему, выполним следующее задание: постройте график функции $y = \sqrt{x}$ если:

а) при $x = 4$ значение функции не существует (рисунок 1.1);

б) при $x = 4$ значение функции равно 3 (рисунок 1.2);

в) при $x = 4$ значение функции равно 2 (рисунок 1.3).

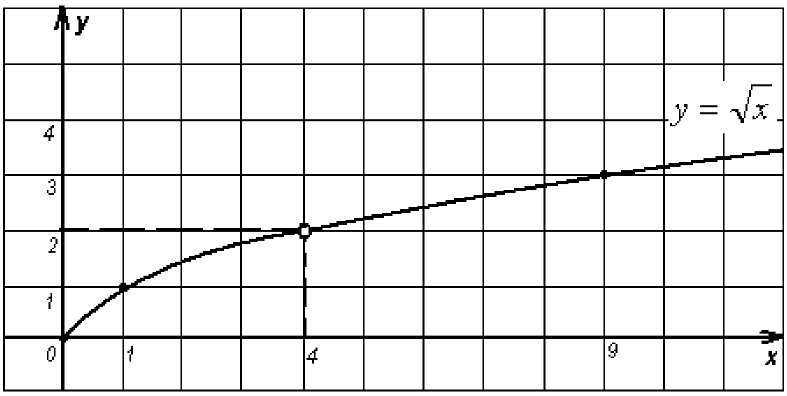

Рисунок 1.1.

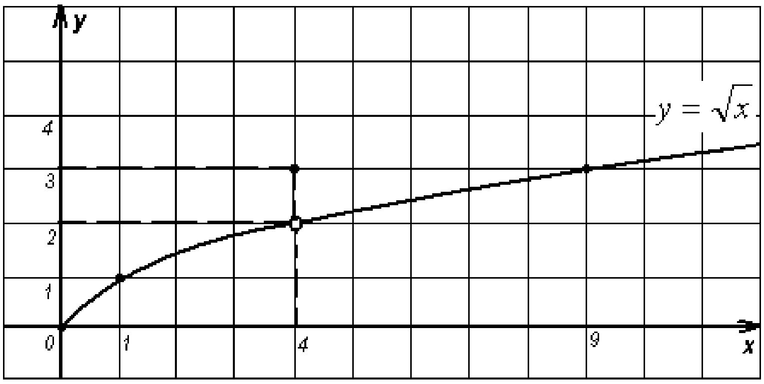

Рисунок 1.2.

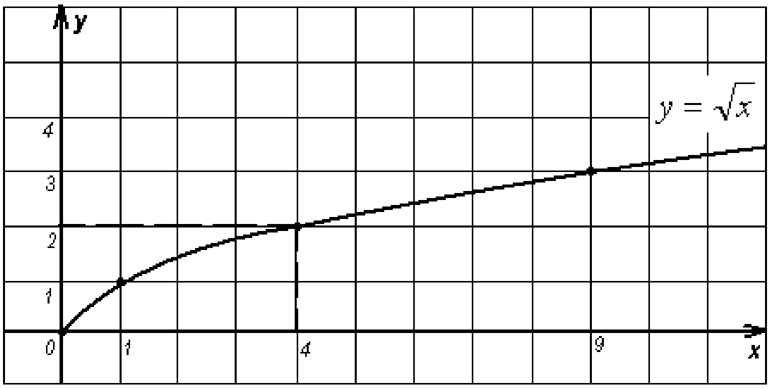

Рисунок 1.3.

4. *Изучение нового материала.*

– Воспользуемся построенными графиками функций. Во всех трех случаях изображена одна и та же кривая, тем не менее, это три разные функции.

– Чем они отличаются друг от друга?

(Они отличаются друг от друга своим поведением в точке $x = 4$).

– Как ведет себя функция в точке $x = 4$ на первом графике?

(Для функции при $x = 4$ значение функции не существует, функция в указанной точке не определена).

– Как ведет себя функция в точке $x = 4$ на втором графике?

(Для функции при $x = 4$ значение функции существует, но оно отличается от естественного значения функции в указанной точке).

– Как ведет себя функция в точке $x = 4$ на третьем графике?

(Для функции при $x = 4$ значение функции существует, и оно равно естественному значению функции в указанной точке, то есть двум).

– Если мы исключим точку $x = 4$ из рассмотрения, то все три функции будут тождественными.

Очень часто при исследовании свойств функций бывает важно выяснить не только значение функции в той или иной точке, но и то значение, к которому стремится значение функции при стремлении аргумента к заданной точке.

Это стремление значения функции называется пределом данной функции при стремлении аргумента к заданной точке. Давайте запишем это уже с помощью известного нам с вами значения предела:

– Как мы с вами обозначали предел?

(Lim).

– Запишем это. Стремление какой функции мы рассматриваем?

($y = \sqrt{x}$).

– К чему у нас стремится х?

(к 4).

– И какое мы при этом получаем стремление функции?

(к 2).

– Мы получили такую запись $\lim_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$. В общем виде она выглядит так $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

– Как мы с вами читаем такие записи?

(предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен b).

– А теперь ответим на такой вопрос: какую из трех рассмотренных функций естественно считать непрерывной в точке $x = 4$?

(Непрерывной будет третья функция).

Так как эта функция непрерывна, то она удовлетворяет условию $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. И функцию $f(x)$ называют непрерывной в точке $x = a$.

Иными словами, функцию $y = f(x)$ называют непрерывной в точке $x = a$, если предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен значению функции в точке $x = a$.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на промежутке X, если она непрерывна в каждой точке промежутка.

При изучении различных функций (линейной, квадратичной, степенной, иррациональной, тригонометрических) мы отмечали, что они являются непрерывными либо на всей числовой прямой, либо на промежутке. Исходя из этого, можно сформулировать следующее утверждение: если выражение $f(x)$ составлено из рациональных, иррациональных, тригонометрических выражений, то функция $y = f(x)$ непрерывна в любой точке, в которой определено выражение $f(x)$.

Для вычисления предела функции в точке, как и для предела на бесконечности, используют правила «предел суммы», «предел произведения», «предел частного».

Правило 1. Предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x).$$

Правило 2. Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x).$$

Правило 3. Предел частного равен частному пределов, если последние существуют и предел знаменателя отличен от нуля:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}.$$

5. *Первичное закрепление.*

Пример 1. Вычислить: $\lim_{x\to 1}(x^3-2x^2+5x+3)$.

Решение.

Выражение x^3-2x^2+5x+3 определено в любой точке x, в частности, в точке $x=1$. Следовательно, функция $y=x^3-2x^2+5x+3$ непрерывна в точке $x=1$, а потому предел функции при стремлении x к 1 равен значению функции в точке $x=1$.

Имеем:

$$\lim_{x\to 1}(x^3-2x^2+5x+3)=1^3-2\cdot 1^2+5\cdot 1+3=7.$$

Ответ: 7.

Пример 2. Вычислить $\lim_{x\to 1}(x^2-3x+5)$.

Решение.

Выражение x^2-3x+5 определено в любой точке x, в частности, в точке $x=1$. Следовательно, функция $y=x^2-3x+5$ непрерывна в точке $x=1$, а потому предел функции при стремлении x к 1 равен значению функции в точке $x=1$.

$$\lim_{x\to 1}(x^2-3x+5)=1^2-3\cdot 1+5=3.$$

Ответ: 3.

Пример 3. Вычислить $\lim_{x\to -1}(x^2+6x-8)$.

Решение.

Выражение x^2+6x-8 определено в любой точке x, в частности, в точке $x=-1$. Следовательно, функция $y=x^2+6x-8$ непрерывна в точке $x=-1$, а потому предел функции при стремлении x к -1 равен значению функции в точке $x=-1$.

$$\lim_{x\to -1}(x^2+6x-8)=(-1)^2+6\cdot(-1)-8=-13.$$

Ответ: -13.

Пример 4. Вычислить $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{4x+12}$.

Решение.

Если подставить значение $x=-3$ в заданное выражение, то и в числителе, и в знаменателе получится 0. Мы уже с вами встречались с подобными вещами, это неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Давайте запишем. Что мы в прошлых темах делали с такими неопределённостями?

(как-то пытались преобразовать заданную функцию).

– А что можно попробовать сделать здесь?

(заданную алгебраическую дробь можно сократить).

$$\frac{x^2-9}{4x+12}=\frac{(x-3)(x+3)}{4(x+3)}=\frac{x-3}{4}.$$

Значит, функции $y = \frac{x^2-9}{4x+12}$ и $y = \frac{x-3}{4}$ тождественны при условии, что $x \neq -3$. Но при вычислении предела функции при $x \neq -3$ саму точку $x = -3$ можно исключить из рассмотрения.

Значит, $\lim_{x \to -3} \frac{x^2-9}{4x+12} = \lim_{x \to -3} \frac{x-3}{4} = \frac{-3-3}{4} = -1{,}5$.

Ответ: $-1{,}5$.

Пример 5. Вычислить $\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2+x}$.

Решение.

Если подставить значение $x = -1$ в заданное выражение, то и в числителе, и в знаменателе получится 0. Преобразуем выражение.

$$\frac{x+1}{x^2+x} = \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{1}{x}.$$

Функции тождественный, при условии, что $x \neq -1; 0$. При вычислении предела функции при $x \neq -1; 0$ точки $x = 0; 1$ можно исключить из рассмотрения.

Значит, $\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2+x} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x} = \frac{1}{-1} = -1$.

Ответ: -1.

6. *Домашнее задание.*

Решить номер 1, 2 из раздела «Предел функции». Номер варианта совпадает с вашим номером по журналу.

7. *Рефлексия.*

Учащимся предлагается продолжить предложение:

– сегодня я узнал(а) …

– для меня было трудно …

– мне было интересно…