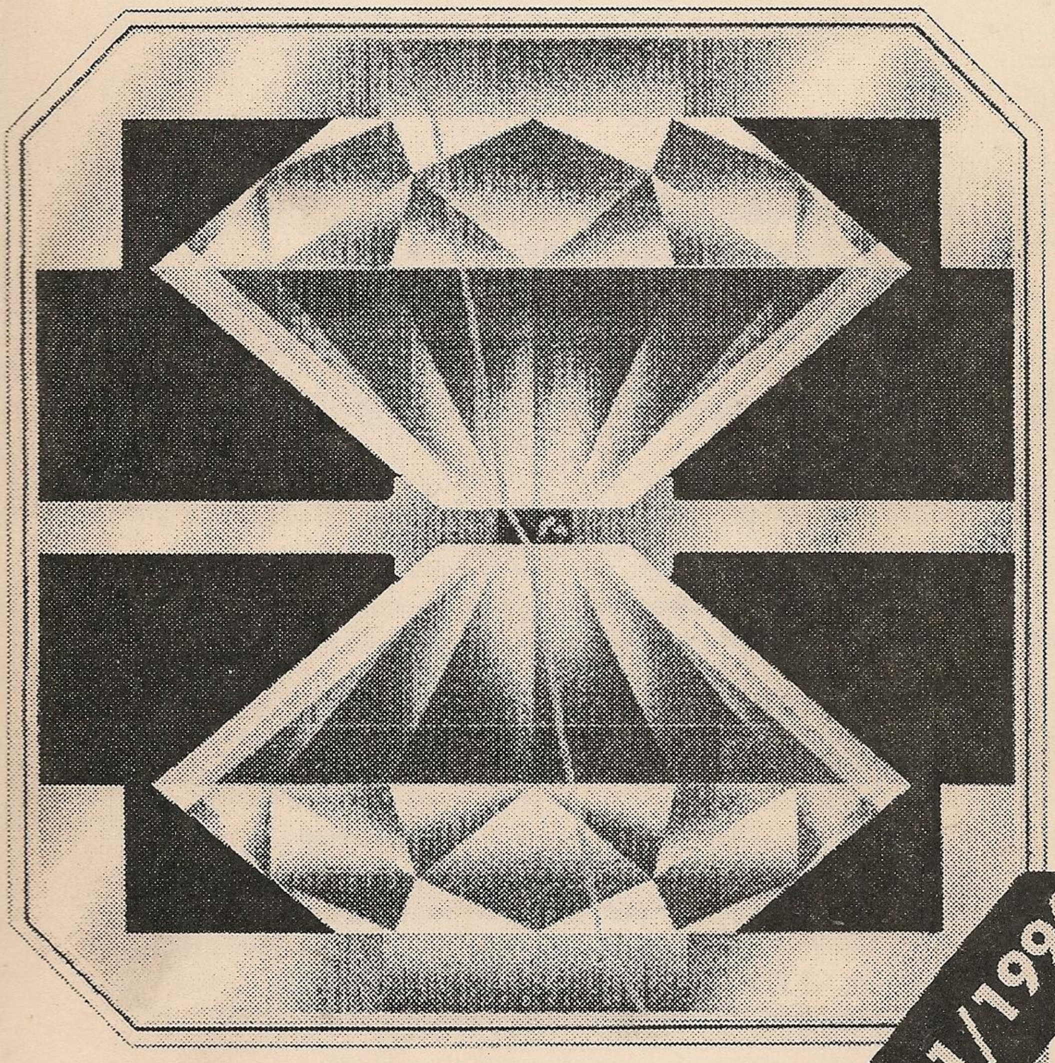
ВЕСТНИК
ЧЕЛЯБИНСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ 4. ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

НАУЧНЫЙ
ЖУРНАЛ

ЧГПУ

Основан в
1995 году



1/1996

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ

МАТЕМАТИКА

А.С. Макаров

ОБ ИНТЕГРИРОВАННЫХ ПОЛУГРУППАХ

В последнее время интенсивное развитие получила теория интегрированных и С-полугрупп. Обзор результатов этой теории приведен в работе [1]. Использование интегрированных и С-полугрупп позволяет получить новые результаты в теории дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.

В настоящей работе по исходному дифференциальному уравнению строятся полугруппы в интегральной форме, об'единяющие интегрированные и С-полугруппы. При построении этих полугрупп мы следуем работам [2;3].

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, оператор $L\in\mathcal{L}(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$, оператор $M:dom\,M\subset\mathfrak{U}\longrightarrow\mathfrak{F}$ линеен и замкнут, $\overline{dom\,M}=\mathfrak{U}$. Рассмотрим задачу

$$L\dot{u}=Mu \qquad (1)$$
$$u(0)=u_0,$$

где ядро $ker L\neq\{0\}$. Определим L-резольвентное множество оператора M как множество [3]

$$\rho^L(M)=\{\mu\in C:(\mu L-M)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F},\mathfrak{U})\}.$$

Рассмотрим при $\mu\in\rho^L(M)$ вместо уравнения (1) пару эквивалентных ему уравнений

$$R^L_\mu(M)\dot{u}=(\mu L-M)^{-1}Mu, \qquad (2)$$

$$L^L_\mu(M)\dot{f}=M(\mu L-M)^{-1}f, \qquad (3)$$

где $R^L_\mu(M)=(\mu L-M)^{-1}L$ –правая L-резольвента, $L^L_\mu(M)=L(\mu L-M)^{-1}$–левая L-резольвента оператора M [3].

Для правой $R^L_\mu(M)$ и левой $L^L_\mu(M)$ L-резольвент оператора M имеет место соответственно правое

$$R^L_\mu(M)-R^L_\lambda(M)=(\lambda-\mu)R^L_\mu(M)R^L_\lambda(M) \qquad (4)$$

и левое

$$L^L_\mu(M)-L^L_\lambda(M)=(\lambda-\mu)L^L_\mu(M)L^L_\lambda(M) \qquad (5)$$

L-резольвентные тождества [3].

В дальнейшем всюду предполагается, что оператор M является L-секториальным [2], то есть кроме предположения относительно оператора M, сформулированного выше, оператор M удовле[illegible] следующим двум условиям:

$$(6)\qquad \exists\, a\in R, \exists\theta\in(\tfrac{\pi}{2},\pi) \text{ такие, что } S^L_{a,\theta}(M)=\{\mu\in C: 0\le|\arg(\mu-a)|\le\theta, \mu\ne a\}\subset\rho^L(M);$$

$$(7)\qquad \forall\, \mu\in S^L_{a,\theta}\setminus B_r(a), \text{ где } B_r(a)=\{\mu\in C: |\mu-a|<r\},$$

справедлива оценка

$$\max\{\|R^L_\mu(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|L^L_\mu(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\}\le\frac{\text{const}}{|\mu-a|}.$$

В условиях (6) и (7), не ограничивая общности, можно [illegible] что $a=0$. При этом положим $S^L_{0,\theta}(M)=S^L_\theta(M)$, $B_r(0)=B_r$.

Пусть операторы $C\in\mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $C'\in\mathcal{L}(\mathfrak{F})$ обратимые и опер[illegible] перестановочен с $R^L_\mu(M)$, а оператор C' – с $L^L_\mu(M)$.

Определение 1. Отображение $S(\cdot)\in\mathfrak{I}^\infty(R_+,\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$ назыв[illegible] (однопараметрической) C-полугруппой (просто полугруппой, [illegible] C-тождественный оператор), если $S(t+s)C=S(t)S(s)$.

Заметим, что в этом определении C-полугруппы априори не [illegible]буется экспоненциальной ограниченности и выполнения равенств[illegible] $S(0)=C$ (см., например, [1]).

Определение 2. Пусть $n\in N$. Отображение $U_n(\cdot)\in\mathfrak{I}^\infty(R_+\cup(0)$,[illegible] называется (однопараметрической) n раз интегрированной C-[illegible] группой, если

$$(8)\qquad U_n(t)U_n(s)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^s[(s-r)^{n-1}U_n(t+r)C-(t+s-r)^{n-1}U_n(r)[illegible]$$

$$U_n(0)=0.$$

Следующее утверждение является модификацией одной теор[illegible] Арендта [1].

Предложение 1. Пусть $n\in N$ и $U(t)$-сильно непрерывная опер[illegible] функция такая, что $\exists d>0, \exists\omega\in R$ такие, что $\|U(t)\|\le d\cdot\exp(\omega t)$, [illegible] Пусть

$$(9)\qquad R(\lambda)=\int_0^\infty\lambda^n e^{-\lambda t}U(t)dt,\qquad \mathrm{Re}\lambda>\omega.$$

Тогда $R(\lambda)$ при $\mathrm{Re}\lambda$, $\mathrm{Re}\mu>\omega$ удовлетворяет тождеству

$$(10)\qquad (\mu-\lambda)R(\mu)R(\lambda)=R(\lambda)C-R(\mu)C$$

тогда и только тогда, когда $U(t)$ удовлетворяет соотношению (8)

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказа[illegible]

[illegible]усть $\gamma\subset C$ – контур такой, что $\gamma\subset S^L_\theta(M)\setminus B_r$, $\arg\mu\longrightarrow\pm\theta$ при [illegible], $\mu\in\gamma$. Положим при $n\in N$ и $t\in R_+\cup\{0\}$

$$(11)\qquad U_n(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma CR^L_\mu(M)\frac{1}{\mu^n}\sum_{k=n}^\infty\frac{(\mu t)^k}{k!}d\mu,$$

$$(12)\qquad V_n(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma C'L^L_\mu(M)\frac{1}{\mu^n}\sum_{k=n}^\infty\frac{(\mu t)^k}{k!}d\mu$$

[illegible]0 равенства (11) и (12), очевидно, принимают вид

$$U_0(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma CR^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu,$$

$$V_0(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma C'L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu.$$

[illegible] $t\in R_+$.

Предложение 2. При $n\in N$ справедливы включения [illegible]$\mathfrak{I}^\infty(R_+\cup\{0\},\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $V_n(\cdot)\in\mathfrak{I}^\infty(R_+\cup\{0\},\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, причем [illegible]$\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}\le\text{const}\cdot t^n$, $\|V_n(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\le\text{const}\cdot t^n$. Если $n=0$, то [illegible]$\mathfrak{I}^\infty(R_+,\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $V_0(t)\in\mathfrak{I}^\infty(R_+,\mathcal{L}(\mathfrak{F}))$.

∇ При $n=0$ $U_0(t)$ и $V_0(t)$ можно, очевидно, сколько угодно раз [illegible]ференцировать. При $n\in N$ докажем первое включение и первое [illegible]венство, остальные доказываются аналогично. Отображение $U_n(t)$ [illegible] в виде

$$(13)\qquad U_n(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma CR^L_\mu(M)\frac{1}{\mu^n}(e^{\mu t}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\mu t)^k}{k!})\,d\mu$$

Пусть $T>0$ произвольно и $\mu\in\gamma$, $\mathrm{Re}\mu<0$. Тогда в силу (7) при [illegible]$0,T]$ справедлива оценка

$$\|R^L_\mu(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}\frac{1}{|\mu|^n}|e^{\mu t}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\mu t)^k}{k!}|\le\frac{\text{const}}{|\mu|}\left(\frac{2}{|\mu|^n}+\frac{T}{|\mu|^{n-1}}+\cdots+\frac{T}{|\mu|}\right),$$

[illegible]торой следует равномерная сходимость интеграла в (13) [illegible]юбом $n\in N$ и, следовательно, возможность дифференцирования [illegible] по t сколько угодно раз на отрезке $[0,T]$, а так как T

Полагая при $t>0$ $\mu t=\nu$ и используя (7), получим неравенств[illegible]

$$\|tC(\nu L-tM)^{-1}L\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}=\|C(\frac{\nu}{t}L-M)^{-1}L\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}=\|CR^L_\mu(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}\le\frac{\text{const}}{|\mu|}$$

из которого следует неравенство

$$(14)\qquad \|C(\nu L-tM)^{-1}L\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}\le\frac{\text{const}}{|\nu|}.$$

Сделав замену $\mu t=\nu$ $(t>0)$ в (13), получим:

$$U_n(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma C(\mu L-M)^{-1}L\frac{1}{\mu^n}(e^{\nu}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\mu t)^k}{k!})d\mu=$$

$$=\frac{t^n}{2\pi i}\int_{\gamma'}C(\nu L-M)^{-1}L\frac{1}{\nu^n}(e^\nu-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\nu^k}{k!})d\nu$$

(γ' можно взять не зависящим от t в силу аналити[illegible] подынтегральной функции). Так как в силу (14) последний инте[illegible] абсолютно сходится, то получаем неравенство $\|U_n(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}\le$con[illegible] При $t=0$ это неравенство очевидно.Δ

Теорема 1. Однопараметрические семейства $\{U_0(t), t\in R_+\}$[illegible] $\{V_0(t), t\in R_+\}$ образуют, соответственно, C- и C'-полугру[illegible] $\{U_n(t), t\in R_+\cup\{0\}\}$ и $\{V_n(t), t\in R_+\cup\{0\}\}$ при $n\in N$ – n [illegible] интегрированные C- и C'-полугруппы.

∇ Для $U_0(t)$ и $V_0(t)$ полугрупповое равенство в опреде[illegible] проверяется стандартным образом с использованием тождеств (4) [illegible] и предположенной перестановочности операторов C с $R^L_\mu(M)$ и [illegible] $L^L_\mu(M)$. Пусть $n\in N$. В силу предложения 2 вектор-функция [illegible] является экспоненциально ограниченной, причем (см. предложен[illegible] число $\omega>0$ можно взять достаточно большим. Поэтому для того, [illegible] установить, что $U_n(t)$ удовлетворяет равенству [illegible] достаточно проверить справедливость тождества (10).

Запишем $U_n(t)$ в виде

$$U_n(t)=\frac{1}{2\pi i(n-1)!}\int_\gamma CR^L_\mu(M)\int_0^t(t-s)^{n-1}e^{\mu s}dsd\mu$$

и найдем, используя преобразование Лапласа свертки, при $t\in R_+\cup$[illegible] $\mathrm{Re}\lambda>\omega$

$$R(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}U_n(t)dt=\frac{1}{2\pi i(n-1)!}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_\gamma CR^L_\mu(M)\int_0^t(t-s)^{n-1}e^{\mu s}dsd\mu dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i(n-1)!}\int_\gamma CR^L_\mu(M)\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t(t-s)^{n-1}e^{\mu s}dsdtd\mu=$$

$$=\frac{1}{2\pi i(n-1)!}\int_\gamma CR^L_\mu(M)\frac{(n-1)!}{\lambda^n(\lambda-\mu)}d\mu=\frac{1}{\lambda^n 2\pi i}\int_\gamma\frac{CR^L_\mu(M)}{\lambda-\mu}d\mu.$$

[illegible]ур γ можно выбрать так, чтобы для $\mu\in\gamma$ $\mathrm{Re}\mu<\omega$, тогда в силу [illegible]нной теоремы Коши, учитывая направление на γ, имеем [illegible]нство:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{CR^L_\mu(M)}{\lambda-\mu}d\mu=CR^L_\lambda(M).$$

[illegible]ательно, $R(\lambda)=CR^L_\lambda(M)$. Из тождества (4) для $R^L_\lambda(M)$ легко [illegible] при $\mathrm{Re}\lambda, \mathrm{Re}\mu>\omega$ тождество (10) для $R(\lambda)$. Для $V_n(t)$ [illegible]ательство аналогично. Равенства $U_n(0)=0$ и $V_n(0)=0$ очевидны.Δ

[illegible]аметим, что если в (11) и (12) операторы C и C'– [illegible]твенные, то $U_0(t)$ и $V_0(t)$– полугруппы, рассмотренные [illegible]ком Г.А. (см., например, [3]).

[illegible]ледуя работе [2], решением уравнения (1) будем называть [illegible]-функцию $u\in\mathfrak{I}^\infty(R_+,\mathfrak{U})$, а полугруппу $\{S(t), t\in R_+\}$– разрешающей [illegible]группой уравнения (1), если вектор-функция $u(\cdot)=S(\cdot)u_0$ [illegible] решением этого уравнения при любом $u_0\in\mathfrak{U}$. Из теоремы 2 в[illegible]ледует, что полугруппа $S(t)=C^{-1}U_0(t)$, а при $n\in N$ полугруппа [illegible]$^{-1}U_n^{(n)}(t)$ являются разрешающими полугруппами уравнения (1).

Литература

1. Мельникова И.В., Филинков А.И. Интегрированные полугруппы [illegible]полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-[illegible]ных задач// УМН. 1994.Т.49,Вып.6(300). С.111-150.
2. Свиридюк Г.А. Полулинейные уравнения типа Соболева с [illegible]тельно секториальным оператором// ДАН. 1993. Т.329. N3. [illegible]-277.
3. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов//УМН. [illegible]Т.49,Вып.4(298). С.47-74.