ПРИЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

ПРИЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1974

А. С. МАКАРОВ

КРИТЕРИЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ОПЕРАТОРА СУПЕРПОЗИЦИИ

В работах [1], [2] были сформулированы необходимые и достаточные условия непрерывности оператора суперпозиции, действующего в пространствах Орлича. Утверждения, аналогичные некоторым результатам из [1], были получены в [3] для оператора суперпозиции, действующего из квазиправильного пространства в идеальное пространство функций. В данной статье приводится новый критерий непрерывности оператора суперпозиции, действующего в произвольных банаховых функциональных пространствах, который обобщает одно утверждение из [4].

Пусть (X, μ) — пространство с σ-конечной мерой $E(X, \mu)$ и $F(X, \mu)$ — банаховы функциональные пространства в смысле Люксембурга [5]. Обозначим через $[F]$ подпространство пространства F, состоящее из таких функций $z \in F$, что $\lim \|P_{D_n} z\|_F = 0$ при любой последовательности измеримых множеств $D_n \downarrow \varnothing$. Здесь P_D — оператор умножения на характеристическую функцию χ_D множества D, $\varnothing$ — пустое множество.

Оператор суперпозиции $Hx = h(t, x(t))$ порождается действительной функцией $h(t, u)$, заданной на $X \times (-\infty, \infty)$ и удовлетворяющей условиям Каратеодори, то есть непрерывной по u при почти каждом t и измеримой по t при любом u. При этих условиях оператор суперпозиции H — μ-непрерывен, то есть если последовательность измеримых функций x_n сходится по мере на каждом измеримом множестве конечной меры $(x_n \xrightarrow{\mu} x)$, то $Hx_n \xrightarrow{\mu} Hx$.

Лемма 1. *Последовательность функций $f_m \in E$ сходится по норме к функции $f \in E$ тогда и только тогда, когда $f_m \xrightarrow{\mu} f$ и для любой последовательности измеримых множеств $D_n \downarrow \varnothing$*

$$\lim_n \sup_{m \geqslant n} \|P_{D_n}(f_m - f)\|_E = 0. \qquad (1)$$

Доказательство. Необходимость условия (1) очевидна, сходимость $f_m \xrightarrow{\mu} f$ установлена, по существу, при доказательстве полноты пространства E в [5]. Покажем достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$, $X_n \uparrow X$, $\mu(X_n) < \infty$ и $\|\chi_{X_n}\|_E < \infty$. В силу (1) существует такое n_0, что $\|P_{X \text{-} X_{n_0}}(f_m - f)\|_E < \frac{\varepsilon}{2}$ при $m \geqslant n_0$. Положим

$$D_m = X\left(|f_m - f| \geqslant \frac{\varepsilon}{4 \cdot \|\chi_{X_{n_0}}\|_E}\right) \cap X_{n_0}.$$

Поскольку $f_m \xrightarrow{\mu} f$, то $\mu D_m \to 0$ при $m \to \infty$. Поэтому в силу (1) существует n_1 такое, что $\|P_{D_m}(f_m - f)\|_E < \frac{\varepsilon}{4}$ при $m \geqslant n_1$. Отсюда при $m \geqslant \max(n_0, n_1)$

$$\|f_m - f\|_E \leqslant \|P_{X \text{-} X_{n_0}}(f_m - f)\|_E + \|P_{X_{n_0} \setminus D_m}(f_m - f)\|_E +$$

$$+ \|P_{D_m}(f_m - f)\|_E < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4 \cdot \|\chi_{X_{n_0}}\|_E} \cdot \|\chi_{X_{n_0}}\|_E + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем $S_E(x, r)$ — открытый шар в пространстве E радиуса r с центром в точке x, $d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$ и если $z_0 \in F$, то

$$T(z_0 + [F], \varepsilon) = \{z \in F : d(z, z_0 + [F]) < \varepsilon\}.$$

Лемма 2. *Для любого $x \in E$ и для любой последовательности измеримых множеств $D_n \downarrow \varnothing$ справедливо соотношение:*

$$\lim_n \|P_{D_n} x\|_E \leqslant d(x, [E]).$$

Сформулированное утверждение следует из неравенства

$$\big|\|P_{D_n} x\|_E - \|P_{D_n} y\|_E\big| \leqslant \|P_{D_n}(x - y)\|_E \leqslant \|x - y\|_E.$$

Теорема. *Для непрерывности оператора $H : S_E(x_0, r) \to F$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что*

$$H(S_E(x_0, \delta)) \subset T(Hx_0 + [F], \varepsilon).$$

Доказательство. Так как $S_F(z, \varepsilon) \subset T(z + [F], \varepsilon)$, то условие теоремы необходимо. Установим достаточность, предположив сначала, что $x_0 = 0$ и $H_0 = 0$.

Допуская противное, можно, в силу μ-непрерывности оператора H и леммы 1, найти такую сходящуюся по норме

Д-453.—6

к нулю последовательность $y_m \in S_E(0, r)$, для которой не выполняется соотношение (1). Тогда существуют $\varepsilon > 0$, последовательность измеримых множеств $D_n \downarrow \varnothing$ и подпоследовательность $\{x_n = y_{m_n}\}$ такие, что при любом n

$$\|P_{D_n} Hx_n\|_F > \varepsilon. \qquad (2)$$

В силу условия теоремы и леммы 2 найдется такое $\delta > 0$, что

$$\lim_n \|P_{D_n} Hx\|_F < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (3)$$

если $\|x\|_E < \delta$. Переходя, если нужно к подпоследовательности, можно считать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_E < \delta. \qquad (4)$$

Используя (2) и (3), выберем такую возрастающую последовательность n_k, что

$$\|P_{D_{n_{k+1}}} Hx_{n_k}\|_F < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|P_{D_{n_k}} Hx_{n_k}\|_F > \varepsilon. \qquad (5)$$

Положим $A_k = D_{n_k} \setminus D_{n_{k+1}}$ и $x = \sum_{k=1}^{\infty} P_{A_k} x_{n_k}$. Тогда $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и, в силу (4), $\|x\|_E < \delta$. Из неравенств (5) следует, что $\|P_{A_k} Hx_{n_k}\|_F > \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда

$$\lim_k \|P_{D_{n_k}} Hx\|_F \geqslant \lim_k \|P_{A_k} Hx_{n_k}\|_F > \frac{\varepsilon}{2},$$

что противоречит (3) и, следовательно, условию теоремы.

Для рассмотрения общего случая введем оператор $H_1 x = H(x + x_0) - Hx_0$. Очевидно, $H_1 0 = 0$ и H_1 определен на шаре $S_E(0, r)$ и принимает значения из F. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ таково, что выполняется условие теоремы. Тогда для любого $x \in S_E(0, \delta)$

$$d(H_1 x, [F]) = \inf_{z \in [F]} \|H_1 x - z\|_F = \inf_{z \in [F]} \|H(x + x_0) - (Hx_0 + z)\|_F < \varepsilon.$$

Отсюда и из предыдущих рассуждений следует, что H_1 непрерывен в нуле. Поэтому H непрерывен в точке x_0.

Следствие. Любой оператор $H : S_E(x_0, r) \to [F]$ — непрерывен.

В том случае, когда $[F] = \{0\}$, теорема сводится к определению непрерывности оператора H в точке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шрагин И. В. О непрерывности оператора Немыцкого в пространствах Орлича. ДАН СССР, т. 140, № 3, 1961.
2. Шрагин И. В. Некоторые свойства оператора Немыцкого в пространствах Орлича. — Матем. сб. т. 65 (107) : 3, 1964.
3. Обрадович П. М. О непрерывности оператора суперпозиции. — Сб.: Проблемы математического анализа сложных систем, вып. 2, Воронежский университет, 1968.
4. Robert Jacques. Continuité dún operateur non eineaire sur certains espaces de suites. C. r. Acad. Sci., 259, N 6, 1964.
5. Luxemburg W. A. Banach function spaces. Thesis, Delft, 1955.