МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика обучения решению задач на комбинации геометрических тел в средней школе с применением интерактивных чертежей системы GeoGebra

Выпускная квалификационная работа по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность программы бакалавриата «Математика. Экономика»

Форма обучения очная

Проверка на объем заимствований:
74.36 % авторского текста
Работа рекомендована к защите
« 26 » марта 2021 г.
и.о. зав. кафедрой МиМОМ
________ Шумакова Е.О.

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513/086-5-1
Штер Анастасия Анатольевна

Научный руководитель: доцент
к.п.н., доцент кафедры МиМОМ
Винтиш Татьяна Юрьевна

Челябинск

2021

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость в изображении комбинаций различных геометрических тел на плоскости возникла с самых давних времен в Вавилоне, Египте, Греции, Китае и Индии. Это связанно с развитием общества в областях архитектуры, науки, техники и искусства. Первые дошедшие до наших дней изображения пространственных фигур можно найти в проектах Леонардо да Винчи. С течением времени эти знания стали необходимы в физике, биологии, химии, программировании, информатики, ювелирного дела и математики. Наука, которая изучает пространственные фигуры, называется стереометрией, она и связала эти дисциплины для решения главной задачи об изображении пространственных фигур на плоскости.

Повседневная жизнь человека, быт, профессиональная деятельность и даже окружающая среда тесно связаны с пространственными геометрическими телами. Геометрические знания очень важны во многих современных специальностях: дизайнер, инженер, архитектор, ювелир, физик и др.

Непосредственно сами задачи на комбинации геометрических тел в пространстве встречается при изучении курса геометрии старшей школы, в олимпиадных задачах разных уровней сложности и задачах ЕГЭ (№8 и №14). Изучению проблем решения этих задач в школе посвящено много научных статей. Это связанно с тем, что у учащихся при решении задач из данной темы возникают большие трудности в построении. Обычно это связанно с тем, что не хватает учебного времени для достаточного изучения тем, посвященных комбинации пространственных тел, изучение этой темы приходится на конец учебного года, когда начинается подготовка к аттестации. Отсутствие учебного времени для рассмотрения задач по данной теме в школе и в то же время их необходимость, для успешной сдачи учащимися выпускных экзаменов и последующего поступления в вузы. У большинства учащихся данный тип задач зачастую вызывает некий страх и ложное мнение о сложности задачи.

С введением нового федерального государственного образовательного стандарта (далее – ФГОС) современное образование предполагает обширную интеграцию информационных технологий в образовательный процесс, средств мультимедиа и электронных учебных пособий. Школьный курс геометрии дает прекрасную перспективу использования этих методов как в ходе изучения теоритической части, так и при решении различных задач, где просто необходимы построения. Использование системы Geogebra помогает облегчить переход от рассмотрения плоских чертежей к рассмотрению подвижных пространственных, развивать пространственные представления обучающихся, способствует повышению интереса к предмету.

Данной проблеме посвящено множество исследований. Проблемой методики обучения решения геометрических задач занимались Орлов В. В., Смирнова И. М., Смирнов В. А.. Изучением проблемы применения интерактивных методов на уроках стереометрии занимались Глейзер Г. Д., Ларин, С. В.. Все авторы подчеркивают важность построения чертежа при решении задач, тем самым визуализируя получаемую информацию, способствовать развитию пространственных представлений и мышлений. Проблеме развития пространственного представления посвящены работы Четверухина Н. Ф. и Якиманской И. С., Ананьева Б. Г, Брушлинского А. В., Владимирского Г. А., Леонтьева А. Н., Лернера И. Я., Ломова Б. Ф., Немова Р. С..

Хорошо развитое пространственные представление и мышление очень важны в современном мире, поскольку в большинстве современных профессий таких как дизайнер, модельер, инженер, авиадиспетчер архитектор, врач оно просто необходимо. Так же хорошо развитое мышление помогает обучающемуся легче усваивать многие общеобразовательные и технические дисциплины и является важнейшей составляющей в подготовке к практической деятельности.

Все вышеперечисленное обуславливает актуальность темы исследования.

Цель исследования: систематизировать материал по теме «Методика обучения решению задач на комбинации геометрических тел в средней школе с применением интерактивных чертежей системы GeoGebra» и разработать элективный курс по данной теме.

Объект исследования: процесс обучения решению стереометрических задач в средней школе с использованием системы GeoGebra.

Предмет исследования: методы и приемы решения задач по темам: «Многогранники», «Цилиндр, конус, шар», «Комбинация многогранников и тел вращения».

Теоретическая база: кафедра математики и методики обучения математике Южноуральского государственного гуманитарного педагогического университета города Челябинск.

Практическая база: 11 «а» класс, МОУ «СОШ №3 г. Южноуральск».

Применяемые методы: начальный и контрольный срез знаний, интерактивные чертежи системы GeoGebra.

Гипотеза исследования: интеграция в процесс обучения интерактивных моделей пространственных геометрических тел, а так же использование наглядного справочного материала позволяет повысить эффективность учебного процесса, обогатить и осовременить традиционные знания учащихся современным методами решения стереометрических задач, что позволяет качественно решать геометрические задачи второй части единого государственного экзамена (далее – ЕГЭ).

Задачи исследования:

1) изучить научную литературу по данной проблеме и провести теоретические аналогии;

2) изучить особенности преподавания стереометрии в школе;

3) изучить учебно-методические комплекты по геометрии, провести их анализ;

4) определить методические приемы, применяемые для обучения решению задач на комбинацию многогранников и тел вращения;

5) рассмотреть задачи на комбинацию сферы с другими телами и классифицировать их;

6) разработать элективный курс «Решение олимпиадных задач и задач ЕГЭ на комбинацию пространственных тел» с применением интерактивной системы GeoGebra.

Структура исследования включает в себя: введение, две главы, выводы к главам, заключение, список использованных источников, и приложения.

ГЛАВА 1. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДОВАНИЯ КУРСА СТЕРЕОМЕТРИИ

1.1 Общие положения методики преподавания стереометрии

В соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования, современный обучающийся должен обладать развитым пространственным воображением; уметь размышлять, опираясь на законы логики; обладать алгоритмической культурой; критически мыслить на том уровне, который предполагает его будущая профессиональная деятельность; а так же иметь мотивацию к получению знаний на протяжении всей жизни. При рассмотрении требований к профильному уровню, выделяют следующее: развитое математическое мышление, развитая интуиция, необходимая для правильного решения той или иной задачи, творческие способности, умение нестандартно мыслить. Все эти качества помогут выпускнику в дальнейшей профессиональной деятельности и продолжения получения образования в различных областях сферы деятельности человека.

В настоящее время в качестве одного из главных критериев математического развития личности многие психологи и педагоги рассматривают уровень развития пространственного представления, который характеризуется умением оперировать пространственными образами [11; 19; 21; 23; 24; 49; 51]. В последнее время отмечается снижение геометрической подготовленности учащихся. Это проявляется в первую очередь в низком уровне развития пространственного мышления.

Проблема развития пространственного мышления старших подростков остается актуальной уже не одно столетие. Изучив различные психолого-педагогические статьи, мы заметили, что со времен Ф. Клейна (1849-1925 гг.) в решении развития пространственного мышления мало что изменилось. По результатам исследований, проведенных И.С Якиманской в 1954-1955 гг. и в 1974-1975 гг. не было обнаружено никаких существенных изменений в развитии пространственного мышления у школьников и студентов нашего времени. До настоящего времени большая часть школьников, студентов и молодых рабочих испытывают серьезные и порой неразрешимые трудности в использовании пространственных образов при решении различных учебных и производственно-технических задач. В исследованиях, проводимых в 1950-1970 гг. особое место отводили проблеме развития пространственного мышления на уроках математики. В этих исследованиях можно заметить следующее. Одни считают, что развитие мышления нужно реализовать через мыслительную деятельность, создавая различные приемы (Володарская И. А., Епишева О. Б. и Крупич В. И.). Другие думают, что нужно формировать особые качества мышления (Крутецкий В. А., Меерович М. И., Шрагина Л. И.).

Курс стереометрии приходится на 10 и 11 классы старшей школы. Учащиеся этих классов относятся к старшему подростковому возрасту. Для этого возраста характерны: ощущения собственной взрослости, социальная активность, восприимчивость к усвоению норм, ценностей и способов поведения, которые существуют среди взрослых. Родители и вообще взрослые не могут при всем желании решить проблемы подростков, связанные с их новыми потребностями, между тем как удовлетворение всех основных потребностей младших школьников зависит в основном, от родителей. Все это часто болезненно сказывается на отношении учащихся к взрослым, в том числе и учителю, и к учению. Следуя из этого, стоит выделить, что с обильным потоком информации активизируются и начинают развиваться познавательные процессы, такие как ощущения, восприятия, представления, память, воображение, мышление, речь.

Развитие познавательных процессов зависит от усложнения учебных программ по мере взросления. Подросток приобретает взрослую логику мышления, у него отмечается дальнейшее развитие таких познавательных процессов, как восприятие и память.

В подростковом возрасте осваиваются разные виды памяти: словесно-логическая, произвольная, механическая, логическая. При помощи этих видов, продуктивность непроизвольного запоминания замедляется и одновременно с этим увеличивается продуктивность опосредованного запоминания.

Одним из важных средств, активизирующих учебный процесс, является побуждение познавательной потребности. Познавательная потребность занимает важное место в общем психологическом развитии личности, и особенно ее мотивационно-потребностной сферы. Познавательная потребность – это мотивационно-личностное образование, которое почти на всем протяжении школьного возраста проявляется в любознательности учащихся, находя отражение в системе его учебных и вне учебных интересов.

Значительно менее очевидно, хотя, может быть, гораздо более важную роль в успешности обучения играет воля учащегося. Начинать воспитание воли следует с приобретением привычки решать задачи сравнительно незначительной трудности. Систематически преодолевая сначала небольшие трудности, а со временем и значительные, учащиеся тренируют и закаляют свою волю.

На умственные процессы и, следовательно, на успешность обучения влияет так же ряд факторов, которые с виду не имеют к ним никакого отношения. Это такие стороны личности человека, как эмоции, чувства, настроение в данные момент, темперамент, характер и другие.

Только при условии того, что если задача доступна учащемуся, если цели ее решения ясны, если он чувствует свое движение вперед, то создающиеся при этом положительные эмоции облегчают дальнейшее решение.

Вопрос о влиянии внушения и самовнушения чрезвычайно важен в обучении решению задач. Педагог должен проявлять чуткость в своих беседах с учащимися. Всевозможные замечания вроде таких, что " у тебя все равно ничего не получится", способны в сильнейшей степени деморализовать учащегося, особенно подростка. И наоборот, уверенное убеждение, что "задача должна решиться потому, что ты серьезно занимаешься, а ты не хуже других", во многих случаях сыграет свою положительную роль.

Может быть, еще большую роль играет самовнушение. Если учащийся почему-то пришел к выводу, что "он не способен", что "ничего не получится", то, конечно, сколько времени он ни сидел бы над задачей, он все равно задачи не решит. Такое самовнушение подростка парализует его волю, лишает его концентрации мысли, и он не сможет мобилизовать столько энергии на преодоление стоящих перед ним задач, сколько он мог бы проявить в нормальных условиях. В этом случае надо добиться перелома в психике учащегося-подростка, вселить в него уверенность в своих силах, возбудить волю. Возможно, что учащемуся, потерявшему веру в себя, целесообразно сначала дать для решения самые простые задачи, чтобы дать ему возможность поверить в свои силы.

Исследователи предлагали новый подход к рассматриваемой проблеме. Все результаты их исследования были внедрены в педагогическую практику и активно применялись учителями в процессе обучения. После того как усилилась логическая часть курса математики и стремление простроить курс на строго дедуктивной основе, проблема развития пространственного мышления отошла на последний план, что негативно отразилось на результатах изучения геометрии. Сейчас развитие пространственного мышления снова переходит на первое место, тем самым, делая актуальной работу по созданию благоприятных условий для продуктивного развития пространственного мышления школьников. В последнее время заинтересованность к проблеме развития пространственного мышления выросла среди математиков и ученых-методистов. Ими рассматриваются вопросы об изменении школьного курса геометрии, было начато внедрение курса наглядной геометрии в начальной школе.

Математика, а именно геометрия позволяет достичь большинства из качеств, перечисленных нами выше. Самыми важными и необходимыми приобретаемым в курсе стереометрии качествами, являются пространственное мышление, умение представлять пространственные фигуры, перед тем, как сделать их чертеж. Курс геометрии позволяет сформировать у учащихся аналитические и созидательные (включая комбинаторные) компоненты мышления, что в свою очередь благоприятно сказывается на формировании у них пространственных представлений.

Творческое начало личности поддерживается на уроках геометрии включением различных видов деятельности, наличием задач, имеющих практическое приложение, задач, при решении которых возникают проблемные ситуации, требующие включения нестандартного мышления.

В свою очередь процесс усвоения знаний включает в себя следующие этапы: анализ, синтез, абстрагирование, обобщение, конкретизация. Этапы связаны с деятельностью по распознаванию, воспроизведению, решению типовых и нетиповых задач, требующих применения знаний в новых ситуациях. Без последнего этапа процесс обучения остается незавершенным. Поэтому процесс усвоения учебного материала каждого раздела должен содержать решение пропедевтических творческих задач, локально направленных на усвоение соответствующих знаний. Систематическое обращение к творческим задачам создает предпосылки для развития творческого потенциала учащихся. Творческая деятельность создает условия для развития творческого мышления, креативных качеств личности учащихся (способности к длительному напряжению сил и интеллектуальным нагрузкам, самостоятельности и терпения, умения доводить дело до конца, потребности работать в полную силу, умения отстаивать свою точку зрения и др.). Результатом творческой работы школьников является рост их интеллектуальной активности, приобретение положительного эмоционально-чувственного опыта, что в результате обеспечивает развитие творческого потенциала личности.

Таким образом, для наибольшей эффективности образовательного процесса необходимо достигать наглядности изучаемого материала. Этого можно добиться, если включать примеры из окружающего мира, применять реальные модели геометрических тел, выполненных из картона, проволоки и других подручных материалов, использовать различные учебные плакаты, схемы, таблицы, использовать интерактивные чертежи и электронные учебные пособия. По рекомендациям И. М. Смирновой необходимо так же рассматривать устные задачи по заранее приготовленным чертежам или моделям в начале урока на этапе повторения ранее изученного материала, для наилучшего запоминания материала [36; 37].

Главную роль при изучении стереометрии выполняет работа у доски. Учитель должен показывать правильное выполнение чертежа пространственных фигур, а так же уметь вовремя замечать и корректировать неточности в чертежах учащихся. Чертеж должен быть наглядным, правильным, аккуратным. При выполнении чертежей важно пользоваться мелом разных цветов, для наглядности при изучении отдельных элементов пространственных фигур. В своей книге «Методика преподавания математики» С. Е. Ляпин отмечает, что при выполнении правильного чертежа необходимо учитывать направление проектирующих лучей, а так же выполнять дополнительные построения. Наглядность же чертежа заключается в том, что она дает представления о его частях и их расположениях, а так же позволяет проводить на них дополнительные построения. Аккуратность выполнения чертежа так же позволяет проводить дополнительные построения, помогает обучающемуся освоить основные свойства пространственных фигур. Автор подчеркивает, что со временем обучающийся должен научиться строить аккуратные чертежи не только с помощью чертежных инструментов, но и от руки.

На первых этапах изучения стереометрии особое затруднение у обучающихся вызывает построение пространственных чертежей на плоскости. Здесь важную роль будет играть моделирование. Следует разобрать какие фигуры при моделировании на плоскости получаются из пространственных, рассмотреть, как искажаются их элементы (углы, стороны, их соотношение). Из всех известных видов проектирования автор предлагает использовать параллельное проектирование, поскольку оно является наиболее наглядным и простым при построении, что позволяет экономить учебное время. Но это вовсе не означает, что другими методами проектирования нужно пренебрегать, учащиеся, по мнению В. М. Брадиса должны иметь представление о каждом из них. Например, изображение шара будет более наглядным при использовании ортогональной проекции. Перед построением чертежей рекомендуется сначала показать обучающимся наглядные модели, выполненные из проволоки, бумаги или других подручных материалов. На наш взгляд будет вполне уместно применение интерактивных методов, так как это позволит сократить время, отводимое на построение чертежей на доске, увеличить наглядность за счет «подвижности» чертежа.

Для формирования логического мышления учащихся необходимо постоянно проговаривать все совершаемые действия и обосновывать их. Сформировать у учащихся умение кратко и ясно обосновывать свои решения.

1.2 Методика обучения решению задач на комбинацию шара, описанного или описанного около многогранников или тел вращения

Как можно заметить из прошлого параграфа, задачи на комбинацию геометрических в виду ряда причин вызывают значительные затруднения у школьников. Учащимся трудно самостоятельно решать такие задачи и более того обосновывать решения. С методической точки зрения такие затруднения вызваны следующим: учащимся сложно определять центр шара, при его комбинации с другими геометрическими телами, находить расположение их общих элементов, устанавливать зависимость между радиусом и элементами геометрического тела, входящих в комбинацию с ним.

Эти трудности связаны с тем, что в школьных учебниках задачи данного типа не дифференцированы по уровню сложности. Поэтому перед учителем встает задача составить систему задач по принципу от простого к сложному, включая устные задачи. Как пишет Смирнова И. М.: «…устные упражнения по геометрии направленны на то, чтобы способствовать развитию пространственных представлений учащихся, они должны помогать более четкому формированию геометрических понятий, подготавливать к восприятию новых пространственных соотношений и расширять запас имеющихся геометрических образов. … Особенно такие чертежи полезны при изучении первых разделов стереометрии, когда ребята еще плохо ориентируются в различных пространственных ситуациях. У них только начинает вырабатываться умение устанавливать соответствие между пространственными объектами и их изображениями. С этой целью включается упражнения на чтение чертежей…» [36]. Системы задач позволят учителю подтолкнуть учащихся к выводу основных положений, которые бы помогли при решении аналогичных задач, помогли бы разработать алгоритм действий для их решения.

В книге «Методика преподавания математики» под редакцией С. Е. Ляпина предлагается следующая система задач:

1) группа задач, помогает учащимся с определением положения центра вписанного шара;

2) группа задач, подготавливает учащихся к определению положения центра описанного шара около многогранника;

3) группа задач, подготавливает к определению положения центра шара вписанного в круглые тела [24].

После решения этих задач у учащихся будут сформированы представления о положении центра шара в комбинации с другими геометрическими телами. Необходимо сделать акцент на разницу комбинаций шара с телами вращения и шара с многогранниками, вывести совместно с учащимися определения для каждой комбинации.

В настоящее время составить систему задач по представленной выше схеме не сложно. В учебно-методические комплекты (далее – УМК) по геометрии входят дидактические материалы и рабочие тетради, содержащие большее число задач, нежели в учебнике. Но одного решения задач недостаточно, необходимо в процессе обучения применять различные технологии, которые бы способствовали развитию пространственных представлений. Авторы многих методик предлагают использовать рисунки, которые использовались при изучении теорем, геометрические конструкторы, шаблоны, устные упражнения в начале урока, готовые чертежи. Многочисленные исследования показывают, что трудности, возникающие при обучении решению задач на комбинацию геометрических тел легко можно преодолеть, регулярно используя наглядные методы. Чтобы разнообразить скучные и однообразные модели, имеющиеся в каждом классе математики, рекомендуется использование информационных технологий. Об их важности в обучении стереометрии писали С. Е. Ляпин, Н. Ф. Четвертулин, С. В. Ларин [21; 23; 49]. В исследовании этих авторов как средство формирования пространственных представлений о геометрических телах и образования соответствующих абстрактных понятий, как средства наглядности при изучении теорем, как средство позволяющее компенсировать несформированность умения решать задачи, требующие хорошо развитых пространственных представлений.

Особое внимание при решении задач на комбинацию геометрических тел следует уделить именно построению чертежей, его наглядности. Важно чтобы учащийся поняли, что чертеж при его правильном построении и умении читать существенно помогает в решении задачи. В связи с этим, необходимо сформировать у учащихся следующие умения:

– выбирать оптимальное положение комбинации, так чтобы не происходило наложение линий из разных плоскостей;

– правильно строить сечение геометрических тел;

– правильно изображать геометрические тела в проекционном чертеже;

– правильно определять и строить проекцию конфигураций;

– снижать наличие «лишних» линий и построений.

Следует избегать выработки неких алгоритмов решения задач, и именно научить обучающихся сознательно решать задания, применяя наработанные умения и навыки, использовать ранее полученные знания. Решение большого числа однотипных задач за счет многократного достижения одной и той же цели позволяет субъекту автоматизировать свою деятельность. Такие автоматизированные операции отрицательно влияют на процесс обучения, поскольку субъект перестает вникать в суть вещей и прекращает осознавать взаимосвязь между элементами, исчезает контроль над решением задачи, понижается интерес к предмету. Навыки же отличаются тем, что действия субъекта автоматизированы лишь в отдельных операциях в ходе их неоднократного повторения. Умения в свою очередь включает в себя помимо навыков приобретенные ранее субъектом знания, тем самым позволяя ему находить решения не только в типичных условиях, но и в изменившихся. Следует подчеркнуть, что именно умению включают в себя полученные ранее знания и навыки решения отдельных операций, приобретенных в ходе сходного действия, выполнявшегося ранее.

Умения решать ту или иную задачу показывают степень осознанности, самоанализа, умения вовремя находить ошибки и грамотно их исправлять. Стереометрические задачи на комбинацию пространственных фигур различных уровней сложности благоприятно сказываются для формирования новых умений и навыков, позволяют учащимся проявить свои творческие способности, показать умение действовать в новых нестандартных ситуациях. Авторами исследований неоднократно подмечается, что удачное формирование этих умений достигается за счет ранее приобретенного опыта обучающегося, его мотивации, желания самостоятельно выполнять работу, истинных мотивов его деятельности.

Формирование этих умений одна из основных целей обучения математика, в частности геометрии. В Федеральном государственном образовательном стандарте среднего общего образования (далее – ФГОС СОО) по математике перечислены следующие умения, которыми должен овладеть обучающийся по окончанию прохождения курса математики на базовом уровне в старшей школе:

– распознавать на чертежах и моделях пространственные формы;

– соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;

– анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;

– изображать основные многогранники и круглые тела;

– выполнять чертежи по условиям задач;

– решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин;

– использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;

– проводить доказательства и рассуждения в ходе решения задач [48].

В частности, по результату освоения курса геометрии на профильном уровне обучающийся должен уметь:

– соотносить плоские геометрические фигуры и трехмерные объекты с их описаниями, чертежами, изображениями;

– различать и анализировать взаимное расположение фигур;

– изображать геометрические фигуры и тела, выполнять чертеж по условию задачи;

– решать геометрические задачи, опираясь на изученные свойства планиметрических и стереометрических фигур и отношений между ними, применяя алгебраический и тригонометрический аппарат;

– проводить доказательные рассуждения при решении задач, доказывать основные теоремы курса;

– вычислять линейные элементы и углы в пространственных конфигурациях, объемы и площади поверхностей пространственных тел и их простейших комбинаций;

– применять координатно-векторный метод для вычисления отношений, расстояний и углов;

– строить сечения многогранников и изображать сечения тел вращения [48].

С целью оценить степень сформированности этих умений, учащихся проводится единый государственный экзамен по математике. Стереометрических задач на комбинации пространственных фигур в экзамене всего две (№8 и №14).

При решении таких задач возникают трудности, не только из–за недостаточной сформированности пространственных представлений. Отсутствие некоторых теоретических знаний, недостаточно хорошие знания предыдущих тем, включая темы планиметрии, неумение правильно делать чертежи и построение, вычислительные ошибки, решение задачи по неправильному чертежу, неумение обосновывать решение задачи, построение чертежа без предварительного анализа задачи, неправильно чтение условия задачи, так же осложняют решение.

Основной трудностью у учащихся 10-11классов является отсутствие в долговременной памяти примеров образов некоторых тривиальных комбинаций геометрических фигур, отсутствие умения и навыков в решении задач устного характера на такие комбинации, отсутствие умения и навыков переходить в решении задачи от стереометрических построений к планиметрическим.

Психолог и методист Л. М. Фридман предлагает разделять весь процесс решения задачи на 8 этапов:

1) анализ задачи;
2) схематическая запись задачи;
3) поиск способа решения задачи;
4) осуществление решения задачи;
5) проверка решения задачи;
6) исследование задачи;
7) формулирование ответа задачи;
8) познавательный анализ решения задачи.

Построение чертежа происходит на первом этапе решения задачи. На этом же этапе происходит определение вида задачи, установление того, что требуется в условии. На втором этапе происходит поиск нужных формул, теорем, свойств, определений необходимых для решения. На третьем этапе обучающимися непосредственно применяются теоретические знания, происходит выбор способа наиболее эффективного решения, определяется последовательность действий. На четвертом этапе оформляется решение. Пятый этап предполагает проверку решения, поиск и корректировку ошибок. На этапе исследования задачи выясняется, в каких случаях решение возможно, в каких – нет, какие зависимости от условий возникают в ходе решения. На седьмом этапе формулируется ответ на главный вопрос задачи. На заключительном этапе проводится заключительно обсуждение проведенного решения.

На начальных этапах решения задач на комбинацию геометрических тел важно показать учащимся их полный проекционный чертеж для каждой конфигурации. При дальнейшем решении рекомендуется научиться переходить к отысканию нужного сечения, и уже с помощью него решать задачу. Важно сформировать у учащихся опыт узнавания подобных задач, научить видеть нужные проекции, научить избегать построения общих случаев конфигураций.

В соответствии с вышеизложенным курс геометрии должен быть построен таким образом, чтобы у обучающихся эффективно развивались следующие параметры:

- геометрическая интуиция;
- пространственное мышление;
- логическое мышление;
- способность к конструктивно-геометрической деятельности;
- владение символическим языком геометрии.

1.3 Интерактивные методы в обучении стереометрии

Методисты, занимавшиеся рассмотрением освещаемой проблемы, отмечают, что в течение трехлетнего изучения курса планиметрии у учащихся, наблюдается ухудшение восприятия чертежей пространственных фигур, затруднение в построении чертежей пространственных тел. Такие последствия возникают из-за ограниченного урочного времени. Учитель вынужден выполнять на доске лишь простейшие построения, минимизируя самостоятельную деятельность учащихся на уроке, а так же частое использование готовых чертежей, рассмотрения задач-образцов, данных в учебнике. Для ликвидации таких последствий методисты рекомендуют использовать на уроках материальные модели к каждой из теорем, свойств и т.д., использовать модели геометрических тел, позволяющих собрать ту или иную модель, давать учащимся задание на дом самостоятельно изготовить шаблоны необходимые для будущих построений пространственных фигур и их комбинаций.

Реальное же материальное положение современных кабинетов математики составляют лишь статичные таблицы с рисунками как в учебнике. Ввиду этого наглядность чертежей значительно ухудшается, учащиеся все еще не могут понять пространство, не способны владеть пространственными представлениями. В виду скудного содержание материальной базы кабинетов математики, невозможности школы закупить те или иные инструменты и наглядные модели, методисты предлагают задействовать в процессе обучения интерактивных методов обучения. При этом отмечается, что необходимо чередовать деятельность учащихся на две: когда учащиеся работают с готовыми моделями, и, когда учащиеся самостоятельно изготавливают их. Последнее, по мнению Н. М. Бескина позволяет уйти от простого созерцания к фиксации внимания на конкретных свойствах пространственных фигур, способствует активации пространственного мышления, позволяет учащемуся самостоятельно сопоставлять те или иные свойства пространственных фигур.

Для интенсификации учебного процесса часто помогает использование шаблона изображения круга, представляющего собой эллипс с проведенными осями и сопряженными диаметрами. Этот шаблон довольно часто будет помогать при построении и особенно будет полезен при построении чертежей комбинаций пространственных тел. Еще одним эффективным методом интенсификации обучения является работа с готовыми чертежами, позволяющим экономить учебное время, обучить учащихся читать готовые, самостоятельно видеть и выделять определенные объекты, необходимые в процессе решения задачи. И.М. Смирнова рекомендует использовать на уроках устные задачи, способствующие развитию пространственного мышления, обобщать и систематизировать полученные ранее теоретические знания. Особую пользу принесут такие задачи на ранних этапах изучения стереометрии, для облегчения восприятия пространственных чертежей и обучения читать такие чертежи.

В современных реалиях помимо вышеперечисленных методов учитель может интегрировать в процесс образование средства мультимедиа. С начала XXI века в Российской федерации активно разрабатываются программы развития интерактивных средств обучения. Правительством приняты «Концепция информатизации сферы образования Российской Федерации», программа «Развитие единой образовательной информационной среды», проект «Информатизация системы образования», разработана и создана «Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов», «Каталог образовательных ресурсов сети Интернет». Кроме того достаточно распространены образовательные интернет платформы такие как Foxford, InternetUrock, Учи.ру, «Универсариум», «Российская электронная школа», «Билет в будущее», «Яндекс.Учебник» и др. На данных образовательных порталах можно встретить не только записи уроков и занятий с подробным разбором учебных задач, но и систему проверки знаний, различные проверочные работы, тесты. Все эти средства помогают современному учителю реализовать различные методики обучения, повысить мотивацию обучающийся, привить интерес к предмету. Многие методисты отмечают положительное влияние применения современных мультимедийных технологий. Применяя на уроках интерактивные методы, учитель получает возможность часто сменять виды деятельности учащихся и формы взаимодействия между ними, управлять учебно-познавательным процессом используя проверочные работы, выполненные на компьютере, обучать осуществлять самостоятельный поиск необходимой информации в сети Internet и ее отбора, применять новые формы учебного взаимодействия учащихся.

Современные школы и вузы имеют следующие лицензионные продукты: Derive Maple, Mathematica, Mathcad, Mathlab и др. Эти продукты обладают колоссальными возможностями построения графических изображений, создавать различные анимации и клипы. Но в виду высокой цены данных продуктов в школе приходится использовать бесплатные интерактивные системы, такие как GeoGebra, Desmos, 3D Max, Geometria, Cabri 3D. Учащиеся достаточно быстро осваиваются в этих системах и способны самостоятельно выполнять различные построения в них. Представленные системы позволяют быстро создавать красочные выразительные наглядные модели пространственных фигур, составлять их комбинации. Данные программы позволяют рассматривать построенные пространственные фигуры с разных сторон, что, безусловно, помогает учащимся развивать пространственные представления о той или иной геометрической фигуре, выявить шаги при построении, просмотреть их этапы, используя соответствующие команды программ. Построенные чертежи в рассмотренных системах можно сохранять и пользоваться ими в дальнейшем, изменять те или иные параметры, двигать объекты, перемещая точки, приближать или удалять объекты, менять размер элементов.

Применение интерактивных методов на уроках математики дает возможность учащимся наблюдать фигуры и их комбинации с разных ракурсов, находить удобные ракурсы, позволяющие увидеть нужный элемент фигуры, отыскать соотношения между ее элементами, понять, как лучше перенести чертеж в учебную тетрадь.

GeoGebra – это программное обеспечение, которое объединяет и связывает между собой геометрическое, алгебраическое и табличное представления, являющиеся тремя важными представлениями математических понятий, благодаря своей динамической структуре. Здесь можно создавать конструкции с точками, векторами, линиями, коническими сечениями, а также математическими функциями, а затем динамически изменять их, строить анимации. GeoGebra позволяет напрямую вводить уравнения и манипулировать координатами. Таким образом, можно наглядно составлять графики функций, работать со слайдерами для подбора параметров. Решенные с помощью данного программного обеспечения задачи легко просматриваются в режиме презентации. Созданный файл можно экспортировать как интерактивный чертеж в формате Web-страницы (для ее корректного отображения следует предварительно установить Java Runtime Enviroment).

Таким образом, использование графических средств различных программных обеспечений, в частности системы GeoGebra, в учебном процессе позволяют повысить уровень развития элементарной и функциональной математической грамотности обучающихся, интенсифицировать образовательный процесс изучения стереометрии, позволяют учителям создавать собственные библиотеки готовых мультимедийный материалов, интерактивных чертежей, схем.

Выводы по первой главе

Решение задач на построение, особенно стереометрических, всегда вызывает у учащихся сложности. Изучение темы «Комбинация геометрических тел» приходится на конец учебного года. Как правило, на нее отводится мало времени из-за объемности задач, что занимает большую часть времени урока. Бывают случаи, когда на такие задачи не отводится время вовсе, и эта тема уходит на самостоятельное изучение. Так же трудности, возникающие у учащихся, связанны с тем, что построению чертежа на уроке отводится мало времени в виду его трудоемкости. Учебники, пособия и материальная база кабинета не способствуют развитию пространственных представлений у учащихся, правила построения чертежей не обсуждаются. Поэтому, чтобы учащиеся смогли сами разобраться в этой теме, и успешно сдать экзамены, ими должны быть усвоены понятия «вписанная, описанная сфера», отчетливо представлять положение центра сферы в различных комбинациях тел, устанавливать зависимость между элементами сферы и элементами тел, входящих в комбинацию, уметь переходить в решении стереометрической задачи к планиметрической, уметь находить нужное сечение.

Наибольшие трудности при изображении комбинаций фигур возникают в тех случаях, когда одна из фигур – шар. Необходимо записывать полное обоснование нахождения положения центра шара, вписанного в многогранник или описанного около него, обосновывать взаимосвязь между элементами тел, комбинация которых рассматривается. При решении задач на комбинации геометрических тел полезно делать различные вспомогательные планиметрические чертежи, т. е. "выносы плоских конфигураций", изображение которых искажено пространственной перспективой. В этих случаях недостаточно знать только определение сферы, описанной или вписанной в тот или иной многогранник, а значит нужно научиться выявлять условия существования комбинаций геометрических тел.

Решая вспомогательные планиметрические задачи, следует пользоваться свойствами и признаками касательной к окружности и касательной плоскости к сфере. Авторы многих методик предлагают использовать рисунки, которые использовались при изучении теорем, геометрические конструкторы, шаблоны, устные упражнения в начале урока, готовые чертежи. Трудности, возникающие при обучении решению задач на комбинацию геометрических тел легко можно преодолеть, регулярно используя наглядные методы. Чтобы разнообразить скучные и однообразные модели, имеющиеся в каждом классе математики, рекомендуется использование информационных технологий. Использование графических средств различных программных обеспечений, в частности системы GeoGebra, в учебном процессе позволяют повысить уровень развития элементарной и функциональной математической грамотности обучающихся, интенсифицировать образовательный процесс изучения стереометрии, позволяют учителям создавать собственные библиотеки готовых мультимедийный материалов, интерактивных чертежей, схем.

Преимущество применений мультимедийный средств на уроках математики заключается в том, что они позволяют накапливать и создавать собственную библиотеку ресурсов, многократно использовать собственные разработки и модели чертежей, повысить интерес учащихся к предмету, а также позволяет учителю индивидуализировать и дифференцировать учебно-познавательную деятельность учащихся.

ГЛАВА 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ КОМБИНАЦИЙ СФЕРЫ С МНОГОГРАННИКАМИ И ФИГУРАМИ ВРАЩЕНИЯ.

2.1 Учебно-методическая линия «комбинации сферы с пространственными фигурами» в школьных учебниках геометрии

Тема «комбинация геометрических тел» как таковая в учебно-методических пособиях не выделяется или выделяется как необязательная, при изучении на базовом уровне (Атанасян Л. С. и Погорелов А. В.) [3; 27]. Проблемы, возникающие с этой темой, связаны с тем, что на нее, как правило, выделяется мало часов, и то, что она находится обычно в конце главы «Цилиндр. Конус. Шар». Не смотря на это, задачи по данной теме часто встречаются в ЕГЭ, как в первой части, так и во второй профильного уровня (в основном это геометрическое задание из первой части №8 и геометрическое задание на построение и доказательство из второй части №14), в олимпиадных задачах и во вступительных испытаниях некоторых вузов, где еще сохранились такие условия поступления. Поэтому в настоящее время данная тема вызывает повышенный интерес.

При работе с задачами из данной темы у учащихся повышаются навыки пространственного мышления и представления, формируется механизм решения задач на изображение пространственных фигур в параллельной проекции. Эти умения и навыки очень важны в жизни человека, они пригодятся не только на ЕГЭ и во время учебы в вузе, но и во многих современных профессиях.

Включение этих задач в ЕГЭ вполне обоснованно, поскольку позволяет проверить у учащихся:

- сформированность пространственных представлений;
- уровень развития пространственного воображения;

– знание им основных методов, алгоритмов, формул и фактов школьной геометрии;

– наличие у него представлений о методах изображения геометрических фигур, применяя метод параллельной проекции;

– лаконичность, правильность и логичность при обосновании решения.

Перед тем как проводить анализ учебно-методических комплектов, предоставим список федерального перечня учебников, рекомендуемых к использованию при реализации программ среднего общего образования, сформированный Министерством просвещения РФ от 28 декабря 2018 года, и актуального по сей день с учетом поправок от 08 мая и 22 ноября 2019 года. Учебники по геометрии для 10 и 11 классов разделяют на базовый и профильный уровни. По базовому уровню рекомендуется следующий список учебников:

1. Атанасян Л. С., Геометрия (базовый и углубленный уровни).
2. Бутузов В. Ф., Геометрия (базовый и углубленный уровни).
3. Вернер А. Л., Карп А. П., Математика (базовый уровень).
4. Гусев В. А., Рубин А. Г., Геометрия (базовый и углубленный уровни).
5. Козлов В. В., Никитин А. А., Белоносов В. С., Математика (базовый и углубленный уровни).
6. Мерзляк А. Г., Номировский Д. А., Полонский В. Б., Якир М. С., Геометрия (базовый уровень).
7. Погорелов А. В., Геометрия (базовый и углубленный уровни).
8. Смирнов В. А., Смирнова И. М., Геометрия (базовый уровень).
9. Смирнов В. А., Смирнова И. М., Геометрия (базовый и углубленный уровни).
10. Смирнова И. М., Геометрия (базовый уровень).
11. Шарыгин И. Ф., Геометрия (базовый уровень).

По углубленному уровню рекомендуется следующий список учебников:

1. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И., Геометрия.
2. Потоскуев Е. В., Звавич Л. И., Геометрия.
3. Мерзляк А. Г., Номировский Д. А., Поляков В. М., Геометрия.

Нами был проведен анализ самых часто используемых в большинстве школ УМК базового уровня на наличие разных видов задач по рассматриваемой теме (Приложение 1) [2; 3; 27; 39]. В ходе анализа было замечено, что все задачи по теме «Комбинации пространственных фигур» делятся на два типа: задачи на нахождение неизвестных величин и задачи на доказательство.

В свою очередь, задачи на нахождение величин делятся на три подтипа:

1) задачи на нахождение элементов, и их взаимосвязи в пространственных фигурах;
2) задачи на нахождение объемов тел;
3) задачи на нахождение площади боковой поверхности тел.

Из Таблицы 1.1, представленной в Приложении 1, можно сделать вывод, что в основном в учебниках базового уровня рассматриваются задачи первого подтипа. Достаточное количество задач, рассматриваемого типа, представлено в учебниках И. М. Смирновой и А. Д. Александрова по всем типам и подтипам задач. Это обосновано тем, что по этим учебникам в основном занимаются в школах с углубленным изучением математики. В учебнике Л. С. Атанасяна, который является самым популярным школьным учебником в обычных школах, набор задач по рассматриваемой теме заметно меньше, но все они вынесены в отдельную группу задач, что облегчает их поиск при подготовке к олимпиадам и ЕГЭ, имеются задачи повышенного уровня сложности.

Необходимо заметить, что в учебнике Погорелова А. В. рассмотрены не все типы комбинации сферы с пространственными фигурами. В связи с этим у учащихся не вырабатываются умения и навыки работы с определенными видами задач, которые им понадобятся на ЕГЭ.

Во всех рассмотренных учебниках даются понятия вписанной и описанной фигуры. В учебниках Л. С. Атанасяна, И. М. Смирновой и А. Д. Александрова даются задачи на доказательство, дополняющие теоретическую базу учащегося.

По наличию изображений комбинаций тел лидирует учебник И. М. Смирновой и Л. С. Атанасяна. В первом представлено наиболее количество вариантов комбинаций тел, чем во втором. Так же важно отметить то, что в первом учебнике даны полные изображения фигур, что облегчает понимание чертежа и помогает учащимся при изучении данной темы и при построении чертежей к задачам по ней.

Проведем более полный анализ основных УМК по каждому из уровней (базовый и углубленный). Будем анализировать их по следующим критериям:

1) типы и количество задач на комбинации тел;
2) наличие сопутствующих определений;
3) наличие теорем существований комбинаций тел;
4) количество часов, выделяемых на тему.

Базовый и профильный уровни

Самым распространенным УМК является комплект авторов: Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев и др. [3; 10; 11; 35]. Учебник рассчитан на 2 года обучения для 10 и 11 классов. В УМК входят: книга для учителя, рабочие тетради, дидактические материалы. По программе знакомство с комбинацией фигур происходит в 11 классе, после изучения темы «Сфера», и второй раз задачи встречаются в учебнике после изучения темы «Объем шара». В учебнике встречаются следующие комбинации тел: шар и цилиндр, шар и конус, шар и призма, шар и параллелепипед, призма и цилиндр, пирамида и конус. В методическом пособии для учителя видно, что специально для решения задач на базовом уровне по теме «Разные задачи на многогранники, цилиндр, конус и шар» часы не выделяются, и эта тема остается на самостоятельное изучение. Для углубленного же изучения авторы предлагают уделить этой теме 6 часов, причем в пособии представлены решения наиболее сложных задач учебника и приведены дополнительные.

УМК А. В. Погорелова включает книгу для учителя, рабочие тетради, дидактические материалы, учебник [7; 21; 27]. Так же, как и в учебнике Л. С. Атанасяна задачи по данной теме находятся в конце главы «тела вращения». В учебнике встречаются следующие комбинации тел: шар и цилиндр, шар и конус, шар и призма, шар и параллелепипед, призма и цилиндр, пирамида и конус. В дидактических материалах имеются задачи для разных уровней, а также предоставлены указания к решению. В дидактических материалах представлены задачи на комбинацию цилиндра и треугольной пирамиды, сферы и куба, конуса и правильного тетраэдра. В книге для учителя представлены задачи с комментариями и разобранным решением по данной теме, что значительно облегчает деятельность учителя и не допускает появления ошибок с его стороны. Авторами предлагается следующее тематическое планирование:

1. Цилиндр. Сечения цилиндра плоскостями. Вписанная и описанная призмы (2 часа).
2. Конус. Сечения конуса плоскостями. Вписанная и описанная пирамиды (2 часа).
3. Шар. Сечения шара плоскость. Симметрия шара. Касательная плоскость к шару. Пересечение двух ребер (4 часа).
4. Вписанные и описанные многогранники. Пересечение двух сфер (1 час).
5. Контрольная работа по теме (1час).

Из такого тематического планирования видно, что из 68 часов 10 часов уделяется этой теме, что играет значительную роль в подготовке к ЕГЭ.

УМК И. М. Смирновой, В. А. Смирнова включает книгу для учителя, рабочие тетради, дидактические материалы, учебник, а так же программно-методические материалы [36-43; 46]. Учебник этих авторов отличается тем, что практически каждой комбинации выделен отдельный параграф, в которых даны определения этих конфигураций, указаны условия существования той или иной комбинации. Еще одним положительным моментом является то, что авторами предоставлен довольно большой объем задач, причем они разделены по уровням сложности, так же представленный устные задачи для закрепления, о важности которых было написано выше. В учебнике встречаются следующие типы комбинаций: многогранники, вписанные в сферу и описанные около нее, вписанные и описанные цилиндры, вписанные и описанные конусы, комбинация двух кубов, имеющих общую диагональ, комбинация двух тетраэдров. Рабочая тетрадь имеет достаточно широкий спектр задач всего 47. По программно-методическому планированию рассмотрению данной темы из общего числа часов отводится 11 часов из 68 в 10 классе и 10 часов из 68 в 11 классе. В конце 11 класса предлагается рассмотрения дополнительной темы «Использование компьютерной программы «Математика» для изображения пространственных фигур», которой выделяется 2 часа.

УМК А. Д. Александрова включает учебник и учебные пособия [1; 2; 9; 16]. Как и в учебнике В. А. Смирнова с рассматриваемой темой учащиеся знакомятся в конце 10 класса после изучения темы «Тела вращения». В учебнике даны определения сферы вписанной в многогранник и описанной около него, цилиндра вписанного в сферу и описанного около нее, конуса вписанного в сферу и описанного около нее. Дать определение усеченного конуса вписанного в сферу и описанного около нее, учащимся предлагается самостоятельно. Несмотря на достаточное количество выделенных для изучения этого материала часов (9 часов в 10 классе и 18 часов в 11), в отличие от предыдущего УМК в этом не представленные условия существования перечисленных выше комбинаций, но их предлагается отыскать самостоятельно в ходе решения основных задач. В задачах, рассматриваемых в 11 классе в ходе изучения темы «площади поверхности» учащимся предлагается самостоятельно вывести формулу показывающую связь стороны некоторых правильных многогранников с радиусами вписанных в них и описанных около них сфер. Безусловно, главным минусом является отсутствие изображений основных комбинаций пространственных фигур. В методическом пособии приведены указания к решению задач, и непосредственно их решения. Контрольную работу по теме комбинации пространственных тел предлагают проводить в конце 11 класса.

Сравнительный анализ данных УМК базового уровня представлен в Таблице 2.1 Приложения 2.

Профильный уровень

УМК А. Д. Александрова включает учебник и учебные пособия, дидактические материалы к каждому учебнику «Геометрия, 10» и «Геометрия, 11», книги для учителя [1; 2; 9; 16]. В год планируется на изучение стереометрии затрачивать 102 часа, из них в 10 классе 19 часов и 16 часов в 11классе. В учебнике существуют следующие рубрики: «Смотрим», «Дополняем теорию», «Планируем», «Рисуем», «Представляем», «Находим величину», «Ищем границы», «Доказываем», «Исследуем», «Участвуем в олимпиаде», «Прикладная геометрия», «Поступаем в вуз» и другие. Эти рубрики показывают дифференциацию теоретического материала и задач. Отдельное внимание в углубленном уровне уделяется построению фигур в параллельной проекции, их сечениям. Комбинация пространственных тел как самостоятельная тема в учебнике не выделяется, но можно встретить определения, касающиеся этой темы. В конце учебника в рубрике «Поступаем в ВУЗ» из 59 задач – 31 задача по теме «Комбинации геометрических тел».

УМК Е. В. Потоскуева и Л. И. Звавича включает два учебника для 10 и 11 класса соответственно, дидактические материалы, методическое пособие[28-32]. В первом учебнике в качестве дополнительного материала выделяется методика построения пространственных фигур в параллельной проекции. Стоит отметить, что в этом разделе рассмотрено построение изображений многоугольников вписанных в окружность. Во втором учебнике при изучении тел вращения отдельными пунктами рассматриваются комбинации этих тел между собой и их комбинации с многогранниками. Важным моментом является то, что авторы указали условия существования таких комбинаций и привели рекомендации по их построению при решении задач. Приведена таблица, показывающая связь между радиусами вписанной и описанной сферы и ребром правильного многогранника.

Сравнительный анализ данных УМК базового уровня представлен в Таблице 2.2 Приложения 2.

Проведенный нами анализ показал, что объем задач на комбинацию пространственных тел, представленный в рассмотренных школьных учебниках, является достаточным для формирования умения решать подобные задачи. Основные объективные трудности, возникающие у учащихся, в ходе изучения рассматриваемой темы, обусловлены тем, что:

1) задачи на комбинацию тел, рассматриваются в основном во втором полугодии 11 класса, иногда в первом;

2) задачи в основном либо однотипные, либо не имеют дифференциации по уровню сложности;

3) трудоемкость выполнения чертежа и выполнение решения задач на комбинацию пространственных тел, занимает много учебного времени, и приводит к тому, что не все задачи рассматриваются на уроке и дома;

4) практически во всех учебниках отсутствуют иллюстрации к данной теме, нет методики построения геометрических тел и их комбинаций;

5) только в учебниках И. М. Смирновой и есть интернет ссылки, где представлены объяснения и более подробные чертежи, так же в нем, в

отличие от других УМК, представлен курс по использованию мультимедийных средств в процессе обучения стереометрии;

6) учителя старой школы редко пользуются информационными технологиями, которые бы позволили не только сократить время на построение чертежа на доске, но и позволили более детально рассмотреть геометрические тела и их комбинации.

Субъективным трудностям возникающих у учащихся, имеющим место при решении стереометрических задач, посвящены работы А. Б. Весилевского, Г. Д. Глейзера, Я. Е. Гольдберга, В. А. Далингера, В. В. Орлова, О. В. Шереметьевой и др. [6; 11-13; 25; 51]. Главной причиной возникновения трудностей учащихся, является недостаточная сформированность пространственных представлений. Также, выделяются такие причины, как отсутствие необходимых знаний о способах изображения геометрических фигур в пространстве, низкий уровень пространственного мышления, пробелы в планиметрических знаниях, несформированность вычислительных умений и навыков графических построений, небрежное оформление чертежей, попытки решать задачи на ненаглядных и неверных чертежах, неумение переходить от графического изображения к вербальному описанию и наоборот.

При решении задач на комбинации тел к этим трудностям следует добавить отсутствие в долговременной памяти учащегося некоторого базового набора образов типичных комбинаций тел и их изображений; навыков работы с задачами на комбинации тел, для решения которых не требуется наличия полного чертежа. В них нужно «увидеть», что для получения ответа на вопрос задачи можно обойтись изображением определенного сечения рассматриваемой комбинации или ее проекции на некоторую плоскость. Учащийся должен приобрести опыт узнавания подобных задач, «видения» нужных сечений и проекций.

Таким образом, чтобы компенсировать недостатки традиционного курса стереометрии, рекомендуется вести элективный курс для дополнительного разбора задач на комбинацию пространственных тел.

2.2 Элективный курс «Решение олимпиадных задач и задач единого государственного экзамена на комбинацию пространственных тел»

После проведенного анализа УМК и выявления причин трудностей, появляющихся у учащихся в ходе изучения темы «комбинация пространственных фигур», учитывая методические положения изучения рассматриваемой темы, нами был разработан элективный курс.

Пояснительная записка

Изучение геометрии является одним из важных компонентов при изучении математики в школе. По ходу изучения этой дисциплины у учащихся формируются геометрические свойства фигур, пространственное представление, развитие логического мышления, а также курс обеспечивает подготовку учеников, к изучению смежных дисциплин.

Необходимость усиления геометрической линии заключается в том, что у учащихся вызывают трудности задачи ЕГЭ в первой и во второй части. Для успешной сдачи экзамена необходимы хорошие теоретические и практические знания по геометрии. Актуальность введения этого электива, направленного на предпрофильную подготовку учащихся, заключается в обеспечении возможности реализации математических и творческих способностей учащихся.

Данный курс разработан в соответствии с ФГОС СОО. Курс рассчитан для второго полугодия 11 классов в школе с базовым уровнем преподавания геометрии. В некоторых школах с углубленным уровнем изучения математики допускается ведение курса в первом полугодии 11 класса. Программа рассчитана на 18 часов.

Содержание курса соответствует методическим принципам изучения темы комбинации геометрических тел.

Цели курса:

1. Расширение и углубление знаний по теме «комбинация геометрических тел»;

2. Формирование интеллектуальных и математических способностей, развитие пространственных представлений учащихся;

3. Подготовка учащихся к ЕГЭ и олимпиадам.

Задачи курса:

1. Углубленно подготовить учащихся к олимпиадным задачам и ЕГЭ.

2. Познакомить учащихся с разным типом задач по рассматриваемой теме.

3. Развивать логическое и пространственное мышление.

4. Формировать у учащихся умение самостоятельно решать задачи.

5. Способствовать профориентации учащихся.

6. Научить учащихся пользоваться интерактивными средствами при решении задач.

Общая характеристика элективного курса:

На элективном курсе будет рассматриваться материал, который часто встречается на ЕГЭ и вызывает трудности у учащихся. Задачи, предложенные в данном курсе, разделены на 3 вида: задачи из ЕГЭ №8, задачи из ЕГЭ №14, олимпиадные задачи, что позволяет ученику любого уровня активно участвовать в процессе решения задач. Элективный курс позволяет расширить и углубить геометрические знания учащихся, рассмотреть другие типы задач, не представленные учебнике.

Организация образовательного процесса:

Курс проводится в форме лекции, практической работы и самостоятельной работы учащихся (домашнее и дополнительные задания) и лабораторных работ в компьютерном классе (Таблица 1).

Таблица 1 – Учебно-тематическое планирование

№ темы	Название темы	Количество часов	Форма проведения	Образовательный продукт
1	Виды проектирований при построении чертежа	1	Лекция	Конспект занятия
2	Изображения многогранников и тел вращения	1	Практическое занятие	Решение задач на построение изображений
3	Лабораторная работа в компьютерной среде GeoGebra	1	Лабораторная работа	Интерактивная 3D модель
4	Шар, вписанный в многогранники и тела вращения	1	Лекция с практическим занятием	Конспект, решение задач на построение и отыскание неизвестных величин.
5	Шар, описанный около многогранника и тел вращения	1	Лекция с практическим занятием	Конспект, решение задач на построение и отыскание неизвестных величин.
6	Решение простейших задач на комбинации геометрических тел	1	Практическое занятие	Индивидуальное решение задач
7	Решение задач, предложенных на ЕГЭ в первой части. Вписанная и описанная сфера около многогранника или тела вращения	1	Практическое занятие	Индивидуальное решение задач
8	Лабораторная работа по решению задач из первой части ЕГЭ на комбинации геометрических тел с использованием компьютерной среды GeoGebra	1	Лабораторная работа	Интерактивная 3D модель
9	Решение задач, предложенных на ЕГЭ во второй части на комбинацию пространственных тел	4	Лекция. Практические занятия.	Конспект. Решение задач.
10	Лабораторная работа по решению задач из второй части ЕГЭ на комбинации геометрических тел с использованием компьютерной среды GeoGebra	2	Лабораторная работа	Интерактивная 3D модель
11	Решение олимпиадных задач и задач повышенного уровня сложности	3	Практическое занятие	Конспект. Решение задач. Решение индивидуальных задач.
12	Итоговая контрольная работа	1		Итоговая контрольная работа

Содержание программы курса

Тема 1. Виды проектирований при построении чертежа. Параллельное проектирование и ее свойства. Ортогональная проекция и ее свойства. Математические основы теории изображений в параллельной проекции.

Тема 2. Изображения многогранников и тел вращения. Требования к изображениям. Изображение многогранников. Изображение тел вращения. Изображения шара. Построение полюса и поляра.

Тема 3. Лабораторная работа в компьютерной среде GeoGebra. Построение многогранников и тел вращения. Выделение их основных элементов. Построение сечений в геометрических телах.

Тема 4. Шар, вписанный в многогранники и тела вращения. Шар и тела вращения. Шар и многогранники. Теоремы существования шара, вписанного в многогранник или тело вращения.

Тема 5. Шар, описанный около многогранника и тел вращения. Шар и тела вращения. Шар и многогранники. Теоремы существования шара, описанного около многогранника или тела вращения.

Тема 6. Решение простейших задач на комбинации геометрических тел. Шар, вписанный в многогранники и тела вращения. Шар, описанный около многогранника и тел вращения. Комбинации пирамид и призм. Комбинации цилиндра и конуса. Комбинации шара и цилиндра. Комбинации шара и конуса. Применение свойств ортогонального проектирования в задачах на нахождение объемов многогранников.

Тема 7. Решение задач, предложенных на ЕГЭ в первой части. Вписанная и описанная сфера около многогранника или тела вращения.

Тема 8. Лабораторная работа по решению задач из первой части ЕГЭ на комбинации геометрических тел с использованием компьютерной среды GeoGebra.

Тема 9. Решение задач, предложенных на ЕГЭ во второй части на комбинацию пространственных тел.

Тема 10. Лабораторная работа по решению задач из второй части ЕГЭ на комбинации геометрических тел с использованием компьютерной среды GeoGebra.

Тема 11. Решение олимпиадных задач и задач повышенного уровня сложности.

Методические рекомендации по проведению элективного курса

На первом этапе нужно рассмотреть основные понятия, необходимые для изучения темы. Выявить необходимые и достаточные критерии вписанной и описанной сферы вокруг рассматриваемых пространственных фигур. Показать учащимся с помощью слайд презентации изображения различных комбинаций.

На втором и третьем этапах рассматриваются задачи типа №8, предложенные на ЕГЭ, предполагающие поиск неизвестных величин. Их поиск обычно осуществляется в 1-2 действие, что делает данный вид задачи легким и доступным каждому учащемуся.

На первом этапе нужно рассмотреть основные понятия, необходимые для изучения темы. Выявить необходимые и достаточные критерии описанной сферы вокруг рассматриваемых пространственных фигур. Показать учащимся с помощью слайд презентации изображения различных комбинаций и их осевых сечений.

На втором этапе рассматриваются задачи типа №14, предложенные на ЕГЭ, предполагающие построение описанной сферы около многогранников и тел вращения, нахождение неизвестных величин (площадь, объем фигур) и доказательство утверждения.

На первом этапе нужно рассмотреть основные понятия, необходимые для изучения темы. Выявить необходимые и достаточные критерии вписанной сферы в рассматриваемые пространственные фигуры. Показать учащимся с помощью слайд презентации изображения различных комбинаций и их осевых сечений.

На втором этапе рассматриваются задачи типа №14, предложенные на ЕГЭ, предполагающие построение вписанной сферы в многогранник или тело вращения, нахождение неизвестных величин (площадь, объем фигур) и доказательство утверждения.

На первом этапе нужно рассмотреть основные понятия, необходимые для изучения темы. Выявить необходимые и достаточные критерии описанной сферы вокруг рассматриваемых пространственных фигур. Показать учащимся с помощью слайд презентации изображения различных комбинаций и их осевого сечения.

На втором и третьем этапах рассматриваются задачи повышенного уровня сложности. Задачи данного уровня сложности привлекают учащихся, успевающих в учебе и умеющих решать задачи из учебника повышенного уровня сложности.

В Приложении 3 представлено методическое пособие к данному элективному курсу.

2.3 Апробация элективного курса «Решение олимпиадных задач и задач единого государственного экзамена на комбинацию пространственных тел» на практике

Как было отмечено ранее, для повышения эффективности изучения темы «решение задач на комбинации пространственных фигур», необходимо использовать не только традиционные методы обучения, но и интегрировать современные мультимедийные средства, а так же применять интерактивные чертежи, позволяющие достичь наибольшей наглядности и произвести дифференциацию учебно-познавательного процесса учащихся.

Перед непосредственным внедрением элективного курса «Решение олимпиадных задач и задач ЕГЭ на комбинацию пространственных тел» нами был проведен входной срез знаний учащихся 11 «а» класса МОУ «СОШ №3 г. Южноуральска» в виде самостоятельной работы. Структура работы представлена ниже.

1. Найти объем цилиндра, писанного около куба, ребро которого равно 5.

2. Вершины правильного треугольника со стороной 7 принадлежат сфере, радиуса 10. На каком расстоянии от центра сферы расположена плоскость этого треугольника?

3. Каково отношение радиусов двух сфер, одна из которых вписана в куб, а вторая описана около него?

4. Постройте на чертеже изображение четырехугольной пирамиды, вписанной в сферу. Выполните «выносной» чертеж, отражающий комбинацию сверху и сбоку.

Результаты входного среза представлены в Таблице 2.

Таблица 2 – Результаты входного среза

Оценка	2	3	4	5
Количество учащихся	7	11	3	-

Из результатов проведенной работы, можно сделать следующие выводы:

1) значительные затруднения у учащихся вызвало последнее задание на построение;

2) большая часть учащихся справилась с первым и третьим заданием;

3) учащиеся умеют работать с готовыми чертежами, но значительные затруднения вызывают задачи на построение, определение отношений элементов фигур, находящихся в комбинации с другими фигурами.

Нами были проведены внеклассные занятия по математике, которые включали в себя часть часов из разработанного нами элективного курса «Решение олимпиадных задач и задач ЕГЭ на комбинацию пространственных тел», а именно темы:

Тема 1. Виды проектирований при построении чертежа. Ортогональная проекция и ее свойства. Параллельное проектирование и ее свойства. Математические основы теории изображений в параллельной проекции.

Тема 2. Изображения многогранников и тел вращения. Построение сечений. Требования к изображениям. Изображение многогранников. Изображение тел вращения. Изображения шара. Построение полюса и поляра. Построение сечений призм и параллелепипедов. Построение сечений пирамид и усеченных пирамид. Построение сечений цилиндра. Построение сечений конуса и усеченного конуса.

Тема 3. Лабораторная работа в компьютерной среде GeoGebra. Построение многогранников и тел вращения. Выделение их основных элементов. Построение сечений в геометрических телах.

Тема 4. Шар, вписанный в многогранники и тела вращения. Шар и тела вращения. Шар и многогранники. Теоремы существования шара, вписанного в многогранник или тело вращения.

Тема 5. Шар, описанный около многогранника и тел вращения. Шар и тела вращения. Шар и многогранники. Теоремы существования шара, описанного около многогранника или тела вращения.

Тема 6. Решение простейших задач на комбинации геометрических тел. Шар, вписанный в многогранники и тела вращения. Шар, описанный около многогранника и тел вращения. Комбинации пирамид и призм. Комбинации цилиндра и конуса. Комбинации шара и цилиндра. Комбинации шара и конуса. Применение свойств ортогонального проектирования в задачах на нахождение объемов многогранников.

Тема 7. Решение задач, предложенных на ЕГЭ в первой части. Вписанная и описанная сфера около многогранника или тела вращения.

Тема 8. Лабораторная работа по решению задач из первой части ЕГЭ на комбинации геометрических тел с использованием компьютерной среды GeoGebra.

В ходе проведения внеклассных часов учащимся были предложены следующие задачи:

По окончанию внедрения части нашего элективного курса, нами был проведен контрольный срез знаний учащихся, с целью выявления эффективности проведения элективного курса в 11 классах. Учащимся были предложены следующие задания:

1. В куб вписан шар радиуса 14,5. Найдите объем куба.

2. Радиус основания конуса равен 3. В конус вписан шар радиуса 1,5. Изобразите осевое сечение комбинации этих тел. Найдите отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара.

3. Вершины правильного треугольника со стороной 7 принадлежат боковой поверхности конуса с высотой 11 и радиусом основания 6,5. На каком расстоянии от вершины конуса расположена плоскость этого треугольника?

4. Постройте на чертеже изображение треугольной призмы вписанной в конус. Выполните «выносной» чертеж, отражающий комбинацию сверху и сбоку.

Задачи данной контрольной работы содержали задачи из ЕГЭ №8 и №14, а так же задачи, позволяющие оценить уровень развития пространственного мышления учащихся.

Результаты контрольного среза представлены в Таблице 3.

Таблица 3 – Результаты контрольного среза

Оценка	2	3	4	5
Количество учащихся	1	5	13	2

После проведения внеклассных часов и оценки контрольного среза учащихся можно сделать следующие выводы:

1) большая часть учащихся, прошедших часть элективного курса успешно справились с данной контрольной работой;

2) учащиеся научились строить изображения пространственных тел, делать выносные чертежи и решать задачи по рассматриваемой теме;

3) внедрение элективного курса «Решение олимпиадных задач и задач ЕГЭ на комбинацию пространственных тел» положительно сказалась на результатах обучения, и позволило повысить качество знаний

учащихся, а также позволило осовременить традиционные способы обучения, и повысить интерес учащихся к предмету.

Выводы по второй главе

Проведенный нами анализ УМК показывает, что не во всех учебниках количества задач хватает для того чтобы сформировалось умение решать задачи на комбинацию геометрических фигур. Стоит прибегать к использованию задач из рабочих тетрадей, которые имеются не в каждой школе, других УМК для составления системы задач, направленной на формирование умения и навыков решать их.

Интерактивные средства обучения математике способствуют повышению эффективности образовательного процесса в современных реалиях. Разработанный нами элективный курс нацелен на решение следующих образовательных задач: изучить основы теории изображений планиметрических и стереометрических фигур в параллельной проекции; сформировать начальные представления о моделировании в интерактивной системе GeoGebra; выработать навыки при построении интерактивных чертежей; выработать навыки построения комбинаций пространственных тел без использования компьютерных средств; научить решать задачи по данной теме. Пользуясь представленным выше элективным курсом для 11 класса, учитель способствует углублению знаний учащихся, формированию у них логического и пространственного мышления, творческого воображения, наблюдательности. Важную роль при прохождении этого курса играют чертежи, чтобы экономить учебное время, предлагается пользоваться интерактивными средствами или готовыми чертежами, которые помогут ученику визуально воспринять задачу.

На начальном этапе курса, учащиеся должны понимать, что успех в решении задач на комбинацию пространственных тел сильно зависит от умения правильно изобразить комбинацию на чертеже. По завершению курса, учащиеся должны понять, как правильнее изобразить фигуры для большей наглядности и уметь решать задачи самостоятельно.

Нами был проведен элективный курс «Решение олимпиадных задач и задач ЕГЭ на комбинацию пространственных тел», результаты которого позволяют сделать вывод, что интеграция в процесс обучения интерактивных моделей пространственных геометрических тел, а так же использование наглядного справочного материала позволяет повысить эффективность учебного процесса, обогатить и осовременить традиционные знания учащихся современным методами решения стереометрических задач, что позволяет качественно решать геометрические задачи второй части выпускного экзамена ЕГЭ. Данный элективный курс позволяет в условиях ограниченного учебного времени обогатить знания учащихся по теме: «Комбинации пространственных тел», познакомить их с различными типами задач и способами их решения. В ходе поведения эксперимента было отмечено, что лучше умеренно пользоваться интерактивными средствами обучения, комбинируя их с традиционными, поскольку у части учащихся наблюдалась некая зависимость от их частого использования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение задач на тему «комбинация пространственных тел» является одной из трудных тем при изучении стереометрии в старшей школе. Проанализировав типичные ошибки учащихся при решении задач по рассматриваемой теме, определены возможные направления совершенствования и обогащения традиционных методов и средств обучения стереометрии. При решении задач из данной темы, можно пользоваться готовым набором чертежей комбинаций рассматриваемых тел или использовать интерактивные методы обучения для повышения наглядности изучаемого материла. Это не только поможет сократить урочное время, затрачиваемое на построение чертежей на доске, но и вызовет особый интерес у учащихся для дальнейшей работы с программами, позволяющими строить фигуры онлайн и рассматривать их с разных ракурсов, тем самым позволяя учащемуся лучше усвоить материал.

Особые трудности при изображении пространственных тел, вызывает изображение сферы. Для правильного построения комбинаций фигур необходимо знать некоторые свойства вписанной и описанной сферы, а именно: свойства и признаки касательной к окружности, касательной плоскости к сфере, где находится центр сферы, как связан радиус сферы с фигур, в которую она вписана (около которой описана) и др. Важно ввести понятия поляры, экватора, полюсов, параллелей и меридианов. Это поможет избежать трудностей при построении и облегчить понимание взаимосвязей элементов комбинируемых тел.

Так же для облегчения понимания рекомендуется делать вспомогательный чертеж, представляющий собой осевое сечение комбинаций рассматриваемых тел. Такой прием частой используется при решении олимпиадных задач и задачи №14 из ЕГЭ.

Для интенсификации учебного процесса был разработан элективный курс «Решение олимпиадных задач и задач ЕГЭ на комбинацию пространственных тел», направленный на расширение знаний по теме, а также применение интерактивных систем в образовательном процессе. Курс знакомит с основными теоретическими положениями построения планиметрических и стереометрических фигур в параллельной проекции, учащимися приобретаются навыки построения комбинации пространственных тел в интерактивной системе GeoGebra.

Экспериментально доказана гипотеза исследования: интеграция в процесс обучения интерактивных моделей пространственных геометрических тел, а также использование наглядного справочного материала позволяет повысить эффективность учебного процесса, обогатить и осовременить традиционные знания учащихся современным методами решения стереометрических задач, что позволяет качественно решать геометрические задачи второй части выпускного экзамена ЕГЭ. Использование мультимедийных технологий в обучении стереометрии позволяет создавать шаблонные интерактивные чертежи, которыми можно пользоваться неоднократно, вносить в них изменения, а также применять индивидуальный подход к учебно-познавательной деятельности учащегося.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Александров А. Д.** Геометрия: учебник для 11 класса школ с углубленным изучением математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик; Рос. акад. Наук, Рос. акад. Образования, Изд-во «Просвещение». – 3е изд. – Москва: Просвещение, 2006. – 319 с.
2. **Александров А. Д.**, Геометрия: учеб. для 10-11 классов общеобразовательных учреждений / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик; Рос. акад. Наук, Рос. акад. Образования, изд-во «Просвещение». – 4-е изд. – Москва: Просвещение, 2006. – 240 с.
3. **Атанасян Л. С.** Геометрия. 10-11: учебник для общеобразовательных учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев. – 15 изд., доп. – Москва: Просвещение, 2006. – 256 с.
4. **Бескин Н. М.** Изображение пространственных фигур / Н. М. Бескин. – Москва: Наука, 1971. – 80 с.
5. **Бескин Н. М.** Методика геометрии: учебник для педагогических институтов / Н. М. Бескин. – Москва: Учпедгиз, 1947. – 276 с.
6. **Васеловский С. Б.** Геометрия: дидактические материалы по геометрии для 10 класса / С. Б. Васеловский, В. Д. Рябчинская. – Москва: Просвещение, 2008. – 96 с.
7. **Василевский А. Б.** Методы решения геометрических задач / А. Б. Василевский. – Минск: Высшая школа, 1969. – 232 с.
8. **Войтович Ф. С.** Комбинации геометрических тел (вписанные и описанные шары): кн. для учителя / Ф. С. Войтович. – Минск: Народная асвета, 1991. – 160 с.
9. Геометрия, 10-11: книга для учителя / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик, Л. П. Евстафьева. – Москва: Просвещение, 2005. – 128 с.

10. **Глазков Ю. А.** Геометрия. Рабочая тетрадь 11 класс: пособие для учащихся общеобразовательных учреждений / Ю. А. Глазков, И. И. Юдина, В. Ф. Бутузов. – Москва: Просвещение, 2008. – 81 с.

11. **Глейзер Г. Д.** Методы формирования и развития пространственных представлений школьников в процессе обучения геометрии: диссертация доктора педагогических наук: 13.00.02. – Москва, 1975. – 333 с.

12. **Гольдберг Я. Е.** С чего начинается решение стереометрической задачи: пособие для учителей / Я. Е. Гольдберг. – Киев: Рад. шк., 1990. – 118 с.

13. **Далингер В. А.** Компьютерные технологии в обучении геометрии / В. А. Далингер // Информатика и образование. – 2002. – № 8. – С. 71–77.

14. **Дорофеев Г. В**. Чертеж в геометрической задаче / Г. В. Дорофеев, Н. Х. Розов // Квант. –1976. – № 6. – С. 49–56.

15. **Евстафьева Л. П**. Геометрия: дидактические материалы для 10-11 классов / Л. П. Евстафьева. – Москва: Просвещение, 2004. – 78 с.

16. **Ершова А. П.** Тетрадь-конспект по геометрии 11 класс: школьный конспект / А. П. Ершова, В. В. Голобородько, А. Ф. Кринжовский. – Москва: Илекса, 2009. – 96 с.

17. **Изаак Д. Ф.** Задачи по стереометрии и методика их решения: учебное пособие для студентов физико-математического факультета / Д. Ф. Изаак. – Куйбышев: КГПИ, 1988. – 89 с.

18. **Изаак Д. Ф.** Об изображении пространственных фигур / Д. Ф. Изаак // Математика в школе. – 1998. – № 4. – С. 78–81.

19. **Каплунович И. Я.** Развитие пространственного мышления школьников в процессе обучения математике / И. Я. Каплунович; НРЦРО. – Н.Новгород : Изд-во НРЦРО, 1996. – 99 с.

20. **Лагутина Л. М.** Живая геометрия на практике / Л. М. Лагутина // Математика в школе. – 2004. – № 7. – С. 50–53.

21. **Ларин С. В.** Методика обучения математике: компьютерная анимация в среде Geogebra: учебное пособие для вузов / С. В. Ларин. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2020. – 233 с.

22. **Лебедева С. В.** Решение задач на комбинацию сферы с другими телами с помощью системы подводящих вопросов / С. В. Лебедева // Наука. Инновации. Технологии. – 2011. – С. 42–51.

23. Методика преподавания математики в средней школе: частная методика / В. И. Мишин, А. Я. Блох, В. А. Гусев [и др.]. – Москва: Просвещение, 1987. – 416 с.

24. Методика преподавания математики. Часть 2: пособие для учителей математики 8-10 кл. средн. школы / С. Е. Ляпин, С. А. Гастева [и др.]. – Ленинград: Учпедгиз, 1956. – 654 с.

25. **Орлов В. В.** Организация самостоятельного поиска решения стереометрических задач с помощью опорных конструкций: диссертация кандидата педагогических наук: 13.00.02 / В. В. Орлов. – Ленинград, 1990. – 171 с.

26. **Орлова Н. Н,** Мультимедийная библиотека комбинаций геометрических тел / Н. Н. Орлова, Н. А. Усова // Бюллетень лаборатории математического, естественнонаучного образования и информатизации. – Москва: ГАОУ ВО МГПУ, 2015. – С. 313–321.

27. **Погорелов А. В.** Геометрия: учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений / А. В. Погорелов. – 7-е изд. – Москва: Просвещение, 2007. – 175 с.

28. **Потоскуев Е. В.** Геометрия. 11 класс: учебник для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. – Москва: Дрофа, 2003. – 368 с.

29. **Потоскуев Е. В.** Геометрия. 10 класс: задачник для общеобразовательных учебных заведений с углубл. и профильным изучением математики / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. – Москва: Дрофа, 2003. – 256 с.

30. **Потоскуев Е. В.** Геометрия. 10 класс: учеб. для общеобразовательных учебных заведений с углубленным и профильным изучением математики / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. – Москва: Дрофа, 2003. – 224 с.

31. **Потоскуев Е. В.** Геометрия. 11 класс: задачник для общеобразовательных учебных заведений с углубленным и профильным изучением математики / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. – Москва: Дрофа, 2003. – 240 с.

32. **Потоскуев Е. В.** Геометрия. 11 класс: методическое пособие к учебнику Е. В. Потоскуева, Л. И. Звавича «Геометрия. 11 класс» / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. – Москва: Дрофа, 2007. – 220 с.

33. **Рыжик В. И.** Геометрия: дидакт. материалы для 10 кл. общеобразовательных учреждений / В. И. Рыжик. – 10-е изд. – Москва: Просвещение, 2008. – 128 с.

34. **Рыжик В. И.** Геометрия: дидакт. материалы для 11 кл. общеобразовательных учреждений / В. И. Рыжик. – 10-е изд. – Москва: Просвещение, 2008. – 128 с.

35. **Саакян С. М.** Изучение геометрии в 10-11 классах: книга для учителя / С. М. Саакян, В. Ф. Бутузов. – 4-е изд., дораб. – Москва: Просвещение, 2010. – 248 с.

36. **Смирнова И. М.** Геометрия. 10-11 классы: методические рекомендации для учителя. В 2 ч. Ч. 1 / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. – Москва: Мнемозина, 2003. – 232 с.

37. **Смирнова И. М.** Геометрия. 10-11 классы: методические рекомендации для учителя. В 2 ч. Ч. 2 / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. – Москва: Мнемозина, 2003. – 256 с.

38. **Смирнова И. М.** Геометрия. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений (базовый и профильный уровни) / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. – Москва: Мнемозина, 2003. – 232 с.

39. **Смирнова И. М.** Геометрия. 10-11: учеб. для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и профильный уровни) / И. М. Смирнова, В .А. Смирнов. – 7-е изд., стер. – Москва: Мнемозина, 2011. – 288с.

40. **Смирнова И. М.** Геометрия. 11 класс. Рабочая тетрадь: учебное пособие для общеобразовательных учреждений / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. – Москва: Мнемозина, 2008. – 110 с.

41. **Смирнова И. М.** Геометрия. Вписанные и описанные фигуры в пространстве: учебно-методическое пособие / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Изд-во «Экзамен», 2009. – 158 с.

42. **Смирнова И. М**. Геометрия. Дидактические материалы: учебное пособие для 10-11 классов общеобразовательных учреждений / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. – Москва: Мнемозина, 2004. – 128 с.

43. **Смирнова И. М.** Сборник устных задач и упражнений по геометрии для 10-11 кл. средней школы / И. М. Смирнова; Аквариум. – Москва: Изд-во Аквариум, 1998. – 240 с.

44. **Смирнова И. М.** Уроки стереометрии в гуманитарных классах. Изучение многогранников / И. М. Смирнова // Математика в школе. – 1994. – № 4. – С. 41–47.

45. **Смирнова И. М.** Уроки стереометрии в гуманитарных классах. Фигуры вращения / И. М. Смирнова // Математика в школе. – 1994. – № 6. – С. 49–52.

46. **Смирнова И. М.** Геометрия. Объемы и площади поверхностей пространственных фигур: учебно-методическое пособие / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. — Москва: Издательство «Экзамен», 2009. — 157 с.

47. **Туманов С. И.** Поиски решения задачи / С. И. Туманов; Просвещение. – Москва: Изд-во Просвещение, 1969. – 279 с.

48. **Четверухин Н. Ф.** Проблема изображения пространственных фигур в условиях педагогического процесса / Н. Ф. Четверухин // Математика в школе. – 1998. – № 4. – С. 66–72.

49. **Четверухин Н. Ф.** Стереометрические задачи на проекционном чертеже / Н. Ф. Четверухин; Учпедгиз. – Москва: Изд-во Учпедгиз, 1952. – 128 с.

50. **Шереметьева О. В.** Обучение решению стереометрических задач с учетом взаимосвязи образного и логического компонентов мышления: дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / О. В. Шереметьева. – М., 1997. – 126 с.

51. **Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования** [Электронный ресурс]//Банк документов Министерства просвещения Российской Федерации: [сайт]. URL: https://docs.edu.gov.ru/document/bf0ceabdc94110049a583890956abbfa (дата обращения: 30.01.2021).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Анализ школьных учебников базового уровня на наличие разных видов задач по теме: « Комбинация многогранников и тел вращения»

Анализ школьных учебников базового уровня на наличие разных видов задач по теме: « Комбинация многогранников и тел вращения» представлен в Таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Анализ учебников базового уровня на наличие задач

Авторы УМК	Призма, вписанная в сферу	Цилиндр, вписанный в сферу	Пирамида, вписанная в сферу	Конус, вписанный в сферу	Сфера, вписанная в призму	Сфера, вписанная в цилиндр	Сфера, вписанная в пирамиду	Сфера, вписанная в конус
Атанасян Л. С.	№ 637 №639	№645 №756 №757	№638 №639 №640 №759 №760 №814 №815	№646 №758	№632 №634	№642 №750	№633- №637 №638 №640 №798 №754 №755	№643 №644 №751 №752 №753 №810 №811
Погорелов А. В.	§6: №46 №521	§8: №57	§6: №47 №49 №51 №54			§8: №24	§6: № 48 №50 №53	
Александров А. Д.	21.1 21.3 21.8 21.14 28.16	18.2 18.9	22.2 22.3 28.16	19.2 19.7 19.13 28.36	21.2 21.3 27.35 28.2 28.3	18.3 18.5 27.35	22.2 22.3 27.35 28.2 28.3 28.15	19.3 19.12 27.35 28.2 28.3
Смирнова И. М.	§32: №1-3 №15-19 №28 §47: №6 §49: №10	§36: №4-7 № 14	§32: № 4 №5 №8-13 №26 №27 §47: №15 §49: №19	§38: №6-15	§32: №1-3 №7 №12 №13 №18 §47: №10	§36: №1-3 № 15 §49: № 12	§32: № 4-6 №8-9 №16 §47: №11 №17	§38: №1-5 §38: №6-15 §49: № 13

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Анализ УМК по предмету «Геометрия» базового уровня

Анализ УМК по предмету «Геометрия» базового уровня представлен в Таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Анализ УМК базового уровня

Вид комбинации	Наличие определения в учебнике	Наличие теоремы существования	Изображение комбинаций	Задачи
1	*2*	*3*	*4*	*5*
Л.С. Атанасян и др.				
Шар и цилиндр	+	+	+	Сфера, вписанная в цилиндр (2 задачи). Сфера, описанная около цилиндра.
Шар и конус	+	+	+	Сфера, вписанная в конус (2 задачи). Сфера, описанная около конуса.
Шар и многогранники	+	+	Описанные около сферы тетраэдр и куб	Сфера и призма (5). Сфера и пирамида (5).
Призма и цилиндр	+	+	+	По одной задаче на вид.
Пирамида и конус	+	+	+	Пирамида, вписанная в конус (2).
А.В. Погорелов				
Шар и цилиндр	-	В задачах	-	1
Шар и конус	-	В задачах	-	1
Шар и многогранники	+	Сфера, описанная около правильной пирамиды	Сфера, вписанная в треугольную призму. Сфера, описанная около четырехугольной призмы	2 Разобрано решение 1 задачи
Призма и цилиндр	+	+	+	2 Разобрано решение 1 задачи
Пирамида и конус	+	+	+	2 Разобрано решение 1 задачи
Две сферы	+	+	+	1

Продолжение таблицы 2.1

1	*2*	*3*	*4*	*5*
В.А. Смирнов, И.М. Смирнова				
Шар и цилиндр	+	+	+	Сфера, вписанная в цилиндр (4). Сфера, описанная около цилиндра (5)
Шар и конус	+	+	+	Сфера, вписанная в конус (6). Сфера, описанная около конуса (9).
Шар и многогранники	+	+	+	Сфера, описанная около куба (2). Сфера, описанная около призмы (11) Сфера, описанная около пирамиды (15)
Призма и цилиндр	+	+	+	Цилиндр, вписанный в пирамиду (2). Призма, вписанная в цилиндр (2)
Пирамида и конус	+	+	+	По одной задаче на вид.
А.Д. Александров и др.				
Шар и цилиндр	+	В задачах	-	2 задачи в 10 классе. 2 задачи в 11 классе.
Шар и конус	+	В задачах	-	3 задачи в 10 классе. 2 задачи в 11 классе.
Шар и многогранники	+	В задачах	-	2 задачи в 10 классе. 10 задач в 11 классе.
Комбинация сфер	+	В задачах	-	3 задачи в 10 классе. 3 задачи в 11 классе.
И.М. Смирнова				
Шар и многогранник	+	+	+	38 задач
И. Ф. Шарыгина				
Шар и цилиндр	+	В задачах	-	По 2 задачи на каждый тип
Шар и конус	+	В задачах	-	5
Шар и многогранники	+	В задачах	-	22
Комбинация сфер	+	-	-	19
Призма и цилиндр	+	В задачах	-	5
Пирамида и конус	+	В задачах	-	По 2 задачи на каждый тип

Анализ УМК по предмету «Геометрия» профильного уровня представлен в Таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Анализ УМК профильного уровня.

Вид комбинации	Наличие определения в учебнике	Наличие теоремы существования	Изображение комбинаций	Задачи
А.Д. Александров и др.				
Шар и цилиндр	+	+	+	7 задач в 10 классе. 3 задачи в 11 классе.
Шар и конус	+	+	+	8 задач в 10 классе. 5 задач в 11 классе.
Шар и многогранники	+	+	+	11 задач в 10 классе. 7 задач в 11 классе.
Многогранник и цилиндр	+	-	+	7 задач в 11 классе.
Многогранник и конус	+	-	+	4 задачи в 11 классе.
Комбинация шаров	+	+	+	12 задач в 10 классе. 8 задачи в 11 классе.
Многогранник и многогранник	+	-	+	16 задач в 11 классе.
Конус и цилиндр	+	-	+	12 задач в 10 классе. 9 задач в 11 классе.
Е. В. Потоскуев и Л.И. Звавич				
Шар и цилиндр	+	+	+	21 в задачнике
Шар и конус	+	+	+	21 в задачнике
Шар и многогранники	+	Предлагается доказать самостоятельно	Сфера, вписанная в треугольную призму. Сфера, описанная около четырехугольной призмы	100 задач в задачнике
Призма и цилиндр	+	+	+	4 Разобрано решение 2 задач
Пирамида, вписанная в конус и описанная около цилиндра	+	+	+	2 Разобрано решение 1 задачи

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Методическое пособие к элективному курсу «Решение олимпиадных задач и задач ЕГЭ на комбинацию пространственных тел»

Занятие 1. Виды проектирований при построении чертежа. Параллельное проектирование и ее свойства. Ортогональная проекция. Математические основы теории изображений в параллельной проекции.

Изображение какого-либо пространственного предмета на плоскости представляет собой пространственную фигуру, состоящую из точек и линий, расположенных так, что при рассмотрении их мысленным взором можно представить изображенный предмет.

Изображение пространственного предмета на плоскости достигается при помощи отображения этого предмета путем проецирования. Чертежи, полученные по способу (методу) проецирования, называют проекционными.

Проецирование – процесс построения изображений (проекций) предмета на плоскости при помощи проецирующих лучей. Для построения проекции какой-либо фигуры необходимо через её наиболее характерные точки провести проецирующие лучи до пересечения их с плоскостью проекций. Полученные таким образом точки соединяют прямыми или кривыми линиями.

В зависимости от способа проведения проецирующих лучей проекции делятся на: центральные параллельные и ортогональные.

Если все проецирующие лучи, с помощью которых строится проекция, проходят через одну точку – центр проецирования, то полученная проекция называется центральной, а само проецирование центральным.

Достоинство центральной проекции – наглядность. Недостаток – степень искажения изображения зависит от расстояния центра проекций до плоскости проекций, поэтому центральное проецирование неудобно для простановки размеров.

Если же проецирующие лучи, проходящие через точки на предмете, параллельны друг другу, то проецирование называется параллельным, а полученная проекция – параллельной.

Все свойства центрального проецирования справедливы для параллельного проецирования:

1. При задании аппарата параллельного проецирования каждая точка пространства имеет одну и только одну параллельную проекцию. Обратное утверждение не имеет места.

2. Для задания точки в пространстве необходимо иметь две её параллельные проекции.

Параллельное проецирование можно рассматривать как частный случай центрального, у которого центр проецирования – бесконечно удаленная точка. Параллельные проекции используются для построения чертежей и некоторых видов наглядных изображений (например, в аксонометрии).

Если направление проецирования составляет произвольный угол (но не 90°) с плоскостью проекций, то параллельное проецирование называется косоугольным.

Параллельное проецирование называют прямоугольным или ортогональным, если проецирующие лучи направлены под прямым углом (90°) к плоскости проекций. Прямоугольные проекции используются для построения чертежей и некоторых видов аксонометрии.

Аксонометрическая проекция (или сокращенно аксонометрия) представляет собой один из видов наглядного изображения предметов. Для построения аксонометрии предмет вместе с осями координат x, y и z проецируются параллельными лучами на произвольно выбранную плоскость, называемую аксонометрической плоскостью проекций.

В зависимости от направления проецирования аксонометрические проекции делятся на ортогональные (проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекций) и косоугольные (угол наклона проецирующих лучей отличен от 90°).

Чертежи, полученные при помощи параллельного проектирования, обладают геометрическими свойствами, которые следует иметь в виду при построениях:

– если точка принадлежит линии, то ее проекция принадлежит проекции данной линии;

– проекция прямой линии есть прямая;

– параллельные прямые в пространстве изображаются на проекционном чертеже также параллельными прямыми;

– отношение отрезков, лежащих на одной прямой, равно отношению соответствующих отрезков изображения.

При построении изображений пространственных фигур на плоскости необходимо предварительно решить, какую из проекций удобнее выбрать с точки зрения наглядности.

Контрольные вопросы:

1. Даны три различные точки. Сколько точек может получиться на плоскости проекций при проектировании данных точек?

2. Какой фигурой является проекция проектирующей прямой?

3. Какой фигурой может быть проекция: плоскости, полуплоскости, угла, отличного от развернутого?

4. В каком случае: проекция точки совпадает с этой точкой, проекция прямой совпадает с этой прямой?

5. Какие фигуры можно получить, проектируя на плоскость: объединение двух пересекающихся прямых, объединение двух скрещивающихся прямых?

6. Может ли трапеция быть параллельной проекцией параллелограмма?

7. Может ли квадрат быть проекцией параллелограмма при параллельном проектировании?

Занятие 2. Изображение многогранников и тел вращения.

Требования к изображениям. Изображение многогранников. Изображение тел вращения. Изображения шара. Построение полюса и поляра.

Требования к проекционным изображениям:

1. Обратимость – восстановление оригинала по его проекционным изображениям (чертежу) – возможность определять форму и размеры объекта.

2. Наглядность – чертеж должен создавать пространственное представление о форме предмета.

3. Точность – графические операции, выполненные на чертеже, должны давать достаточно точные результаты.

4. Простота – изображение должно быть простым по построению и должно допускать однозначное описание объекта в виде последовательности графических операций.

Практическое построение изображений плоских фигур основывается на следующих двух теоремах:

Теорема 1. Изображением треугольника является любой другой треугольник.

Следствие 1. Изображением параллелограмма является любой другой параллелограмм.

Ромбы, прямоугольники, квадраты являются частными случаями параллелограммов, их изображениями будут любые параллелограммы.

Следствие 2. Изображением трапеции является любая другая трапеция с тем же отношением параллельных оснований, что и у оригинала.

Теорема 2. Если треугольник плоскости есть изображение данного треугольника плоскости, то каждая точка плоскости есть изображение определенной точки плоскости.

Следствие 3. Изображением четырехугольника будет четырехугольник, у которого диагонали в точке пересечения делятся в том же отношении, что и у данного.

При построении изображения произвольного многоугольника удобно выделить в оригинале некоторый треугольник (или параллелограмм). В качестве его изображения можно выбрать любой треугольник (параллелограмм). Произвол построения на этом заканчивается. Изображения остальных элементов многоугольника согласно второй теореме строятся на основе свойств параллельного проектирования и подобия.

Теорема 3. Изображением окружности является эллипс любой заданной формы.

Взаимно перпендикулярные диаметры окружности делят соответственно параллельные им хорды пополам. В эллипсе таким свойством обладают сопряженные диаметры. Следовательно, взаимно перпендикулярным диаметрам окружности в изображении отвечают взаимно сопряженные диаметры эллипса.

При решении многих задач мы встречаемся с необходимостью построения касательных прямых к эллипсу. Пусть дан эллипс и требуется через точкуA, лежащую на нем, провести касательную (рисунок 3.1). Для этого строим диаметр AB и сопряженный с ним диаметр CD. Через точку A проведем прямую t, параллельную CD. Это будет искомая касательная.

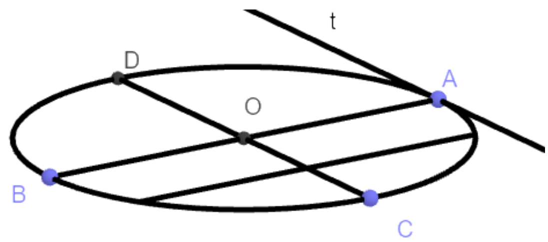

Рисунок 3.1 – Изображение окружности

Задача 2. Построить изображение равностороннего треугольника, описанного около изображения данной окружности.

Изображением окружности является эллипс (рисунок 3.2).

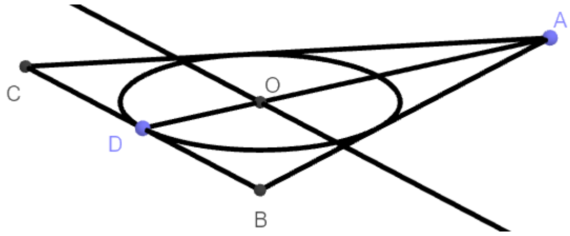

Рисунок 3.2 – Изображение равностороннего треугольника

Строим:

1. Два сопряженных диаметра.

2. Прямую, касательную к эллипсу и параллельную одному диаметру.

3. Точку A, где $AO = 2OD$.

4. Касательные к эллипсу из точки A.

5. Точки B и C. Оригинал изображения будет равносторонним треугольником.

Изображение многогранников.

В соответствии с правилами параллельного проектирования изображение призмы строится следующим образом. Сначала строится одно из оснований. Это будет некоторый плоский многоугольник. Затем из вершин многоугольника проводятся боковые ребра призмы в виде параллельных отрезков равной длины. Концы этих отрезков соединяются, и получается другое основание призмы. Невидимые ребра проводятся штриховыми линиями (рисунок 3.3).

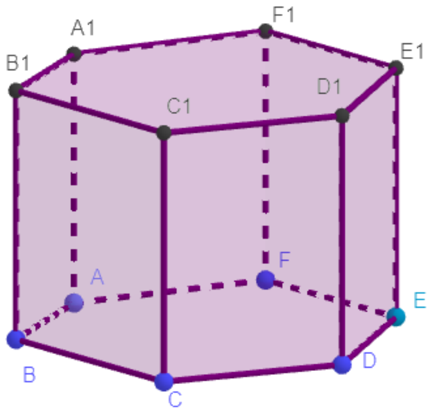

Рисунок 3.3 – Изображение призмы

В соответствии с правилами параллельного проектирования изображение пирамиды строится следующим образом. Сначала строится основание. Это будет некоторый плоский многоугольник. Затем отмечается вершина пирамиды, которая соединяется боковыми ребрами с вершинами основания. Невидимые ребра проводятся штриховыми линиями (рисунок 3.4).

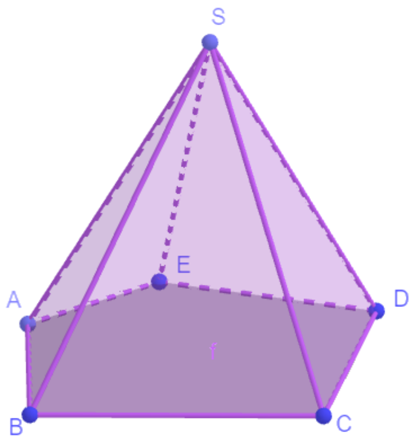

Рисунок 3.4 – Изображение пирамиды

Построение изображения тел вращения.

Для построения изображения цилиндра строим произвольный эллипс. Эллипс дает изображение окружности, являющейся границей круга, лежащего в основании цилиндра. Отложим от центра эллипса в произвольном направлении отрезок. Второй конец этого отрезка примем за центр нового эллипса, равного предыдущему и имеющего одинаковые направления осей с первым эллипсом. Проведем затем два параллельных отрезка, касательных к построенным эллипсам (рисунок 3.5).

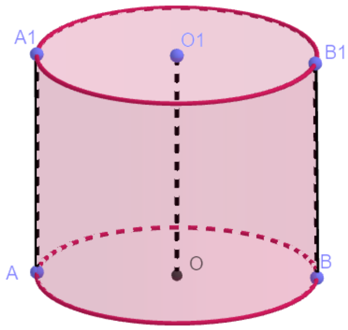

Рисунок 3.5 – Изображение цилиндра

Для большей наглядности центр второго эллипса обычно располагают на продолжении малой оси исходного эллипса. В этом случае крайние боковые образующие цилиндра соединяют концы больших осей эллипсов оснований.

При построении изображения прямого кругового конуса окружность, являющаяся границей его основания, изображается в виде эллипса. Изображение вершины конуса обычно выбирается на продолжении малой оси эллипса основания. Затем из этой точки проводятся касательные к эллипсу (рисунок 3.6).

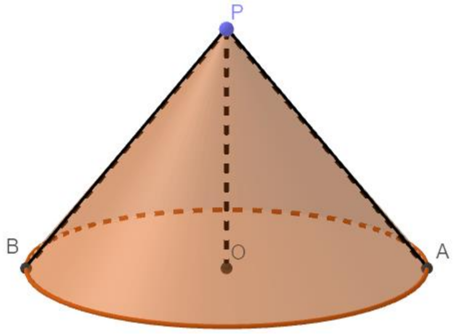

Рисунок 3.6 – Изображение конуса

На практике принято для изображения шара использовать ортогональное проектирование. Изображением шара в этом случае будет круг. Для того чтобы изображение шара было более наглядно, изображают дополнительно некоторую окружность большого круга — экватор, а также точки пересечения N, S диаметра шара, перпендикулярного к плоскости экватора — оси шара, с поверхностью шара. Эти точки называют полюсами шара (рисунок 3.7).

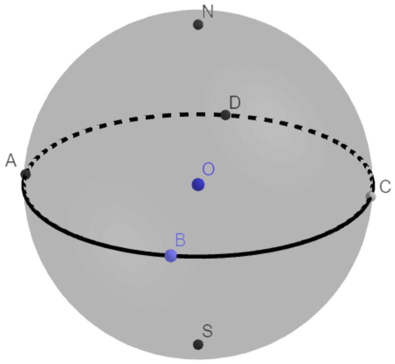

Рисунок 3.7 – Изображение шара

Контрольные вопросы:

1. Постройте изображение правильной пятиугольной призмы, правильной восьмиугольной пирамиды.

2. Постройте изображения двух взаимно перпендикулярных осевых сечений: цилиндра, конуса.

Занятие 3. Лабораторная работа в компьютерной среде GeoGebra. Построение многогранников и тел вращения. Выделение их основных элементов. Построение сечений в геометрических телах.

Задачи:

1. Постройте изображение правильной четырехугольной призмы, правильной семиугольной пирамиды, обозначьте их основание и высоту, определите цент основания.

2. Постройте изображение конуса, перечислите его основные элементы.

3. Построите изображение шара, опишите этапы построения.

Занятие 4. Шар, вписанный в многогранники и тела вращения. Шар и тела вращения. Шар и многогранники. Теоремы существования шара, вписанного в многогранник или тело вращения.

Многогранник называют описанным около шара, если все его грани касаются поверхности шара.

Центр шара, вписанного в многогранник, равноудалён от всех его граней, он является точкой пересечения полуплоскостей, проведенных через рёбра двугранных углов, образованных двумя смежными гранями, которые делят этот угол пополам.

Призму называют описанной около шара, если все её грани касаются шара. Шар можно вписать в прямую призму, если основания призмы являются многоугольниками, описанными около окружности, а высота призмы равна диаметру окружности.

Пирамиду называют описанной около шара, если все грани пирамиды касаются шара. Если вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание, то центр вписанного шара лежит на высоте пирамиды в точке пересечения высоты с биссектрисой линейного угла двугранного угла при основании пирамиды. (Считают, что плоскость линейного угла проходит через высоту пирамиды).

Шар является вписанным в цилиндр, если касается оснований цилиндра и всех его образующих. В цилиндр можно вписать шар, если диаметр основания равен его высоте. Основание цилиндра описанного около шара касаются поверхности шара в диаметрально противоположных точках – полюсах шара тогда и только тогда, когда основания цилиндра изображаются эллипсами равными экватору шара с центрами в полюсах шара.

Шар является вписанным в конус, если касается основания конуса и всех его образующих. Центр шара лежит на оси конуса.

Задача 1. В куб вписан шар радиуса 14,5. Найдите объем куба.

Решение:

Из рисунка 3.8 видно, что ребро куба равно диаметру вписанного в него шара. Объем куба в свою очередь равен кубу его ребра.

Получаем:

$$V_{\text{куба}} = a^3 = d^3 = (2r)^3 = 29^3 = 24389.$$

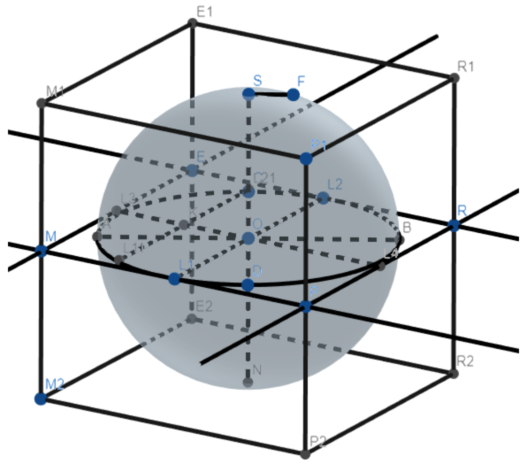

Рисунок 3.8 – Шар, вписанный в куб

Ответ: 24389.

Задача 2. Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 18. Найдите площадь поверхности шара.

Решение:

См. рисунок 3.9. Радиус шара равен радиусу основания цилиндра.

$$S_{\text{цилиндра}} = 2S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.п.}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 6\pi r^2=18;$$

$$\pi r^2 = 3;$$

$$S_{\text{шара}} = 4\pi r^2 = 12.$$

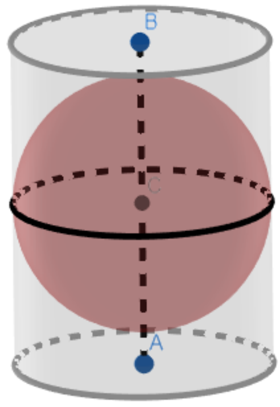

Рисунок 3.9 – Шар, вписанный в цилиндр

Ответ: 12.

Занятие 5. Шар, описанный около многогранника и тел вращения. Шар и тела вращения. Шар и многогранники. Теоремы существования шара, описанного около многогранника или тела вращения.

Призму называют вписанной в шар, если все её вершины лежат на поверхности шара. Если призма вписана в шар, то она прямая. Точка O — середина отрезка, который соединяет центры окружностей, описанных около оснований призмы.

Призма может быть вписана в шар тогда и только тогда, когда

1) призма прямая;

2) около ее основания можно описать окружность.

Отсюда следует, что в шар может быть вписана прямая треугольная призма, правильная призма.

Поскольку четырехугольник может быть вписан в окружность, если сумма его противолежащих углов равна 180°, то прямая четырехугольная призма может быть вписана в шар только при выполнении этого условия.

В частности, из параллелепипедов описать шар можно только около прямоугольного параллелепипеда. Центр шара в этом случае — точка пересечения диагоналей параллелепипеда.

В общем случае центр описанного около призмы шара лежит на середине высоты призмы, проходящей через центры описанных около ее оснований окружностей. Центр описанного шара может находиться внутри призмы, вне призмы, а также на ее боковой грани.

Пирамиду называют вписанной в шар, если все её вершины лежат на поверхности шара. Центр шара, описанного около произвольной пирамиды, лежит на прямой, перпендикулярной к плоскости основания, которая проходит через центр окружности, описанной около основания, в точке пересечения этой прямой с плоскостью, перпендикулярной к боковому ребру и проходящей через его середину. Если вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания, то центр описанного шара лежит на прямой, содержащей высоту пирамиды, в точке пересечения этой прямой с серединным перпендикуляром к боковому ребру. Центр описанного шара может находиться: внутри пирамиды (на высоте); вне пирамиды (на продолжении высоты); в плоскости основания пирамиды (совпадает с основанием высоты пирамиды).

Цилиндр вписан в шар, если окружности его оснований лежат на поверхности шара. В этом случае говорят также, что шар описан вокруг цилиндра. Центр шара лежит на середине оси цилиндра.

Конус вписан в шар, если его вершина и окружность основания лежат на поверхности шара, то есть на сфере. Центр шара лежит на оси конуса.

Задача 1. Около куба описан шар с радиусом $\sqrt{3}$. Найдите объем куба.

Решение:

Из рисунка 3.10 видно, что диаметр шара совпадает с диагональю куба. Диагональ куба в два раза больше радиуса шара и равна $2\sqrt{3}$. Если ребро куба принять за a, то диаметр куба равен $a\sqrt{3}$. Таким образом, получили что ребро куба равно 2, тогда объем куба равен 8.

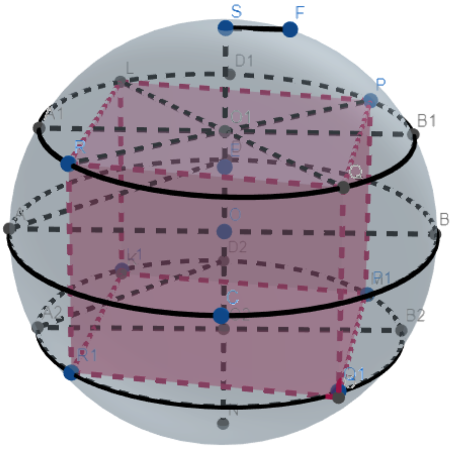

Рисунок 3.10 – Шар, описанный около куба

Ответ: 8.

Задача 2. Конус вписан в шар, радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем шара равен 28. Найдите объем конуса.

Решение:

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = 28;$$

$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{1}{4}V_{\text{шара}} = 7.$$

Ответ: 7.

Занятие 6. Решение простейших задач на комбинации геометрических тел. Шар, вписанный в многогранники и тела вращения. Шар, описанный около многогранника и тел вращения. Комбинации пирамид и призм. Комбинации цилиндра и конуса. Комбинации шара и цилиндра. Комбинации шара и конуса. Применение свойств ортогонального проектирования в задачах на нахождение объемов многогранников.

Задача 1. Найти радиус шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$, сторона основания которой равна 10, а боковое ребро – 13.

Решение:

Пусть O – центр шара, H – центр основания, K – середина AD, M – середина CB. Т.к. O лежит на SH. Рассмотрим треугольник SKM. По условию расстояния от точки O до SK, KH и SM должны быть равными – это и есть радиусы шара. Таким образом, O – просто центр вписанной окружности в треугольник SKM, радиус этой окружности.

Очевидно, $KH = 5$, SK из треугольника SDK равно 12 (по теореме Пифагора).

$$SH = \sqrt{144 - 25} = \sqrt{11};$$

$$S_{SNK} = 5\sqrt{199};$$

$$P = 17, R = \frac{5\sqrt{199}}{17}.$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{199}}{17}$.

Задача 2. Дан конус, образующая $AM = 5$, высота $MH = 4$. Найти радиус описанного шара.

Решение:

Центр шара совпадает с центром окружности, описанной около треугольника, являющимся осевым сечением конуса. Радиус описанного шара равен радиусу этой окружности. Тогда найдем радиус окружности, описанной около треугольника $\triangle AMB$. Рассмотрим его осевое сечение.

Видно, что $\triangle MHA$ и $\triangle MHB$ – прямоугольные, значит, $AB = 6$. По следствию из теоремы синусов:

$$R_{AMB} = \frac{AM}{2\sin\angle ABM} = 3\frac{1}{8}.$$

Ответ: $3\frac{1}{8}$.

Занятие 7. Решение задач, предложенных на ЕГЭ в первой части. Вписанная и описанная сфера около многогранника или тела вращения.

Задача 1. Дан конус, $R_{\text{осн.}} = 4, h = 3$. Найти радиус вписанного в него шара $R_{\text{вп.ш.}}$ (см. рисунок 3.11).

Решение: найдем радиус окружности, вписанной в треугольник. Рассмотрим осевое сечение $\triangle ASB, SA = SB$ (образующие конуса),$SH = 3$, $HA = 4$.

$$S_{\triangle ASB} = \frac{1}{2} \cdot SH \cdot AB = SH \cdot HA = 3 \cdot 4 = 12.$$

По теореме Пифагора из $\triangle SHA$ (прямоугольный):

$$AS = \sqrt{9 + 16} = 5;$$

$$SA = SB = 5;$$

$$p = \frac{SA+SB+AB}{2} = \frac{5+5+8}{2} = 9;$$

$$R_{\text{вп.ш.}} = R = \frac{S}{P} = \frac{12}{9} = 1\frac{1}{3}.$$

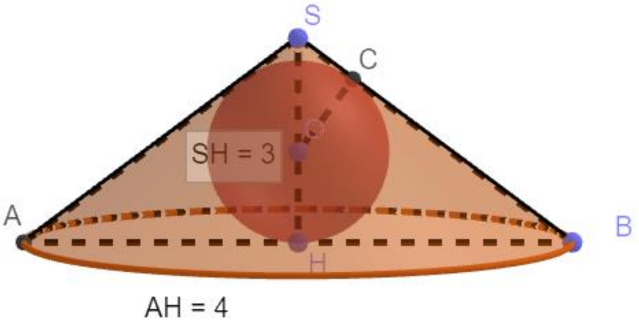

Рисунок 3.11 – Шар, вписанный в конус

Ответ: $1\frac{1}{3}$.

Задача 2. В основании пирамиды лежит квадрат со стороной a. Высота пирамиды проходит через середину одного из ребер основания и равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды (рисунок 3.12).

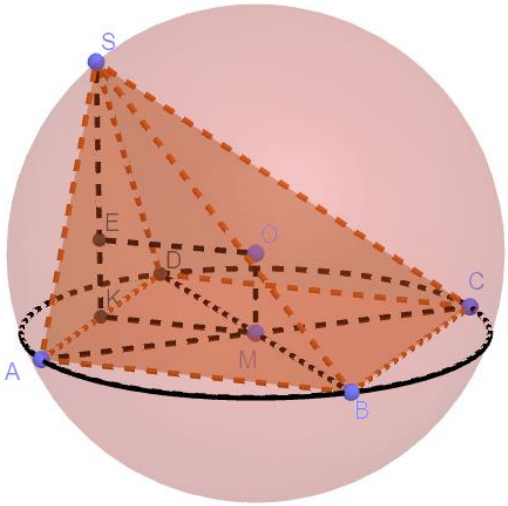

Рисунок 3.12 – Шар, описанный около пирамиды

Решение:

$OABCD -$ правильная четырехугольная пирамида.

O – центр окружности, который проектируется в точку пересечения диагоналей основания пирамиды M.

SK – медиана треугольника SAD, т.к. он равнобедренный:

$$AK = \frac{a}{2}.$$

$\triangle\, SAK -$ прямоугольный:

$$SA = \sqrt{AK^2 + SK^2}.$$

$\triangle\, SAD -$ равносторонний и OASD – правильная треугольная пирамида:

$$SN = \frac{2}{3}SK = \frac{a\sqrt{3}}{2}ON = MK = \frac{a}{2}.$$

В $\triangle\, SON$:

$$SO = \sqrt{SN^2 + ON^2}.$$

Ответ: $R = \frac{a\sqrt{21}}{6}$.

Задача 3. Найдите отношение объёма шара к объёму прямого кругового цилиндра, вписанного в этот шар, если известно, что меньший угол между диагоналями осевого сечения цилиндра равен α и диаметр основания больше высоты цилиндра (рисунок 3.13).

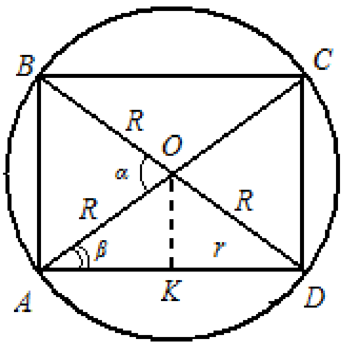

Рисунок 3.13 – Осевое сечение шара, описанного около цилиндра

Решение:

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3;$$

$$S_{\text{осн.ц.}} = \pi r^2.$$

Пусть $\angle AOB = \alpha$.

Тогда в $\triangle$AOB высота цилиндра равна:

$$H^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 cos\alpha = 2R^2 - 2R^2 cos\alpha = 4R^2 sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$H = 2Rsin\frac{\alpha}{2}.$$

Радиус основания цилиндра:

$$r = AOcos\angle OAK = Rcos\beta;$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \angle AOK = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\angle AOD) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\pi - \alpha) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2};$$

$$r = Rcos\frac{\alpha}{2}.$$

$$V_{\text{цил.}} = 2Rsin\frac{\alpha}{2} \cdot R^2 cos^2\frac{\alpha}{2} \cdot \pi = 2R^3 sin\frac{\alpha}{2} cos^2\frac{\alpha}{2}\pi =$$

$$= \pi R^3 cos\frac{\alpha}{2} \cdot 2sin\frac{\alpha}{2} cos\frac{\alpha}{2} = \pi R^3 cos\frac{\alpha}{2} sin\alpha.$$

$$\frac{V_{\text{цил.}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi R^3 cos\frac{\alpha}{2} sin\alpha} = \frac{4}{3cos\frac{\alpha}{2} sin\alpha}$$

Ответ: $\frac{V_{\text{цил.}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{4}{3cos\frac{\alpha}{2}sin\alpha}$.

Занятие 8. Лабораторная работа по решению задач из первой части ЕГЭ на комбинации геометрических тел с использованием компьютерной среды GeoGebra.

Задача 1. Найти радиус шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$, сторона основания которой равна 8, а боковое ребро – 10. Постройте изображение комбинации фигур в GeoGebra.

Решение:

Пусть E – центр шара, H – центр основания, K – середина AD, M – середина CB.

Т.к. E лежит на SH. Рассмотрим треугольник SKM. По условию расстояния от точки E до SK, KH и SM должны быть равными – это и есть радиусы шара.

Таким образом, E – центр вписанной окружности в треугольник SKM. $KH = 4$.

SK из треугольника SDK равно $2\sqrt{21}$ (по теореме Пифагора).

$$SH = \sqrt{84 - 16} = 2\sqrt{17};$$

$$S_{SKM} = 8\sqrt{17};$$

$$P = \frac{8+4\sqrt{21}}{2};$$

$$R = \frac{8\sqrt{17}}{4+2\sqrt{21}} = \frac{4\sqrt{17}}{2+\sqrt{21}}.$$

Комбинация фигур в системе GeoGebra представлена на рисунке 3.14.

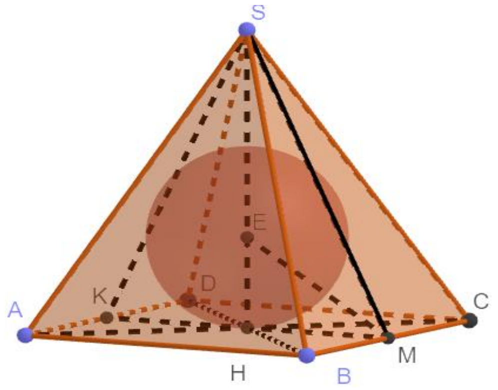

Рисунок 3.14 – Шар, вписанный в пирамиду

Ответ: $\frac{4\sqrt{17}}{2+\sqrt{21}}$.

Занятие 9. Решение задач, предложенных на ЕГЭ во второй части на комбинацию пространственных тел.

Задача 1. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 5, а боковые ребра наклонены к основанию под углом 60°. Найдите радиус описанной около пирамиды сферы.

Решение:

Смотри рисунок 3.15. Пусть O — центр сферы, а R — ее радиус.

$$PN = 2R = 8;$$

$$OP = OL = ON = OM = R = 4.$$

Сечения сферы плоскостями PLN и PMN – окружности радиуса 4, описанные около треугольников PLN и PMN:

$$\angle PMN = \angle PLN = 90°.$$

Т.к. $\angle PMN$ и $\angle PLN$ – вписанные углы, опирающиеся на диаметр PN.

Пусть H — высота пирамиды, опущенная из вершины M, а h — высота треугольника PLN, проведенная к стороне PN. Поскольку точка M лежит на сфере, а плоскость PLN содержит центр сферы, то $H \leq R$, причем $H = R$, если $MO \perp PNL$. Аналогично, так как точка L лежит на сфере, то $h \leq R$, причем $h = R$, если $LO \perp PN$.

$$V_{PNML} = \frac{1}{3}S_{PNL} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot PN \cdot h \cdot H \leq \frac{1}{6} \cdot 2R \cdot R \cdot R = \frac{R^3}{3};$$

$$V_{PNML} = \frac{R^3}{3}.$$

Таким образом, пирамида *PNML* имеет наибольший объем, если треугольники *PLN* и *PMN* прямоугольные, равнобедренные с общей гипотенузой *PN*, лежащие во взаимно перпендикулярных плоскостях. Так как треугольники *LON, LOP, LOM, POM, NOM* равны по двум катетам, то треугольники *LMN* и *LMP* правильные со стороной:

$$NL=PL=ON\sqrt{2}=4\sqrt{2}.$$

Отсюда следует, что медианы *LK* и *LT* этих треугольников равны, причем:

$$LK = LT = \frac{PL\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6}.$$

Треугольник *KLT* равнобедренный, и его высота *LD* является медианой прямоугольного равнобедренного треугольника *LOM.*

$$LD = \sqrt{LO^2 + OD^2} = 2\sqrt{5};$$

KT — средняя линия треугольника *PMN*:

$$KT = 0{,}5PN = R;$$

$$S_{KLT} = \frac{1}{2}KT \cdot LD = 4\sqrt{5}.$$

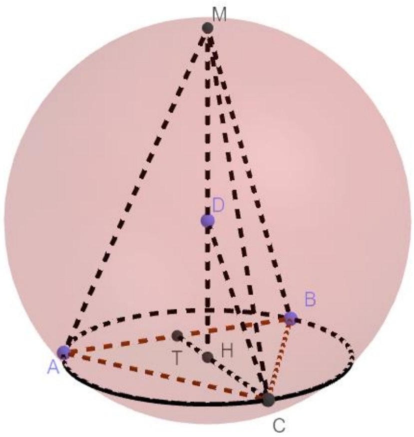

Рисунок 3.15 – Шар, описанный около пирамиды

Ответ: $4\sqrt{5}$.

Задача 2. Основанием призмы служит треугольник со сторонами a, b, c. Высота призмы h. Найти радиус описанной сферы (рисунок 3.16).

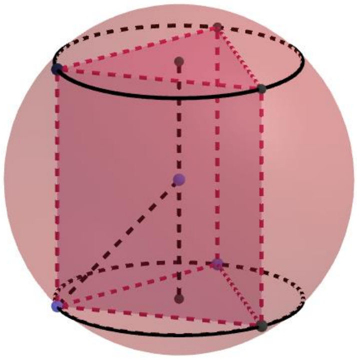

Рисунок 3.16 – Шар, описанный около призмы

Решение: Т.к. около призмы описана сфера, то призма прямая и её боковое ребро равно высоте. Радиус окружности, описанной около основания призмы, вычисляется по формуле:

$$R = \frac{abc}{4s} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}};$$

$$R = \sqrt{\frac{h^2}{4} + R_1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + 4R_1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + \frac{abc^2}{4p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Ответ: $R = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + \frac{abc^2}{4p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

Занятие 10. Решение задач, предложенных на ЕГЭ во второй части на комбинацию пространственных тел.

Задача 1. В шар вписан прямой круговой цилиндр (рисунок 3.17). Во сколько раз объём шара больше объёма цилиндра, если известно, что отношение радиуса шара к радиусу основания цилиндра вдвое меньше, чем отношение поверхности шара к боковой поверхности цилиндра.

Решение:

$$\frac{V_{ш}}{V_{ц}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{H\pi r^2};$$

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{S_{пов.ш}}{S_{б.пов.ц.}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi R^2}{2\pi r H} = \frac{R}{r} \cdot \frac{R}{H};$$

$$R = H.$$

$\triangle\ OBD -$ равносторонний. $\angle AOB = 120°$ и $\angle OAK = 30°$.

$$r = Rcos30° = R\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\frac{V_{ш}}{V_{ц}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{H\pi r^2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{3}{4}\pi R R^2} = \frac{16}{9}.$$

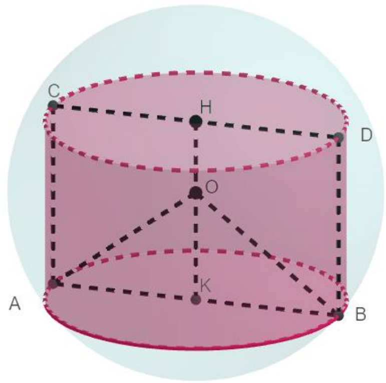

Рисунок 3.17 – Шар, описанный около цилиндра

Ответ: $\frac{16}{9}$.

Задача 2. В шар радиуса R=6 вписан конус высотой h. Выразить объем и боковую поверхность конуса как функции аргумента h (рисунок 3.18).

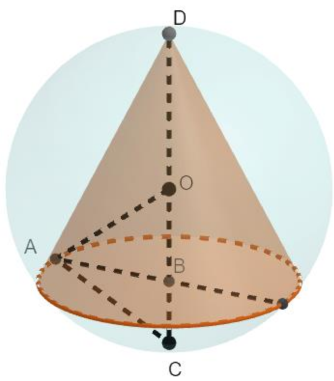

Рисунок 3.18 – Шар, описанный около конуса

Решение:

$$V_{кон} = \frac{1}{3}\pi r^2 h;$$

$$S_{бок} = \pi r L;$$

$$r^2 = h(2R - h) = h(12 - h);$$

$$L^2 = 2Rh = 12h;$$

$$V_{кон} = \frac{1}{3}\pi h^2(12 - h);$$

$$S_{бок} = \pi\sqrt{h(12 - h)}2\sqrt{3h} = 2\pi h\sqrt{3(12 - h)}.$$

Ответ: $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi h^2(12 - h)$; $S_{\text{бок}} = 2\pi h\sqrt{3(12 - h)}$.

Занятие 11. Решение задач, предложенных на ЕГЭ во второй части на комбинацию пространственных тел.

Задача 1. Радиус основания конуса равен 3. В конус вписан шар радиуса 1,5. Изобразите осевое сечение комбинации этих тел. Найдите отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара.

Решение:

Рассмотрим рисунок 3.19. Осевым сечением такой комбинации будет являться равнобедренный треугольник ABC, у которого боковые стороны – образующие конуса, а основание – его диаметр. Вписанная в треугольник окружность – сфера, вписанная в конус, радиусы их соответственно равны. Тогда осевое сечение примет вид как на рисунке 3.20.

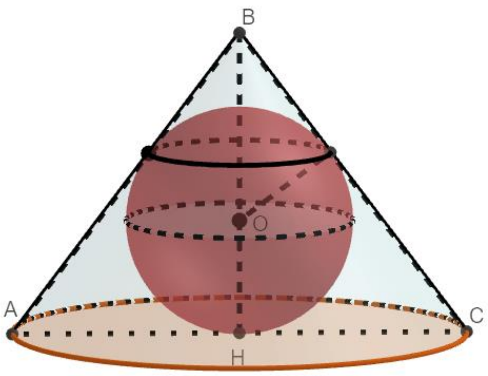

Рисунок 3.19 – Шар, вписанный в конус

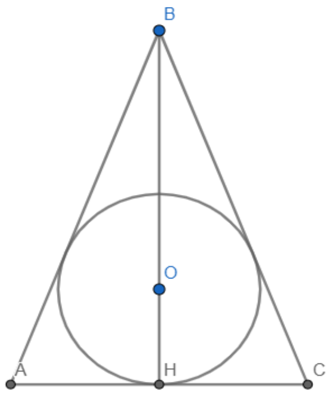

Рисунок 3.20 – Осевое сечение шара, вписанного в конус

$O -$ центр окружности, $CO -$ биссектриса угла $\angle BCA$:

$$\angle HCO = \alpha;$$

$$tg\alpha = \frac{OH}{CH} = \frac{1}{2};$$

$$tg\measuredangle BCH = \mathrm{tg}2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3};$$

$$BH = HCtg\measuredangle BCH = 4;$$

$$BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Площадь поверхности конуса и площадь поверхности шара находятся по следующим формулам:

$$S_{\text{кон.}} = \pi r^2 + \pi rl = 9\pi + 15\pi = 24\pi;$$

$$S_{\text{шара}} = 4\pi r^2 = 4\pi(1.5)^2 = 9\pi.$$

Тогда получили соотношение $\frac{24}{9} = \frac{8}{3}$.

Ответ: 8:3.

Задача 2. В треугольной пирамиде длины двух непересекающихся ребер равны 12 и 4. А остальные ребра имеют длину 7. В пирамиду вписана сфера. Найти расстояние от центра сферы до ребра длины 12.

Решение:

Центр сферы лежит на прямой ET (E, T – середины AC, BD соответственно), по которой пересекаются биссекторные плоскости двугранных углов с ребрами AC, BD (рисунок 3.21):

$$DBE \square AC;$$

$$OE \square AC;$$

$$DBE \square ABC;$$

$$DH \square BE.$$

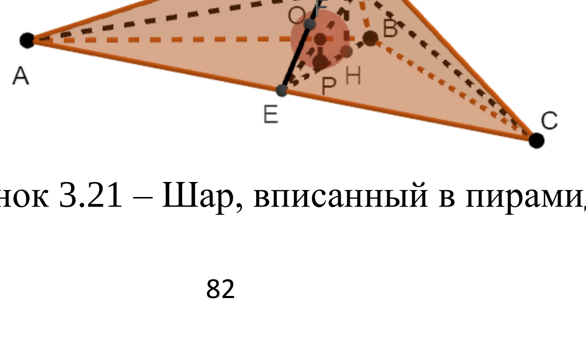

Рисунок 3.21 – Шар, вписанный в пирамида

$$ED = EB = \sqrt{13};$$

$$S_{\triangle EBD} = \frac{1}{2}ET \cdot DB = \frac{1}{2}DH \cdot EB. \ \sqrt{\left(\sqrt{13}\right)^2 - 2^2} = DH\sqrt{13}. \ DH = \frac{12}{\sqrt{13}};$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADC} = 6\sqrt{13};$$

$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBD} = 6\sqrt{5};$$

$$S = 12\left(\sqrt{13} + \sqrt{5}\right);$$

$$r = \frac{3 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot DH}{S} = \frac{6}{\sqrt{13} + \sqrt{5}}.$$

Из $\triangle\, EOP \sim \triangle\, DBH$ (по двум углам) имеем, что:

$$OP = r = \frac{6}{\sqrt{13} + \sqrt{5}};$$

$$HB = \sqrt{DB^2 - DH^2} = \sqrt{16 - \frac{144}{13}} = \frac{8}{\sqrt{13}};$$

$$EO = \frac{\frac{6}{\sqrt{13} + \sqrt{5}} \cdot 4}{\frac{8}{\sqrt{13}}} = \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{13} + \sqrt{5}};$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{13}+\sqrt{5}}$.

Занятие 12. Решение задач, предложенных на ЕГЭ во второй части на комбинацию пространственных тел.

Задача 1. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ описана около шара радиуса R. Точки M и N — середины рёбер BB_1 и CC_1. В шар вписан цилиндр так, что его основание лежит в плоскости AMN. Найдите объём цилиндра

Решение:

Высота призмы равна диаметру шара, т. е. $2R$, шар касается плоскостей оснований призмы в центрах P и P_1равносторонних треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, а плоскостей боковых граней — в точках пересечения их диагоналей (рисунок 3.22).

Пусть K и K_1 —середины BC и B_1C_1соответственно. Ортогональная проекция шара на плоскость ABC есть круг радиуса R, вписанный в треугольник ABC:

$$AP = A_1P_1 = 2R;$$

$$PK = P_1K_1 = R;$$

$$AK = A_1K_1 = 3R;$$

Рассмотрим сечение призмы плоскостью AKK_1A_1 (рисунок 3.23). Получим прямоугольник AKK_1A_1 со сторонами $2R$, $3R$, круг радиуса R, касающийся сторон AK и A_1K_1 в точках P и P_1, а стороны KK_1 — в середине L, причём центр круга совпадает с центром O шара:

$$\angle LAK = \alpha;$$

$$tg\alpha = \frac{KL}{AK} = \frac{R}{3R} = \frac{3}{\sqrt{10}};$$

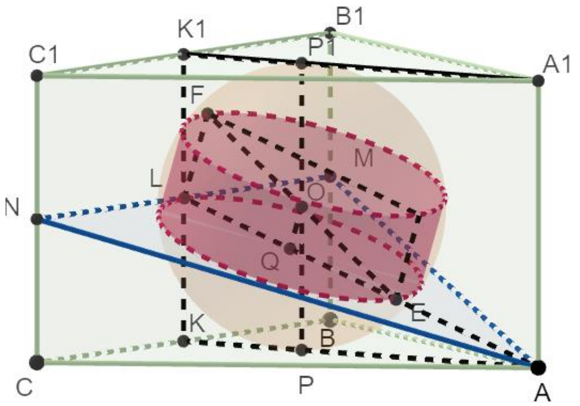

Рисунок 3.22 – Комбинация фигур к задаче №1

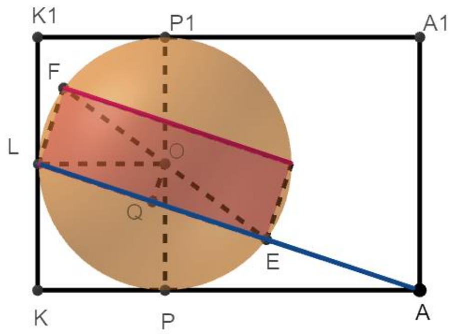

Рисунок 3.22 – сечение призмы плоскостью AKK_1A_1

Опустим перпендикуляр QO из центра круга на прямую AL.

Из прямоугольного треугольника QOL находим:

$$QL = OLcos\measuredangle OLQ = Rcos\alpha = \frac{3R}{\sqrt{10}}.$$

Пусть QA пересекает окружность, ограничивающую круг, в точке E. Продолжим EO до пересечения с этой окружностью в точке F. Тогда EL — диаметр основания цилиндра, вписанного в данный шар, а LF — высота цилиндра.

По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника EFL находим:

$$LF = \sqrt{EF^2 - EL^2} = \frac{2R}{\sqrt{10}};$$

$$V = \pi QL^2 \cdot LF = \pi \cdot \left(\frac{3R}{\sqrt{10}}\right)^2 \cdot \frac{2R}{\sqrt{10}} = \frac{9\pi R^3}{5\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\frac{9\pi R^3}{5\sqrt{10}}$.

Задача 2 (для самостоятельного решения). Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ описана около шара радиуса. Пусть M — середина ребра BB_1 и N — середина ребра CC_1. В шар вписан прямой круговой цилиндр так, что его основание лежит в плоскости AMN. Найдите объём этого цилиндра.

Занятие 13. Лабораторная работа по решению задач из второй части ЕГЭ на комбинации геометрических тел с использованием компьютерной среды GeoGebra.

Задача 1. В конус радиус основания, которого равен 3, вписан шар радиуса 1,5.

1. Изобразите комбинацию фигур в GeoGebra.

2. Изобразите осевое сечение комбинации этих тел.

3. Найдите отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара.

Решение:

1. Чтобы изобразить комбинацию конуса описанного около шара, необходимо определить нахождение центра шара. Первым шагом чертим изображение шара, изображаем полюса, поляры изображаем его осевое черчение, чертим сопряженные диаметры. Через точку S проводим параллельные, сопряженным диаметрам. На этих прямых откладываем радиус конуса равный двум радиусам шара (из условия). Изображаем снование конуса – эллипс. Проводим высоту – перпендикуляр, проведенный из центра основания конуса. Строим касательную к шару, являющуюся образующей конуса, определяем высоту конуса – точка пересечения касательной и высоты. Достраиваем изображение конуса (рисунок 3.24).

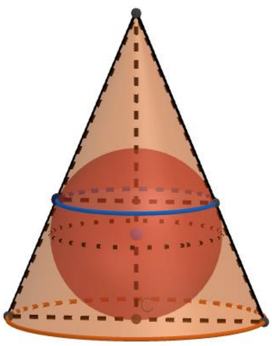

Рисунок 3.24 – Шар, вписанный в конус

2. Для точного определения положения точки касания шара и образующей конуса выполним выносной чертеж – осевое сечение комбинации фигур. В сечении получим равнобедренный треугольник с основанием 6, и вписанной окружностью с радиусом 1,5. Построение выносного чертежа начинаем с изображение основания треугольника,

изображения окружности, затем проводим касательную к окружности соединяющую вершину основания с точкой расположенной на высоте треугольника. Из центра окружности проводим перпендикуляр к касательной, точка их пересечения – искомая.

3.

$$\frac{S_{\text{полн.пов.конуса}}}{S_{\text{шара}}} = \frac{\pi Rl + \pi R^2}{4\pi r^2} = \frac{R(l+R)}{4r^2}.$$

Необходимо определить длину образующей. Воспользуемся формулами тригонометрии:

$$tg\angle OBS = \frac{OS}{SB} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2};$$

$$tg\angle CBS = tg(2\cdot\angle OBS) = \frac{2\cdot tg\angle OBS}{1 - tg^2\angle OBS} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3};$$

$$tg\angle CBS = \frac{CS}{BS} = \frac{4}{3};$$

$$CS = \frac{4\cdot 3}{3} = 4.$$

По теореме Пифагора:

$$CB = \sqrt{CS^2 + BS^2} = \sqrt{16+9} = 5;$$

$$\frac{S_{\text{полн.пов.конуса}}}{S_{\text{шара}}} = \frac{R(l+R)}{4r^2} = \frac{3\cdot(5+3)}{4\cdot 1{,}5^2} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}.$$

Ответ: 4:3.

Занятие 14. Лабораторная работа по решению задач из второй части ЕГЭ на комбинации геометрических тел с использованием компьютерной среды GeoGebra.

Задача 1. В конус вписан цилиндр так, что нижнее основание цилиндра лежит на основании конуса, а окружность верхнего основания принадлежит боковой поверхности конуса. Объем конуса равен 72.

1. Построить комбинацию этих фигур в GeoGebra.

2. Найти объем цилиндра, верхнее основание которого делит высоту конуса пополам.

3. Найти наибольший объем вписанного цилиндра.

Решение:

1. Комбинация фигур представленная на рисунке 3.25.

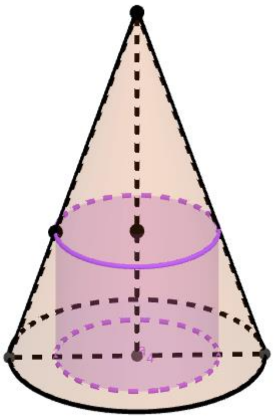

Рисунок 3.25 – Цилиндр, вписанный в конус

2. Пусть R – радиус основания конуса, H – его высота, r – радиус цилиндра и h - его высота. Осевое сечение комбинации этих фигур – равнобедренный треугольник. Из условия следует, что верхнее основание цилиндра будет средней линией треугольника, поэтому радиус цилиндра вдвое меньше радиуса конуса. Высота цилиндра — тоже половина высоты конуса. Объем конуса равен:

$$72 = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H;$$

$$R^2 \cdot H = \frac{216}{\pi};$$

$$v = \pi r^2 h = \frac{\pi R^2 \cdot H}{8} = \frac{216}{8} = 27.$$

3. В осевом сечении образуются два подобных треугольника.

$$\frac{H-h}{r} = \frac{h}{R-r};$$

$$HR - Hr - hR = 0;$$

$$h = \frac{HR - Hr}{R}.$$

Объем цилиндра выразится по формуле:

$$v = \pi r^2 h = \pi r^2 \frac{HR - Hr}{R} = \pi(r^2 R - r^3)\frac{H}{R}.$$

Найдем максимум этой функции зависящей от r:

$$v' = 2Rr - 3r^2;$$

$$v' = 0 \Leftrightarrow r = 0 \text{ или } r = \frac{2}{3}R;$$

$$v_{max} = \pi(r^2 R - r^3)\frac{H}{R} = \frac{4}{9}\pi R\left(HR - \frac{2}{3}HR\right) = \frac{4}{27}\pi R\left(\frac{HR^2}{R}\right) = 32.$$

Ответ: 27; 32.

Занятие 15. Решение олимпиадных задач и задач повышенного уровня сложности.

Задача 1. В шар радиуса R вписан круговой конус; угол между образующими конуса в осевом сечении равен α. Найти высоту, образующую и радиус основания конуса (рисунок 3.26).

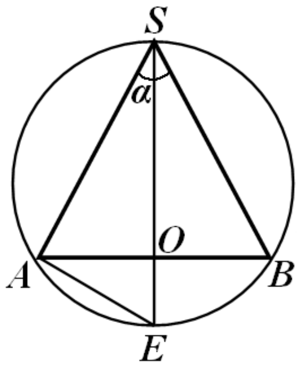

Рисунок 3.26 – осевое сечение шара, вписанного в конус

Решение:

$$SE = 2R;$$

$$\measuredangle SAE = 90°;$$

$$\measuredangle ASE = \frac{\alpha}{2};$$

$$AS = 2Rcos\frac{\alpha}{2}.$$

Из $\triangle AOS$:

$$AO = r = 2Rcos\frac{\alpha}{2}sin\frac{\alpha}{2} = Rsin\alpha;$$

$$SO = h = 2Rcos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $SO = 2R$; $AS = 2R\cos\frac{\alpha}{2}$; $AO = R \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$.

Задача 2. В шар радиуса R вписана правильная шестиугольная усечённая пирамида, у которой плоскость нижнего основания проходит через центр шара, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 60. Определить объём пирамиды.

Решение:

Рассмотрим рисунок 3.27.

$$\measuredangle OAA_1 = 60°;$$

$$A_1O_1 = \frac{1}{2}OA_1 = \frac{R}{2};$$

$$OO_1 = \frac{R\sqrt{3}}{2};$$

$$S_{\text{ниж.осн.}} = 6\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R\sqrt{3}}{2};$$

$$S_{\text{верх.осн.}} = \frac{1}{4}S_{\text{ниж.осн.}} = \frac{3R\sqrt{3}}{8};$$

$$V_{\text{иск.}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3R^2\sqrt{3}}{2} + \frac{3R^2\sqrt{3}}{8} + \sqrt{\frac{9R^4 3}{16}}\right) = \frac{21R^2}{16}.$$

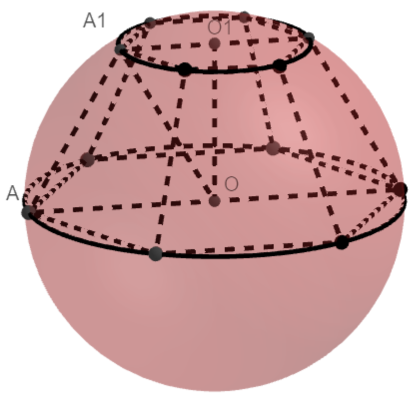

Рисунок 3.27 – Шар, описанный около усеченной пирамиды

Ответ: $\frac{21R^2}{16}$.

Занятие 16. Решение олимпиадных задач и задач повышенного уровня сложности.

Задача 1. В шар, объем которого равен V, вписана прямая треугольная призма. Основанием призмы служит прямоугольный треугольник с острым углом α, а наибольшая ее боковая грань есть квадрат. Найти объем призмы.

Решение:

Рассмотрим рисунок 3.28:

$$OO_1 \perp ABC;$$

$$OO_2 \perp A_1B_1C_1;$$

Центр шара лежит на плоскости AA_1BB_1:

$$AA_1 = R\sqrt{2};$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot sin\alpha;$$

$$AC = ABcos\alpha.$$

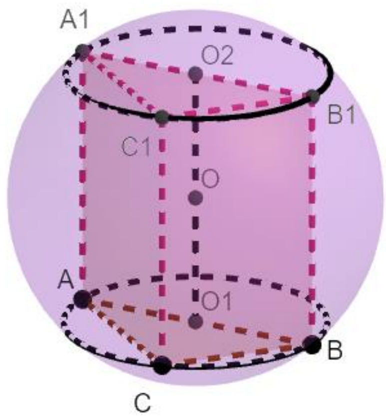

Рисунок 3.28 – Шар, описанный около призмы

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB^2 sin\alpha cos\alpha = \frac{1}{2}(R\sqrt{2})^2\ sin\alpha cos\alpha = \frac{1}{2} R^2\ sin2\alpha;$$

$$V_{\text{приз.}} = \frac{1}{2} R^2\ sin2\alpha\ R\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} R^3\ sin2\alpha.$$

Обем шара по условию равен:

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3 = V;$$

$$V_{\text{приз.}} = \tfrac{3\sqrt{2}V}{8\pi} \cdot sin2\alpha.$$

Ответ: $V_{\text{приз.}} = \frac{3\sqrt{2}V}{8\pi} sin2\alpha$.

Задача 2. Найти отношение поверхности и объёма шара соответственно к поверхности и объёму вписанного куба.

Решение:

$$R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

$$a = \frac{3R}{\sqrt{3}};$$

$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi R^3;$$

$$V_{\text{к}} = a^3 = \frac{8R^3}{3\sqrt{3}}, S_{\text{ш}} = 4\pi R^2;$$

$$S_{\text{к}} = 8R^2.$$

Ответ: $\frac{V_{\text{ш}}}{V_{\text{к}}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{\mathbf{2}}$; $\frac{S_{\text{ш}}}{S_{\text{к}}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$.

Задача 3. В усеченный конус, образующая которого наклонена под углом 45 градусов к нижнему основанию, вписан шар. Найти отношение величины боковой поверхности усеченного конуса к величине поверхности шара.

Решение: На рисунке 3.29 изображено осевое сечение конуса:

$$AG = BG = CH = HD;$$

$$AB = CD = \sqrt{2} \cdot BG;$$

Т. к. окружность вписанная, то:

$$2AB = AB + CD = AD + BC = AG + GH + HD + BC = 2AG + 2DC;$$

$$BC = AB - AG = (\sqrt{2} - 1)AG;$$

$$AD = BC + 2AG = (\sqrt{2} + 1)AG;$$

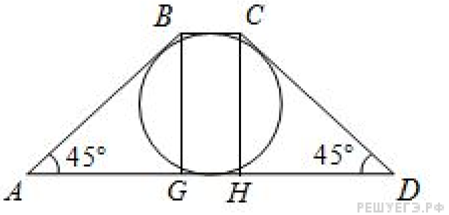

Рисунок 3.29 – Осевое сечение конуса

$$R = \frac{AG}{2};$$

$$S_{\text{сферы}} = \pi AG^2.$$

Достроим усеченный конус до конуса. Получим, что катет равнобедренного прямоугольного треугольника равен $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}AG$.

Вычислим длину добавленного куска образующей конуса

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}AG - \sqrt{2}AG = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}AG.$$

Получим площадь боковой поверхности усеченного конуса

$$\frac{\pi(\sqrt{2}+1)^2 - \pi(\sqrt{2}-1)^2}{2\sqrt{2}}AG^2 = 2\pi AG^2.$$

Ответ: 2.

Занятие 17. Решение олимпиадных задач и задач повышенного уровня сложности.

Задача 1. Отношению высоты конуса к радиусу описанного вокруг него шара равно k. Найти отношение объёмов этих тел.

Решение:

На рисунке 3.30 изображено осевое сечение конуса:

$$\frac{h}{R} = k;$$

$$h = kR;$$

$$\triangle\, ABE - \text{прямоугольный}, AD - \text{высота}:$$

$$r^2 = h(2R - h) = k(2 - k)R^2;$$

$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi R^3;$$

$$V_{\text{к}} = \frac{1}{3}\pi k^2(2 - k)R^3.$$

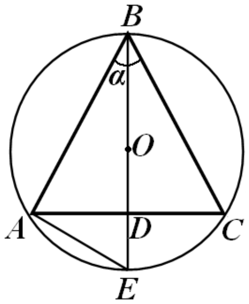

Рисунок 3.30 – Осевое сечение конуса

Ответ: $\frac{V_{к}}{V_{ш}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} k^2(2-k)$.

Задача 2. В усеченном конусе радиусы нижнего и верхнего оснований равны соответственно r_1 и r_2, а образующая конуса наклонена к плоскости нижнего основания под углом α (рисунок 3.31). Найти радиус шара, в который вписан данный усеченный конус.

Решение:

$$\angle CBA = \alpha;$$

$$AC = 2R sin\alpha;$$

$$CE \perp AB;$$

$$AE = r_1 + r_2;$$

$$BE = r_1 - r_2;$$

$$CE = (r_1 - r_2) tg\alpha;$$

$$AC = \sqrt{AE^2 + CE^2} = \frac{1}{cos\alpha}\sqrt{(r_1+r_2)^2 cos^2\alpha + (r_1-r_2)^2 sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{cos\alpha}\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 cos2\alpha};$$

$$R = \frac{AC}{2sin\alpha} = \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 cos2\alpha}}{sin2\alpha};$$

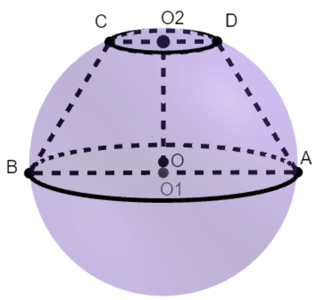

Рисунок 3.31 – Шар, описанный усеченного конуса

Ответ: $R = \frac{\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2cos2\alpha}}{sin2\alpha}$.

Задача 3. Плоскость, проведенная через центр шара, вписанного в конус, параллельна плоскости основания конуса, делит объем конуса пополам. Найти угол при вершине осевого сечения конуса.

Решение:

На рисунке 3.32 изображен чертеж осевого сечения конуса.

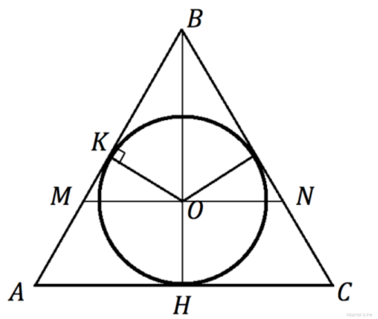

Рисунок 3.32 – Осевое сечение конуса

$$V_{ABC} = \frac{1}{3}\pi \cdot HC^2 \cdot BH;$$

$$V_{MBN} = \frac{1}{3}\pi \cdot ON^2 \cdot BO;$$

$$\angle OBN = \alpha.$$

Т.к. $\triangle BHC -$ прямоугольный, то

$$tg\alpha = \frac{HC}{BH};$$

$$HC = BH \cdot tg\alpha.$$

Из $\triangle BON$:

$$tg\alpha = \frac{ON}{BO};$$

$$ON = BO \cdot tg\alpha;$$

$$V_{MBN} = \frac{1}{2}V_{ABC};$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi HC^2 \cdot BH = \frac{1}{3}\pi \cdot ON^2 \cdot BO;$$

$$BH = BO\sqrt[3]{2};$$

$$OH = OK = r.$$

Где r – радиус вписанной сферы.

$$r = OH = BH - BO = BO\left(\sqrt[3]{2} - 1\right).$$

Т. к.$\triangle BKO -$ прямоугольный, то

$$sin\alpha = \frac{OK}{BO} = \frac{r}{BO} = \sqrt[3]{2} - 1;$$

$$\alpha = arcsin\left(\sqrt[3]{2} - 1\right);$$

$$\angle B = 2\alpha = 2arcsin\left(\sqrt[3]{2} - 1\right).$$

Ответ: $\angle B = 2arcsin\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)$.

Занятие 18. Итоговая контрольная работа.

1. В куб вписан шар радиуса 14,5. Найдите объем куба.
2. Радиус основания конуса равен 3. В конус вписан шар радиуса 1,5. Изобразите осевое сечение комбинации этих тел. Найдите отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара.
3. Вершины правильного треугольника со стороной 7 принадлежат боковой поверхности конуса с высотой 11 и радиусом основания 6,5. На каком расстоянии от вершины конуса расположена плоскость этого треугольника?
4. Постройте на чертеже изображение треугольной призмы, вписанной в конус. Выполните «выносной» чертеж, отражающий комбинацию сверху и сбоку.

Дополнительные задачи:

1. В пирамиде $FABC$ грани ABF и ABC перпендикулярны, $BF{:}FA = 15{:}11$. Тангенс угла между прямой ВС и плоскостью ABF равен 5. Точка М выбрана на ребре BC так, что $BM{:}MC = 4{:}11$. Точка Т лежит на прямой FA и равноудалена от точек M и B. Центр сферы, описанной около пирамиды $FABC$, лежит на ребре AB, площадь этой сферы равна 36π. Найдите объём пирамиды $ACMT$ (Ответ: 6).
2. Дана сфера радиуса 6. Сечением сферы плоскостью является окружность с диаметром KT. Плоскость сечения удалена от центра сферы

на расстояние 5. Точка P выбрана на сфере, а точка L – на окружности сечения так, что объём пирамиды $PKLT$ наибольший. Найдите угол между прямой LM и плоскостью PTK, если Mсередина ребра PK (Ответ: 30°).

3. Через центр O данной сферы проведено сечение. Точка F выбрана на сфере, а точки A, B, C, D – последовательно на окружности сечения так, что объём пирамиды $FABCD$ наибольший. Точки $\mathrm{M}, \mathrm{T}, L$ – середины рёбер FB, CD и AD соответственно. Площадь треугольника MLT равна $64\sqrt{5}$. Найдите радиус сферы (Ответ: 2).

4. Дана сфера радиусом 10. Сечением этой сферы плоскостью является окружность с диаметром AB. Плоскость сечения удалена от центра сферы на расстояние 8. Точка D выбрана на сфере, а точка C – на окружности сечения так, что объём пирамиды $ABCD$ наибольший. Найдите площадь грани ACD (Ответ: $27\sqrt{38}$).

5. Основанием пирамиды является прямоугольник. Плоскость перпендикулярна плоскости ABC, тангенс угла между прямой BC и плоскостью FAC равен 2. Точка M лежит на ребре BC и $MB = \frac{6}{\sqrt{5}}$. Точка L лежит на прямой FA и равноудалена от точек M и C. Центр сферы, описанной около пирамиды $FABCD$, лежит в плоскости основания пирамиды, радиус этой сферы равен 4. Найдите объём пирамиды $LAMC$ (Ответ: 48).

6. В шар, радиусом 2 вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Прямая AC_1 образует с плоскостью ABB_1 угол 45°. Найдите объём призмы (Ответ: 288).