МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика обучения решению текстовых задач на проценты в основной школе

Выпускная квалификационная работа по направлению

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность программы бакалавриата

«Математика. Экономика»

Форма обучения очная

Проверка на объем заимствований:
88% авторского текста
Работа рекомендована к защите
«25» марта 2022 г.
и. о. зав. кафедрой математики и МОМ
_________ Суховиенко Е. А.

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513/086-5-1
Смирнова Валерия Евгеньевна

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент кафедры МиМОМ
Шарафутдинова Анна Михайловна

Челябинск
2022

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время с учетом экономических требований наиболее востребованы специалисты с высоким уровнем знаний и компетентные в математической области – это бизнес, экономика, банковское дело, розничная и оптовая торговля, а также логистика, информационные технологии и др. Математика имеет очень важное значение во всей жизни человека, а не только в образовательном процессе. Одной из главных задач учебных учреждений считается предоставление главных основных знаний, формирование умений, выработка навыков и их применение в практической деятельности.

Формирование качественных математических знаний считается одной из самых важных задач образовательного процесса в средних школах. В настоящее время практически во всех специальностях требуется высокий уровень образования математического профиля. Это способствует увеличению количества школьников, которые изучают математику более глубоко и детально. У данных школьников уже намечена будущая профессия, и математика для них становится одним из самых важных школьных предметов. Именно поэтому перед школой стоит задача предоставить школьникам глубокие, качественные и прочные знания и навыки, которые дадут возможность применять полученные знания на практике.

Для успешного обучения и построения дальнейшей карьеры крайне важно уметь решать задачи на проценты, потому что проценты связаны практически со всеми сферами деятельности современного человека.

Тема «проценты» считается общей, потому что проценты связывают различные естественные и точные науки, производственные и бытовые стороны жизни между собой.

В школьном курсе математики тему «проценты» изучают в 5 и 6 классах. Из-за того, что на изучение данной темы выделяется небольшое количество часов, учащиеся регулярно испытывают трудности в процессе решения задач на проценты. Многие из учащихся неправильно понимают термин «процент». Это приводит к трудностям в дальнейшей жизни при столкновении с проблемами инфляции, кредитами, банковскими вкладами, ценообразованием и т.д. данный факт подтверждает актуальность выбранной темы. Помимо этого, при сдаче государственных экзаменов каждый учащийся сталкивается с задачами на проценты.

Все приведенные аргументы указывают на актуальность выбранной темы.

Проблема данного исследования состоит в выборе определенного направления для эффективного и качественного изучения темы «Проценты», а также определении методических способов по выработке умений и навыков по решению задач на проценты среди учащихся основной школы.

Объектом данного исследования является процесс обучения курсу математики в основной школе.

Предметом данного исследования являются методические способы обучения решению задач на проценты на уроках математики.

Целью данного исследования является разработка комплекса заданий и методических рекомендаций, направленных на формирование умений и закрепление навыков решения задач на проценты.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1) рассмотреть понятие «процент»;

2) провести анализ школьных программ и учебников по теме «проценты»;

3) определить особенности формирования навыков решения задач на проценты на различных этапах обучения;

4) разработать материалы для формирования навыков решения задач на проценты, а также методические рекомендации.

Гипотеза данного исследования состоит в том, что для формирования устойчивых качественных знаний и навыков в решении задач на проценты необходимо начать формирование понятия «процент» уже в 5 – 6 классах, а также увеличить количество решаемых задач на протяжении всего периода изучения данной темы.

Практическая значимость данной работы состоит в возможности использования полученных материалов по формированию навыков решения задач на проценты, которые будут способствовать эффективному усвоению и закреплению пройденного материала в деятельности других учителей и студентов в период прохождения практики.

Данная работа состоит из введения, одной теоретической главы, одной практической главы, заключения, списка использованных источников и приложений.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПРОЦЕНТЫ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

1.1 Тема «Проценты» и ее место в школьном курсе математики

Термин «процент» переводится как «на сотню», «со ста», «за сотню». В научной литературе данное понятие связанно с возникновением десятичной системы счисления в 15 веке в европейских странах. Древние вавилонцы первыми решили обозначать часть единого целого постоянными величинами.

Использование процентов в странах Европы началось в период ростовщичества. Существует мнение о том, что понятие «процент» было введено Симоном Стевином, ученым-инженером из Бельгии, который 1584 году опубликовал таблицы процентов. На основании различных источников термин «процент» начал использоваться на территории России в конце 18 века. Долгое время под процентом понимали прибыль или убыток на каждую сотню рублей. В 18 веке это понятие применялось исключительно в торговой и финансовой области.

Изучение темы «Проценты» является неотъемлемой частью школьной программы, потому что проценты очень часто используются на практике. Каждый учащийся должен понимать и уметь решать базовые задачи на проценты, осуществлять перевод процентов в обыкновенные и десятичные дроби и обратно.

В соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования, обучающиеся должны обладать следующими умениями:

– применения изученных понятий;
– достижения результатов;

– использование методов для решения практических задач и задач по смежным дисциплинам;

– использование компьютера и необходимых справочников.

Стандартная программа основного общего образования в школьном курсе математики предполагает формирование следующих умений у школьников:

– переход среди различных форм числовых записей, представление дробей в процентах и процентов в дробях;

– решение задач на проценты;

– решение алгебраических задач, интерпретация результата, выбор решения на основании формулировки условия;

– поиск правильного решения для задач, где рассуждения построены от условия к требованию и наоборот;

– определение этапов в решении задач;

– составление поэтапного плана решения;

– интерпретация полученных результатов и анализ выбранного решения;

– решение задач по вычислению части от известного числа и задач по вычислению числа по известной части;

– определение процента от известного числа, числа по известному проценту, определение процентного соотношения чисел, определение процентного уровня повышения или снижения величины.

В школьном курсе математики тема «Проценты» изучается в пятом классе. Вводят это понятие как сотую часть доли числа после изучения десятичных или обыкновенных дробей. Но тема дроби сама по себе очень сложная и объемная, и раздел «Проценты» с минимальным количеством часов, выделенных на эту тему, просто теряется внутри нее. В результате учащиеся испытывают трудности при решении задач на проценты.

В дальнейшем умение решать задачи на проценты ребятам очень пригодится на экзамене. А как показывает статистика, при решении экономических задач школьники испытывают трудности, встречаясь с понятием процента. Выпускникам сложно разбираться в вопросах кредитования, банковских вкладах.

При подготовке к экзамену по математике учителю предстоит повторить с ними процентные вычисления. Это очень важная и трудоемкая работа, построить повторение таким образом, чтобы учащиеся, повторив материал, заложенный в V классе, не боясь воспринимали более сложные задания, связанные с этой темой. Поэтому нужно уделять внимание этой теме постоянно, учитывая, что проценты тесно связаны с повседневной жизнью, что с ними постоянно приходится иметь дело. Задачи на проценты прочно вошли во многие предметы, например в химию, географию, биологию, обществознание и многие другие предметы. А вот в математике их место только в рамках задач на повторение или задач повышенной трудности. Таким образом, ученики забывают о проблемах большого значения процента и многообразия областей его применения.

На протяжении всего школьного курса математики можно выделить пять основных этапов эволюции понятия процентов. Обратимся к школьным учебникам и посмотрим, как это выглядит. В 5 классе вводится понятия процента: процентом называют одну сотую часть числа. Для краткости слов «процент» после числа заменяют знаком.

Пример задачи 1.1.1. Предприятие изготовило за квартал 500 насосов, из которых 60% имели высшую категорию качества. Сколько насосов высшей категории качества изготовило предприятие? [2].

Пример задачи 1.1.2. Ученик прочитал 138 страниц, что составляет 23% числа всех страниц в книге. Сколько страниц в книге? [2].

Второй этап в изучении процентов связывается с десятичными дробями. Изучив десятичные дроби и операции над ними, нужно снова вернуться к понятию процента. Здесь предлагается два специальных пункта. В пункте «Главная задача на проценты» дети учатся находить процент значения, умножая его на десятичную дробь. Прежде чем приступить к решению задач, необходимо ознакомить учащихся с правилами и упражнениями на перевод процентов в десятичную дробь. «Чтобы выразить проценты десятичной дробью, нужно число, стоящее перед знаком %, разделить на 100 или умножить на 0,01».

Третий этап в исследования процентных характеристик отнесен к VII классу. Из-за возможностей возраста учеников седьмого класса и их навыков решения заданий на пропорции, школьникам становятся доступными многие вопросы из тех, что традиционно не рассматривались со всем классом, а изучались лишь в качестве дополнительных в работе с сильными учениками. Учащиеся уже знакомы со всеми формами основных задач и сейчас изучают способы их решения, которых они ранее не знали.

Пример задачи 1.1.3. В школе 800 учеников, из них 30% – ученики начальной школы. Среди учеников средней и старшей школы 20% изучают немецкий язык. Сколько учеников в школе изучают немецкий язык, если в начальной школе немецкий язык не изучается? [4].

Пример задачи 1.1.4. Свежие грибы содержали по массе 90% воды, сухие 12%. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих? [3]. По мере того, как ученики осваивают новый математический аппарат при изучении алгебры, они овладевают стратегией решения расчетных задач на проценты, с использованием составления уравнения.

Четвертый этап. В VIII классе в теме «Алгебраические дроби» школьники снова обращаются к задачам на проценты. Задачи «концентрация», «сплавы», «банковские расчеты» считаются хорошими примерами практических задач, показывающих, как формальные алгебраические знания используются в реальных ситуациях. С этой целью, чтобы помочь ученикам понять подход к решению задач с процентами на новый уровень, стоит убедиться в том, что пособие содержит примеры того, как решается ряд задач. При желании ученики могут вернуться к разобранному стандарту и использовать его в качестве опоры при выполнении аналогичного задания. Или предложить решить более сложные.

Пример задачи 1.1.5. Клиент открыл счет в банке на некоторую сумму денег. Годовой доход по этому вкладу составляет 11%. Если бы он добавил 800 рублей, то через год получил бы доход 220 рублей. Какая сумма была внесена им в банк?

Пример задачи 1.1.6. Некоторую сумму денег вносят в банк на вклад с годовым доходом 6%. Если бы банк выплачивал 4% годовых, то для получения такого же дохода потребовалось бы на 600 рублей больше. Какую сумму вносят в банк?

В IX классе в главе «Дробные уравнения» также можно предложить задачи на проценты, решение которых основано на составлении дробных рациональных уравнений.

Пример задачи 1.1.7. На первые и вторые премии в конкурсе студенческих дипломных работ было выделено 15000 рублей, причем 40 % этих денег пошло на первые премии. Вторых премий было выдано на 4 больше, чем первых. Сколько студентов получили первые премии и сколько вторые. Если известно, что вторая премия составила 50 % первой? Кроме того, в IX классе проценты широко используются при решении текстовых задач второй части экзамена по математике и требуют подробного решения.

Пример задачи 1.1.8. При смешивании первого раствора кислоты, концентрация которого 20%, и второго раствора этой же кислоты, концентрация которого 50%, получили раствор, содержащий 30% кислоты. В каком отношении были взяты первый и второй растворы?

Пример задачи 1.1.9. Имеется два сплава с разным содержанием меди: в первом содержится 60%, а во втором – 45% меди. В каком отношении надо взять первый и второй сплавы, чтобы получить из них новый сплав, содержащий 55% меди? [5].

Завершается линия процентных вычислений в IX классе темой «Простые и сложные проценты», включенной в изучение главы «Арифметическая и геометрическая прогрессии». Сведения о простых и сложных процентах, которые сами по себе имеют большое практическое значение, считаются материалом, вполне пригодным для использования знаний, полученных на уроках математики. Возможность опереться на сформированные навыки в работе с процентами, на умение воспользоваться калькулятором, табличным и графическим представлением информации позволило расширить круг решаемых задач на проценты. В учебнике не вводятся формулы простых и сложных процентов. Учащиеся должны решать задачи, опираясь не на формулы, а на понимание смысла понятия «процент», на умение находить процент от числа. В теме широко используется калькулятор, который позволяет рассматривать самые разнообразные задачи.

При решении задач, предложенных авторами, учащиеся увидят, что арифметическая и геометрическая прогрессии, а также формулы их сумм являются не только абстрактным умением, но и определенным математическим знанием, важным для жизни.

В практике жизни геометрическая прогрессия имеет место в задачах расчета так называемых «сложных процентов». В основе капитализации процентов лежит начисление процента на процент. То есть с определенной периодичностью к сумме вклада добавляются проценты, и в дальнейшем они уже будут начисляться на увеличенную сумму вклада. Такую схему начисления называют «сложным процентом». Если положить деньги на срочный вклад в банке под 3% годовых, то через год вклад увеличится на 3% от исходной суммы, т. е. новая сумма будет равна вкладу, умноженному на 1,03. Еще через год уже эта сумма увеличится на 3%, т.е. вновь умножится на 1,03. За 20 лет сумма увеличится в $1{,}03^{20}$ = 1,8 раза. Если процент будет больше, то и результат будет резко расти. Так при 50% годовом увеличении за 10 лет сумма увеличится в $1{,}5^{10}$ = 55,7 раза. Под такой процент давали деньги ростовщики в Англии в XIII веке. Это вызывало страшное недовольство. Издавались законы, ограничивающие процент. Король Генрих VII даже совсем отменил взимание процентов, что привело в упадок как банковское дело, так и промышленность, лишившуюся возможности получения кредитов. В конце концов взимание процентов было разрешено, но не должно было быть больше 10%.

Сегодня, разнообразные банки предлагают свои услуги клиентам на самых разных условиях. И часто, прежде чем воспользоваться их услугами надо решить математическую задачу с опорой на знания данной темы.

Пример задачи 1.1.10. Вам предварительно оформлена кредитная карта с лимитом 190 000 рублей – с ней запасные средства всегда под рукой. Ставка 23,9% годовых. Сколько денег будет должен клиент банку через три года, если воспользуется данным предложением?

Пример задачи 1.1.11. Через три года в банке оказалось 880 000 рублей, положенных под 4% годовых («простые проценты»). Каков первоначальный вклад?

Пример задачи 1.1.12. В 2016 году клиент положил в банк 750 руб. под «простые проценты». В 2020 году сумма вклада увеличилась вдвое. Под сколько процентов клиент положил деньги в банк?

Пример задачи 1.1.13. Первоначальная цена товара на торгах повышалась несколько раз на одно и то же количество рублей. После третьего повышения цена равнялась 1200 р., а после двенадцатого повышения – 1650 р. Через сколько повышений первоначальная цена удвоилась?

Пример задачи 1.1.14. В течение календарного года на автомобильном заводе зарплата каждый месяц повышалась на одно и тоже число долларов. За июнь, июль, август зарплата в сумме составила 9900 долларов, а за сентябрь, октябрь и ноябрь – 10350 долларов. Найдите сумму зарплат одного работника за весь год.

Пример задачи 1.1.15. Для обучения на платном отделении по специальности «Экономика» в университете абитуриенту потребовался образовательный кредит. Он обратился в три банка. Банк «ВТБ» предложил 250 тыс. на срок 5 лет под 25% годовых, банк «СДМ» предложил 250 тыс. рублей на срок 10 лет под 15% годовых, а банк «Сбербанк» предложил 250 тыс. рублей на срок 8 лет по 20% годовых. Определите самое выгодное предложение.

Пример задачи 1.1.16. Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего года и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 30 млн рублей.

Таким образом, рассматривая задания на проценты, представленные в школьном курсе математики можно отметить, что учащиеся получают обширные знания и рассматривают вопросы разного характера на применение понятия процента. Из рассматриваемых заданий можно выделить тот факт, что понятие процента проходит большую эволюцию в рамках школьного курса. При этом большинство задач, которые разбирают в школьном курсе математики на проценты относятся к задачам на финансы. Это задания, связанные с начислением процентов на вклады, кредиты, проведение расчетов по скидкам и многие другие. Учителю очень важно, при формировании данного понятия рассматривать задания с опорой на их практическое применение.

При построении процесса изучения темы «Проценты» нужно учитывать широкое применение данного вопроса в повседневной жизни и других областях знаний, поэтому необходимо добиться высокого уровня знаний, умений и навыков учащихся, столь необходимых для дальнейшего успешного обучения учащихся. Навыки решения задач на проценты необходимо поддерживать и развивать в рамках курсов финансовой грамотности. При этом нужно отметить, что эта тема требует привлечения задач практического содержания из различных областей знаний.

В процессе данного исследования изучены работы различных ученых. По мнению А.Е. Захаровой, процент относится к дробям и является частным случаем его десятичной дроби. Поэтому Захарова считает, что к процентам необходимо применять теорию десятичных дробей. В дальнейшем использование процентов перешло в различные научные области (медицина, химия, техника, физика и другие, а также в обычной жизни каждого человека) [12].

Одним из главных вопросов изучения темы «Проценты» является использование теории дробей в процессе решения задач, новых вопросов в данной теме не включается. На основании разного использования проценты всегда занимали разное положение в школьных программах, учебниках и учебных пособиях; в связи с появлением различных определений понятия «процент», появлялись различные методы решения данных задач. Например, в дореволюционных учебниках процент изучали в процессе изучения темы коммерческие расчеты: «В случае, когда кто то берет деньги в долг, то он платит определенную сумму денег в расчете на сто рублей. Это и определяло количество процентов».

По мнению В.А. Далингера в задачах на сравнение дробей находятся приблизительные выражения сотых долей. Сотые имеют определенное значение. В своих исследованиях автор указывает, что самые часто используемые части имеют название: ½ – это половина, 1/3 – треть, ¼ – четверть. Именно поэтому 1/100 стало называться процентом и получило обозначение %. Из-за того, что число, которое представлено в виде процентов представляет собой дробь со знаменателем равным 100, это не потребовало введения новых правил числовых действий, которые выражаются в процентах, а в случае решения задач на проценты выбирают те же способы, что и при решении задач на дроби [8].

По мнению Г. Глейзера у детей десяти-одиннадцати лет нет необходимого уровня абстрактного мышления для усвоения данной темы, именно поэтому учащиеся в 5 и 6 классе трудно усваивают данную тему. По мнению исследователя в более старших классах в рамках школьной программы по алгебре тема процентов затрагивается только в рамках раздела «повторения», до которого в некоторых случаях и вовсе не доходят [7]. Во время подготовки к основному государственному экзамену в 9 классе школьники не могут решить или решают с ошибками элементарные задачи на проценты, которые берутся в «Экзаменационном сборнике».

В других сферах школьного образования задачи на проценты используются во время уроков химии, где они решаются при помощи пропорций. В данном случае школьники не замечают универсальности использования процентов, поэтому даже элементарные схожие задачи из другой области в большинстве случаев вызывают затруднения.

Подводя итог всему выше сказанному, можно сделать выводы о том, что изучение темы процентов в школьном курсе математики имеет определенные проблемы. Помимо этого, нам удалось определить роль и место процентов не только в школьном курсе математики, но и в повседневной жизни.

1.2 Анализ изложения темы в учебниках математики для 5 – 6 классов

В образовательной программе школьного курса математики изучение процентов включено в программу средних классов. Для рассмотрения процесса изучения темы «проценты» проведем анализ школьных учебников по математики пятого класса (Таблица 1).

Таблица 1 – Анализ учебников математики для 5-х классов

Исследуемый критерий	Учебник Муравина Г.К.	Учебник Виленкина Н.Я.
Рассматриваемая тема	Расчеты процентов	Проценты и основные задачи
Количество часов	6	6
Исследуемые понятия	Процент, чтение процентов, нахождение процента от целого числа, нахождение числа по проценту, определение процентных отношений.	Процент, перевод процента в дробь, перевод дробей в проценты.
Определение	Процент – величина, которая обозначает 1/100 целого числа.	Процент – величина, которая обозначает 1/100 целого числа.
Цель	Научить определять процент от числа, определять число по проценту, решать задачи на проценты и определять процентные отношения.	Научить решать простейшие задачи на нахождение процентов.

По школьной программе, которая основана на учебниках Виленкина Н.Я., проценты начинают изучать в 5 классе. На введение данного понятия выделено шесть часов. На протяжении 5 уроков школьникам необходимо выучить само определение процента, научиться писать проценты в виде десятичных и обыкновенных дробей, определять проценты на едином рисунке как часть единого целого, а также научиться самостоятельно решать элементарные задачи на проценты. На шестом уроке проводится контрольная работа по изученной теме. Перед тем как ввести понятие процента в обучении Виленкини другие авторы рассматривают различные примеры, взятые из повседневной жизни: килограмм – сотая часть центнера, ар – сотая часть гектара, сантиметр – сотая часть метра. Благодаря подобным примером автор приводит учащихся к осознанию того, что процент – это сотая часть величины.

Н.Я. Виленкин в своем учебнике предлагает рассмотреть задачи трех типов.

В школьной программе, которая использует учебник Г.В. Дорофеева, тема процентов в пятом классе не изучается. Впервые тема процентов рассматривается в шестом классе.

В учебнике О.В. Муравиной и Г.К. Муравина в 5 классах акцентируется большое внимание на решение сюжетных задач по теме проценты: деление овощей на части; определение количества марок и монет в коллекции; определение доли или количества учащихся, которые получили различные отметки в процессе соревнований в разных секциях, студиях или кружках; начисление заработной платы; сборка урожая.

Принято выделять три основных типа задач на проценты (рисунок 1):

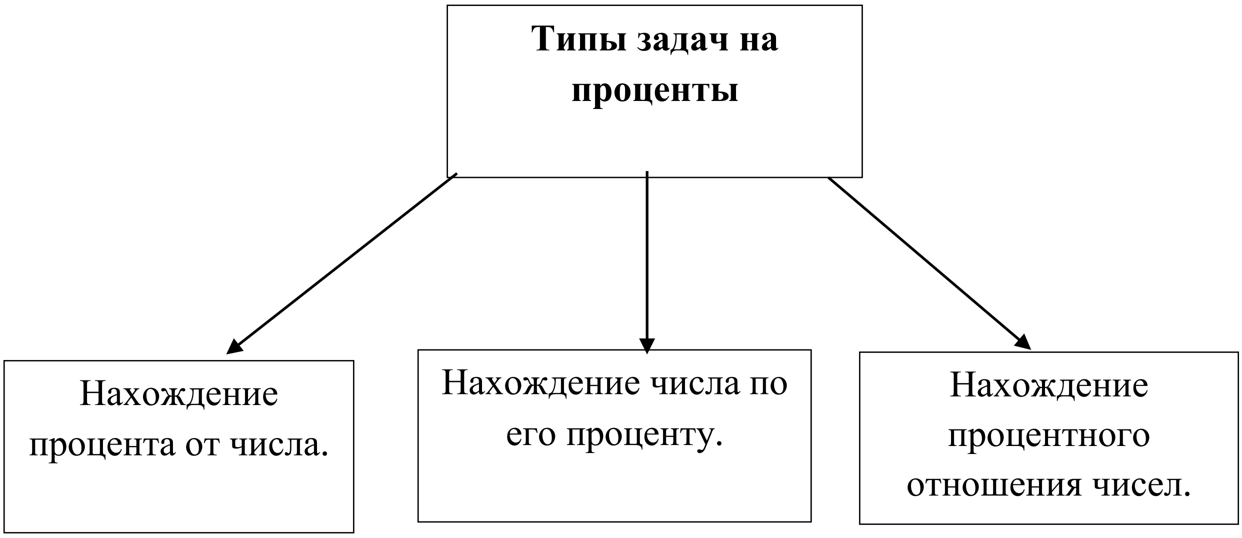

Рисунок 1 – Типы задач на проценты

Задача 1.2.1. На фабрике было выпущено 2100 деталей. Из них 40% были произведены по новым чертежам. Сколько деталей по новым чертежам выпустили на фабрике?

Решение. 2100 деталей – это 100%.

1) $2100 \div 100 = 21$ деталей составляют 1% от всего производства;

2) $21 \cdot 40 = 840$ деталей изготовлено заводом по новым чертежам.

Ответ: 840 детали.

Задача 1.2.2. В конкурсе по художественной гимнастике участвует 21 девочка, что составляет 18% всех участников. Сколько всего участников в конкурсе?

Решение. Неизвестное число – 100%.

1) $21 \div 18 = 1{,}16$ всех участников составляет 1%;

2) $1{,}16 \cdot 100 = 116$ участников составляет 100%.

Ответ. В конкурсе участвуют 116 участников.

Задача 1.2.3. Из 1750 га поля 348 га засеяно пшеницей. Какой процент поля засеян пшеницей?

Решение. 1750 га поля – это 100%.

1) $348 \div 1750 = 0{,}19$ всего поля составляет 1%;

2) $0{,}19 \cdot 100 = 19\%$ поля засеяно пшеницей.

Ответ: 19% поля засеяно пшеницей.

Далее проведем анализ различных учебников по математике для 6 класса по исследуемой теме (Таблица 2).

Таблица 2 – Анализ учебников математики для 6-х классов

Учебник Дорофеева Г.В.	Учебник Муравина Г.К.	Учебник Виленкина Н.Я.
1	*2*	*3*
Изучаемая тема и количество выделенных часов		
«Процент» – 5 часов.	«Решение задач на определение процента» – 2 часа.	«Пропорции и задачи с ними» – 3 часа.
Изучаемые понятия		
Процент. Определение процента от числа.	Содержание процентов.	Пропорция.
Определение		
Процент – это 1/100 часть от величины.	Процентное содержание вещества в сплаве – это соотношение массы вещества ко всей массе сплава. Концентрация – это процентное содержание вещества в растворе.	Пропорция – равенство 2 отношений.
Цель		
Ознакомить с понятием процента.	Ознакомить с понятием процентное содержание и обучение решению сложных задач на проценты.	Ознакомить с понятием пропорция и формирование умение применения пропорции при решении задач на проценты.

По учебнику Н.Я. Виленкина изучение темы процентов в дальнейшем проходит в шестом классе. Автор рассматривает те же типы задач, но при этом вводит новый алгебраический способ, в котором необходимо составить линейное уравнение для решения задачи. Помимо этого, в учебнике представлены правила нахождения части от числа и числа по его части:

- для вычисления части от исходной величины необходимо соответствующее целому значению число умножить на дробь, которая соответствует неизвестной части;
- для определения по одной части целого числа необходимо соответствующее данной части число разделить на соответствующую дробь.

Например, необходимо найти 5% от 162. Для этого:

$$162 \cdot 0{,}05 = 8{,}1.$$

По учебнику Дорофеева Г.В. для изучения темы «процент» в шестом классе выделяется пять часов. Сначала школьники изучают процесс нахождения дроби от числа. Потом они переходят к практическому решению различных задач на определение процента от числа по новому изученному правилу: преобразовать процент в дробь и умножить её на исходное число. После этого школьники переходят к изучению темы нахождения числа по его части. Далее переходят к решению задач, в которых нужно преобразовать процент в дробь и разделить число на полученную дробь. Далее школьники переходят к изучению темы «отношения», в которой ученики решают задачи по определению отношения процентов, для которых необходимо частное двух чисел умножить на 100 процентов.

На следующем этапе учащиеся решают задачи по уменьшению или увеличению определенного числа на N%. Помимо этого, проценты используются в процессе изучения диаграмм.

В рассматриваемом учебнике шестиклассники изучают задачи на сплавы, смеси и части. По нашему мнению, подобные типы задач сложны для данного класса. Именно поэтому изучение данного типа задач все чаще выносится преподавателями в факультативные занятия для более сильных учеников, поэтому важная отрасль задач на проценты остается не изученной. Несмотря на это данным задачам необходимо уделять внимание в старших классах.

Г.В. Дорофеев в своем учебнике предлагает школьникам использование калькулятора в процессе решения задач на проценты.

Таким образом, анализ рассмотренных учебников математики в пятом и шестом классе показал, что в программе, основанной на учебнике Дорофеева, тема процентов изучается в шестом классе, и отводится на нее лишь пять часов. В учебниках Муравина Г.К. и Виленкина Н.Я. тема процентов изучается как в пятом, так и в шестом классе, на изучение которой выделено 8 – 9 часов, что дает возможность более подробно изучить рассматриваемую тему.

1.3 Анализ изложения темы в учебниках математики для 7 – 9 классов

В период обучения средних классов тема процентов рассматривается во время повторения и в разделе, посвящённом решению задач на проценты повышенного уровня сложности.

В школьном курсе алгебры для 7 – 9 классов происходит дальнейшее развитие вычислительных навыков учащихся, обучение приемам и способам вычисления дробей, включая вычисления на калькуляторе, а также определение процентов и различных статистических вероятностных характеристик. Для анализа используемых в различных программах учебников по алгебре рассмотрим учебники для 7 – 9 классов.

В школьной программе, основанной на учебнике Ю.Н. Макарычева по алгебре для седьмого класса, тема процентов рассматривается во время решения задач при помощи линейных уравнений.

В учебнике Г.В. Дорофеева по алгебре для седьмого класса отдельной темой выделено решения задач на проценты. Во время изучения данной темы учащиеся решают различные задачи с процентами по нахождению величины от процента и наоборот.

По учебнику Г.К. Муравина ученики 7 класса решают задачи на сплавы и смеси, а также учатся самостоятельно составлять числовую модель для текстовой задачи.

В период обучения в 8 и 9 классах учащиеся сталкиваются с процентами только в рамках повторения. В девятом классе при подготовке и сдаче основного государственного экзамена решают задачи на сложные проценты. В период обучения в старшем звене (10 – 11 класс) задачи с процентами встречаются так же в разделах повторения и в рамках подготовки и сдачи единого государственного экзамена.

Подведя итог проведенному анализу распространённых учебников по алгебре, можно сделать вывод, что по учебной программе решение задач на проценты предложено только в 5 и 6 классов. В то время как в период с 7 по 11 класс данной теме уделяется небольшое количество часов в рамках раздела повторения, что оказывает негативное влияние на результаты ОГЭ и ЕГЭ.

1.4 Применение технологии укрупнения дидактических единиц на уроках математики при решении задач на проценты

Система образования в настоящее время подвергается серьезным изменениям, которые нацелены на формирование и развитие индивидуальных особенностей школьников. Формирование культуры школьника, его мировоззрение и интеллектуальное развитие приводит к возникновению новых приемов, технологий и способов активного обучения. Для достижения поставленной цели каждый учитель должен использовать современные методы и технологии для подбора индивидуального подхода не только к каждому ученику, но и к классу в целом. Современное образование имеет определенные проблемы, что привело к появлению современных технологий и методов обучения [16].

Одной из современных технологий считается укрупнение дидактических единиц. Данная технология подразумевает рост знаний у школьников при помощи активизации подсознательных механизмов по получению и переработке информации, а также благодаря сближению в пространстве и времени имеющихся знаний [18]. Реализация данной технологии происходит при помощи подачи необходимой информации большими блоками, между которыми существуют взаимопереходы и взаимосвязь при усвоении единиц родственной информации. При этом необходимо на каждом уроке повторять основную информацию, что способствует быстрому запоминанию. Использовать подобную технологию можно на разных уроках и на разных его этапах [18].

Технология укрупнения дидактических единиц используют на различных математических, естественнонаучных и гуманитарных уроках.

Учитывая, что темой данной работы является проценты и задачи на проценты, то именно на подобных уроках мы и рассмотрим использование данной технологии. Данный метод используется при изучении различных тем: проценты, пропорции, решение задач на проценты, определение процента от целого числа, определение числа по его проценту, перевод процентов в дроби и т.д. При подобном объединении всех перечисленных тем появляется возможность экономии времени, что оставляет достаточное количество часов для отработки практических навыков по решению задач. Что способствует отработке имеющихся навыков, а также развитию навыков анализа и сравнения.

Использование данной технологии при изучении указанных тем основывается на следующих ключевых моментах:

– решение базовых задач;

– составление различных обратных задач и их решение;

– самостоятельное составление задачи и ее решение, проверка ответа при помощи составления и решения обратной задачи;

– при помощи обобщения, анализа и сравнения самостоятельное составление новых задач [18].

Для наглядного представления рассмотрим несколько задач для 6 класса по выбранным темам, направленных на расчеты процентов.

Задача 1.4.1. В январе планшет стоил 8400 рублей. В феврале его стоимость увеличилась на 18%. А в марте стоимость планшета по акции магазина была на 25% меньше февральской цены. Сколько стоил планшет в марте?

Решение. Из-за того, что в феврале стоимость планшета возросла на 18%, то при помощи правила определения процента по пропорции, определим стоимость планшета в феврале:

$$\frac{100\%}{18\%} = \frac{8400}{x};$$

$$x = \frac{18\% \cdot 8400}{100\%};$$

$x = 1512$ (рублей) – 18%.

Таким образом, получаем:

$8400 + 1512 = 9912$ (рублей) – стоимость планшета в феврале.

Помимо этого, школьники могут по-другому определить стоимость планшета в феврале при помощи перевода процентов в десятичную дробь:

118% = 1,18;

Таким образом:

$8400 \cdot 1{,}18 = 9912$ (рублей) – стоимость планшета в феврале.

Из условия задачи известно, что в марте планшет стал стоить на 25% меньше, таким образом:

$100\% - 25\% = 75\%$ от первоначальной стоимости в феврале.

$$\frac{100\%}{75\%} = \frac{9912}{x};$$

$$x = \frac{75\% \cdot 9912}{100\%}$$

$$x = 7434.$$

x = 7434 (рублей) – стоимость планшета по акции в марте.

Ответ: 7434 рубля.

Задача 1.4.2. Составить и решить обратную задачу.

Для наглядного представления вариантов обратных задач, можно представить их в виде Таблицы 3.

Таблица 3 – Обратные задачи

Задачи	Начальная цена планшета	Процент подорожания	Цена в феврале	Процент скидки	Итоговая стоимость в марте
Прямая	8400	18%	9912	25%	?
Обратная 1	?	18%	?	25%	7434
Обратная 2	?	18%	9912	?	7434
Обратная 3	?	18%	9912	25%	?
Обратная 4	8400	?	9912	?	7434
Обратная 5	8400	?	9912	25%	?

По данной таблице видно, что в нашем случае можно составить пять обратных задач. В качестве примера сформулируем и решим одну из них.

Обратная задача: В марте планшет стоил 7434 рубля, что на 25% меньше, чем его стоимость в феврале. В феврале стоимость планшета была на 18% больше, чем в январе. Сколько планшет стоил в январе?

Решение. В данном случае мы будем использовать правило определения числа по его части (проценту). Это правило позволит нам сначала определить стоимость планшета в феврале после первого повышения, а затем определим начальную цену планшета в январе.

$$\frac{7434}{\Phi} = \frac{75\%}{100\%};$$

$$Ф = 7434 \cdot \frac{100\%}{75\%};$$

$$Ф = 9912.$$

Ф = 9912 (рублей) – стоимость планшета в феврале.

$$\frac{Я}{9912} = \frac{100\%}{118\%};$$

$$Я = \frac{9912 \cdot 100\%}{118\%};$$

$$Я = 8400.$$

Я = 8400 (рублей) – стоимость планшета в январе.

Ответ: в январе – 8400 рублей, а в феврале – 9912рублей.

Задача 1.4.3. Пример составления и решения задачи, проверка через обратную задачу и переход к более сложной задаче. Для этого необходимо составить прямую и обратную задачу. После этого решить прямую и проверить ее при помощи обратной. После чего заполнить пропуски в Таблице 4.

В качестве прямой задачи примем следующие условия: После повышения урожайности в новом сезоне на 25% фермер получил 281,4 кг картофеля. Сколько картофеля фермер получил в прошлом сезоне?

Таблица 4 – Условия задачи 3

	Исходное число	Процент увеличения	Итоговое число
Прямая задача		25%	281,4
Обратная задача			

Решение. Исходное число будем принимать за 100%. Таким образом, 100%+25% = 125% = 281,4 кг.

$$\frac{x}{281,4} = \frac{100\%}{125\%};$$

$$x = \frac{281{,}4 \cdot 100\%}{125\%};$$

$$x = 225{,}12.$$

x = 225,12 (кг) – получил фермер в прошлом сезоне.

Ответ: 225,12 кг картофеля.

Составление обратной задачи: В прошлом сезоне фермер получил урожай в 225,12 кг картофеля. В этом году урожайность выросла на 25%. Сколько килограмм картофеля фермер получит в этом сезоне?

Решение. В данном случае исходное число равно 225,12 кг, значит 225,12 = 100%. В этом году – на 25% больше, соответственно, 100%+25% = =125%. Таким образом:

$$\frac{x}{231} = \frac{125\%}{100\%;}$$

$$x = \frac{225{,}12 \ \cdot 125\%}{100\%}$$

$$x = 281{,}4.$$

Ответ: 281,4 килограмма картофеля.

Проанализировав ряд задач на проценты, можно прийти к выводу, что подобные задачи соответствуют технологии укрупнения дидактических единиц, потому что:

– решаются стандартные задачи;

– самостоятельно составляются и решаются обратные задачи;

– самостоятельно формулируются условия, и осуществляется поиск решения не только прямой, но и обратной задачи.

Использование на уроках математики данной технологии способствует снижению нагрузки, увеличению количества получаемых знаний, повышается результативность главного материала, развивается память, воображение, внимание и мышление.

Как показывает анализ учебно-методической литературы и наш собственный педагогический опыт, к распространённым ошибкам, допускаемыми учащимися при решении текстовых задач на проценты, могут привести разные причины. Перечислим наиболее распространенные из них.

1. *Непонимание сути понятия «процент».* При решении задач на повышение или уменьшение цен учащиеся обнаруживают повторяющееся изменение стоимости товара и не используют правило нахождения части от предыдущей цены, путём сложения и вычитания процентов. Например, задачи, подразумевающие сначала необходимость снизить цену на 32%, а затем повысить её 32%. Распространённой ошибкой является положение о том, что эти проценты будут равны одной и той же сумме, а в итоге база их начисления будет абсолютно разной.

2. *Невнимательное чтение условия задания*. Так, при выполнении экзаменационной или контрольной работы многие учащиеся испытывают сильное волнение и чрезмерное психологическое напряжение, исходя из этого, при чтении задачи они ошибочно воспринимают содержание ее условия и/или требования.

3. *Неправильное определение вида задачи на проценты.* Есть задачи, в которых содержатся и проценты от числа, и часть числа, выраженная в процентах, а это создаёт путаницу в умах учащихся и приводит их к совершению ошибок в процессе решения данной задачи, поскольку при решении задач они научились работать только с чем-то одним.

4. *Недостаточная сформированность у обучающихся базиса решения задачи с процентами (теоретической и практической основы ее решения).*

Так как же можно предупредить эти и другие ошибки при изучении учащимися темы «Проценты»? На наш взгляд, этому могут помочь следующие рекомендации.

1. *При изучении понятия процента – особое внимание следует уделять существенным свойствам понятия.* Школьники должны четко усвоить, что процент – это часть числа и именно сотая часть. Достигать это можно в контексте активного обращения к опыту учащихся, практическим связам с реальной жизнью школьников и связям темы «Проценты» с ранее изученным учебным материалом, в частности по теме «Дроби»;

2. *Опять же при изучении правил нахождения процента от числа, числа по его процентному выражению, процентного отношения двух чисел надо активно использовать умения школьников находить дробь от числа или находить число по его дроби, реализуя такую параллель в том числе через предлагаемые учащимися задачи.*

3. *После знакомства учащихся с пропорцией, процесс решения задач на проценты нередко «механизируется», что мешает учащимся понимать смысл своих действий.* Чтобы этого избежать задачи должны быть разнообразны по своим формулировкам и видам. Это позволит школьникам переносить свои знания в новые усложненные ситуации. При решении таких задач учащиеся не должны забывать и ранее изученные способы и приемы решения, актуализировать которые помогает, в том числе, специальным образом организованная работа учащихся на заключительном этапе работы с решенной задачей. Учет этих и других рекомендаций, как показывает наш профессиональный опыт, помогает снизить уровень трудности учащихся при изучении ими темы «Проценты», уменьшая количество допускаемых ими ошибок при решении соответствующих задач.

Вывод по главе 1

Подводя итог всему вышесказанному, можно сделать выводы о том, что изучение темы «Процент» в курсе основной школы напрямую зависит от выбранного учителем учебного комплекта. Проведя анализ разных учебников по математике для 6 классов, мы пришли к выводу, что различные авторы подходят к изучению темы процентов по-разному. Некоторые авторы в своих учебных пособиях начинают рассмотрение этой темы еще в 5 классе, а в 6 продолжают и углубляют знания, а другие начинают только в 6 классе. Единым признаком во всех методических пособиях является регулярное возвращение к теме процентов в основной школе в курсе математики и последующее включение подобных заданий в итоговые экзамены.

ГЛАВА 2. МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПРОЦЕНТЫ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

2.1 Методика введения понятий и обучения решению задач на проценты в 5 – 6 классах. Разработка цикла заданий для закрепления

Для достижения цели исследования необходимо рассмотреть методику обучения решению школьных задач на проценты в основной школе.

В учебнике по математики в 5 классе Муравиной Г.К. перед введением термина «процент» учащимся напоминают названия разных долей единого числа (половина, треть, четверть). В других случаях при обозначении части целого числа начинают использовать проценты. При этом дается определение данного понятия: процент – это одна сотая доля целого числа.

Проценты обозначают с помощью специального знака «%» [9]. Полезно визуализировать для обучающихся вводимое понятие с помощью рисунков (рисунок 2).

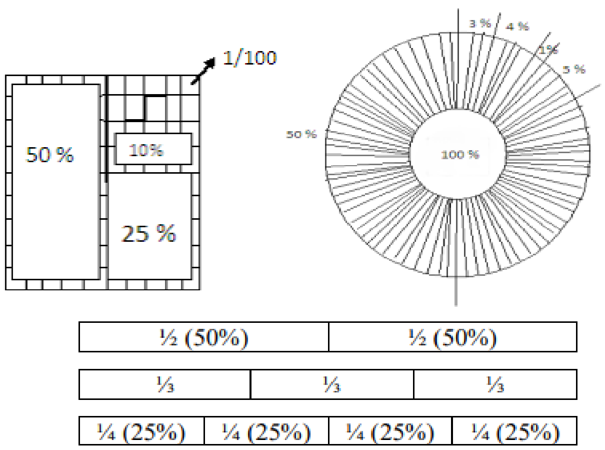

Рисунок 2 – Визуализация процентных частей

На рисунке 2 одна клеточка принимается за 1 %, 10%, 25% и 50%. Это легко показывать на большом квадрате, достаточно просто очертить определенное количество клеток (1, 10, 25 или 50). По аналогии с квадратом можно использовать круг, который разделен на сто частей, при этом одна часть равна 1%. Для облегчения понимания и сравнения долей учащимся предлагают использовать предложенный метр, который разделен пополам, на четверти и на трети.

Перед тем как приступить к решению задач по вычислению процента от целого числа необходимо дать учащимся усвоить новую терминологию и привыкнуть к новым понятиям. При помощи специальных упражнений, которые предложены в учебнике, школьники должны овладеть новыми терминами и уметь легко представлять дроби и доли в процентах и наоборот. Иными словами, каждый школьник должен с легкостью уметь оперировать следующими эквивалентами: 25% – это 1/4; 50% – это 1/2; 30% – в три раза больше, чем 10% и т.д.

Далее необходимо приступить к решению задач на идентификацию понятия процента:

Задача 2.1.1. Верно ли, что:

1) 1% от 1м равен 1см;

2) 1а равен 1% от 1 га.

Задача 2.1.2. Какое число отличается от других:

$$1\% \text{ от } 43; \quad 0{,}01 \; □ \; 430; \quad 1 \; □ \; 43; \quad \frac{1}{100} \cdot 43.$$

Далее необходимо обратить внимание учащихся на то, что при сравнении двух величин за 100% принимается та величина, с которой сравнивается вторая. На данном этапе очень важно чтобы учащиеся научились верно, определять ту величину, которую принимают за 100%.

После достижения выше указанной цели необходимо перейти к решению задач по определению процента от числа:

Задача 2.1.3. Найти:

1) 2% от 284;

2) 3% от 126;

3) 10% от 625.

Задача 2.1.4. Найти число, зная, что 1% от него равен:

а) 6;

б) 30;

в) 4,2;

г)0,08.

Задача 2.1.5. Из семечек получают 29% подсолнечного масла. Сколько подсолнечного масла можно получить из 38 килограмм семечек?

Решение. Для нахождения процентной доли величины необходимо умножить исходное число на количество процентов и разделить на 100%. Имеем:

$$\frac{38 \cdot 29\%}{100\%} = 11{,}02.$$

Ответ: 11,02 литр подсолнечного масла

По учебнику математики в 6 классе Виленкина Н.Я. термин процент встречается во время изучения темы «Отношения и пропорции». При этом понятие отношения вводится при помощи типовой задачи:

Задача 2.1.7. От куска ткани длиной 12 метров отрезали 3 метра. Какая часть куска ткани была отрезана?

Решение. Сначала необходимо найти, какую часть всего куска ткани будет составлять 1 метр. Поскольку кусок имеет длину 12 метров, то 1 метра составляет 1/12 куска. Следовательно, 3 метра будут составлять 3/12 (или 1/4).

Ответ: 25%.

Далее вводится определение понятия отношения и осуществляется переход к закреплению усвоения понятия через решение задач.

Задача 2.1.8. Длина автомагистрали 150 километров. Освещается 90 километров этой магистрали. Какая часть автомагистрали освещается? Во сколько раз вся автомагистраль длиннее ее освещенной части?

Решение. Чтобы найти, какая часть автомагистрали освещена, составляется отношение 90:150. Получается:

$\frac{90}{150} = \frac{3}{5} = 0{,}6$ освещено 0,6 часть автомагистрали, или 60%.

Обратное отношение позволит вычислить, во сколько раз вся магистраль длиннее ее освещенной части:

$$\frac{150}{90} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}.$$

Ответ: освещено 60% автомагистрали; автомагистраль в 5/3 раза больше ее освещенной части.

Помимо этого, необходимо указать учащимся, что термин "отношение" можно использовать разными способами, в зависимости от постановки вопроса в задаче. Например, отношение 13:51 можно воспринимать следующими вариантами: отношение 13 к 51, отношение чисел 13 и 51, отношение числа 13 к числу 51.

После изучения отношений учащиеся переходят к изучению пропорций. При этом, перед тем как вводить термин "пропорция", необходимо предложить учащимся определить отношения $4{,}5 : 1{,}5$ и $6{,}6 : 2{,}2$. В результате вычисления учащиеся придут, а выводу, что они равны, т.к. при вычислении результата получается 3. После вычисления детям необходимо записать следующие равенство,

$$\frac{4{,}5}{1{,}5} = \frac{6{,}6}{2{,}2}.$$

которое и будет называться пропорцией. Далее через предложение вычислить произведение крайних и средних членов (4,5 □ 2,2 = 9,9 и 1,5□ □6,6 = 9,9) обозначается основное свойство пропорции и предлагается решение задач.

Далее показываем применение свойства пропорции для решения задач на проценты. Начинаем с решения первого типа задач – нахождении процента от числа.

Задача 2.1.9. Перед новогодними праздниками приставка SonyPlayStation стоила 9400 рублей. Праздничная скидка составила 12%. Сколько стала стоить приставка?

Решение. Поскольку праздничная скидка составила 12%, то новая цена составляет 100% – 12% = 88%.

Воспользовавшись правилом нахождения процента с помощью пропорции, узнаем новую цену приставки *x*.

$$\frac{x}{9400} = \frac{88\%}{100\%};$$

$$x = \frac{9400 \cdot 88\%}{100\%};$$

$$x = 8272.$$

Ответ: приставка в новогодние праздники стала стоить 8272 рублей.

Используя технологию укрупнение дидактических единиц (далее – УДЕ) школьникам необходимо составить обратную задачу и по аналогии решить её. Например: «по новогодней 12% скидке приставка стала стоить 8272 рублей. Найти стоимость приставки без скидки» или «Приставка стоила 9400 рублей. В новогодние праздники она стала стоить 8272 рублей. Найти процент новогодней скидки». Далее школьникам необходимо самостоятельно составить прямую задачу и обратную ей и самостоятельно их решить.

Следующий рассматриваемый по программе тип задач – нахождение целого по его известной части. При решении задач также применяем технологию УДЕ.

Задача 2.1.10. После посещения магазина осталось 660 рублей, что составляет 22% от первоначальной суммы. Сколько было денег первоначально? Составьте обратную задачу и решите ее.

Решение. Составим пропорцию и найдем первоначальную сумму, используя ее основное свойство:

$$\frac{x}{660} = \frac{100\%}{22\%};$$

$$x = \frac{660 \cdot 100\%}{22\%};$$

$$x = 3000.$$

Ответ: до посещения магазина было 3000 рублей.

Обратная 1. Было 3000 рублей. После посещения магазина осталось 22%. Сколько денег осталось?

Обратная 2. Было 3000 рублей. После посещения магазина осталось 660 рублей. Сколько процентов денежных средств осталось?

После закрепления полученных навыков решения элементарных задач на проценты следует уделить внимание решению комбинированных задач.

Например:

Задача 2.1.11. На приготовление джема ушло 42 килограмм сахара. После этого на складе осталось 25% от всех запасов. Сколько килограмм сахара осталось? Составьте обратную задачу и решите ее.

Решение. Решение задачи начинается с поиска сопоставимых частей. Поскольку осталось 25% сахара, значит, на приготовление джема ушло 100% – 25% = 75% всех запасов, что составляет 42 килограмма. Составим пропорцию и найдем первоначальное количество сахара на складе:

$$\frac{x}{42} = \frac{100\%}{75\%};$$

$$x = \frac{42 \cdot 100\%}{75\%};$$

$$x=56.$$

Следовательно, на складе осталось 56 – 42 = 14 килограмм сахара.

Ответ: на складе осталось 14 килограмм сахара.

Обратная 1. После приготовления джема осталось 14 килограмм сахара. Известно, что израсходовано было 75% запасов. Сколько килограмм было на складе?

Обратная 2. Было 56 килограмм сахара. После приготовления джема осталось 25% запасов. Сколько килограмм сахара ушло на приготовление джема?

Нельзя оставлять без внимания задачи на нахождение процентного отношения чисел. Также используем технологию УДЭ.

Задача 2.1.12. На фабрику поступил заказ на пошив школьной формы в количестве 200 штук. Через месяц было готово 156 штук. Какой процент заказа был исполнен месяц спустя? Составьте обратную задачу и решите ее.

Решение. Решение задачи осуществляется путем деления величины, соответствующей доли, на целое и умножением на 100%:

$$x = \frac{156}{200} \cdot 100\%;$$

$$x = 78\%.$$

Ответ: заказ готов на 78%.

Обратная 1. На фабрику поступил заказ на пошив школьной формы в количестве 200 штук. Через месяц было готово 78%. Сколько экземпляров школьной формы готово?

Обратная 2. На фабрику поступил заказ на пошив школьной формы. Через месяц было готово 156 штук, что составляет 78% от общего объема заказа. Сколько единиц школьной формы было заказано?

Цикл заданий для закрепления для 5-6 классов, составленных в разрезе типов задач на проценты и с учетом применения технологии УДЕ, находиться в Приложении 1. Также в данном приложении находится контрольная работа за курс 5-6 класса по теме «Проценты» в двух вариантах.

Таким образом, для достижения цели исследования нами был разработан комплект задач на проценты, которые в дальнейшем могут быть использованы для контрольных или самостоятельных работ или в качестве упражнений для устного счета.

Для того, чтобы закрепить полученные знания необходимо использовать дополнительный материал и периодически возвращаться к данной теме при помощи математических диктантов, домашних заданий или дополнительных упражнений.

2.2 Методика введения понятий и обучения решению задач на проценты в 7 – 9 классах. Разработка цикла заданий для закрепления

В рамках учебника Муравина Г.К. для седьмого класса задачи на определение процентов встречаются в разделе «Математическая модель текстовой задачи». В процессе изучения данного раздела учащимся необходимо сначала сформулировать задачу в виде текста, а затем создать её математическую модель. После этого математическая модель задачи исследуется, решается и переводится обратно на обычный язык.

По мнению различных исследователей обучающиеся испытывают серьезные затруднения на первом этапе решения учебных и реальных задач – во время моделирования ситуации [14, с. 27].

В рамках изучения данной темы необходимо рассматривать все возможные варианты задач: по изменению количества, по выполнению плана, по сплавам или смесям.

Задачи на смеси и сплавы.

Задача 2.2.1. Имеется 300 грамм 70% кислоты. Сколько граммов воды нужно добавить, чтобы получился 21% раствор кислоты? Объясните, что принято за x, какие величины уравняли.

Решение. За x принимается, сколько граммов воды добавили. Уравняли отношения, являющиеся 1% кислоты в обоих случаях:

$$(300 + x)\frac{21\%}{100\%} = 300 \cdot \frac{70\%}{100\%};$$

$$x = \frac{300 \cdot 70}{21} - 300;$$

$$x = 700.$$

Ответ: необходимо добавить 700 граммов воды.

Если при решении этого типа задач у обучающихся возникнут сложности, необходимо дать им совет: чтобы определить, сколько процентов (ρ) составляет число α от числа δ, нужно умножить частное $\frac{\alpha}{\delta}$ на 100%. ($\rho\% = \frac{\alpha}{\delta} \cdot 100\%$).

Далее можно перейти к решению задач следующего типа:

Задача 2.2.2. По условиям банка, при открытии вклада на 31 день, по истечении их вкладчик получает доход, равный 6,5% от вложенной суммы. На какую сумму нужно сделать вклад, чтобы доход составил 4550 рублей?

Решение. 4550 рублей составляют 6,5% (или 0,065) от неизвестной суммы. Задача сводится к поиску целого по его части и решается делением:

$$4550:0{,}065 = 70\ 000$$

Ответ: сумма вклада должна быть 70 000 рублей.

2.2.3. Октябрьский тираж ежемесячного научного журнала составлял 350 экземпляров. В ноябре тираж был увеличен на 40%, а в декабре – еще на 110%. Каким стал тираж журнала в декабре?

Решение. Следует показать два способа решения подобных задач.

Способ 1: вычисляем поэтапно, на сколько экземпляров вырос тираж журнала в ноябре, что есть 40% от 350:

40% – это 0,4 тиража: $350 \cdot 0{,}4 = 140$ (экземпляров).

Далее определяем величину ноябрьского тиража:

350 + 140 = 490 (экземпляров).

Чтобы узнать декабрьский тираж журнала, нужно найти 110% от ноябрьского тиража и прибавить полученное число к 490:

110% тиража – это $1{,}1 : 490 \cdot 1{,}1 = 539$ (экземпляров);

490 + 539 = 1029 (экземпляров).

Способ 2: принимаем тираж журнала в октябре за 100%. Следовательно, в ноябре при увеличении тиража на 40%, количество отпечатанных экземпляров составило 100% + 40% = 140% (или 1,4). Исчисляем его: $350 \cdot 0{,}4 = 140$ (экземпляров).

Аналогично предыдущим рассуждениям за 100% принимаем ноябрьский тираж. Декабрьское увеличение на 110% – это 100% + 110% = =210% (2,1) ноябрьского тиража. Имеем: $490 \cdot 2{,}1 = 1029$ (экземпляров).

Ответ: 1029 экземпляров.

Задача 2.2.4. Во время новогодней распродажи товар, стоивший 1600 рублей, продавали за 1200 рублей. На сколько процентов была снижена цена товара во время распродажи?

Решение. Сначала необходимо узнать, на сколько рублей новая цена меньше старой: 1600 – 1200 = 400 (рублей)

Теперь выясним, сколько процентов составляет разница в 400 рублей от старой цены товара. Для этого найдем отношение 400 рублей к 1600 рублям и выразим его в процентах:

$$\frac{400}{1600} \cdot 100\% = 25\%.$$

Ответ: 25%.

Задача 2.2.5. К 150 граммам 20% раствора соли добавили 90 грамм воды. Какова концентрация получившегося раствора?

Решение. Так как концентрация исходного раствора была 20%, то в 150 грамм раствора содержится 150 □ 0,2 = 30 грамм соли. После добавления к раствору 70 грамм воды, его масса стала равной 150 + 90 = 240 грамм, а количество соли в нем осталось неизменным. Имеем:

$$\frac{30}{240} \cdot 100\% = 12{,}5\%.$$

Ответ: концентрация получившегося раствора 12,5%.

Задача 2.2.6. Пиджак дороже брюк на 62,5%. На сколько процентов брюки дешевле пиджака? Результат округлить до десятых.

Решение. Решение данного типа задач должно начинаться с выделения смысловых единиц: пусть x – стоимость брюк, t – стоимость пиджака. Далее необходимо выразить одну величину через другую.

$$x + \frac{62{,}5}{100} \cdot x = y;$$

или, упростив,

$$1{,}625x = y.$$

Напоминаем обучающимся, что если одна величина меньше другой величины на N%, то

$$\gamma - \frac{N}{100} \cdot \gamma = x.$$

Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} \gamma - \frac{N}{100} \cdot \gamma = x, \\ 1{,}625x = \gamma; \end{cases}$$

$$1{,}625x - \frac{N}{100} \cdot 1{,}625x = x;$$

$$\frac{1{,}625N}{100} = 1{,}625 - 1;$$

$$1{,}625N = 62{,}5;$$

$$N = 38{,}5.$$

38,5% – проценты, характеризующие величину разности стоимости брюк по отношению к стоимости пиджака.

Ответ: 38,5%.

Задача 2.2.7. Суммарный доход двух фирм возрастает на 200%, если доход первой фирмы останется неизменным, а доход второй увеличится на 300%. Во сколько раз надо увеличить доход первой фирмы, оставляя неизменным доход второй, чтобы их суммарный доход вырос на 400%?

Решение. Пусть x– доход первой фирмы, γ– доход второй фирмы.

Возрастание на 200% означает возрастание в 3 раза, аналогично 300% в 4 раза. Из условия задачи следует, что $x + 4\gamma = 3(x + \gamma)$, откуда получается, что $\gamma = 2x$.

Пусть k – искомый коэффициент. Тогда $kx + \gamma = 4(x + \gamma)$ Подставим в это уравнение вместо y найденных $2x$, получим $kx = 10x$, откуда следует, что $k = 10$.

Ответ: в 10 раз.

Задача 2.2.8. Компания получила две партии некоторого товара. Если продавать весь товар по цене 80 рублей за 1 килограмм, то доход от продажи будет на 15% ниже того дохода, что компания получила бы, продав первую партию по названной цене, а вторую – по цене, превышающей ее на 25%. Какую часть (по массе) составляет первая партия товара в общем количестве товара этих двух партий?

Решение. Возьмем за x килограмм массу первой партии, а за y килограмм – массу второй партии товара. Продав весь товар по цене 80 рублей за 1 кг, компания получит доход, выражающийся формулой $80x + 80\gamma$. Увеличив цену второй партии товара на 25%, то есть, доведя ее до 100 рублей, компания получит доход, выражающийся формулой $80x + 100\gamma$. Согласно условию, можно составить уравнения:

$$80x + 80y = 0{,}85\big(80x + y(80 \cdot 1{,}25)\big);$$

$$80x + 80y = 0{,}85(80x + 100y);$$

$$80x + 80y = 68x + 85y;$$

$$12x = 5y;$$

$$\frac{y}{x} = \frac{12}{5}.$$

Значит, первая партия составляет (по массе) 5/12от второй и 5/17от всего товара в целом.

Ответ: 5/17.

Задача 2.2.9. В свежих фруктах содержание воды составляет 90%, а в сушеных – 20%. Сколько необходимо взять свежих фруктов, чтобы приготовить 150 килограмм сухофруктов?

Решение. Заметим, что сухая часть свежих фруктов составляет 10% или 0,1, а высушенных – 80% или 0,8. Масса сухого вещества в свежих фруктах будет равна *0,1x*, а в сушенных фруктах – $0{,}8 \cdot 150$. Таким образом, можем составить уравнение:

$$0{,}1x = 0{,}8 \cdot 150;$$

$$x = \frac{0{,}8 \cdot 150}{0{,}1};$$

$$x = 1200.$$

Ответ: 1200 килограмм.

Задача 2.2.10. Первый сплав содержит 6% металла, второй – 11% металла. Масса второго сплава больше массы первого на 5 килограмм. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 9% металла. Найдите массу третьего сплава.

Решение. Пусть масса первого сплава x килограмм. Тогда масса второго сплава $(x + 5)$ килограмм, а третьего — $x + (x + 5)$ килограмм. В первом сплаве содержится 0,06x килограмм металла, а во втором — $0{,}11(x + 5)$ килограмм, то в третьем сплаве содержится $0{,}09(2x + 5)$ килограмм металла. Составим и решим уравнение:

$$0{,}06x + 0{,}11(x + 5) = 0{,}09(2x + 5);$$

$$0{,}17x + 0{,}55 = 0{,}18x + 0{,}45;$$

$$0{,}01x = 0{,}1;$$

$$x = \frac{0{,}1}{0{,}01};$$

$$x = 10.$$

Т.е., масса первого сплава – 10 килограмм, тогда масса третьего сплава будет $2\square 10 + 5 = 25$ килограмм.

Ответ: 25 килограмм.

Цикл заданий для закрепления находится в Приложении 2. Эти задачи можно использовать как домашние задания, как задание в контрольных или самостоятельных работах или как дополнительный материал на уроке. Также в данном приложении находится контрольная работа за курс 7 – 9 класса по теме «Проценты» в двух вариантах.

В ходе исследования мы разработали методику по решению различных сюжетных задач на вычисление процентов для средних классов основной школы, а также комплект задач, которые можно в дальнейшем включать в домашние задания, контрольные или самостоятельные работы, а также использовать как дополнительный материал на уроках.

2.3 Методика решения задач на проценты, входящих в ОГЭ. Разработка цикла заданий для закрепления

Ежегодно требования средне-специальных и высших учебных заведений к уровню математической грамотности возрастают. В том числе будущие студенты должны обладать хорошими знаниями и уверенными навыками по работе с процентами, включенными в материалы ОГЭ и ЕГЭ. В рамках ОГЭ задачи с процентами внесены в две части заданий. Необходимо рассмотреть виды данных заданий и способы их решения.

Задача 2.3.1. Стоимость билета в музей составляет 200 рублей.

Школьникам предоставляется скидка 50%. Сколько рублей будет стоить посещение музея для 5 взрослых и 11 школьников?

Решение. Рассуждения будут следующими. Билет для школьника составляет

$200 \cdot 0{,}5 = 100$ рублей.

Всего стоимость посещения музея составит:

$5 \cdot 200 + 100 \cdot 11 = 2100$ рублей.

Ответ: 2100 рублей.

Задача 2.3.2. Магазин обуви проводит акцию. Любые туфли стоят 500 рублей. При покупке двух пар туфель – скидка на вторые туфли 75%. На какую сумму выйдет покупка двух пар туфель в период акции?

Решение. Согласно условию задачи, первая пара туфель покупается за 100% ее исходной стоимости, а вторая – за $100\% - 75\% = 25\%$. Таким образом, всего покупатель должен заплатить $100\% + 25\% = 125\%$ от исходной стоимости. Имеем выражение:

$500 \square 1{,}25 = 625$ рублей.

Ответ: 625 рублей.

Задача 2.3.3. Средний рост мальчиков того же возраста, что и Дима, равен 140 сантиметров. Рост Димы составляет 114% среднего роста. Какого роста Дима?

Решение. Составим пропорцию:

$$140 \text{ см – это } 100\%;$$

$$\text{x см – это } 114\%;$$

$$\frac{140}{x} = \frac{100}{114};$$

$$x = \frac{140 \cdot 114}{100} = 159{,}6.$$

Ответ: 159,6 сантиметров.

Задача 2.3.4. После переоценки стоимость пылесоса составила 73% старой цены. На сколько процентов уменьшилась стоимость после переоценки?

Решение. 1 способ. Найдем сначала долю уменьшения цены:

$$100\% - 73\% = 27\%.$$

2 способ. Если первоначальную цену принять за y, то после переоценки новая цена пылесоса составит $0{,}73y$, то есть она уменьшится на $y - 0{,}73y = 0{,}27y$.

Составим пропорцию:

$$y - 100\%;$$

$$0{,}27y - x\%;$$

$$x = \frac{0{,}27y \cdot 100\%}{y};$$

$$x = 27\%.$$

Ответ: в результате переоценки стоимость уменьшилась на 27%.

Задача 2.3.5. После новогодних праздников искусственные елки уценили на 18%, при этом она стала стоить 1845 рублей. Сколько рублей стоила ель до распродажи?

Решение. До понижения цены ель стоила 100%. Во время распродажи стоимость уменьшилась на 18%, таким образом, ель стала стоить $100\% - 18\% = 82\%$.

Необходимо напоминать детям, что нахождение величины по ее проценту осуществляется делением этой величины на соответствующий ей процент. Имеем:

$\frac{1845}{0{,}82} = 2250$ (рублей) или $\frac{1845}{82\%} \cdot 100\% = 2250$ (рублей)

Ответ: 2250 рублей стоила ель до нового года.

Отметим, что в части 1 ОГЭ к решению предлагаются простые задачи на проценты. Рассмотрим примеры заданий из части 2 ОГЭ, где встречаются задачи на так называемые «сложные» проценты, которые решаются с использованием понятия коэффициента увеличения/уменьшения.

Правила вычисления коэффициента:

- чтобы увеличить положительное число А на р процентов, следует умножить число А на коэффициент увеличения $К = (1 + 0{,}01р)$;
- чтобы уменьшить положительное число А на р процентов, следует умножить число А на коэффициент уменьшения $К = (1 - 0{,}01р)$.

Задача 2.3.6. Цена товара была дважды снижена на одно и то же число процентов. На сколько процентов снижалась цена на товар каждый раз, если его первоначальная стоимость составляла 3000 рублей, а окончательная –1920 рублей?

Решение. Так как цена товара снижалась на одно и то же число процентов, то обозначим его x, $x\% = 0{,}01x$.

Используя понятие коэффициента уменьшения, сразу получим уравнение:

$$3000(1 - 0{,}01x)^2 = 1920;$$

$$1 - 0{,}01x = \sqrt{\frac{1920}{3000}};$$

$$0{,}01x = 1 - 0{,}8;$$

$$x = \frac{0{,}2}{0{,}01};$$

$$x = 20\%.$$

Ответ: каждый раз стоимость товара снижалась на 20%.

Задача 2.3.7. Стоимость товара была дважды повышена на одно и то же число процентов. На сколько процентов повышалась стоимость товара каждый раз, если его первоначальная цена 2000 рублей, а окончательная – 2645 рублей?

Решение. Так как цена товара повышалась на одно и то же число процентов, то обозначим его x, $x\% = 0{,}01x$.

Используя понятие коэффициента увеличения, сразу получаем уравнение:

$$2000(1 + 0{,}01x)^2 = 2645;$$

$$1 + 0{,}01x = \sqrt{\frac{2645}{2000}};$$

$$1 + 0{,}01x = 1{,}15.$$

Решив его, получим, что $x = 15\%$.

Ответ: каждый раз стоимость товара повышалась на 15%.

Задача 2.3.8. Сколько граммов 9% раствора соли можно получить из 100 грамм жидкости, содержащей 54% этой соли?

Решение.

$100□0{,}54 = 54$ (грамм) – 100% соли содержится в 100 граммах 54% раствора.

$54{:}\ 0{,}09 = 600$ (грамм) – столько 9% раствора соли можно получить из исходного раствора.

Ответ: 600 грамм.

Задача 2.3.9. Числитель дроби увеличили на 30%. На сколько процентов надо уменьшить ее знаменатель, чтобы в итоге дробь возросла вдвое?

Решение. Пусть дана дробь $\frac{m}{n}$. По условию задачи составляем уравнение:

$$\frac{m+0{,}3m}{n-xn}=\frac{2m}{n};$$

$$\frac{1{,}3m}{(1-x)n}=\frac{2m}{n};$$

$$\frac{1{,}3}{(1-x)}=2;$$

$$x=1-\frac{1{,}3}{2};$$

$$x=0{,}35.$$

Ответ: знаменатель надо уменьшить на 35%.

Задача 2.3.10. Имеется два сплава с разным содержанием алюминия: в первом содержится 65% вещества, а во втором – 40%. В каком отношении надо взять первый и второй сплавы, чтобы получить из них новый сплав, содержащий 50% алюминия?

Решение. Если первый сплав взять в количестве x грамм, тогда он будет содержать $0{,}65x$ грамм вещества алюминия, а второй – в количестве у г., тогда количество вещества в нем будет $0{,}4y$ грамм.

Масса итогового сплава составляет $(x + y)$, тогда количество вещества в нем – $0{,}5(x + y)$. Составим и решим уравнение:

$$0{,}65x + 0{,}4y = 0{,}5(x + y);$$

$$0{,}15x = 0{,}1y;$$

$$y = 1{,}5x;$$

$$y = \frac{3}{2}x;$$

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Набор заданий для подготовки к ОГЭ находится в Приложении 3.

Подводя итог, можно сказать о том, что мы рассмотрели некоторые задачи, которые включаются в программу ОГЭ, представили методику по их решению, а также разработали задачи для закрепления полученных знаний и их проверки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данного исследования мы можем сделать данные выводы:

В данной работе мы рассмотрели тему «Проценты», дали определение данному понятию и рассмотрели появление процента не только в математике, но и в повседневной жизни. Проведя анализ литературы нам удалось установить, что процентные расчеты впервые появились в древнем Вавилоне, где были созданы первые таблицы по вычислению процентов. Позже, проценты появились в древнем Риме, а в Европейских странах лишь в средние века.

В процессе работы мы провели анализ современных учебников и рассмотрение темы проценты в них. По результатам анализа мы установили, что школьники впервые знакомятся с процентами в 5 классе, при этом текстовые задачи по учебникам предусмотрены в 5 и 6 классе. В 7 – 9 классе на тему «Проценты» выделяется очень мало времени, и то в рамках повторения материала. Это в свою очередь приводит к получению негативных результатов во время проведения ОГЭ и ЕГЭ. По результатам проведенного анализа можно сказать, что в учебнике Дорофеева Г.В. проценты рассматриваются только в 6 классе в течение 5 часов. А в учебниках Муравина Г.К. и Виленкина Н.Я. проценты изучаются в 5 и 6 классов, на что выделяется 8-9 часов. Это дает возможность учащимся наиболее подробно и глубоко рассмотреть данную тему.

В рамках проведения данного исследования нами были выявлены особенности методики решения задач с процентами в рамках основной школы на уроках алгебры.

В практической части данного исследования мы разработали комплекты задач на проценты, которые направлены на закрепление и повторение пройденного материала для каждого класса. Подводя итог всему выше сказанному, можно сказать о том, что все поставленные ранее задачи были выполнены и цель достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Мордкович, А. Р.** Алгебра. 8 класс. Учебник. В 2-х частях. ФГОС / А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина. – Москва: Мнемозина, 2017. – 264 с.
2. **Мерзляк, А. Г.** Алгебра. 9 класс. Учебник. ФГОС / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. – Москва: Вентана-граф, 2018.
3. Алгебра. Методические рекомендации. 7 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва, Н.Е.Фёдорова, М. И. Шабунин. – 2-е изд. – Момсква: Просвещение, 2017. – 144 с.
4. Алгебра: Учебник для 7 класса общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 3-е изд. – Москва: Просвещение, 2014. – 256 с.
5. **Макарычев, Ю. Н.** Алгебра. Учебник для 8 класса общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – Москва: Просвещение, 2018. – 287 с.
6. **Виленкин**, Н. Я. За страницами учебника математики. Пособие для обучающихся 5 – 6 классов / Н. Я. Виленкин, И. Я. Депман ФГОС. – Москва: Мнемозина, 2018. – 256 с.
7. **Глейзер**, Г. Алгебра. 5 класс. Методическое пособие. ФГОС / под.ред. Н.А. Шиховой. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2013. – 232 с.
8. **Далингер**, В. А. Текстовые задачи на проценты и методика обучения обучающихся их решению // Электронный научный журнал «Вестник Омского государственного педагогического университета». 2016. URL: http://www.omsk.edu/article/vestnik-omgpu-150.pdf (дата обращения 22.12.2021)

9. **Дорофеев**, Г. В. Математика. 6 класс в 2-х частях. Учебник. ФГОС / Г. В. Дорофеев, Шарыгин И. Ф., С. Б, Суворова. – Москва: Просвещение, 2018. – 288 с.

10. **Дорофеев**, Г.В. Алгебра. 7 класс. Учебник. ФГОС / Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович. – Москва: Просвещение, 2018. – 288 с.

11. **Дорофеев**, Г.В. Алгебра. 9 класс. Учебник. ФГОС / Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович. – Москва: Просвещение, 2018. – 336 с.

12. **Захарова, А. Е.** Теория и методика обучения математике в школе. Учебное пособие / под ред. Л.О. Денищевой, И.И. Зубаревой. – Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. – с. 49-52.

13. Изучение процентов в основной школе / Г.В. Дорофеев, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева, С.Б. Суворова // Математика в школе. – 2012. – №1– с. 19-24.

14. **Козлова**, **Г. М.** Из опыта преподавания по учебному комплекту «Математика 5» // Математика в школе. – 2012. – № 3. – с. 49-52.

15. **Кордина**, **Н.** Виват, математика! 6 класс. Занимательные задания и упражнения. ФГОС / под.ред. Г.П. Поповой, С.А. Бутрименко. – Москва: Учитель, 2017. – 259 с.

16. **Коркина**, **И. А.** Применение технологии «Укрупнение дидактических единиц» на уроках математики при решении задач на проценты // Внедрение системно-деятельностной педагогики в регионе: опыт и перспективы: Сборник материалов региональной заочной научнопрактической конференции (30 мая 2018 г.) / Под общ.ред. Е.В. Посохиной, Е.В. Прокопенко, О.Б. Бовкуновой. – Белгород: Белгородский институт развития образования, 2018. – С. 415-419.

17. **Кочагин, В. В.** ОГЭ-2019. Математика. Сборник из 850 заданий / В. В. Кочагин, М. Н. Кочагина. – Москва: Эксмо-Пресс, 2018. – 224 с.

18. **Красс, Э.** Алгебраический практикум. 7 класс. – Москва: Просвещение / Учлит, 2017. – 112 с.

19. **Левитас, Г**. Алгебраический практикум. 8 класс. Учебное пособие / под ред. С.В. Бахтиной. – Москва: Просвещение / Учлит, 2017. – 80 с.

20. **Левитас**, **Г**. Алгебраический практикум. 9 класс. Учебное пособие / под ред. С.В. Бахтиной. – Москва: Просвещение / Учлит, 2017. – 80 с.

21. **Мордкович**, **А. Г**. Алгебра. 7 класс. Учебное пособие. ФГОС / Л. А. Александрова, П. В. Семенов; под ред. С.В. Бахтиной. – Москва: Просвещение, 2018. – 368 с.

22. **Мордкович**, **А. Г.** 8 класс. Учебное пособие. ФГОС / Л. А. Александрова, П. В. Семенов; под ред. С.В. Бахтиной. – Москва: Просвещение, 2018. – 384 с.

23. **Мордкович**, **А. Г.** Алгебра. 9 класс. Учебное пособие. ФГОС / Л. А. Александрова, П. В. Семенов; под ред. С.В. Бахтиной. – Москва: Просвещение, 2018. – 368 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Цикл заданий для закрепления и контрольная работа для 5 – 6 классов по теме «Проценты», составленные с учетом применения технологии УДЕ

Задачи на нахождение процента от числа.

Задача 1. Заводом изготовлено 500 деталей, из которых 25% имеют высшую категорию качества. Сколько деталей высшей категории качества было изготовлено заводом? Составьте обратную задачу и решите ее.

Решение. 500 деталей – это 100%, тогда 25% деталей – это x. Составим уравнение: $x = 500 \cdot 0{,}25$.

$x = 125$.

Ответ: 125 деталей.

Обратная задача. Завод изготовил 125 деталей высшей категории качества, что составило 25% от всех изготовленных деталей. Сколько всего деталей изготовил завод?

Решение. Если 125 деталей – это 25% деталей, то x – 100% деталей. Составим пропорцию по условию задачи и решим ее:

$$\frac{x}{100\%} = \frac{125}{25\%};$$

$$x = \frac{125 \cdot 100\%}{25\%};$$

$$x = 500.$$

Ответ: 500 деталей.

Задача 2. От города А до города Б 4530 километров. Автомобиль проехал 15% этого пути и сделал остановку. Сколько километров проехал автомобиль до первой остановки? Составьте обратную задачу и решите ее.

Решение. 4530 километров – это 100% всего пути, тогда x километров – это 15%. Составим уравнение:

$$x = 4530 \cdot 0{,}15;$$

$$x = 679{,}5.$$

Ответ: 679,5 километра.

Обратная задача. Направляясь из города А в город Б автомобиль проехал 679,5 километров, что составило 15% всего пути, и совершил остановку. Сколько километров составляет весь путь?

Решение. Если 679,5 километров – это 15% всего пути, тогда x километров – это 100%. Составим пропорцию по условию задачи и решим ее:

$$\frac{x}{100\%} = \frac{679,5}{15\%};$$

$$x = \frac{679,5 \cdot 100\%}{15\%};$$

$$x = 4530.$$

Ответ: 4530 километра.

Задача 3. Костя поспорил с Мишей, что проплывет весь бассейн длиной 60 метров, а проплыл только 52% его длины. Сколько метров проплыл Костя? Составьте обратную задачу и решите ее.

Решение. 60 м – это 100% длины бассейна, тогда x – это 52%. Составим уравнение:

$$x = 60 \cdot 0,52;$$

$$x = 31,2.$$

Ответ: 31,2 метра.

Обратная задач. Костя поспорил с Мишей, что проплывет весь бассейн, но проплыл только 52%, что составило 31,2 метра. Какова длина всего бассейна?

Решение. Если 31,2 – это 52% бассейна, тогда x – это 100%. Составим пропорцию по условию задачи и решим ее:

$$\frac{x}{100\%} = \frac{31,22}{52\%};$$

$$x = \frac{31,2 \cdot 100\%}{52\%};$$

$$x = 60.$$

Ответ: 60 метров.

Задача 4. В школе 1560 учеников. Из них 30% не посещают никаких творческих кружков, остальные посещают или музыкальную школу, или творческую студию, или школу танцев. Сколько творческих ребят учится в школе? Составьте обратную задачу и решите ее.

Решение. 1560 учеников – это 100% учащихся, тогда x – это 30% учащихся, не занимающихся в каком-либо кружке. Составим уравнение:

$$x = 1560 \cdot 0{,}3;$$

$$x = 468.$$

468 учащихся не занимаются ни в одном из кружков. Отсюда получим количество творческих учащихся: 1560 – 468 = 1092

Ответ: 1092 ученика.

Обратная задача. В школе 30% учащихся не посещает никаких кружков. Остальные 1092 учащихся посещают или музыкальную школу, или творческую студию, или школу танцев. Сколько всего учащихся в школе?

Решение. Если 30% учащихся не посещают никаких творческих кружков, то оставшиеся 1092 ученика, которые посещают творческие занятия, составляют 70% учащихся. Пусть x – это 100% учащихся. Составим пропорцию по условию задачи и решим ее:

$$\frac{x}{100\%} = \frac{1092}{70\%};$$

$$x = \frac{1092 \cdot 100\%}{70\%};$$

$$x = 1560.$$

.

Ответ: 1560 учеников.

Задачи на нахождение целого по его известной части.

Задача 5. Мишей было прочитано 138 страниц, что составляет 24% числа всей книги. Сколько страниц в книге? Составьте обратную задачу и решите ее.

Решение. Пусть x – 100% страниц в книге. Составим пропорцию по условию задачи и решим ее:

$$\frac{x}{100\%} = \frac{138}{24\%};$$

$$x = \frac{138 \cdot 100\%}{24\%};$$

$$x = 575.$$

Ответ: 575 страниц.

Обратная задача. В книге, состоящей из 575 страниц, Миша прочитал только 24%. Сколько страниц прочитал Миша?

Решение. Если 575 страниц – это 100%, то пусть x страниц – это 24%. Составим уравнение:

$$x = 575 \cdot 0{,}24;$$

$$x = 138.$$

Ответ:138 страниц.

Задача 6. Автомобиль проехал 42 километров, что составило 80% пути от города А до города В. Какое расстояние между городами? Составьте обратную задачу и решите ее.

Решение. Если 42 километров – это 80% пути, то пусть x – это 100% пути. Составим пропорцию по условию задачи и решим ее:

$$\frac{x}{100\%} = \frac{42}{80\%};$$

$$x = \frac{42 \cdot 100\%}{80\%};$$

$$x = 52{,}5.$$

Ответ: 52,5 километра.

Обратная задача. Расстояние из города А до города Б равно 52,5 километра. Автомобиль проехал 80% пути и сделал остановку. Сколько километров проехал автомобиль до остановки?

Решение. 52,5 километра – это 100% всего пути, тогда x километров – это 80%. Составим уравнение:

$$x = 52{,}5 \cdot 0{,}8;$$

$$x = 42.$$

Ответ: 42 километра.

Задача 8. Золотой рыбкой было построено 14 замков для бедных жителей, что составляет 70% от всех планируемых ею. Сколько всего замков хотела построить золотая рыбка? Составьте обратную задачу и решите ее.

Решение. Если 14 замков – это 70%, то пусть x – это 100% построенных замков. Составим пропорцию по условию задачи и решим ее:

$$\frac{x}{100\%} = \frac{14}{70\%};$$

$$x = \frac{14 \cdot 100\%}{70\%};$$

$$x = 20.$$

Ответ: 20 замков.

Обратная задача. Золотая рыбка планировала построить 20 замков для бедных жителей. Но в первый день ей удалось построить только 70% от задуманного числа замков. Сколько замков построила золотая рыбка в первый день?

Решение. Если золотая рыбка задумала построить 20 замков, значит это 100%. Обозначим построенные 70% замков за x. Составим уравнение:

$$x = 20 \cdot 0{,}7;$$

$$x = 14.$$

Ответ: 14 замков.

Задача 9. Шахтеры добыли 520 тонн угля, что составляет 40% того, что имеется в шахте. Сколько тонн угля в шахте? Составьте обратную задачу и решите ее.

Решение. Если 520 тонн угля – это 40%, то пусть x тонн угля – это 100%. Составим пропорцию по условию задачи и решим ее:

$$\frac{x}{100\%} = \frac{520}{40\%};$$

$$x = \frac{520 \cdot 100\%}{40\%};$$

$$x = 1300.$$

Ответ: 1300 тонн.

Обратная задача. В шахте имеется 1300 тонн угля, но шахтеры добыли только 40% от всего имеющегося угля. Сколько тонн добыли шахтеры?

Решение. Если 1300 тонн – это 100% угля, то пусть x т- это добытые 40%. Составим уравнение:

$$x = 1300 \cdot 0{,}4;$$

$$x = 520.$$

Ответ: 520 тонн.

Задача 10. Лена съела 30 конфет, что составило 40% ее новогоднего подарка. Сколько конфет было в подарке? Составьте обратную задачу и решите ее.

Решение. Если 30 конфет составляют 40%, то пусть x конфет будет 100%. Составим пропорцию по условию задачи и решим ее:

$$\frac{x}{100\%} = \frac{30}{40\%};$$

$$x = \frac{30 \cdot 100\%}{40\%};$$

$$x = 75.$$

Ответ: 75 конфет.

Обратная задача. В новогоднем подарке для Лены было 75 конфет, но Лена съела только 40% из них. Сколько конфет съела Лена?

Решение. Если 75 конфет – это 100%, то пусть x конфет – это 40%. Составим уравнение:

$$x = 75 \cdot 0{,}4;$$

$$x = 30.$$

Ответ:30 конфет.

Задача 11. В кошельке лежали деньги. После того, как было потрачено 560 рублей, осталось 30% от первоначальной суммы. Сколько осталось денег? Составьте обратную задачу и решите ее.

Решение. Если было потрачено 560 рублей, а остаток составил 30%, следовательно потраченная сумма в размере 560 рублей составляет 70% от изначальной суммы. Найдем x – изначальное количество денег, лежащих в кошельке, то есть 100% Для этого составим пропорцию и решим ее:

$$\frac{x}{100\%} = \frac{560}{70\%};$$

$$x = \frac{560 \cdot 100\%}{70\%};$$

$$x = 800.$$

800 рублей составила изначальная сумма в кошельке. Если было потрачено 560 рублей, следовательно оставшаяся сумма составляет 800 - 560=240 рублей.

Ответ: осталось 240 рублей.

Обратная задача. В кошельке лежало 800 рублей. После нескольких трат в кошельке осталось лежать только 30% от изначальной суммы. Сколько денег было потрачено?

Решение. Если 800 рублей – это 100%, то пусть x рублей – это 30% Составим пропорцию, решим ее и узнаем, сколько денег осталось в кошельке:

$$\frac{800}{100\%} = \frac{x}{30\%};$$

$$x = \frac{800 \cdot 30}{100};$$

$$x = 240.$$

240 рублей осталось в кошельке, следовательно было потрачено 800–
–240= 560 рублей.

Ответ: 560 рублей.

Задачи на нахождение процентного отношения чисел.

Задача 12. Из 400 плодов 20 оказались незрелыми. Сколько процентов от общего количества составили незрелые плоды? Составьте обратную задачу и решите ее.

Решение. Всего плодов было 400, следовательно 400 – 100%. Пусть тогда 20 плодов – *x* процентов. Составим пропорцию по условию задачи и решим ее:

$$\frac{400}{100\%} = \frac{20}{x\%};$$

$$x = \frac{20 \cdot 100\%}{400};$$

$$x = 5\%.$$

Ответ: 5% незрелых плодов.

Обратная задача. Из 400 собранных плодов 5% оказались незрелыми. Сколько плодов оказалось незрелыми?

Решение. Всего плодов было 400, следовательно 400 – 100%. Пусть тогда *x* плодов – 5%. Составим пропорцию по условию задачи и решим ее:

$$\frac{400}{100\%} = \frac{x}{5\%};$$

$$x = \frac{400 \cdot 5\%}{100\%};$$

$$x = 20.$$

Ответ: 20 незрелых плодов.

Задача 13. Папа, мама и дочка поехали навестить бабушку. Расстояние, которое им надо проехать, составляет 1200 километров. Через

360 километров они остановились перекусить в кафе. Какую часть пути им осталось проехать? Составьте обратную задачу и решите ее.

Решение. Если общее расстояние составляет 1200 километров, следовательно 1200 километров – это 100%. Пусть тогда 360 километров – это x%. Составим пропорцию по условию задачи и решим ее:

$$\frac{1200}{100\%} = \frac{360}{x\%};$$

$$x = \frac{360 \cdot 100\%}{1200};$$

$$x = 30\%.$$

Значит семья проехала 30% от всего пусти. Следовательно, им осталось проехать 70%

Ответ: 70% пути осталось проехать.

Обратная задача. Папа, мама и дочка поехали в гости к бабушке. Расстояние, которое им надо проехать, составляет 1200 километров. Через некоторое время они сделали остановку, чтобы перекусить в кафе, и папа сказал, что им осталось проехать еще 840 километров. Какую часть пути они уже проехали?

Решение. Если весь путь составляет 1200 километров, а осталось проехать 840 километров, следовательно семья уже проехала 1200 – 840 = =360 километров. Пусть 1200 километров – это 100%, а 360 километров – x%. Составим пропорцию по условию задачи и решим ее:

$$\frac{1200}{100\%} = \frac{360}{x\%};$$

$$x = \frac{360 \cdot 100\%}{1200};$$

$$x = 30\%.$$

Ответ: 30%.

Задача 14. В компьютерной игре «Сталкер» 4 карты. На каждой карте 70 заданий. Максим выполнил 224 задания. Какую часть игры он прошел? Составьте обратную задачу и решите ее.

Решение. Если в игре 4 карты, а в каждой карте по 70 заданий, следовательно всего зданий $4 \cdot 70 = 280$. Составим пропорцию по условию задачи и решим ее:

$$\frac{280}{100\%} = \frac{224}{x\%};$$

$$x = \frac{224 \cdot 100\%}{280};$$

$$x = 80\%.$$

Ответ: 80%.

Обратная задача. В компьютерной игре «Сталкер» 4 карты. На каждой карте одинаковое количество заданий. Максим не выполнил 56 заданий, что составило 20% от общего количества заданий игры. Сколько заданий на каждой карте?

Решение. Так как 56 заданий составляет 20% от общего количества заданий, то пусть *x* заданий будет составлять 100%. Составим пропорцию по условию задачи и решим её:

$$\frac{x}{100\%} = \frac{56}{20\%};$$

$$x = \frac{56 \cdot 100\%}{20};$$

$$x = 280\%.$$

По условию задачи у нас всего 4 карты, в каждой из которых одинаковое количество заданий. Следовательно, $280: 4 = 70$ заданий.

Ответ:70 заданий.

Задача 15. В саду растет 7 яблонь, 4 сливы, 2 абрикоса, 2 персика и 5 груш. Средством от вредителей обработали 12 деревьев. Какая часть деревьев обработана? Составьте обратную задачу и решите ее.

Решение. Всего деревьев в саду 20 – это 100%. Пусть обработанные 12 деревьев будут *x*%. Составим пропорцию по условию задачи и решим ее:

$$\frac{20}{100\%} = \frac{12}{x\%};$$

$$x = \frac{12 \cdot 100\%}{20};$$

$$x = 60\%.$$

Ответ: 60%.

Обратная задача. В саду растет 7 яблонь, 4 сливы, 2 абрикоса, 2 персика и 5 груш. Средством не было обработано 8 деревьев. Какая часть деревьев была обработана?

Решение. Всего деревьев в саду 20 – это 100%. Пусть обработанные 8 деревьев будут x%. Составим пропорцию по условию задачи и решим ее:

$$\frac{20}{100\%} = \frac{8}{x\%};$$

$$x = \frac{8 \cdot 100\%}{20};$$

$$x = 40\%.$$

Ответ: 40%.

Задача 16. В книге 400 страниц. Прочитано 84 страницы. Какую часть книги осталось прочитать? Составьте обратную задачу и решите ее.

Решение. Всего страниц в книге 400, прочитано 84, значит осталось прочитать $400 - 84 = 316$ страниц. Если 400 страниц – это 100%, то пусть 316 страниц – x%. Составим пропорцию по условию задачи и решим ее:

$$\frac{400}{100\%} = \frac{316}{x\%};$$

$$x = \frac{316 \cdot 100\%}{400};$$

$$x = 79\%.$$

Ответ: 79%.

Обратная задача. В книге 400 страниц. Осталось прочитать 316. Какая часть книги была прочитана?

Решение. Всего страниц в книге 400, осталось прочитать 316, значит прочитано $400 - 316 = 84$ страниц. Если 400 страниц – это 100%, то пусть 84 страницы – x%. Составим пропорцию по условию задачи и решим ее:

$$\frac{400}{100\%} = \frac{84}{x\%};$$

$$x = \frac{84 \cdot 100\%}{400};$$

$$x = 21\%.$$

Ответ: 21%.

Контрольная работа за курс 5 – 6 класса по теме «Проценты»

Вариант 1.

1. Запишите десятичные дроби в виде процентов:

а) 0,05;

б) 0,7;

в)1,2;

г) 47,3.

2. Запишите проценты в виде десятичных дробей:

а) 35%;

б) 7%;

в) 285%;

г) 4,25%.

3. Найдите:

а) 18% от 300;

б) 45% от 840;

в) 3% от 8.

4. В автобусе едут 80 пассажиров. 25% из них – это дети. Сколько всего детей в автобусе?

5. На картине 13 бабочек и 12 грибов. Какую часть из всех рисунков составляют грибы?

6. Смесь какао включается в себя 76% шоколадного порошка, остальное – сахар. Какой массы какао, если сахара в нем 400г.

Вариант 2.

1. Запишите десятичные дроби в виде процентов:

а) 0,25;

б) 0,7;

в) 7,29;

г) 0,03.

2. Запишите проценты в виде десятичной дроби?

а) 13%;

б) 37%;

в) 9%;

г) 17,4%.

3. Найдите:

а) 46% от 70;

б) 18% от 45;

в) 8% от 13.

4. Бабушка варит компот из клубники и смородины. Клубника в компоте составляет 40%. Какова масса смородины, если всего ягод в компоте 800 г?

5. В курятнике 15 кур и 8 петухов. Какую часть курятника составляют куры?

6. В автопарке стоят 570 машин. 80% из всех машин составляют легковые автомобили. Сколько грузовых автомобилей в автопарке?

Решение варианта 1.

1. Запишите десятичные дроби в виде процентов:

а) 0,05 = 5%;

б) 0,7 = 70%;

в)1,2 = 120%;

г) 7,23 = 723%.

2. Запишите проценты в виде десятичных дробей:

а) 35% = 0,35;

б) 7% = 0,07;

в) 285% = 2,85;

г) 4,25% = 0,0425.

3. Найдите:

а) 18% от 300 = 54;

б) 45% от 840 = 378;

в) 3% от 8 = 0,24.

4. В автобусе едут 80 пассажиров. 25% из них – это дети. Сколько всего детей в автобусе?

Решение: 80 пассажиров – 100%, x детей – 25%. Составим пропорцию по условию задачи и решим ее:

$$\frac{80}{100\%} = \frac{x}{25\%};$$

$$x = \frac{80 \cdot 25}{100};$$

$$x = 20.$$

Ответ: 20 детей в автобусе.

5. На картине 13 бабочек и 12 грибов. Какую часть из всех рисунков составляют грибы?

Решение. Всего рисунков 25 – это 100%, 12 грибов – это x%.

Составим пропорцию по условию задачи и решим ее:

$$\frac{25}{100\%} = \frac{12}{x\%};$$

$$x = \frac{12 \cdot 100}{25};$$

$$x = 48\%.$$

Ответ:48%.

6. Смесь какао включается в себя 75% шоколадного порошка, остальное – сахар. Какой массы какао, если сахара в нем 40 грамм?

Решение: Вся смесь какао – это 100%, шоколадного порошка в нем 75%, значит сахара 25%. Составим пропорцию по условию задачи и решим ее:

$$\frac{x}{100\%} = \frac{400}{25\%};$$

$$x = \frac{40 \cdot 100}{25};$$

$$x = 160.$$

Ответ: 160 грамм.

Решение варианта 2.

1. Запишите десятичные дроби в виде процентов:

а) 0,25 = 25%;

б) 0,7 = 70%;

в) 7,29 = 729%;

г) 0,03 = 3%.

2. Запишите проценты в виде десятичной дроби?

а) 13% = 0,13;

б) 37% = 0,37;

в) 9% = 0,09;

г) 17,4% = 0,174.

3. Найдите:

а) 46% от 70 = 32,2;

б) 18% от 45 = 8,1;

в) 8% от 13 = 1,04.

4. Бабушка варит компот из клубники и смородины. Клубника в компоте составляет 40%. Какова масса смородины, если всего ягод в компоте 800 г?

Решение. Если клубника составляет 40% всех ягод в компоте, значит смородины там 60%. Составим пропорцию по условию задачи и решим ее:

$$\frac{800}{100\%} = \frac{x}{60\%};$$

$$x = \frac{800 \cdot 60}{100};$$

$$x = 480.$$

Ответ: 480 грамм.

5. В курятнике 15 кур и 5 петухов. Какую часть курятника составляют куры?

Решение. Всего в курятнике 20 животных – это 100%. Пусть тогда 15 кур – это x%. Составим пропорцию по условию задачи и решим ее:

$$\frac{20}{100\%} = \frac{15}{x\%};$$

$$x = \frac{15 \cdot 100}{20};$$

$$x = 75\%.$$

Ответ: 75%.

6. В автопарке стоят 570 машин. 80% из всех машин составляют легковые автомобили. Сколько грузовых автомобилей в автопарке?

Решение. 570 машин – это 100%. 80% всех автомобилей в парке занимают легковые, значит грузовые машины занимают 20%. Составим пропорцию по условию задачи и решим ее:

$$\frac{570}{100\%} = \frac{x}{20\%};$$

$$x = \frac{570 \cdot 20\%}{100\%};$$

$$x = 114.$$

Ответ: в автопарке стоит 114 грузовых машин.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Цикл заданий для закрепления и контрольная работа для 7-9 классов

Задача 1. На пост мэра претендовали три кандидата: Васильев, Былов, Щипцов. Во время выборов за Щипцова было отдано в 2 раза больше голосов, чем за Васильева, а за Былова – в 3 раза больше, чем за Васильева и Щипцова вместе. Сколько процентов голосов было отдано за победителя? Ответ округлите до целого числа.

Решение. Пусть x% голосов отдали за Васильева, тогда $2x$% голосов отдали за Щипцова и $3(x+2x)\%$ за Былова. Составим уравнение по условию задачи:

$$x + 2x + 3(x + 2x) = 100\%;$$

$$12x = 100\%;$$

$$x = 8{,}3\%.$$

Получается, что за Васильева отдали 8,3% голосов, за Щипцова 16,6% голосов, а за Былова 74,7%

Ответ: 75%.

Задача 2. В свежих фруктах содержание воды составляет 86%, а в сушеных – 23%. Сколько необходимо взять свежих фруктов, чтобы приготовить 72 килограмм сухофруктов?

Решение. Если в свежих фруктах вода составляет 86%, значит сухого вещества в них 14%. В высушенных фруктах вода составляет 23%, значит сухое вещество составляет 77%. Пусть x килограмм – свежие фрукты. Составим уравнение:

$$0{,}14x = 72 \cdot 0{,}77;$$

$$x = 396.$$

Ответ: 396 килограмм.

Задача 3. В свежих фруктах содержание воды составляет 80%, а в сушеных – 28%. Сколько сухофруктов получится из 288 килограмм сырья?

Решение. Если в свежих фруктах содержание воды 80%, то содержание сухого вещества, которое переходит в сушеные фрукты, составляет 20%. Тогда 288 килограмм – 100%, x килограмм – 20%. Составим пропорцию по условию задачи и решим ее:

$$\frac{288}{100\%} = \frac{x}{20\%};$$

$$x = \frac{288 \cdot 20\%}{100\%};$$

$$x = 57{,}6.$$

57,6 килограмм сухого вещества в сухих фруктах., что составляет 72%. Составим пропорцию и решим ее:

$$\frac{x}{100\%} = \frac{57{,}6}{72\%};$$

$$x = \frac{57{,}6 \cdot 100\%}{72\%};$$

$$x = 80.$$

Ответ: 80 килограмм.

Задача 4. Первый сплав содержит 4% металла, второй – 12% металла. Масса второго сплава больше массы первого на 6 килограмм. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% металла. Найдите массу третьего сплава.

Решение. Пусть масса первого сплава будет x_1, а масса второго сплава x_2 массовое содержание метала в них равно $0{,}04x_1$ и $0{,}12x_2$. Из этих двух сплавов получили третий спав массой x_3 и с массовым содержанием металла $0{,}1x_3$. Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3, \\ 0{,}04x_1 + 0{,}12x_2 = 0{,}1x_3, \\ x_2 - x_1 = 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 9, \\ x_3 = 12. \end{cases}$$

Ответ: 12 килограмм.

Задача 5. Смешали некоторое количество 10% раствора некоторого вещества с таким же количеством 12% раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Решение. Пусть x грамм – это 10% раствор, тогда и 12% раствора тоже взяли x грамм. Концентрация раствора – масса вещества, разделенная на массу всего раствора. В первом растворе содержится $0{,}1x$ грамм, а во втором $0{,}12x$ грамм. Концентрация получившегося раствора равна $\frac{0{,}1x+0{,}12x}{x+x} = 0{,}11$.

Ответ: 11%.

Задача 6. Смешав 60% и 30% растворы щелочи и добавив 5 килограмм чистой воды, получили 20% раствор щелочи. Если бы вместо 5 килограмм воды добавили 5 килограмм 90% раствора той же щелочи, то получили бы 70% раствор щелочи. Сколько килограммов 60% раствора использовали для получения смеси?

Решение. Пусть x килограмм – 60% раствор щелочи, y килограмм – 30% раствор, а z килограмм – масса получившегося раствора. Составим уравнение: $x + y + 5 = z$. Содержание кислоты во взятом количестве составляет $0{,}6x$ килограмм в 60% растворе и $0{,}3y$ килограмм в 30%, 0 килограмм в чистой воде. Если берётся 90% раствор, то кислоты в нём содержится 0,9·5 = 4,5 килограмм. На выходе кислоты в растворе получили $0{,}2z$ килограмма, а если бы использовали 90% раствор получили бы $0{,}7z$ килограмма кислоты в смеси. Составим уравнения: $0{,}6x + 0{,}3y + 0 = 0{,}2z$ и $0{,}6x + 0{,}3y + 4{,}5 = 0{,}7z$. Из полученных уравнений составим систему:

$$\begin{cases} x + y + 5 = z, \\ 0{,}6x + 0{,}3y + 0 = 0{,}2z, \\ 0{,}6x + 0{,}3y + 4{,}5 = 0{,}7z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 2, \\ z = 9. \end{cases}$$

Ответ: 2 килограмм.

Задача 7. К 120 грамм раствора, содержащего 80% щелочи, добавили 480 грамм раствора, содержащего 20% той же щелочи. Сколько процентов щелочи содержится в получившемся растворе?

Решение. $0{,}8 \cdot 120 = 96$ грамм щелочи содержится в первом растворе.

$480 \cdot 0{,}2 = 96$ грамм щелочи содержится во втором растворе.

$\frac{96+96}{120+480} \cdot 100\% = 32\%$ процентное содержание щелочи в получившемся растворе.

Ответ: 32%.

Задача 8. В колбе было 800 грамм 80% - ого вещества. Лаборант отлил из колбы 200 грамм этого вещества и добавил в нее 200 грамм воды. Определить концентрацию (в процентах) полученного раствора.

Решение. После того, как провизор отлил 200 г раствора, стало 600 грамм, в котором вещества 0,8·600=480 грамм, когда добавили 200 грамм воды, то раствор снова стал 800 грамм, а концентрация нового вещества в растворе $\frac{480}{800} \cdot 100\% = 60\%$

Ответ: 60%.

Задача 9. Из сосуда, доверху наполненного 94% раствором щелочи, отлили 1,5 литра раствора и долили 1,5 литра 70% раствора этой же щелочи. После этого в сосуде получился 86% раствор щелочи. Какова вместимость сосуда?

Решение. Путь сосуд вмещает в себя x литров, тогда из условия задачи следует уравнение: $0{,}94(x - 1{,}5) + 0{,}7 \cdot 1{,}5 = 0{,}86x$, откуда x=4,5

Ответ: 4,5 литра.

Задача 10. В течение двух лет в городе А численность населения возрастала ежегодно на 2%. В результате число жителей возросло на 11312 человек. Сколько жителей было в городе А первоначально?

Решение. Пусть x – первоначальное количество жителей в городе А. Так как население увеличивалось на 2% ежегодно в течении двух лет и при этом оно увеличилось на 11312 человек, значит можем составить уравнение:

$$x \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02 = x + 11313;$$

$$0{,}0404x = 11312;$$

$$x = 280000.$$

Ответ: 280000 человек.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Набор заданий для подготовки к ОГЭ

Задача 1. Имеется два сплава, массы которых отличаются на 54 килограмма. Первый сплав содержит 10% олова, второй – 30%. Из этих двух сплавов получили третий сплав, который содержит 18,2% олова. Найдите массу более лёгкого сплава.

Решение. Первый сплав содержит 10%, то есть 0,1; его масса – x килограмм (большая масса) $\Rightarrow 0{,}1x$. Второй сплав содержит 30%, то есть 0,3; его масса – $x-54$ килограмм (меньшая масса) $\Rightarrow 0{,}3(x-54)$

Третий сплав (получили из первых двух) содержит 18,2% олова, то есть 0,182; его масса – $x+(x-54) \Rightarrow 0{,}182(2x-54)$

Так как из двух сплавов получили третий, то составим уравнение.

$$0{,}1x+0{,}3(x-54)=0{,}182(2x-54);$$

$$0{,}1x+0{,}3x-16{,}2=0{,}364x-9{,}828;$$

$$0{,}4x-0{,}364x=-9{,}828+16{,}2;$$

$$0{,}036x=6{,}372;$$

$$36x=6372;$$

$$x=177.$$

Масса первого сплава равна 177 килограмм, следовательно масса второго сплава равна $177-54=123$ килограмма.

Ответ: 123 килограмма.

Задача 2. Имеется два раствора. Первый содержит 10% кислоты, второй – 12% кислоты. Известно, что масса кислоты в растворах одинакова. Когда растворы смешали, оказалось, что получившийся раствор имеет массу 4 килограмма 400 граммов. Сколько килограмм в первом растворе?

Решение. Пусть x килограмм – масса первого раствора, а y кг – масса второго раствора. В таком случае масса кислоты в первом растворе составит $0{,}1x$, а масса кислоты во втором – $0{,}12y$.

Так как масса кислоты в растворах одинаковая, можно составить уравнение:

$$0{,}1x = 0{,}12y.$$

Когда растворы смешали, то получили раствор весом 4,4 килограмма. Отсюда можно составить еще одно уравнение $x + y = 4{,}4$. Используя два уравнения, составляем систему:

$$\begin{cases} 0{,}1x = 0{,}12y, \\ x + y = 4{,}4. \end{cases}$$

Решая полученную систему методом подстановки, получаем, что $y = 2$ килограмма, значит масса второго сплава равна 2 килограмма. Следовательно, масса второго сплава равна $4{,}4 - 4 = 2{,}4$ килограмма

Ответ: 2,4 килограмма.

Задача 3. Имеется два сплава с разным содержанием меди: в первом содержится 60%, а во втором — 45% меди. В каком отношении надо взять первый и второй сплавы, чтобы получить из них новый сплав, содержащий 55% меди?

Решение. Пусть первый сплав взят в количестве x килограмм, тогда он будет содержать $0{,}6x$ килограмм меди, а второй сплав взят в количестве y килограмм, тогда он будет содержать $0{,}45y$ килограмм меди. Соединив два этих сплава, получим сплав меди массой $x + y$, по условию задачи он должен содержать $0{,}55(x + y)$ меди. Следовательно, можно составить уравнение:

$$0{,}6x + 0{,}45y = 0{,}55(x + y).$$

Выразим x через y, получим, что $x = 2y$ Следовательно, отношение, в котором нужно взять сплавы, $\frac{2}{1}$.

Ответ: $\frac{2}{1}$.

Задача 4. Смешали некоторое количество 21%-ого раствора некоторого вещества с таким же количеством 95%-ого раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Решение. Пусть взяли x грамм 21%-ого раствора, тогда взяли и x грамм 95%-ого раствора. Концентрация раствора — масса вещества, разделённая на массу всего раствора. В первом растворе содержится $0{,}21x$ грамм, а во втором — $0{,}95x$ грамм. Концентрация получившегося раствора равна:

$$\frac{0{,}21x + 0{,}95x}{x + x} = 0{,}58;$$

$$0{,}58 = 58\%.$$

Ответ: 58%.

Задача 5. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 13% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 4 килограмма. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава.

Решение. Пусть масса первого сплава x килограмм. Тогда масса второго сплава $(x + 4)$ килограмм, а третьего — $(2x + 4)$ килограмм. В первом сплаве содержится $0{,}05x$ килограмм меди, а во втором — $0{,}13(x +$ $+4)$ килограмм. Поскольку в третьем сплаве содержится $0{,}1(2x + 4)$ килограмм меди, составим и решим уравнение:

$$0{,}05x + 0{,}13(x + 4) = 0{,}1(2x + 4);$$

$$0{,}02x = 0{,}12;$$

$$x = 6.$$

Значит, масса первого сплава равна 6 килограмм, тогда масса второго сплава равна 10 килограмм и масса третьего сплава равна 16 килограмм.

Ответ: 16 килограмм.

Задача 6. Имеются два сосуда, содержащие 10 килограмм и 16 килограмм раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 55% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать

61% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе?

Решение. Пусть концентрация первого раствора — x, концентрация второго раствора — y. Составим систему уравнений согласно условию задачи и решим ее:

$$\begin{cases} 10x + 16y = 0{,}55(10 + 16), \\ x + y = 2 \cdot 0{,}61. \end{cases}$$

Решим систему методом подстановки и получим $\begin{cases} x = 0{,}87, \\ y = 0{,}35. \end{cases}$

Таким образом, в первом растворе содержится

$10 \cdot 0{,}87 = 8{,}7$ килограмма кислоты.

Ответ: на 8,7 килограмма.

Задача 7. Свежие фрукты содержат 80% воды, а высушенные — 28%. Сколько сухих фруктов получится из 288 килограмм свежих фруктов?

Решение. Заметим, что при сушке фруктов вода испаряется, поэтому необходимо рассматривать не количество воды, а количество питательного вещества, которое остается неизменным.

Свежие фрукты содержат $100\% - 80\% = 20\%$ питательного вещества, а высушенные — $100\% - 28\% = 72\%$. В 288 килограммах свежих фруктов содержится $0{,}2 \cdot 288 = 57{,}6$ килограммов питательного вещества. Такое количество питательного вещества будет содержаться в $\frac{57{,}6}{0{,}72} =$ 80 килограмм высушенных фруктов.

Ответ: 80 килограмм.

Задача 8. Смешав 70%-ый и 40%-ый растворы кислоты и добавив 6 килограмм чистой воды, получили 30%-ый раствор кислоты. Если бы вместо 6 килограмм воды добавили 6 килограмм 90%–го раствора той же кислоты, то получили бы 80%-ый раствор кислоты. Сколько килограммов 70%–го раствора использовали для получения смеси?

Решение. Пусть x килограмм и y килограмм — массы первого и второго растворов, взятые при смешивании. Тогда $x + y + 6$ килограмм —

масса полученного раствора, содержащего $0{,}7x + 0{,}4y$ килограмм кислоты. Концентрация кислоты в полученном растворе 30%, откуда $0{,}7x + 0{,}4y = 0{,}3(x + y + 6)$.

Решим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}7x + 0{,}4y = 0{,}3(x + y + 6), \\ 0{,}7x + 0{,}4y + 0{,}9 \cdot 6 = 0{,}8(x + y + 6); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4{,}4, \\ y = 0{,}4. \end{cases}$$

Ответ: 4,4 кг.