МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методические особенности применения графического метода в обучении решению задач с параметрами в основной школе

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность программы бакалавриата
«Математика. Информатика»

Форма обучения очная

Проверка на объем заимствований:
66% авторского текста
Работа рекомендована к защите
«28» марта 2022г.
и. о. зав. кафедрой математики и МОМ
_____________ Суховиенко Е. А.

Выполнил:
Студент группы ОФ-513/204-5-1
Божинская Анастасия Андреевна

Научный руководитель:
к. ф.-м.н., доцент кафедры МиМОМ
Нигматулин Равиль Михайлович

Челябинск
2022

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Задачи с параметрами относятся к существенной и важной части содержания современного математического образования. Они играют большую роль в формировании и развитии у учащихся логического мышления, а также математической культуры.

В пояснительной записке программы по математике для общеобразовательных учреждений говорится: «Ведущая роль принадлежит математике в формировании алгоритмического мышления, воспитании умений действовать по алгоритму и конструировать новые». Конструированию нового всегда предшествует исследование. Большим потенциалом в развитии исследовательских умений таких, как умение наблюдать, анализировать, выдвигать и доказывать гипотезу, обобщать и др., безусловно, обладают задачи с параметрами. Кроме того, учащиеся, владеющие методами решения задач с параметрами, будут более творчески подходить к решению любой задачи.

Глубокая, богатая идеями и методами - содержательно-методическая линия задач с параметрами как нельзя лучше позволит развить активную творческую деятельность учащегося, его системное мышление, подготовить его к решению действительно творческих задач, которые со временем перед ним поставит сама жизнь.

Однако, зачастую оказывается, что выпускник школы не имеет представления о решении задач с параметрами. Отсюда возникает вопрос: почему же так происходит и как это исправить?

Можно заметить, что в учебных программах по математике общеобразовательных школ задачам с параметрами отводится незначительное место, а реальное изучение таких задач начинается либо в углубленном курсе, либо в 11-м классе.

Для решения данных заданий используются всем известные методы: аналитический и графический. Последнему из вышеперечисленных будет посвящена выпускная квалификационная работа.

Об умении применять этот метод говорится в планируемых предметных результатах освоения примерной рабочей программы основного общего образования по математике базового уровня от 2022 года [12].

Также стоит добавить, что в результате освоения дисциплины углубленного уровня обучающийся должен уметь:

– понимать графический способ представления и анализа информации; извлекать и интерпретировать информацию из графиков реальных процессов и зависимостей;

– решать линейные уравнения с параметрами, несложные системы линейных уравнений с параметрами;

– решать несложные квадратные уравнения с параметром;

– решать несложные системы нелинейных уравнений с параметром.

Задачи с параметрами содержатся в контрольно-измерительных материалах Основного и Единого государственного экзамена [11].

Поэтому графическому решению уравнений с параметрами должно быть уделено особое внимание.

Цель выпускной квалификационной работы: выявить методические особенности применения графического метода в обучении решению задач с параметрами в основной школе.

Гипотеза: использование в процессе обучения выявленных методических особенностей может способствовать более эффективному усвоению материала по теме «Графическое решение уравнений с параметром».

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1) проанализировать Примерную рабочую программу основного общего образования по математике углубленного уровня;

2) изучить и проанализировать материал по теме в учебниках углубленного курса алгебры основной школы;

3) описать особенности решения задач с параметрами графическим методом в школьном курсе математики;

4) проанализировать статистику результатов ОГЭ по Челябинской области;

5) проанализировать и систематизировать задачи ОГЭ, в решении которых используется графический метод, а также привести их подробные решения.

Объектом исследования является графический метод при решении задач с параметрами.

Предмет исследования: применение графического метода при решении задач с параметром в основной школе.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка использованной литературы.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

1.1 Основные подходы к обучению графическому методу решения уравнений и их систем

Проанализируем Примерную рабочую программу основного общего образования по математике углубленного уровня (для 7-9 классов образовательных организаций) от 2022 года.

Освоение учебного курса «Алгебра» на углублённом уровне основного общего образования должно обеспечивать достижение следующих предметных образовательных результатов [12].

В результате освоения дисциплины за 7 класс обучающийся должен уметь:

– решать системы двух линейных уравнений с двумя переменными, в том числе графически;

– понимать графический способ представления и анализа информации; извлекать и интерпретировать информацию из графиков реальных процессов и зависимостей.

В результате освоения дисциплины за 8 класс обучающийся должен уметь:

– решать линейные уравнения с параметрами, несложные системы линейных уравнений с параметрами;

– проводить исследования уравнений и систем уравнений, в том числе с применением графических представлений (устанавливать, имеет ли уравнение или система уравнений решения, если имеет, то сколько, и пр.).

В результате освоения дисциплины за 9 класс обучающийся должен уметь:

– решать несложные квадратные уравнения с параметром;

– решать несложные системы нелинейных уравнений с параметром;

– применять методы равносильных преобразований, замены переменной, графического метода при решении уравнений 3-й и 4-й степеней;

– проводить исследования уравнений и систем уравнений, в том числе с применением графических представлений (устанавливать, имеет ли уравнение или система уравнений решения, если имеет, то сколько, и пр.).

В Таблице 1 представлены все рассматриваемые параграфы учебников углубленного курса основной школы Мерзляка А.Г. и Мордковича А.Г [2; 3; 4; 5; 7; 9].

Таблица 1 – Изучаемые параграфы

Мерзляк А.Г.	Мордкович А.Г.
1	*2*
7 класс	
Глава 2. «Линейное уравнение с одной переменной»	Глава 1. «Математическая модель. Математический язык»
§ 2. «Линейное уравнение с одной переменной»	§ 4. «Линейное уравнение с одной переменной»
Глава 3. «Функции»	Глава 2. «Линейная функция»
§ 25. «График функции»	§ 9. «Линейное уравнение с двумя переменными и его график»
§ 26. «Линейная функция, её график и свойства»	§ 10. «Линейная функция и её график»
Глава 4. «Системы линейных уравнений с двумя переменными»	§ 11. «Взаимное расположение графиков линейных функций»
§ 27. «Уравнения с двумя переменными»	Глава 3. «Графический метод решения системы»
§ 28. «Линейное уравнение с двумя переменными»	§ 13. «Основные понятия»
§ 29. «Системы уравнений с двумя переменными. Графический метод решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными»	Глава 8. «Функция $y = x^2$»
	§ 45. «Функция $y = x^2$ и её график»
	§ 46. «Графическое решение уравнений»
	§ 47. «Что означает в математике запись $y = f(x)$»

Продолжение таблицы 1

1	*2*
8 класс	
Глава 2. «Рациональные выражения»	Глава 2. «Функция $y=\sqrt{x}$. Свойства квадратного корня»
§ 12. «Рациональные уравнения с параметром»	§ 13. «Функция $y=\sqrt{x}$, её свойства и график»
§ 15. «Функция $y=\frac{k}{x}$ и её график»	§ 17. «Модуль действительного числа. Функция $y=\lvert x\rvert$»
Глава 4. «Неравенства»	Глава 3. «Квадратичная функция. Функция $y=\frac{k}{x}$»
§ 25. «Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля»	§ 19. «Функция $y=kx^2$, её свойства и график»
Глава 5. «Квадратные корни. Действительные числа»	§ 20. «Функция $y=\frac{k}{x}$, её свойства и график»
§ 26. «Функция $y=x^2$ и её график»	§ 21. «Как построить график функции $y=f(x+l)+m$, если известен график функции $y=f(x)$»
§ 31. «Функция $y=\sqrt{x}$ и её график»	§ 22. «Функция $y=ax^2+bx+c$, её свойства и график»
	§ 23. «Графическое решение квадратных уравнений»
	§ 24. «Дробно-линейная функция»
	§ 25. «Как построить графики функций $y=\lvert f(x)\rvert$ и $y=f(\lvert x\rvert)$, если известен график функции $y=f(x)$»
	Глава 6. «Алгебраические уравнения»
	§ 44. «Задачи с параметрами»
9 класс	
Глава 1. «Квадратичная функция»	Глава 2. «Системы уравнений»
§ 1. «Функция»	§ 8. «Уравнения с двумя переменными»
§ 4. «Построение графиков функций $y=kf(x)$ и $y=f(kx)$»	§ 10. «Основные понятия, связанные с системами уравнений и неравенств с двумя переменными»
§ 5. «Построение графиков функций $y=f(x)+b$ и $y=f(x+a)$»	Глава 3. «Числовые функции»
§ 6. «Построение графиков функций $y=f(\lvert x\rvert)$ и $y=\lvert f(x)\rvert$»	§ 19. «Функции $y=x^m$ $(m\in Z)$, их свойства и графики»
§ 7. «Квадратичная функция, её график и свойства»	§ 20. «Функция $y=\sqrt[3]{x}$, её свойства и график»
Глава 2. «Уравнения с двумя переменными и их системы»	

Продолжение таблицы 1

1	*2*
§ 10. «Уравнения с двумя переменными и его график»	
§ 11. «Графические методы решения систем уравнений с двумя переменными»	
Глава 4. «Степенная функция»	
§ 19. «Степенная функция с натуральным показателем»	
§ 20. «Обратная функция»	

Для ссылки на определенный параграф будем использовать запись 2.10, что означает, что речь идёт о 10-м параграфе 2-ой главы.

Рассмотрим отрывок тематического планирования за 7 класс в следующей таблице, будем выбирать разделы, где встречаются уравнения, графики, функции или параметры (Таблица 2) [12].

Таблица 2 – Тематическое планирование

Номер раздела	Название раздела (темы)	Основное содержание	Основные виды деятельности обучающихся
7 класс			
1	*2*	*3*	*4*
№1	Уравнения и системы уравнений: Линейные уравнения (10 ч)	Уравнение с одной переменной. Корень уравнения. Свойства уравнений с одной переменной. Равносильность уравнений. Уравнение как математическая модель реальной ситуации. Линейное уравнение с одной переменной. Число корней линейного уравнения. Решение текстовых задач с помощью линейных уравнений. Линейное уравнение, содержащее знак модуля.	Решать линейное уравнение с одной переменной, применяя правила перехода от исходного уравнения к равносильному ему более простого вида. Проверять, является ли конкретное число корнем уравнения. Определять число корней линейного уравнения. Решать линейное уравнение, содержащее знак модуля. Составлять и решать уравнение по условию задачи, интерпретировать в соответствии с контекстом задачи полученный результат

Продолжение таблицы 2

1	*2*	*3*	*4*
№2	Функции: Линейная функция (16 ч)	Линейная функция, её свойства. График линейной функции. График функции $y = \mid x \mid$. Кусочно-заданные функции.	Распознавать линейную функцию $y = kx + b$, описывать её свойства в зависимости от значений коэффициентов k и b. Строить графики линейной функции, функции $y = \mid x \mid$, кусочно-заданной функции. Использовать цифровые ресурсы для построения графиков функций и изучения их свойств. Приводить примеры линейных зависимостей в реальных процессах и явлениях
№3	Уравнения и системы уравнений: Системы линейных уравнений (14 ч)	Уравнение с двумя переменными. График линейного уравнения с двумя переменными. Системы линейных уравнений с двумя переменными. Графический метод решения системы линейных уравнений с двумя переменными.	Строить в координатной плоскости график линейного уравнения с двумя переменными; пользуясь графиком, приводить примеры решения уравнения. Находить решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Составлять и решать систему двух линейных уравнений по условию задачи, интерпретировать в соответствии с контекстом задачи полученный результат
№4	Повторение и обобщение (8 ч)	Повторение основных понятий и методов курса 7 класса, обобщение знаний.	Выбирать, применять оценивать способы сравнения чисел, вычислений, тождественных преобразований алгебраических выражений, решения уравнений и систем уравнений, задания функций, анализа и построения их графиков. Использовать функционально-графические представления для решения задач. Осуществлять самоконтроль выполняемых действий и самопроверку результата вычислений, преобразований, построений. Решать задачи из реальной жизни, применять математические знания для решения задач из других предметов. Решать текстовые задачи, сравнивать, выбирать способы решения задачи

Рассмотрим параграфы 7-х классов Мерзляка и Мордковича, выделим особенности изложения каждого параграфа и посмотрим, соотносятся ли они с разделами тематического планирования из Таблицы 3 [2; 5].

Таблица 3 – Изложение параграфов

Номера разделов	Параграф	Основное содержание	Особенности изложения
1	*2*	*3*	*4*
7 класс			
Мерзляк			
№1	1.2	Линейное уравнение с одной переменой. Зависимость корня уравнения с одной переменной от коэффициентов уравнения.	Наличие итоговой таблицы зависимости корня уравнения с одной переменной от коэффициентов уравнения представляет материал наглядно, что повышает простоту восприятия. Лаконичное и понятное изложение параграфа.
№2	3.25	Абсцисса и ордината. График функции. Область определения. Графический способ задания функции. Кусочно-заданные функции.	Приводит довольно легкий способ для обучающихся определения является ли фигура, изображённая на плоскости, графиком функции (прямая перпендикулярная оси абсцисс с графиком имеет всегда только одну общую точку). Отметает, что метод построения графика функции по точкам требует значительной технической работы, следовательно, существенную часть может взять на себя компьютер. Тем самым автор подчеркивает важность применения цифровых ресурсов для построения графиков и исследования свойств функций. Приводит пример реализации построения кусочно-заданных функций, однако не предлагает примеров для самостоятельного построения обучающимся.
№2	3.26	Линейная функция, её свойства. График линейной функции. Частные случаи графика линейной функции.	В начале параграфа автор разбирает текстовые задачи, которые можно записать в виде функции. Оперирует понятием прямая пропорциональность. Акцентирует особое внимание на том, что прямая пропорциональность – частный случай линейной функции

Продолжение таблицы 3

1	*2*	*1*	*2*
№3	4.27	Уравнения с двумя переменными как математические модели реальных ситуаций. Решение уравнения с двумя переменными. Свойства уравнения с двумя переменными. График уравнения с двумя переменными.	Рассматривает несколько примеров реальных ситуаций, математическими моделями которых служат равенства с двумя переменными. Таких как: «Дан прямоугольный треугольник. Если градусные меры его острых углов обозначить x^{0} и y^{0}, то можно записать $x + y = 90$». Параграф в основном состоит из примеров и графиков самых различных функций.
№3	4.28	Линейное уравнение с двумя переменными. Случаи зависимости графика уравнения от значений коэффициентов уравнения.	При введении определения автор отталкивается от уравнений с двумя переменными (прядущего параграфа 4.27) Весь параграф состоит из возможных случаев зависимости графика уравнения, от коэффициентов уравнения, причем каждый такой случай проиллюстрирован примером. Есть пример с решением, в котором необходимо из геометрической модели перейти к аналитической.
№3	4.29	Понятие о системе уравнений с двумя переменными и её решение. Графический метод решения системы уравнений с двумя переменными.	Для введения определения системы двух линейных уравнений с двумя переменными приводит реальные ситуации, при переводе которых, а математический язык оформляются в виде математической модели, состоящей из двух уравнений с двумя переменными и не только линейных. Рассматривает количество решений зависимости от расположения прямых и иллюстрирует их примерами. Подчеркивает, что графический метод показал, что не существует системы линейных уравнений, имеющих, пример, ровно 2, или ровно 3, или ровно 100 и т.п. решений. Подчёркивает особую эффективность метода при поиске количества решений системы.

Продолжение таблицы 3

1	*2*	*3*	*4*
		Мордкович	
№1	1.4	Линейное уравнение с одной переменой. Зависимость корня уравнения с одной переменной от коэффициентов уравнения.	Автор обращает внимание на то, что уравнения являются видом математической модели. При введении определения линейное уравнение с одной переменной автор подчеркивает, что a и b не только любые числа, но и коэффициенты. Дополняет параграф следующими довольно важными определениями: «Корень уравнения» и «Что значит решить уравнение» С помощью приведения игровой ситуации повышает интерес к обучению. Довольно развёрнутое изложение параграфа.
№3	2.9	Линейное уравнение и его решение. Геометрическая модель линейного уравнения. Построение графика линейного уравнения. Использование графиков линейных уравнений для решения задач. Графики с модулями.	При введении определения автор отталкивается от линейного уравнения с одной переменной (параграфа 1.4). Определение даётся на основе реальной ситуации движущихся навстречу друг другу поездов. И составленной ей соответствующей математической модели $5x + 3y - 500 = 0$. Важные факты отмечает в виде теорем, начиная с данного параграфа. При работе с задачами, разбивает их на этапы. Различает три типа моделей: словесная, алгебраическая и геометрическая. Приводит алгоритм построения графика уравнения. Рассматривает довольно сложные задания на построения графиков с модулями.
№2	2.10	Линейная функция. График линейной функции. Линейные функции как математически модели реальных ситуаций. Построения графика линейной функции на заданном промежутке.	Предлагает упростить алгоритм построения графика уравнения из параграфа 2.9, тем самым побуждает учащихся к обучению. Рассматривает примеры перехода от аналитической модели к геометрической, но наоборот, что несомненно является плюсом. Вводит понятие угловой коэффициент. Рассматривает условие параллельности прямых. Обращает особое внимание на необходимость уточнение математической

Продолжение таблицы 3

1	*2*	*3*	*4*
		Свойства линейной функции.	модели при разборе текстовых задач реальных ситуаций, путём наложения ограничений на независимую переменную.
№3	2.11	Взаимное расположение графиков линейных функций.	Автор делает акцент на том, что в данном параграфе были получены самые яркие образцы свободного оперирования алгебраическим и геометрическими языками в одном суждении – они представлены в таблице, где алгебраическим условием являются зависимости между коэффициентами уравнений, а геометрическими выводами взаимное расположение прямых. Также автор в конце параграфа приводит довольно интересный пример, в котором ярко отражены зависимости коэффициентов линейной функции от точек пресечения прямых и расположения их в тех или иных четвертях.
№3	3.13	Понятие о системе уравнений с двумя переменными и её решение. Графический метод решения системы уравнений с двумя переменными.	При введении определения системы уравнений, автор ссылается на определения и примеры параграфов 2.9 и 2.10. Приводит примеры математически моделей, состоящих только из линейных уравнений. Рассматривает количество решений зависимости от расположения прямых и иллюстрирует их примерами. Вводит оправления несовместной и неопределенной системы уравнений. Делает акцент на ненадёжности графического метода.
–	8.45	Парабола – график функции $y = x^2$. Функция $y = -x^2$ и её график. Решение примеров.	Формулы общего вида параболической функции автор не указывает. Приводит в пример математические модели площади квадрата $y = x^2$, объёма куба $y = x^3$ и нахождения стороны y прямоугольника, зная другую сторону x и площадь 100 см^2 – $y = \frac{100}{x}$, тем самым и показывает возможность существования таких функций. Вводит определение параболы как точки соответствующие $y = x^2$ и расположенные на некоторой линии.

Продолжение таблицы 3

1	*2*	*3*	*4*
			Приводит занимательный пример из жизни, что фары в машине имеют параболическую форму, так как при правильном расположении лампочки свет от такой поверхности отражается достаточно далеко. Предлагает для того чтобы каждый раз не строить график функции $y = x^2$ по точкам, вырезать шаблон параболы. Так как шаблон графика линейной функции у них у имеется – это линейка. В конце параграфа на примере делает акцент об необходимости делать проверку решений при использовании графического метода решения.
–	8.46	Графическое решение уравнений.	В параграфе не вводятся никакие определения и не формулируются правила. Это параграф, в котором подводятся итоги об изученных графиках функций в назывном порядке и приводятся 2 примера графического решения квадратного уравнения с разбиением на две функции, графиками которых является парабола и прямая. Автор отмечает: «Знание этих графиков позволит нам в случае необходимости заменить аналитическую модель $y = x^2$ и рассматривать параболу в координатной плоскости. В частности, это полезно для решения уравнений». Цель параграфа подытожить изученное и показать существование квадратного уравнения общего вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – числа, $a \neq 0$.
№2	8.47	Знакомство с символом $f(x)$. Кусочные функции. График с «выколотой» точкой.	Вводится структура $y = f(x)$, которую следует понимать так: имеется выражение $f(x)$ с переменной x, с помощью которого мы находим значения переменной y. Приводятся примеры кусочно-заданных функций $f(x)$ и их графическое решение. На примерах рассматриваются понятия разрыва функции и непрерывной функции. Рассматривается график с «выколотой» точкой.

Рассмотрим отрывок тематического планирования за 8 класс в Таблице 4 [12].

Таблица 4 - Тематическое планирование

Номер раздела	Название раздела (темы)	Основное содержание	Основные виды деятельности обучающихся
1	*2*	*3*	*4*
8 класс			
№1	Уравнения и неравенства: Квадратные уравнения (17 ч)	Квадратное уравнение. Формула корней квадратного уравнения. Количество действительных корней квадратного уравнения. Теорема Виета. Уравнения, сводимые к линейным уравнениям или к квадратным уравнениям. Квадратное уравнение с параметром. Решение квадратных уравнений с параметрами. Решение квадратных уравнений, содержащих знак модуля. Уравнение как математическая модель реальной ситуации. Решение текстовых задач с помощью квадратных уравнений	Распознавать уравнения с одной переменной, квадратные уравнения. Определять равносильные уравнения. Применять свойства уравнений с одной переменной. Записывать формулу корней квадратного уравнения; решать квадратные уравнения – полные и неполные. Определять количество действительных корней квадратного уравнения. Наблюдать и анализировать связь между корнями и коэффициентами квадратного уравнения. Формулировать теорему Виета, а также обратную теорему, применять эти теоремы для решения задач. Проводить простейшие исследования квадратных уравнений. Решать текстовые задачи. Знакомиться с историей развития математики.
№2	Уравнения и неравенства: Дробно-рациональные уравнения (19ч)	Дробно-рациональные уравнения. Решение дробно-рациональных уравнений, сводящихся к линейным или к квадратным уравнениям. Решение	Распознавать дробно-рациональные уравнения. Решать дробно-рациональные уравнения, сводящиеся к линейным или к квадратным уравнениям, использовать метод замены переменной.

Продолжение таблицы 4

1	*2*	*3*	*4*
		дробно-рациональных уравнений методом замены переменной. Решение текстовых задач с помощью дробно-рациональных уравнений. Графическая интерпретация уравнений с двумя переменными	Решать текстовые задачи алгебраическим способом: переходить от словесной формулировки условия задачи к алгебраической модели путём составления уравнения; решать составленное уравнение; интерпретировать результат.
№3	Функции (15 ч)	Область определения и множество значений функции. Способы задания функций. График функции. Чтение свойств функции по её графику. Примеры графиков функций, отражающих реальные процессы. Функции, описывающие прямую и обратную пропорциональные зависимости, их графики. Функции $y = x^2, y = x^3, y = \frac{k}{x}$, $y = \sqrt{x}$ и их свойства	Использовать функциональную терминологию и символику. Находить область определения и множество значений функции. Вычислять значения функций, заданных формулами (при необходимости использовать калькулятор); составлять таблицы значений функции. Описывать свойства функции на основе её графического представления. Находить с помощью графика функции значение одной из рассматриваемых величин по значению другой. Исследовать примеры графиков, отражающих реальные процессы и явления. Приводить примеры процессов и явлений с заданными свойствами. Выражать формулой зависимость между величинами. Описывать характер изменения одной величины в зависимости от изменения другой. Распознавать виды изучаемых функций. Строить графики функций $y = x^2, y = x^3, y = \frac{k}{x}, y = \sqrt{x}$. Использовать функционально-графические представления для решения и исследования уравнений и систем уравнений. Применять цифровые ресурсы для построения графиков и исследования свойств функций

Продолжение таблицы 4

1	*2*	*3*	*4*
№4	Повторение и обобщение (10 ч)	Повторение основных понятий и методов курсов 7 и 8 классов, обобщение знаний	Выбирать, применять оценивать способы сравнения чисел, вычислений, тождественных преобразований выражений, решения уравнений и систем уравнений, неравенств, построения графиков. Осуществлять самоконтроль выполняемых действий и самопроверку результата вычислений, преобразований, построений. Решать задачи из реальной жизни, применять математические знания для решения задач из других предметов. Решать текстовые задачи, сравнивать, выбирать способы решения задачи. Использовать функционально-графические представления для решения задач.

Рассмотрим параграфы 8-х классов Мерзляка и Мордковича, выделим особенности изложения каждого параграфа и посмотрим, соотносятся ли они с разделами тематического планирования из Таблицы 5 [3; 7].

Таблица 5 – Изложение параграфов

Номера разделов	Параграф	Основное содержание	Особенности изложения
1	*2*	*3*	*4*
8 класс			
Мерзляк			
–	2.12	Понятие об уравнении с параметром. Разбор решения уравнений с параметрами.	Вводит определение параметра и уравнения с параметром на основе примера линейного уравнения. При введении определения подчеркивает двойственную природу параметра. Рассматриваются рациональные уравнения с параметром только алгебраическим методом.

Продолжение таблицы 5

№2,3	2.15	Определение обратной пропорциональности. Свойства функции $y=\frac{k}{x}$.	Параграф начинается с определения обратной пропорциональности, которое изучалось в 6 классе. Рассматриваются два примера, в которых математической моделью реальных ситуаций является функция вида $y=\frac{k}{x}$. После чего уже вводится новое определение обратной пропорциональности. Рассматривается зависимость расположения ветвей гиперболы от значения коэффициента k с примерами, но без каких-либо доказательств и разъяснений. Рассматривается графическое решение уравнения, однако акцентируется внимание на том, что данный метод не всегда даёт точные решения.
–	4.25	Основные сведенья о модуле. Свойства модуля. Основные приёмы решения уравнений, содержащих модуль.	Напоминает основные сведенья о модуле числа. Приводит основное определение модуля с геометрической точки зрения, и только потом с алгебраической. Основные приёмы решения равнений с модулем приводит в виде теорем с доказательством и примерами. Графического решения уравнений не приводится
№1,3	5.26	Функция $y=x^2$ и её график. Свойства функции $y=x^2$.	Существование функции $y=x^2$, доказывается через формулу нахождения площади квадрата. Определение параболы вводится через изображение на плоскости всех точек удовлетворяющих уравнению $y=x^2$, в результате чего получилась бы фигура – график функции $y=x^2$, которую называют параболой.
№3	5.31	Функция $y=\sqrt{x}$ и её график. Основные свойства функции $y=\sqrt{x}$. Решение примеров.	Существование изучаемой функции $y=\sqrt{x}$ показывает на примере нахождения стороны квадрата, если известна его площадь. Рассматривается графической способ решения уравнения, состоящего из двух функций, линейной и $y=\sqrt{x}$.

Продолжение таблицы 5

1	*2*	*3*	*4*
		Мордкович	
№3	2.13	График функции $y = \sqrt{x}$. Свойства функции $y = \sqrt{x}$. Примеры использования графика функции $y = \sqrt{x}$.	В начале параграфа вспоминают уже изученные функции и рассматривают пример кусочно-заданной функции. Далее автор ставит задачу: пополнить запас изученных функций. И предлагает рассмотреть функцию $y = \sqrt{x}$. Строит график изучаемой функции по точкам и акцентирует внимание на том, что если приложить шаблон параболы $y = x^2$, то он совпадет с графиком, так как график функции $y = \sqrt{x}$ – это ветвь той же параболы, только ориентированная не вверх, а вправо. Строится график функции $y = -\sqrt{x}$ с помощью преобразования симметричности относительно оси абсцисс. Графически решается уравнение, состоящее из графиков линейной функции и функции $y = \sqrt{x}$. А также строится график кусочно-заданной функции, состоящей из графиков линейной функции и функции $y = \sqrt{x}$.
–	2.17	Модуль действительного числа и его свойства. Геометрический смысл модуля действительно числа. Тождество $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$. Функция $y = \lvert x \rvert$.	Делает упор на алгебраическое определение модуля, и только потом рассматривает геометрическую точку зрения. Рассматривается функция $y = \lvert x \rvert$ и её график. Для построения графика функции $y = \lvert x \rvert$, её разбивают на две функции по определению модуля действительного числа. После чего изображают график по алгоритму кусочно-заданной функции.
№1	3.19	График функции $y = kx^2$ $(k \neq 0)$. Свойства $y = kx^2$ при $k > 0$. Свойства $y = kx^2$ при $k < 0$. Решение примеров.	Так функция $y = x^2$ была рассмотрена в 7 классе, автор переходит к изучению графика функции $y = kx^2$. При сравнении рассмотренных в параграфе примеров, где коэффициент k принимает значения 2 и 0,5 рассматривается зависимость «степени крутизны» параболы от коэффициента k. Рассматривается графический метод решения уравнения, где делается акцент

Продолжение таблицы 5

1	2	3	4
			на необходимости поверять полученные в результате решения корни. Также рассматривается пример кусочно-заданной функции с точкой разрыва.
№2	3.20	Функция $y=\frac{1}{x}$, её график и свойства. График функции $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$. Свойства функции $y=\frac{k}{x}$ при $k>0$. Свойства функции $y=\frac{k}{x}$ при $k<0$. Решение примеров.	Автор не делает отсылки ни к определенному параграфу, ни к определённому классу, он предлагает познакомиться с новой функцией. Мордкович действует от частного к общему. Для начала, рассматривает функцию $y=\frac{1}{x}$, её график и свойства, после уже график и свойства $y=\frac{k}{x}$. Также вводится определение асимптоты. Рассматривается зависимость расположения ветвей гиперболы от значения коэффициента k с примерами, опираясь на симметричность графиков относительно оси абсцисс изученную в параграфе 3.19. Рассматривается графическое решение уравнения сводящегося к функциям гиперболы и прямой. Рассматриваются примеры на построение кусочно-заданных функций состоящих из функций параболы, гиперболы и $y=\sqrt{x}$.
–	3.21	Как построить график функции $y=f(x+l)$. Как построить график функции $y=f(x)+$ $+m$. Решение примеров. Как построить график функции $y=f(x+$ $+l)+m$.	Для построения графиков функций $y=f(x+l)$, $y=f(x)+m$ пользуются параллельным переносом, которые доказываются на примерах. После рассматриваются по два примера со смещением параболы и гиперболы. Далее рассматриваются примеры с графическим решением уравнения, состоящего из графиков параболы и гиперболы, и кусочно-заданной функции, состоящей из двух парабол. Для построения графика функции $y=f(x+l)+m$ используется способ параллельного переноса и изображение в три этапа. Однако потом автор акцентирует внимание на том, что математику такое решение не понравится, так как он экономен в своих действиях. Причём ведётся разговор от лица самого

Продолжение таблицы 5

1	*2*	*3*	*4*
–			математика. Довольно интересный способ активизации внимания. «Далее математик продолжит, - я сделаю так: приведу к вспомогательной системе координат с началом в точке $(-l; m)$. Для этого построю пунктиром прямые $x = -l$ и $y = = m$ и приложу шаблон функции $f(x)$. Далее уже предлагается решить следующий пример по этому алгоритму. После чего приводятся оба алгоритма построения такого рада графиков.
№1	3.22	Теорема о графике квадратичной функции. Алгоритм построения графика квадратичной функции.	Без каких-либо вводных данных даётся определение квадратичной функции. После чего предлагает построить график квадратичной функции опираясь на результаты, полученные в предыдущем параграфе. Автор использует алгоритм перехода к вспомогательной системе координат, для этого выделяет полный квадрат. Вводятся правила: формулы нахождения координат вершины параболы; направление ветвей параболы в зависимости от коэффициента a. Параллельно к ним приводятся примеры на построения графиков. Завершается параграфа алгоритмом построения параболы.
№3	3.23	Графическое решение квадратных уравнений.	В этом параграфе автор выделяет способы решения квадратных уравнений, перечислим их. Первый способ. Строят график $y = ax^2 + +bx + c$ и находят точки пересечения с осью x (по предыдущему алгоритму). Второй способ. Преобразуют уравнение к виду $ax^2 = -bx - c$, строят параболу $y = ax^2$ и прямую $y = -bx - c$ и находят точки пересечения. Третий способ. Преобразуют уравнение к виду $ax^2 + c = -bx$ строят параболу $y = ax^2 + c$ и прямую $y = -bx$ и находят точки их пересечения. Четвёртый способ. Применяя метод выделения полного квадрата, преобразуют уравнение к виду $a(x + +l)^2 + m = 0$

Преодоление таблицы 5

1	*2*	*3*	*4*
			Строят параболу $y = a(x + l)^2$ и прямую $y = -m$, параллельную оси x, и находят точки пересечения параболы и прямой. Пятый способ. Если $c \neq 0$, то значение $x = 0$ не является корнем уравнения. Заметив это, преобразуют уравнение к виду $\frac{c}{x} = -ax - b$. Строят гиперболу $y = \frac{c}{x}$ и прямую $y = -ax - b$ и находят точки их пересечения. Далее автор отмечает, что графические способы решения квадратных уравнений красивы, приятны, но не дают стопроцентной гарантии решения любого квадратного уравнения.
№2	3.24	Дробно-линейная функция.	Дробно-линейная функция вводится как функция вида $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Далее рассматриваются примеры на построения графика дробно-линейной функции. Для этого выделяют из неправильной дроби целую часть, в результате чего строят вспомогательную систему координат и «привязывают» к ней, в данных примерах, гиперболу.
–	3.25	Построение графика функции $y = \|f(x)\|$. Построение графика функции $y = f(\|x\|)$.	Автор приводит график функций $y = f(x)$ и сравнивает с функцией $y = \|f(x)\|$ на промежутках. Если равенство на промежутке выполняется, то графики должны совпасть, если нет, то необходимо отразить график симметрично относительно оси абсцисс. Аналогичным образом строится график $y = f(\|x\|)$. После каждого изображения приводятся алгоритмы построения изученных функций и примеры к ним.
№1, ?	6.44	Понятие об уравнении с параметром. Более сложные примеры.	Для ознакомления с понятием уравнения с параметром, рассматриваются два квадратных уравнения с параметрами. В первом уравнении параметр не входит в состав первого коэффициента (что легко позволяет его решить), а во втором уравнении параметр уже находится в составе коэффициента при старшей степени, что и заставляет рассматривать несколько случаев. Оба примера решены алгебраическим методом.

Продолжение таблицы 5

1	*2*	*3*	*4*
			Для простоты восприятия автор в двух первых примерах использовал обозначение параметра через букву p, чтобы она напоминала о слове параметр. Далее переходит к более употребительной для обозначения параметра букве a. Автор также приводит пример уравнения, содержащего модуль и параметр, а также его графическое решение. В виде примера рассматривается уравнение, содержащее не только параметр, но и квадратный корень. Для начала уравнение преобразуют к квадратному виду, после находят корни через дискриминант. Для проверки корней строят графики функций и проверяют количество корней. С помощью построенных графиков отбрасывают лишнее решение. Также предлагается второй способ решения данного уравнения через замену.

Рассмотрим отрывок тематического планирования в соответствии с ФГОС за 9 класс в Таблице 6 [12].

Таблица 6 – Тематическое планирование

Номер раздела	Название раздела (темы)	Основное содержание	Основные виды деятельности обучающихся
1	*2*	*3*	*4*
9 класс			
№1	Функции (25ч)	Функция. Свойства функций: нули функции, промежутки знакопостоянства функции, промежутки возрастания и убывания функции, чётные и нечётные функции, наибольшее и наименьшее значения функции.	Описывать понятие функции. Применять свойства функций: нули функции, промежутки знакопостоянства функции, промежутки возрастания и убывания функции, чётные и нечётные функции, наибольшее и наименьшее значения функции. Распознавать квадратный трёхчлен, устанавливать возможность его разложения на множители,

Продолжение таблицы 6

1	*2*	*3*	*4*
		Построение графиков функций с помощью преобразований. Квадратный трёхчлен. Корни квадратного трёхчлена. Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители. Квадратичная функция и её свойства. Парабола, координаты вершины параболы, ось симметрии параболы. Построение графика квадратичной функции. Положение графика квадратичной функции в зависимости от её коэффициентов. Использование свойств квадратичной функции для решения задач. Степенные функции с натуральными показателями, их графики и свойства. Графики функций: $y = \sqrt{x},\ y = \sqrt[3]{x}$, $y = \mid x \mid$.	раскладывать на линейные множители квадратный трёхчлен с неотрицательным дискриминантом. Распознавать квадратичную функцию по формуле. Приводить примеры квадратичных зависимостей из реальной жизни, физики, геометрии Выявлять и обобщать особенности графика квадратичной функции $y = ax2 + bx + c$. Определять координаты вершины параболы, ось симметрии параболы. Строить графики квадратичных функций, заданных формулами вида $y = ax^2,\ y = ax^2 + q, y = (x+b)^2 +$ $+\text{c},\ y = ax^2 + bx + c$. Выполнять построение графиков функций с помощью преобразований вида: $f(x) \rightarrow f(x) + \text{a}$; $f(x) \rightarrow f(x + \text{a})$; $f(x) \rightarrow kf(x)$; $f(x) \rightarrow f(\lvert x \rvert)$; $f(x) \rightarrow \lvert f(x) \rvert$. Распознавать степенные функции с натуральными показателями, строить графики степенных функций с показателями 2 и 3. Использовать свойства графиков степенных функций с натуральными показателями при решении задач. Строить графики функций $y = \sqrt{x}, y = \sqrt[3]{x}, y = \mid x \mid$. Анализировать и применять свойства изученных функций для их построения, в том числе с помощью цифровых ресурсов
№2	Уравнения и неравенства: Уравнения, неравенства и их системы (25 ч)	Биквадратные уравнения. Примеры применения графического метода при решении уравнений 3-й и 4-й степеней. Решение дробно-рациональных уравнений и неравенств.	Решать биквадратные уравнения. Применение графического метода при решении уравнений 3-й и 4-й степеней. Решать дробно-рациональные уравнения и неравенства. Распознавать линейные уравнения с двумя переменными. Строить графики уравнений, в том числе используя цифровые ресурсы.

Продолжение таблицы 6

1	2	3	4
		Решение систем уравнений с двумя переменными. Решение простейших систем нелинейных уравнений с двумя переменными. Графический метод решения системы нелинейных уравнений с двумя переменными. Система нелинейных уравнений с параметром.	Решать простейшие системы двух нелинейных уравнений с двумя переменными. Приводить графическую интерпретацию решения уравнения с двумя переменными и систем уравнений с двумя переменными. Решать текстовые задачи алгебраическим способом. Исследовать системы нелинейных уравнений с параметром. Решать простейшие неравенства с двумя переменными и их системы
№3	Повторение, обобщение, систематизация знаний	Функции (построение, свойства изученных функций; графическое решение уравнений и их систем)	Оперировать понятиями: функция, график функции, нули функции, промежутки знакопостоянства, промежутки возрастания, промежутки убывания, наибольшее и наименьшее значения функции. Анализировать, сравнивать, обсуждать свойства функций, строить их графики. Оперировать понятиями: прямая пропорциональность, обратная пропорциональность, линейная функция, квадратичная функция, парабола, гипербола. Использовать графики для определения свойств, процессов и зависимостей, для решения задач из других учебных предметов и реальной жизни; моделировать с помощью графиков реальные процессы и явления

Рассмотрим параграфы 9-х классов Мерзляка и Мордковича, выделим особенности изложения каждого параграфа и посмотрим, соотносятся ли они с разделами тематического планирования из Таблицы 7 [4; 9].

Таблица 7 – Изложение параграфов

Номера разделов	Параграф	Основное содержание	Особенности изложения
1	*2*	*3*	*4*
9 класс			
Мерзляк			
№1	1.1	Функция. Способы задания функции. График числовой функции. Решение примеров.	Вводит функцию как модель некоторого процесса из реальной жизни. После чего автор ссылается на уже знакомые из курса 7 класса сведенья о функции. Далее иллюстрируются и разъясняются на примерах виды отображения множества X на множество Y и способы задания функций. Вводится определение графика числовой функции и рассматриваются примеры функций в том числе и кусочно-заданных.
№1	1.4	Построение графика функции $y = kf(x)$. Построение графика функции $y = f(kx)$.	Автор напоминает об изученной в 8-ом классе функции $y = x^2$ и предлагает на её основе простроить графики функций $y = ax^2$, где $a = 2; 0,5$. Сравнив все три графика автор формулирует правило построения графика $y = kf(x)$ через замену каждой точки графика функции $y = f(x)$ на точку с той же абсциссой и ординатой, умноженной на k. Также используются такие понятия как растяжение и сжатье относительно оси абсцисс. Отдельно рассматриваются случаи, где $k > 0$ и $k < 0$. После доказательств эти оба случая объединяются в один, ввиду отсутствия различия в сжатии или растяжении. Аналогичным образом выводится правило построения графика функции $y = f(kx)$.
№1	1.5	Построение графика функции $y = f(x) + +b$. Построение графика функции $y = f(x + +a)$. Решение примеров.	Правила построения функций $y = f(x) + b$ и $y = f(x + a)$ выводятся аналогично алгоритму в предыдущем параграфе. Однако здесь используется понятие параллельного переноса. После выведенных правил рассматривается большое количество примеров с использованием не только комбинаций параллельного переноса, но и сжатья и растяжения графиков. Приводятся разные способы построения одного и того же графика, которые зависят только от очерёдности преобразований. Причем перед построением того или иного графика используется схема, в которой описан алгоритм построения графика от простой функции к той что необходима по заданию.

Продолжение таблицы 7

1	*2*	*3*	*4*
№1	1.6	Построение графиков функция $y = f(\|x\|)$ и $y = \|f(x)\|$. Решение примеров.	Для вывода схем построения графиков $y = f(\|x\|)$ и $y = \|f(x)\|$ автор пользуется определением модуля. В данном параграфе рассматривается пример с параметром, решенный графическим способом, который звучит следующим образом: При каких значениях параметра a уравнение $\|2\|x\| - 1\| = x - -a$ имеет три корня? Разбор примера довольно понятный, что несомненно является плюсом. Однако преобразование графика $y = 2x - 1$ к виду $y = \|2\|x\| - 1\|$ последовательно не изображено, что возможно будет понятно не каждому ребенку.
№1	1.7	Квадратичная функция и её свойства. График квадратичной функции. Решение примеров.	При введении определения квадратичной функции автор ссылается на уже знакомые в 8 и 9 классах частные виды функции $y = x^2$ и $y = ax^2$. Также автор приводит пример формулы из физики брошенного вертикально вверх тела, обращая внимание, на то что она является квадратичной. Для построения графика функции $y = ax^2 + bx + c$ автор пользуется выделением полного квадрата и параллельным переносом относительно графика функции $y = ax^2$. После чего автор предлагает использовать вместо параллельного переноса нахождение координат вершины параболы по выеденным формулам и предлагает схему построения. Далее предлагается несколько решенных графическим способом примеров, два из которых с параметрами. Решения обоих примеров показаны довольно подробно и понятно. Во втором примере идёт построение искомого графика в координатной плоскости xa, чего автор не использовал ранее.
№1	2.10	Уравнение с двумя переменными. Правила построения графика уравнения с двумя переменными. Решение примеров.	Параграф начинается с примеров выражений с двумя переменными. Основная часть параграфа – это правила преобразования функции $y = f(x)$, например, к вид $y = f(\|x\|)$ и другим изученным выше преобразованиям. Автор объединяет все привила в одно параграфе, дополняя их правилами относительно переменной y. Иллюстрирует их с помощью преобразования графика уравнения окружности (которое доказывается в курсе геометрии 9-го класса). Причём первое привило доказывается. А остальные предлагаются к доказательству обучающимся. Автор приводит в пример решение уравнения с параметром графическим способом, которое также

Продолжение таблицы 7

1	2	3	4
			требует введения координатной системы ax. Задание звучит следующим образом: При каких значениях параметра a модуль разности корней уравнения $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ принимает наибольшее значение? Приведённое решение расписано подробно и понятно.
№2	2.11	Графические методы решения систем уравнений с двумя переменными.	Автор замечает, что в курсе 7 класса обучающиеся уже знакомились с графическим методом решения систем уравнений, сейчас же возможности графического метода расширены за счёт увеличения количества графиков, которые обучающиеся научились строить. Параграф состоит из трёх примеров, которые решены графическим методом. Два из которых уравнения с параметром: Определите количество решений системы уравнений $\begin{cases}(a+3)x+4y=5-3a,\\ 2x+(5+a)y=8\end{cases}$ в зависимости от значения параметра a. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases}x+3\lvert y\rvert+5=0,\\ (x-a)^2+y^2=4\end{cases}$ имеет ровно три решения? Оба решения примеров доступны и легки в восприятии, разница лишь в том, что для первого примера изобразить график для упрощения процесса решения довольно сложно, да и не несёт никакого смысла, так как оба уравнения содержат параметр. Второй же пример содержит параметр только в одном уравнении, что упрощает задачу. Автор делает акцент на том, что графический метод эффективен тогда, когда нужно определить количество решений системы или достаточно найти решения приближённо.
№1	4.19	Функция $y = x^{2k}, k \in N$, её свойства и график. Функция $y = x^{2k+1}$, где $k \in N$, её свойства и график.	Автор ссылается на функции $y = x$ и $y = x^2$, свойства и графики которых хорошо знакомы из предыдущих классов. Эти функции являются частными случаями $y = x^{n}$, где $n \in N$, которую называют степенной функцией с натуральным показателем. Изучаются свойства функции $y = x^{2k}$, где $k \in N$, по которым восстанавливается график. Таким же образом поступают и с функцией $y = x^{2k+1}$, где $k \in N$. Графики некоторых функций приводятся как примеры.

Продолжение таблицы 7

1	*2*	*3*	*4*
			Автор завершает параграф таблицей, в которой приведены все изученные свойства функции $y = x^n, n \in N$.
		Мордкович	
№1	2.8	Задачи, приводящие к системам уравнений. Рациональные уравнения с двумя переменными. Диофантовы уравнения. График уравнения с двумя переменными. Формула расстояния между двумя точками координатной плоскости.	Автор напоминает, что в 7 классе обучающиеся знакомились с системами линейных уравнений с двумя переменными, сейчас же будут рассмотрены системы нелинейных уравнений с двумя переменными. Далее рассматриваются примеры реальных ситуаций и составляются их математические модели, однако решение не приводится, так как оно будет изучено позже. Позже автор вводит определения уравнения с двумя переменными, решения уравнения с двумя переменными, графика уравнения. Автор выводит в виде теоремы факт, что графиком уравнения $(x-a)^2 + (y--b)^2 = r^2$ является окружность. В параграфе приведено большое количество решенных примеров, половина из которых решена графическим методом.
№2	2.10	Графический метод решения систем с двумя переменными. Системы неравенств с двумя переменными.	Автор замечает, что в курсе 7 класса обучающиеся уже знакомились с графическим методом решения систем линейных уравнений с двумя переменными, а на данный момент обучающиеся знают графики более сложных функций, поэтому сейчас можно рассмотреть системы таких уравнений. Учащимся напоминают, что такое система уравнений и решение системы уравнений. В параграфе приводится большое количество примеров на решение их графическим способом, нас же интересуют уравнения с параметрами, и автор приводит следующий пример: Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ y = x^2 + a \end{cases}$ при различных значениях параметра a при условии, что $a \geq -10$? Пример решён довольно наглядно и понятно, с большим количеством графиков, для большей наглядности. Автор делает акцент, что графический метод красив но ненадёжен: во-первых, потому что

Продолжение таблицы 7

1	2	3	4
			графики уравнений удаётся построить не всегда; во-вторы, даже если графики уравнений удалось построить, точки пересечения могут быть не такими «хорошими» как в специально подобранных примерах, а то и вовсе окажутся за пределами чертежа.
№1	3.19	Функция $y = x^{2n}$, где $(n \in N)$. Функция $y = x^{2n+1}$, где $(n \in N)$. Функция $y = x^{-2n}$, где $(n \in N)$. Функция $y = x^{-(2n-1)}$, где $(n \in N)$.	Автор приводит примеры степенных функция, называя простейшей функцию Функция $y = x^2$. Предлагает для рассмотрения взять функцию $y = x^4$. Так как функция чётная, замечает автор, то вначале построим ту часть графика, которая находится в правой полуплоскости, а потом добавив к построенному графику линию, симметричную построенной относительно оси ординат, получим график функции $y = x^4$. Автор замечает, что график параболой не является, хоть и похож на неё. По графику определяются свойства функции, однако так делать не принято, ниже рассматривают доказательства уже выведенных свойств. Подобным образом рассматриваются и остальные свойства приведённых функций. Приводятся примеры с решением и подводится итог изученного в виде функции в общем виде и графика которому она соответствует.
№1	3.20	Определение кубического корня. Функция $y = \sqrt[3]{x}$. Решение примеров.	Автор начинает параграф с определения кубического корня. А также доказывается иррациональность подкоренного выражения и некоторые свойства кубического корня (кубический корень от произведения и частного). Без каких-либо вводных данных анализируется функция $y = \sqrt[3]{x}$. Некоторые её свойства анализируются и доказываются. Строится график функции, в виду её нечетности достаточно изобразить график находящийся только в правой полуплоскости (по точкам) и построить линию симметричную относительно начала координат. После изображения графика список свойств пополняется. Далее автор приводит ряд несложных примеров, содержащих кубический корень и решённых графическим методом. Каждый из примеров разъяснён более чем доступно.

Сравним основные подходы к обучению графическому методу решения уравнений и их систем на основе двух учебников углубленного курса авторов А.Г. Мерзляка и А.Г. Мордковича.

Для начала проведем анализ понятий, использующихся в настоящей выпускной квалификационной работе. Отбирать определения будем по следующим критериям:

1) полнота;

2) простота и доступность смысла для учащихся;

Графический метод.

Начнем с понятия «графический метод». что соответствует цПримерной рабочей программе, у Мерзляка А.Г. в параграфе 4.29, у Мордковича А.Г. в 3.13 [2; 5].

Как такового понятия графического метода не даёт ни один из авторов, они приводят примеры решения систем линейных уравнений с двумя переменными, после чего сообщают, что данный метод решения является графическим.

Однако Мерзляк добавляет: «Чтобы решить систему линейных уравнений с двумя переменными графическим методом, нужно:

1) построить на одной координатной плоскости графики уравнений, входящих в систему;

2) найти координаты всех точек пересечения построенных графиков;

3) полученные пары чисел и будут искомыми решениями.»

Также автор разбирает, сколько решений может иметь система двух линейных уравнений с двумя переменными.

– если одно из уравнений системы не имеет решений, то вся система решений не имеет;

– если графиком одного из уравнений системы является вся плоскость, то очевидно, что система имеет бесконечно много решений.

Далее каждый из авторов говорит о плюсах и минусах данного метода, рассмотрим их в Таблице 8.

Таблица 8 – Плюсы и минусы графического метода

Автор	Плюсы	Минусы
1	*2*	*3*
Мордкович А.Г.	Графический метод решения систем линейных уравнений имеет большое значение. С его помощью можно сделать следующие выводы: - графиками обоих уравнений системы являются прямые; - прямые могут пересекаться, причём только в одной точке, - это значит, что система имеет единственное решение; - прямые могут быть параллельны – это значит, что система не имеет решений (система несовместна); - прямые могут совпадать – это значит, что система имеет бесконечно много решений (система неопределённа).	Графический метод, как и «метод угадывания» не самый надёжный: например, прямые могут пересечься в точке, координаты которой по чертежу не очень легко определить
Мерзляк А.Г.	Графический метод эффективен в тех случаях, когда требуется определить количество решений системы. Если графиками уравнений, входящих в систему линейных уравнений, являются прямые, то количество решений этой системы зависит от взаимного расположения двух прямых на плоскости: - если прямые пересекаются, то система имеет единственное решение; - если прямые совпадают, то система имеет бесконечно много решений; - если прямые параллельны., то система решений не имеет.	Не всякую систему уравнений удобно решать графически. Например, если пара $(\frac{1}{17}; -\frac{36}{85})$ является решение какой-то системы, то понятно, что установить факт графически крайне сложно. А потому графический метод обычно применяют в тех случаях, когда решение достаточно найти приближённо.

Мерзляк А.Г. определил, что такое «графический метод» более полно, его определение возьмем за основу.

Параметр.

Рассмотрим каким образом вводят определения «параметра» и «уравнения с параметром» авторы [3; 7].

Оба автора вводят данные понятия в 8 классе, что, как можно заметить, соответствует рассмотренной выше Примерной рабочей программе.

Мерзляк А.Г. рассматривает определения в параграфе 2.12, начиная со следующих строк: «Рассмотрим линейное уравнение $ax = 1$ [3].

Если $a = 0$, то данное уравнение корней не имеет. Если $a \neq 0$, то уравнение имеет единственный корень $x = \frac{1}{a}$

Решая это уравнение, мы придавали буквам a и x разный смысл: буква x играла роль неизвестного числа, а буква a – роль известного числа. В таких случаях говорят, что a является *параметром*, а уравнение называют *уравнением с параметром*.».

Далее подчеркивается двойственная природа параметра. С одной стороны, параметр считают фиксированным числом, с другой, неизвестным числом. Таким образом, при решении уравнения $ax = 1$ нельзя записать в ответ $x = \frac{1}{a}$. Необходимо рассматривать два случая: $a = 0$ и $a \neq 0$.

После чего сообщается, что термин «параметр» не новый, уже встречались ситуации, в которых фиксированное число обозначалось буквой. Приводятся в подтверждения примеры: линейное уравнение вида $ax = b$, где a и b – параметры или линейная функция заданная формулой $y = kx + b$, где k и b – параметры.

Далее приводятся четыре примера уравнений с параметрами, к которым прилагаются подробные решения.

Мордкович начинает изучение данных определений параграфе 6.44 [7].

Он предлагает перед тем как познакомиться с понятием «уравнения с параметром», рассмотреть два сравнительно несложных примера.

Пример 1. $x^2 - (2p + 1)x + (p^2 + p - 2) = 0$.

«В этом квадратном уравнении в роли коэффициентов выступают не конкретные числа, а буквенные выражения. Такие уравнения называют уравнениями с буквенными коэффициентами или *уравнениями с* *параметрами*. В данном случае параметр (буква) p входит в состав второго коэффициента и свободного члена уравнения»

Корни данного уравнения довольно легко найти через дискриминант.

Ответ: $p+2;\ p-1$.

Пример 2. $px^2+(1-p)x-1=0$.

«Это уравнение с параметром p, но, в отличие от предыдущего примера, его нельзя сразу решать по формуле корней квадратного уравнения. Дело в том, что про заданное уравнение мы пока не можем сказать, является ли оно квадратным.» Если $p=0$, то уравнение примет вид $x-1=0$, откуда $x=1$. Если $p\neq 0$, то можно применять формулу корней квадратного уравнения, после чего получим $x_1=1;\ x_2=-\frac{1}{p}$. Если $p=-1$, то $x_1=x_2=1$.

Ответ: Если $p=0$ или $p=-1$, то $x=1$; если $p\neq 0,-1$, то $x_1=$
$=1;\ x_2=-\frac{1}{p}$.

«Параметр в уравнении может быть обозначен любой букой. Мы в примерах 1 и 2 обозначали его буквой p, но далее перейдем к более употребительной для обозначения параметра букве a.

Если данное уравнение $f(x,a)=0$, которое надо решить относительно переменной x и в котором буквой a обозначено произвольное действительное число, то говорят, что задано *уравнение с параметром*.»

Проанализировав введение определений «параметра» и «уравнение с параметром», можно сделать вывод, что Мордкович раскрыл данные понятия доступнее и проще (на конкретных примерах).

1.2 Сравнение изложения графического метода в учебниках по алгебре основной школы

Рассмотрим подходы авторов к определению функций, их основных свойств и графиков.

1.2.1 Рассмотрим изложения графического метода в учебниках Мерзляка А.Г. и Мордковича А.Г. углубленного уровня 7 класса [2; 5].

Линейное уравнение с одной переменной.

Перед тем как дать определение линейного уравнения с одной переменной Мордкович в параграфе 1.4 вводит довольно важное определение, чего нет у Мерзляка в 1.2 [2].

Решить линейное уравнение – это значит найти все те значения переменной, при каждом из которых уравнение обращается в верное равенство. Каждое такое значение переменной называется *корнем уравнения*.

Оба автора вводят примерно одинаковые определения линейного уравнения с одной переменной, за исключением их внешнего вида и использования Мордковичем понятия «коэффициент». Для наглядности, представим их в Таблице 9 [2; 5].

Таблица 9 – Сравнение определений

Мерзляк А.Г.	Мордкович А.Г.
1	*2*
Уравнение вида $ax = b$, где x– переменная, a и b – некоторые числа, называют *линейным уравнением с одной переменной.*	*Линейным уравнением с одной переменной* x называют уравнения вида $ax + b = 0$, где a и b – любые числа (коэффициенты).

Также стоит отметить, что каждый из авторов подробно рассматривает зависимость корня уравнения с одной переменной от коэффициентов уравнения, и Мерзляк А.Г. подводит итоги приведённых рассуждений в Таблице 10.

Таблица 10 – Итоги

Значение a и b	$a \neq 0$	$a = 0, b = 0$	$a = 0, b \neq 0$
1	*2*	*3*	*4*
Корни уравнения $ax = b$	$x = \frac{b}{a}$	x – любое число	Корней нет

График функции.

Также немаловажным является тот факт, что Мерзляк выделяет отдельный параграф 3.25 и даёт в нём следующее определение:

Графиком функции f называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции f [2].

Также автор обращает внимание на то, что если какая-то фигура является графиком функции f, то выполняются два условия:

1) если x_0 – некоторое значение аргумента, а $f(x_0)$ – соответствующее значение функции, то точка с координатами $(x_0; f(x_0))$ обязательно принадлежит графику;

2) если $(x_0; y_0)$ – координаты произвольно выбранной точки графика, то x_0 и y_0 – соответствующие значения независимой и зависимой переменных функции f, т.е. $y_0 = f(x_0)$.

Фигура, изображённая на координатной плоскости, может являться графиком функции, если любая прямая, перпендикулярная оси абсцисс, имеет с этой фигурой не более одной общей точки.

Пусть X – множество абсцисс точек фигуры. Можно говорить, что эта фигура задаёт функцию с областью определения X. Такой способ задания функции называют *графическим*.

Линейная функция.

Сравним, как Мерзляк в параграфе 3.26 и Мордкович в 2.10 рассматривают основные определения и свойства [2; 5].

Таблица 11 – Основные определения и свойства

Мерзляк А.Г.	Мордкович А.Г.
1	*2*
Функцию, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где k и b – некоторые чисел, x – независимая переменная, называют *линейной.*	Частным видом линейного уравнения с двумя переменными, является уравнение вида $y = kx + m$, где k, m – числа (коэффициенты). Зная, чему равно x, по правилу $y = kx + m$ всегда можно найти, чему равен y. Будем называть уравнение $y = kx + m$ *линейной функцией*, в этом случае x – *независимая переменная* (или *аргумент*), y – *зависимая переменная*.
Автор рассматривает случай, когда $b = 0$ и $k \neq 0$, и получает формулу $y = kx$ прямой пропорциональности, графиком которой является прямая, которая при любом k проходит через точку $O(0; 0)$.	*Теорема 3:* Графиком линейной функции $y = kx$ является прямая, проходящая через начало координат.
Следующий частный случай когда $k = 0$, получим график функции $y = b$, где $b \neq 0$ прямой, параллельно оси абсцисс, графиком функции $y = 0$ является ось абсцисс.	*Теорема 2*: Графиком линейной функции $y = kx + m$ является прямая. *Теорема 4:* Прямая, служащая графиком линейной функции $y = kx + m$, параллельна прямой, служащей графиком линейной функции $y = kx$. Коэффициент k в записи $y = kx$ называют *угловым коэффициентом.* Если $k > 0$, о линейная функция $y = kx + +m$ возрастает. Если $k < 0$, о линейная функция $y = kx + +m$ убывает.

Линейное уравнение с двумя переменными.

Мордкович рассматривает данную тему в параграфе 2.9., Мерзляк же разбивает на два параграфа 4.27 и 4.28. Рассмотрим их вместе [2; 5].

Таблица 12 – Линейное уравнение с двумя переменными

Мерзляк	Мордкович
1	*2*
Автор сообщает, что каждое равенство содержащее по две переменные x и y называют *уравнениями с двумя переменными.*	Ничего не упоминается.
Линейным уравнением с двумя переменными называют уравнение вида $ax + by = c$, где x и y – переменные, a, b, c - некоторые числа.	$ax + by + c = 0$, где a, b, c – числа (коэффициенты), - *линейное уравнение с двумя переменными* x и y (или с двумя неизвестными).
Пару значений переменных, обращающую уравнение в верное равенство, называют *решением уравнения с двумя переменными. Решить уравнение с двумя переменными* – это значит найти все его решения или показать, что оно не имеет решений.	*Решением уравнения* $ax + by + c = 0$ называют всякую пару чисел (x, y), которая удовлетворяет этому уравнению, т. е. обращает равенство с переменными $ax + by + c = 0$ в верное числовое равенство.
Графиком уравнения с двумя переменными называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, координаты которых (пары чисел) являются решениями данного уравнения.	*Графиком уравнения* $p(x; y) = 0$ называют множество всех точек плоскости xOy, при подстановке координат которых в выражение $p(x; y)$ оно принимает числовое значение 0.
Ничего не упоминается.	*Теорема 1:* Если хотя бы один из коэффициентов a, b линейного уравнения $ax + by + c = 0$ отличается от нуля, то графиком уравнения служит прямая линия.

Продолжение таблицы 12

1	2
Мерзляк на примерах рассматривает случаи зависимости графика уравнения от коэффициентов уравнения. Если $b \neq 0, a$ и c – любые, то график невертикальная прямая. Если $b = 0, a \neq 0, c$ – любые, то график вертикальная прямая. Если $a = b = c = 0$ – любые, то график вся координатная плоскость. Если $a = b = 0, c \neq 0$, то нет точек, которые могли бы служить графиком уравнения.	Автор проводит небольшое исследование, рассмотрев различные случаи представления графика линейного уравнения $ax + by + c = 0$ в зависимости от значений коэффициентов. Если $a = b = c = 0$ – любые, то график вся координатная плоскость. Если $a = b = 0, c \neq 0$, то уравнение не имеет решений. Если $a = 0, b \neq 0$, то график прямая, параллельная оси Ox. Если $a \neq 0, b = 0$, то график прямая, параллельная оси Oy. Если $a \neq 0, b \neq 0$, то график прямая, непараллельная ни одной из осей координат
Ничего не упоминается.	Далее автор подробно описывает алгоритм построения графика уравнения $ax + by + c = 0$, где $a \neq 0, b \neq 0$ по двум точкам.

Из таблицы видно, на сколько по-разному преподносят один и тот же материал авторы. Мордкович из определения к определению пытается свести всё к математической модели, Мерзляк ставит упор на функцию.

Взаимное расположение графиков линейных функций.

В параграфе Мордковича 2.11 приведена очень важная теорема, которой у Мерзляка не прослеживается ни в одном параграфе [5].

Теорема 5: Пусть даны две линейные функции $y = k_1x + m_1$ и $y = k_2x + m_2$. Прямые, служащие графиками заданных линейных функций:

1) параллельны, если $k_1 = k_2, m_1 \neq m_2$;

2) совпадают, если $k_1 = k_2, m_1 = m_24$;

3) пересекаются, если $k_1 \neq k_2$.

Системы уравнений с двумя переменными. Графический метод решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными.

Рассмотрим основные определения параграфов Мерзляка А.Г. 4.29 и Мордковича А.Г. в параграфе 3.13 в следующей таблице, для более наглядного сравнения (Таблица 12) [2; 5].

Таблица 12 – Основные определения

Мерзляк А.Г.	Мордкович А.Г.
1	*2*
Если требуется найти все общие решения нескольких уравнений, то говорят, что нужно *решить систему уравнений.* После чего упоминает, что если уравнения системы являются линейными, то такую систему называют *системой двух линейных уравнений с двумя переменными.*	Если даны два линейных уравнения с двумя переменными x и y: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ – и поставлена задача найти такие пары значений $(x; y)$, которые одновременно удовлетворяют и тому и другому уравнению, то говорят, что заданные уравнения образуют *систему уравнений.*
Решением системы уравнений с двумя переменными называют пару значений переменных, обращающую каждое уравнение в верное равенство.	Пару значений $(x; y)$, которая одновременно является решением и первого и второго уравнения системы, называют *решением системы уравнений.*
Решить систему уравнений – это значит найти все её решения или доказать (установить), что решений нет.	

Также Мордкович выделяет параграф 8.47 «Что означает в математике запись $y = f(x)$» [5].

Вводится *структура* $y = f(x)$, которую следует понимать так: имеется выражение $f(x)$ с переменной x, с помощью которого мы находим значения переменной y.

Подобное обозначение Мерзляк А.Г. введет только в начале 9-го класса, однако начинает использовать уже в 8 классе.

Использование математической модели вида $y = f(x)$ удобно, когда реальный процесс описывается различными формулами на разных промежутках изменения независимой переменной.

Приводится пример:

Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \text{если } x < 0; \\ x^2, \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

Вычислить: $f(-5), f(-2), f(1{,}5), f(4), f(0)$.

Построить график функции $y = f(x)$.

В первый раз предлагается построение графиков по точкам и в разных системах координат с последующим их соединением. Далее построение предлагается упростить, путем построения функций сразу в одной системе координат и только на тех промежутках, где они заданы. Таким образом график воспроизводится частями. Поэтому функции такого типа называют *кусочными функциями.*

Вводятся определение: *Чтение графика* – это своеобразный переход от геометрической модели (от графической модели) к словесной (к описанию свойств функции). *Построение графика* – переход от аналитической модели к геометрической.

1.2.2 Перейдем к рассмотрению изложения графического метода в учебниках Мерзляка А.Г. и Мордковича А.Г. углубленного уровня 8 класса [3; 7].

Изучение таких функций, как $y = x^2, y = \frac{k}{x}, y = |x|, y = \sqrt{x}$ приходится в основном на 8 класс, однако каждый автор предлагает свой порядок изучения. Будем сравнивать их независимо от того, в каком порядке их преподносят авторы. Основной акцент сделаем на сравнение основных определений и свойств.

Функция $y = \frac{k}{x}$.

Мерзляк предлагает к изучении функции $y = \frac{k}{x}$ в параграфе 2.15, Мордкович в параграфе 2.20. Определения и свойства приведем для наглядности в Таблице 13 [3; 7].

Таблица 13 – Определения и основные свойства

Мерзляк А.Г.	Мордкович А.Г.
1	*2*
Функцию, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называют *обратной пропорциональностью.*	Ничего не упоминается.
Фигуру, являющуюся графиком функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называют *гиперболой.* Если $k > 0$, то ветви гиперболы расположены в I и III четвертях, если $k < 0$ – то во II и IV четвертях.	Графиком функции $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ называется *гипербола*, ветви которой расположены в первом и третьем координатных углах, если $k > 0$, и во втором и четвёртом координатных углах, если $k < 0$.
Гипербола состоит из двух частей – *ветвей гиперболы.*	
Ничего не упоминается.	Каждая ветвь гиперболы в одном направлении подходит ближе и ближе к оси абсцисс, а в другом направлении к оси ординат. В подобных случаях соответствующие прямые называют *асимптотами.*
1. Значение аргумента, при котором значение функции равно 0 не существует. 2. Начало координат – центр симметрии фигуры.	1. Точка $(0; 0)$ – центр симметрии гиперболы. 2. Оси координат – асимптоты гиперболы. 3. Прямые $y = x, y = -x$ – оси симметрии гиперболы. 4. При $k = 0$ получаем функцию $y = 0$. 5. Функция непрерывна на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ и претерпевает разрыв в точке $x = 0$.

Рассмотрев данный параграф, можно сделать вывод, что Мордкович раскрывает тему более подробно и приводит большое количество примеров, в свою очередь Мерзляк излагает материал кратко и лаконично.

Функция $y = ax^2 + bx + c$.

График данной функции Мордкович начинает рассматривать ещё в 7 классе параграфа 8.45, в 8 классе он сразу он продолжает её изучение в параграфе 3.19. Мерзляк начинает изучение только в 8 классе параграфа 5.26. Рассмотрим это в Таблице 14 [3; 5; 7].

Таблица 14 – Сравнение параграфов

<table>
<tr><th>Мерзляк</th><th>Мордкович</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">В этих параграфах формулы общего вида параболической функции авторы не указывают. Оба автора приводят в пример математические модели площадь квадрата $y = x^2$, объём куба $y = x^3$ и нахождение стороны y прямоугольника, зная другую сторону x и площадь 100 см^2 – $y = \frac{100}{x}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Далее, предлагают рассмотреть функцию $y = x^2$ и её график и строят его по точкам. В результате изображения на координатной плоскости точек получают линию (фигуру), которую называют параболой.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Объясняют понятия «ветви параболы», «ось симметрии параболы», «вершина параболы».</td></tr>
<tr><td>Ничего не упоминается.</td><td>Строит график функции $y = -x^2$ и аналогично исследует её и рассматривает некоторые примеры, делая акцент на том, что этот график симметричен графику $y = x^2$ относительно оси абсцисс. Тем самым автор уже подводит к тому, что график функции $y = -f(x)$ получается из графика $y = f(x)$ с помощью преобразований симметрии относительно оси x.</td></tr>
</table>

Мордкович же свою очередь рассматривает более полное определение параболы: Графиком функции $y = kx^2 (k \neq 0)$ является *парабола* с вершиной в начале координат; ось y является осью параболы; её ветви направлены вверх при $k > 0$ и вниз при $k < 0$.

Мерзляк же познакомит обучающихся с данной функцией в 9 классе параграфа 1.5 «Построение графиков функций $y = kf(x)$ и $y = f(kx)$». Рассматривая функцию в качестве примера, не давая определений и не проводя исследований.

Также в 8 классе Мордкович рассматривает параграф 3.22 «Функция $y = ax^2 + bx + c$, её свойства и график», аналогичный параграф Мерзляк включает в 9 класс 1.7 «Квадратичная функция её свойства и график». Предлагаю, рассмотреть эти два параграфа вместе [7].

Рассмотрим определения квадратичной функции в следующей таблице (Таблица 15).

Таблица 15 – Сравнение определений

Мерзляк	Мордкович
1	*2*
Функцию, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где x – независимая переменная, a, b, c – параметры, причём $a \neq 0$, называют *квадратичной.*	Функцию $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c – произвольные числа, но $a \neq 0$, называют *квадратичной.*

Мордкович формулирует и доказывает теорему, которая также описана и у Мерзляка, но не выделена в виде теоремы.

Теорема: Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, которая получается из параболы $y = ax^2$ параллельным переносом.

Оба автора выводят следующие правила:

Осью параболы $y = ax^2 + bx + c$ служит прямая $x = -\frac{b}{2a}$; абсцисса x_0 вершины параболы вычисляется по формуле $x_0 = -\frac{b}{2a}$, а ордината $y_0 = = -\frac{D}{2a}$.

Ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$.

После чего авторы формулируют довольно схожие алгоритмы построения параболы $y = ax^2 + bx + c$, различие лишь в том, что Мордкович предлагает провести ось параболы и строить симметричные точки, а Мерзляк разбивает алгоритм на большее количество пунктов и расписывает их более подробно, что упрощает работу по нему. Поэтому приведём в пример только алгоритм Мерзляка, однако будем помнить о возможности строить точки симметрично.

1) найти абсциссу вершины параболы по формуле $x_0 = -\frac{b}{2a}$;

2) найти ординату вершины параболы по формуле $y_0 = -\frac{D}{2a}$ и отметить на координатной плоскости вершину параболы;

3) определить направление ветвей параболы;

4) вычислить координаты нескольких точек, принадлежащих искомому графику, в частности координаты точек пересечения с осью абсцисс (если данная функция имеет нули), координату точки пересечения с осью ординат; отметить эти точки на координатной плоскости;

5) провести через все отмеченные точки плавную непрерывную линию.

Функция $y = \sqrt{x}$.

Оба автора рассматривают график функции $y = \sqrt{x}$. Мерзляк в параграфе 5.31, а Мордкович в параграфе 2.13.

Авторы начинают параграф с построения графика $y = \sqrt{x}$ по точкам и проводят её исследование. Основные моменты которых заключаются в следующем:

1. График $y = \sqrt{x}$ – это ветвь параболы.
2. Всегда проходит через точку $(0; 0)$.
3. Большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Рассматриваются примеры, на чём изложение параграфа Мерзляком заканчивается. Мордкович же далее рассматривает функцию $y = -\sqrt{x}$, обращая внимание на то, что ещё в 7 классе говорили о том, что график функции $y = -f(x)$ получается из графика $y = f(x)$ с помощью преобразований симметрии относительно оси x. Воспользовавшись этим, строится график $y = -\sqrt{x}$ и исследуются его свойства.

Рассмотрим основные преобразования графиков.

Построение графиков функций $y = kf(x)$ и $y = f(kx)$.

Мерзляк в 9 классе выделяет параграф 2.19 для построения графиков функций данного типа. Мы его рассмотрим здесь только для конструктивности. Мордкович подобного параграфа не выделяет [4].

График функции $y = kf(x)$, где $k > 0$, можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = f(x)$ на точку с той же абсциссой и ординатой, умноженной на k.

Если $k < 0$, то также строится график $y = kf(x)$, только симметричный относительно оси абсцисс.

График функции $y = f(kx)$, где $k > 0$, можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = f(x)$ на точку с той же абсциссой и ординатой, разделенной на k.

Если $k < 0$, то также строится график $y = f(kx)$, только симметричный относительно оси ординат.

Построение графиков функций $y = f(x) + b$ и $y = f(x + a)$.

Мордкович в 8 классе предлагает к рассмотрению параграф 3.21, Мерзляк, в свою очередь, рассматривает подобный параграф в 9 классе 1.5.

Оба автора определяют данные предобразования одинаково, однако за основу возьмем текст из учебника Мерзляка [4; 7].

График функции $y = f(x) + b$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $y = f(x)$ вдоль оси ординат на b единиц вверх, если $b > 0$, и на $-b$ единиц вниз, если $b < 0$.

График функции $y = f(x + a)$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $y = f(x)$ вдоль оси абсцисс на a единиц влево, если $a > 0$, и на $-a$ единиц вправо, если $a < 0$.

Построение графиков функций $y = f(|x|)$ *и* $y = |f(x)|$.

Рассматривается у Мордковича в 8 классе параграфа 3.25, у Мерзляка, в 9 классе параграф 1.6. В данном случае авторы расходятся в мнениях, как построить необходимые графики, вследствие чего приведем два подхода и оформим их в виде Таблицы 16 [4; 7].

Таблица 16 – Подходы к построению графиков функций

Функция	Мерзляк А.Г.	Мордкович А.Г.
1	*2*	*3*
$y = f(\|x\|)$	1. построить ту часть графика $y = f(x)$, все точки которой имеют неотрицательные абсциссы; 2. построить фигуру, симметричную полученной относительно оси ординат. Объединение двух фигур является графиком функции $y = f(\|x\|)$	1. Построить график функции $y = f(x)$ и взять его часть при $x \geq 0$. 2. Добавить ветви, симметричные построенным относительно оси y.
$y = \|f(x)\|$	1.ту часть графика $y = f(x)$, все точки которой имеют неотрицательные ординаты, оставить без изменений; 2. построить фигуру, симметричную относительно оси абсциссой части графика функции $y = f(x)$, точки которой имеют отрицательные ординаты. Объединение этих двух построенных фигур и составляет график функции $y = \|f(x)\|$	1. Построить график функции $y = f(x)$. 2. Оставить без изменений те части графика $y = f(x)$, которые лежат не ниже оси x. 3. Части графика функции $y = f(x)$, которые лежат ниже оси x, заменить на симметричные им относительно оси x.

Схема построения по Мордковичу обучающимся явно будет более понятна и легка для запоминания.

1.2.3 Перейдем к рассмотрению изложения графического метода в учебниках Мерзляка А.Г. и Мордковича А.Г. углубленного уровня 9 класса.

Уравнение с двумя переменными.

Сравним параграф 2.10 учебников Мерзляка А.Г. и 2.8 Мордковича А.Г. за 9 классы по определениям, которые представим в Таблице 17 [4; 9].

Таблица 17 – Сравнение определений

Мерзляк	Мордкович
1	*2*
Если на координатной плоскости xy отметить все точки, координаты которых являются решением уравнения $F(x; y) = 0$, то полученную фигуру называют *графиком* этого уравнения.	Пусть дано уравнение $p(x; y) = 0$. Множество точек $(x; y)$ координатной плоскости xOy таких, что $(x; y)$ – решение уравнения $p(x; y) = 0$, называют *графиком* уравнения.

Продолжение таблицы 17

1	*2*
Пару чисел $(x_0; y_0)$ называют *решением уравнения* $F(x; y) = 0$, если $F(x_0; y_0) = 0$ – верное числовое равенство.	*Уравнением с двумя переменными* называют уравнение вида $f(x; y) = 0$, где $f(x; y)$ – алгебраическое выражение. *Решением уравнения с двумя переменными* $f(x; y) = 0$ называют пару чисел $(x; y)$, которая удовлетворяет уравнению, т.е. постановка, которая в уравнение обращает его верное числовое равенство.
Данный факт выводится и формулируется в курсе геометрии 9 класса.	Графиком уравнения $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ на координатной плоскости xOy является окружность с центром в точке $O'(a; b)$ и радиусом $r (r > 0)$

Исходя из таблицы Мордкович раскрывает определения наиболее полно.

Степенная функция.

Сравнив и рассмотрев параграфы 4.19 Мерзляка и 3.19 Мордковича за 9-е классы можно создать таблицу главных отличий параграфов (Таблица 18) [4; 9].

Таблица 18 – Отличие параграфов

Мерзляк	Мордкович
1	*2*
Изучает и доказывает свойства искомой функции. На основе свойств воссоздаёт график.	Точечно строит график искомой функции. На основе графика формулирует свойства функции. Доказывает найденные свойства.
Изучаются функции: $y = x^{2n}$ $(n \in N)$; $y = x^{2n+1}$ $(n \in N)$.	Изучаются функции: $y = x^{2n}$ $(n \in N)$; $y = x^{2n+1}$ $(n \in N)$; $y = x^{-2n}$ $(n \in N)$; $y = x^{-(2n-1)}$ $(n \in N)$.
Итоги параграфа выводятся в виде функции и её свойств.	Итоги параграфа выводятся в виде функции и её графика.

Рассмотрим, какие задания с параметром предлагают к решению, с помощью графического метода, обучающимся в учебниках Мерзляка А.Г. и Мордковича А.Г. [2; 3; 4; 6; 8; 10].

Из каждого рассмотренного учебника выберем по три номера, два из которых решим. Третий пример будет представлен только в виде формулировки.

Для начала рассмотрим какие номера предлагают авторы в учебниках 7-го класса [2;6].

Задача 26.43. (А.Г. Мерзляк). Графики функций $y = 0{,}5x - 3$, $y = -4x + 6$ и $y = kx$ пересекаются в одной точке. Найдите значение k. Постройте в одной системе координат графики этих функций.

Графиками всех трёх функций являются прямые. Построение первых двух прямых можно осуществить, например, по двум точкам. В результате построения находим точку пересечения $(2; -2)$ прямых. Также обращаем внимание, на то, что искомый график функции ввиду отсутствия коэффициента b, то есть $b = 0$ будет проходить через начало координат, а также через найденную точку пересечения двух других прямых. Изобразив третью прямую, можно сразу заметить, что искомая функция $y = -x$, следовательно, $k = -1$ (рисунок 1).

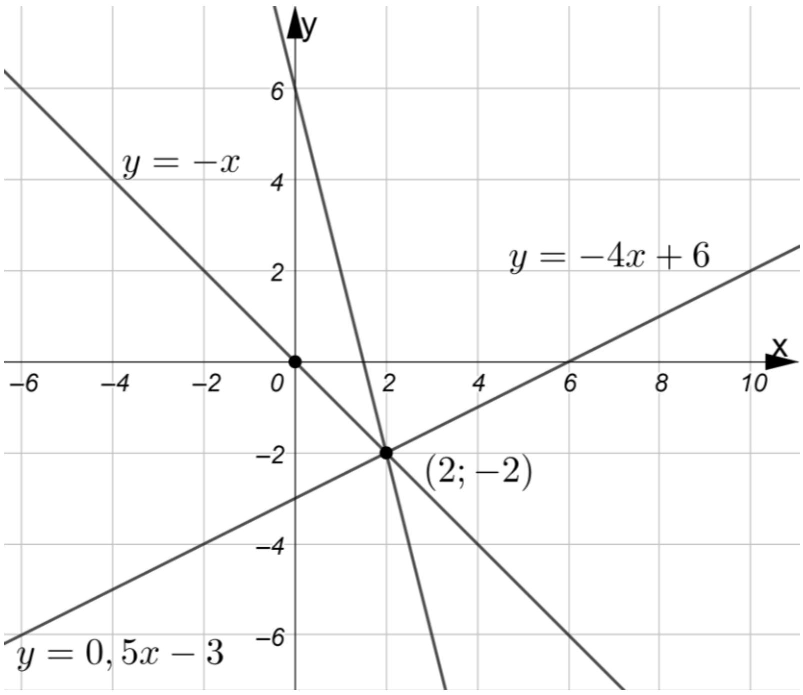

Рисунок 1 – Графики функций к задаче 26.43

Если же обучающийся не распознал график третьей функции, то он всегда может подставить в функцию $y = kx$ координаты точки $(2; -2)$, через которую должна пройти прямая и решить получившееся уравнение.

Таким образом, мы постоим графики функций и найдем необходимый коэффициент, практически без вычислений.

Однако не нужно забывать про проверку. Для проверки подставим точку пересечения во все три уравнения и убедимся, что получаются верные равенства. После проверки можно формулировать ответ: при $k = -1$ графики функций пересекаются в одной точке.

Можно сделать вывод, что графический метод решения, в данном случае, оптимальнее алгебраического, так как сама задача требует изображения получившихся графиков.

Задача 29.16. (А.Г. Мерзляк). При каких значениях a система уравнений:

$\begin{cases} 7x - 12y = 4, \\ 7x - 12y = a \end{cases}$ не имеет решений;

$\begin{cases} 6x - ay = 4, \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

Решение систем необходимо воспользоваться правилом из этого параграфа «Если графиками уравнений, входящих в систему линейных уравнений, являются прямые, то количество решений этой системы зависит от взаимного расположения двух прямых на плоскости:

1) если прямые пересекаются, то система имеет единственное решение;

2) если прямые совпадают, то система имеет бесконечно много решений;

3) если прямые параллельны, то система решений не имеет.».

Следуя правилу, для решения первой системы, необходимо изобразить на плоскости две параллельные прямые. График первой функции довольно легко изобразить по двум точкам. График второй функции можно изобразить при двух разных значениях параметра a (рисунок 2).

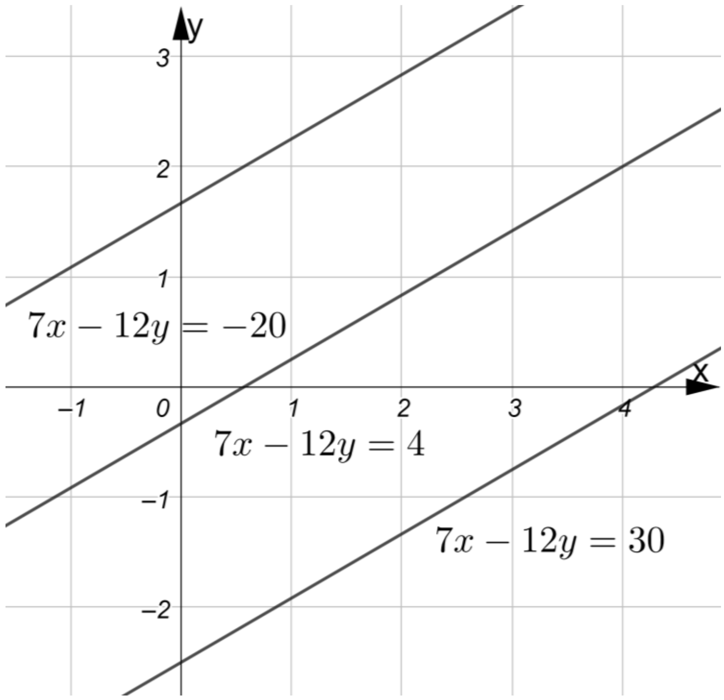

Рисунок 2 – Графики функций к первой системе задачи 29.16

В результате чего можно сделать вывод, что значение параметра виляет лишь на движение прямой, угол наклона при этом не меняется. В результате чего можно легко сделать вывод, что прямые всегда будут параллельны, кроме того случая, когда они совпадают (при $a = 4$). Следовательно, при $a \neq 4$, система уравнений не будет иметь решений.

Что касаемо решения второй системы, то здесь необходимо подобрать такое число a, чтобы прямые совпали, а для этого необходимо чтобы их функции совпали. Можно заметить, что при умножении обеих частей второго уравнения мы получим совпадающие коэффициенты при переменной x и свободной переменой. Следовательно параметр a должен быть равен удвоенному коэффициенту при переменной y. Получаем, что при $a = 10$ система уравнений будет иметь бесконечно много решений, а прямые будут изображены, как две совпадающие.

Задача 26.36. (А.Г. Мерзляк). Все точки графика функции $y = kx + b$ имеют одинаковую ординату, равную -6. Найдите значения k и b.

Задача 47.48. (А.Г. Мордкович). При каких значениях p данное уравнение имеет один корень:

а) $\frac{2x^3+6x^2}{2x+6} = p$;

б) $\frac{x^4-4x^3}{x^2-4x} = p$;

в) $\frac{9x^2-3x^3}{3x-9} = p$;

г) $\frac{x^4-2x^3}{x^2-2x} = p$?

Рассмотрим к примеру решение четвертого уравнения $\frac{x^4-2x^3}{x^2-2x} = p$. Разобьём уравнение на две функции $y = \frac{x^4-2x^3}{x^2-2x}$ и $y = p$.

Функция $y = \frac{x^4-2x^3}{x^2-2x}$ задана достаточно ложным выражением, значит нужно попробовать её упростить:

$$y = \frac{x^4 - 2x^3}{x^2 - 2x} = \frac{x^2(x^2 - 2x)}{x^2 - 2x} = x^2.$$

Итак, получаем $y = x^2$, правда, надо учесть, что $x^2 - 2x \neq 0$. Вынесем из него общий множитель, получим. $x(x-2) \neq 0$. Это равенство выполнится в том случае, если хотя бы один из множителей будет равен нулю, откуда получаем, что $x \neq 0$ или $x \neq 2$.

Построим на координатной плоскости параболу $y = x^2$ с «выколотыми» точками $(0; 0)$и $(2; 4)$.

График функции $y = p$ прямая параллельная оси абсцисс. Для построения графика данной функции, зададим параметру некоторые числовые значения.

Изобразим оба графика в одной координатной плоскости (рисунок 3).

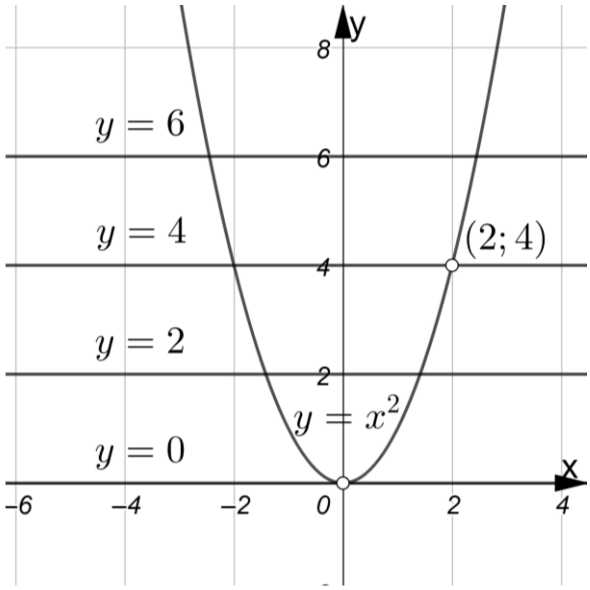

Рисунок 3 – Графики функций к четвёртому уравнению задачи 47.48

Из графика видно, что только при $p = 4$ одна точка пересечения графиков, а следовательно и один корень. Ответ: при $p = 4$ уравнение имеет один корень.

Задача 47.53. (А.Г. Мордкович). При каких значениях b уравнение $f(x) = b$, где $f(x) = \begin{cases} x + 6, & \text{если } x \le -2; \\ x^2, & \text{если} - 2 < x \le 3, \end{cases}$

а) имеет один корень;

б) имеет два корня;

в) имеет три корня;

г) не имеет корней?

Решение необходимо начать с построение кусочно-заданного графика. Линейную функцию построим по двум точкам, так как обучающиеся ещё не знакомы с параллельным переносом. Параболу можно изобразить с помощью шаблона (который автор предложил изловить в параграфе 8.45) или по точкам.

График функции $f(x) = b$ – прямая параллельная оси абсцисс.

Изобразим в одной системе координат кусочно-заданную функцию и прямую при разных значениях параметра b (рисунок 4).

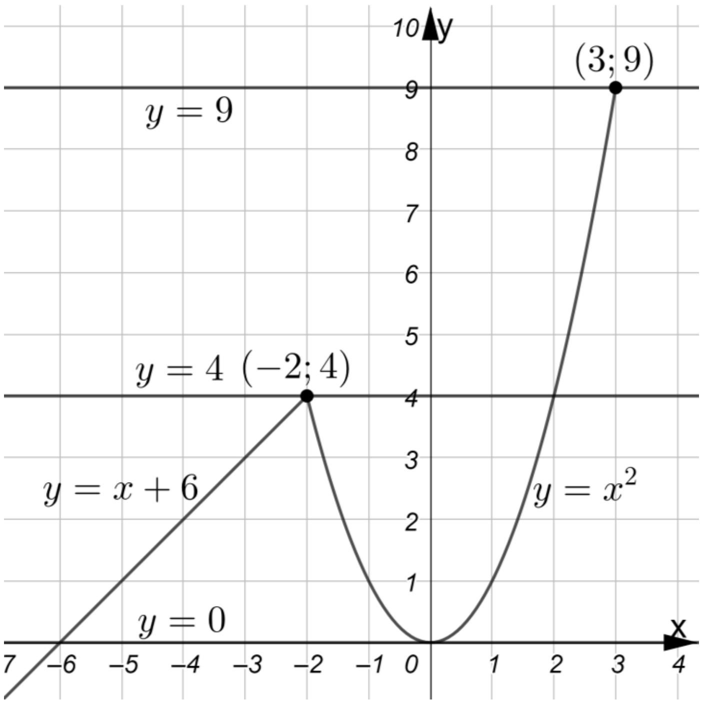

Рисунок 4 – Графики функций к задаче 47.53

Количество точек пересечения прямой и кусочно-заданной функции соответствует количеству корней уравнения $f(x) = b$.

Опираясь на график можно легко сформулировать ответ:

а) при $b < 0$ и $4 < b \leq 9$ – один корень;

б) при $b = 0$ и $b = 4$ – два корня;

в) при $0 < b < 4$ – три корня;

г) при $b > 9$ – нет корней.

Задача 11.20. (А.Г. Мордкович). Даны две линейные функции $y = k_1x + m_1, y = k_2x + m_2$. Подберите такие коэффициенты k_1, k_2, m_1, m_2, Чтобы графики линейных функций пересекались, причём обе функции были:

а) возрастающими;

б) убывающими.

Рассмотрим какие номера предлагают к решению обучающимся А.Г. Мерзляк и А.Г. Мордкович в учебниках 8-го класса [3;8].

Задача 25.29. (А.Г. Мерзляк). Определите количество корней уравнения в зависимости от значения параметра a:

1) $|x-1|+|x+1|=a$;

2) $|x-2|-|x+2|=a$.

Рассмотрим решение первого уравнения. Разобьем его на две функции $y=|x-1|+|x+1|$ и $y=a$.

Построим первую функцию. Числа 1 и -1 разбивают область определения уравнения на три промежутка: $(-\infty;-1), [-1;1], (1;+\infty)$, на каждом из которых значения выражений $x-1$ и $x+1$ сохраняют знак.

На промежутке $(-\infty;-1)$ значения выражений $x-1$ и $x+1$ отрицательны. На промежутке $[-1;1]$ выражение $x+1$ принимает неотрицательные значения, а выражение $x-1$ – неположительные. На промежутке $(1;+\infty)$ значения выражений $x-1$ и $x+1$ положительны. Следовательно, функция $y=|x-1|+|x+1|$ равносильна совокупности трёх систем

1) $\begin{cases} x<-1, \\ -x+1-x-1=y; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-1, \\ y=-2x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} -1\le x\le 1, \\ -x+1+x+1=y; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1\le x\le 1, \\ y=2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x>1, \\ x-1+x+1=y; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1, \\ y=2x. \end{cases}$

Следовательно, фактически, необходимо построить график кусочно-заданной функции

$$y=\begin{cases} -2x, & \text{если } x<-1; \\ 2, & \text{если } -1\le x\le 1; \\ 2x, & \text{если } x>1. \end{cases}$$

Функция $y=a$ является прямой параллельной оси Oх, которая будет двигаться вдоль оси Oy в зависимости от коэффициента a. Изобразим несколько прямых с различными значениями параметра a.

Графики таких функций в одной системе координат будут выглядеть следующим образом (рисунок 5).

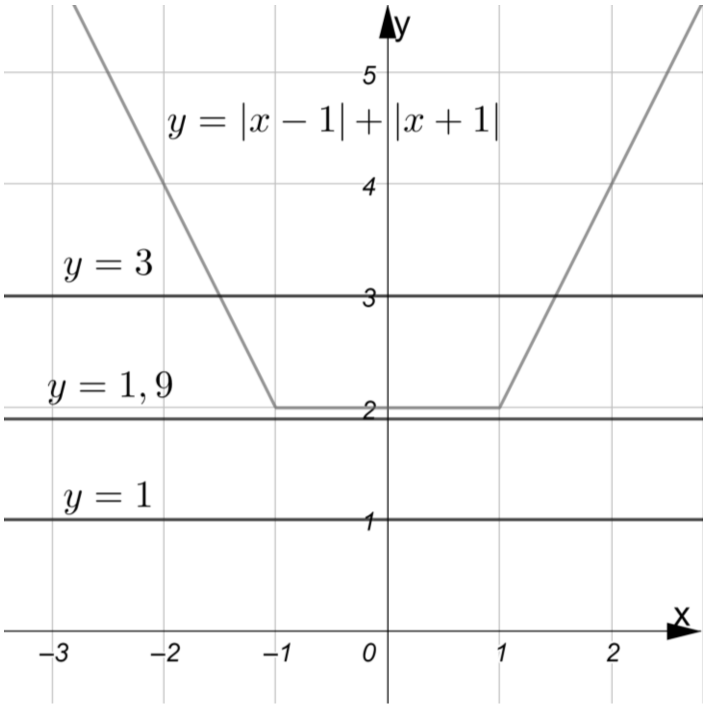

Рисунок 5 – Графики функций к первому уравнению задачи 11.20

Количество решений уравнения $|x-1|+|x+1|=a$ будет зависеть от количества точек пересечения этих графиков.

Довольно легко заметить, что при $a<2$ решений нет, при $a=2$ решений бесконечно много, а при $a>2$ два решения.

Проверка подтверждает сформулированный ответ.

Аналогичным образом можно решить и второе уравнение.

Задача 27.49. (А.Г. Мерзляк) Для каждого значения параметра a решите уравнение:

1) $a\sqrt{x-1}=0$;

2) $\sqrt{(a-1)x}=0$;

3) $a\sqrt{x-1}=a$;

4) $\sqrt{x-2}=a$;

5) $(x-1)\sqrt{x-a}=0$;

6) $(2-a)\sqrt{x-2}=0$.

Для примера рассмотрим уравнение под номером два $\sqrt{(a-1)x}=0$. Раздаём его на две функции $y=\sqrt{a-1}$ и $y=\sqrt{x}$. Подкоренное выражение должно быть положительным, поэтому вводим следующие ограничения $a - -1 \geq 0$ и $y \geq 0$, что означает, что функция $y = \sqrt{a-1}$ будет двигаться только в верхней полуплоскости включая ось Ox, и $x \geq 0$, что означает, что работать мы будем только с правой полуплоскостью.

Также стоит отметить, что функция $y = \sqrt{a-1}$ будет изображена на плоскости не как ветвь параболы, а как прямая, параллельная оси Ox, так как a является параметром, вместо которого ставится числовое значение.

Изобразим на плоскости все графики и ограничения (рисунок 6).

Количество решений будет зависеть от количества точек пересечения графиков с осью Ox.

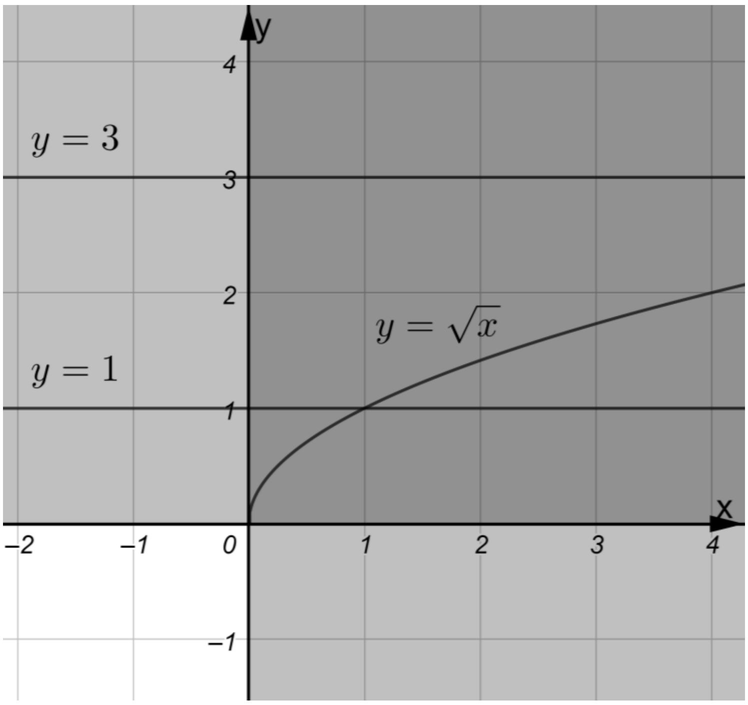

Рисунок 6 – Графики функций ко второму уравнению задачи 27.49

Функция $y = \sqrt{a-1}$ при некотором значении параметра a совпадает с осью Ox и имеет множество решений. Для того, чтобы найти данное значения параметра, необходимо место y взять числовое значение равное нулю. В итоге получим следующее уравнение $0 = \sqrt{a-1}$, где можно заметить, что параметр a должен быть равен единице. Можем сформулировать ответ: при $a = 1$ корней бесконечно много, при $a \neq 1$ один корень ($x = 0$).

Проверка подтверждает сформулированный ответ.

Задача 27.44. (А.Г. Мерзляк). При каких значениях параметра a не имеет корней уравнение:

$(x - a)\left(\sqrt{x} + 1\right) = 0;$

$\dfrac{x - a}{\sqrt{x} - 1} = 0?$

Задача 25.28. (А.Г. Мордкович). При каких значениях параметра k графики функций $y = |x + 1| - |x + 3|$ и $y = kx - 4$:

а) не имеют общих точек;

б) имеют одну общую точку;

в) имеют две общие точки;

г) имеют бесконечно много общих точек?

Построим первую функцию. Числа -1 и -3 разбивают область определения уравнения на три промежутка: $(-\infty; -3), [-3; -1], (-1; +\infty)$, на каждом из которых значения выражений $x + 1$ и $x - 3$ сохраняют знак.

На промежутке $(-\infty; -3)$ значения выражений $x + 1$ и $x - 3$ отрицательны. На промежутке $[-3; -1]$ выражение $x + 3$ принимает неотрицательные значения, а выражение $x + 1$ −неположительные. На промежутке $(-1; +\infty)$ значения выражений $x + 1$ и $x - 3$ положительны. Следовательно, функция $y = |x + 1| - |x + 3|$ равносильна совокупности трёх систем

1) $\begin{cases} x < -3, \\ -x - 1 + x + 3 = y; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -3, \\ y = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} -3 \le x \le -1, \\ -x - 1 - x - 3 = y; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \le x \le -1, \\ y = -2x - 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x > -1, \\ x + 1 - x - 3 = y; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1, \\ y = -2. \end{cases}$

Следовательно, фактически, необходимо построить график кусочно-заданной функции

$$y = \begin{cases} 2, & \text{если } x < -3; \\ -2x - 4, & \text{если } -3 \le x \le -1; \\ -2, & \text{если } x > -1. \end{cases}$$

Функция $y = kx - 4$ будет представлять собой пучок прямых, так как коэффициент k, отвечающий за угол наклона, неизвестен. Пучок прямых смещён по оси Oy относительно начала координат на четыре единицы вниз.

Изобразим получившееся графики в одной системе координат (рисунок 7).

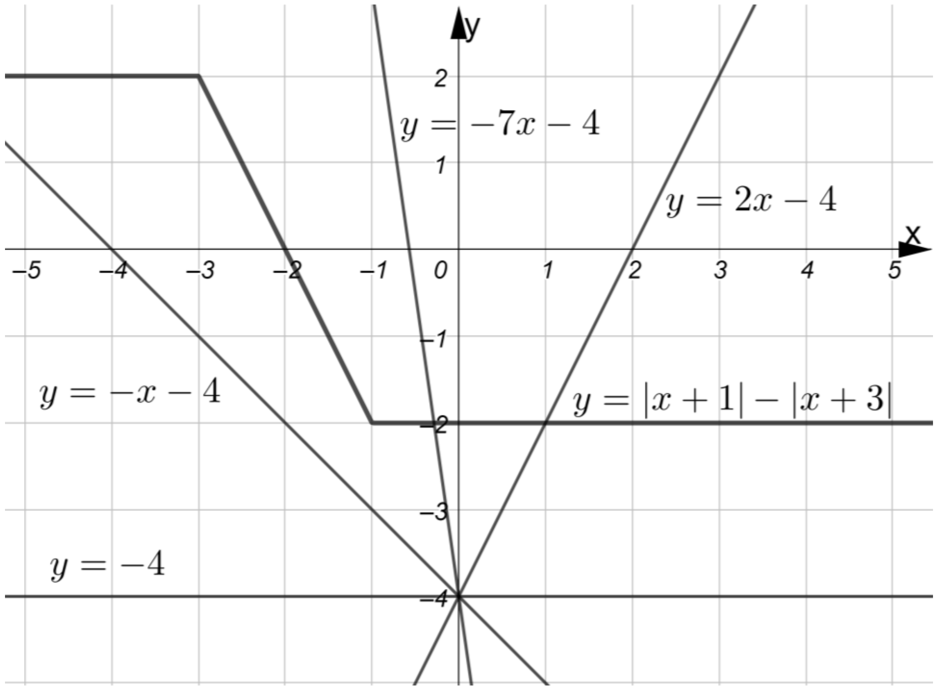

Рисунок 7 – Графики функций к задаче 25.28

На первые три вопроса задачи ответить довольно легко, просто взглянув на рисунок. Графики функций не имеют общих точек при $k = 0$. Две общие точки не получатся ни при одном положении прямой. Графики имеют одну общую точку почти всегда, за исключением первого и четвертого случая. Осталось узнать при каком значении углового коэффициента прямая и часть первой функции $\begin{cases} -3 \le x \le -1, \\ y = -2x - 4. \end{cases}$ Совпадут, и совпадут ли. Да, совпадут, так как взглянув на уравнение системы

$y = -2x - 4$, можно легко утверждать, что оно соответствует общему виду $y = kx - 4$, где $k = -2$. Следовательно, прямые совпадаю при $k = -2$. А для нас это означает, что при $k = -2$ графики имеют бесконечно много общих точек. Сформулируем ответ на задачу. Графики функций:

а) не имеют общих точек при $k = 0$;

б) имеют одну общую точку при $k < -2, -2 < k < 0, k > 0$;

в) имеют две общие точки, таких значений при k нет;

г) имеют бесконечно много общих точек при $k = -2$.

Задача 44.48. (А.Г. Мордкович).

а) При каких значениях параметра a уравнение $\left|\frac{x+1}{x}\right| = a$ имеет ровно один корень?

б) При каких значениях параметра a график функции $y = \left|\frac{x+1}{x}\right|$ имеет с прямой $y = x + a$ ровно две общие токи? Для каждого значения a найдите эти точки.

Решим задание под второй буквой. Для начала, необходимо привести функцию $y = \left|\frac{x+1}{x}\right|$ к более знакомому для нас виду. Для этого выделим целую часть, получим следующее. $y = \left|\frac{1}{x} + 1\right|$. График функции $y = \frac{1}{x}$ нам уже знаком – это гипербола, где $x = 0$ ассимптота. Составим схему преобразования функции:

$$y = \frac{1}{x} \rightarrow y = \frac{1}{x} + 1 \rightarrow y = \left|\frac{1}{x} + 1\right|.$$

Вначале построим гиперболу, потом сместим её на единицу вверх, после чего верхнюю полуплоскость оставим без изменений, а нижнюю отразим наверх относительно оси абсцисс.

Графиком функции $y = x + a$ является прямая, которая получается из функции $y = x$ путем смещения вдоль оси Oy на a единиц.

Соединим все графики в одной системе координат (рисунок 8).

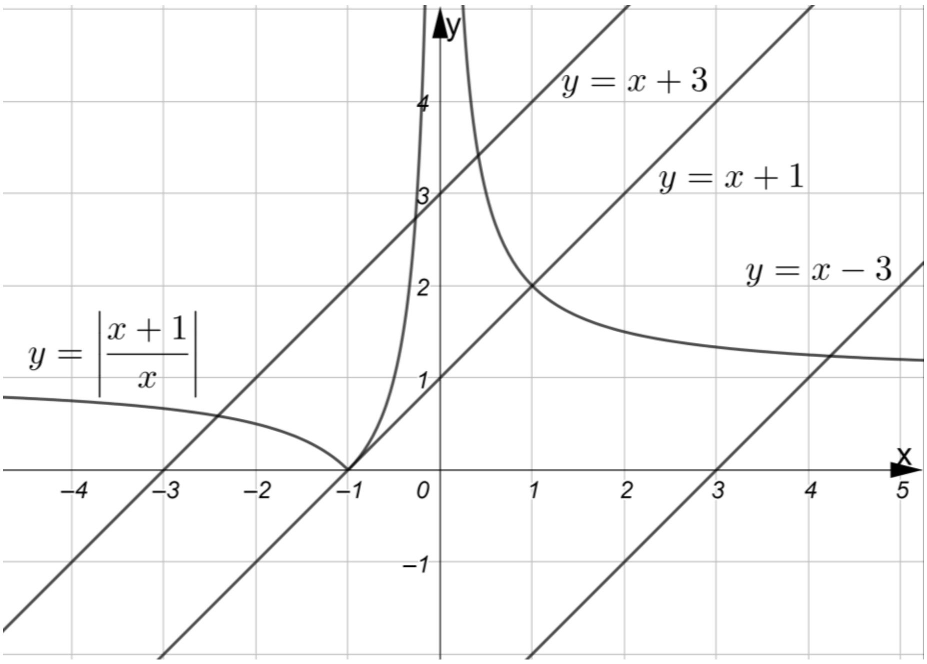

Рисунок 8 – Графики функций к задаче 44.48

Из которого довольно легко заметить, что графики будут пересекаться в двух точках только при $a = 1$.

Осталось найти эти точки. Если график верно построен, то найти их не составит труда это точки $(1; 2)$ и $(-1; 0)$. Однако, в любом случае необходима проверка Решив уравнение $\left|\frac{x+1}{x}\right| = x + 1$, получим $x = -1$ и $x = 1$. Подставив эти два значения, например, в уравнение $y = x + 1$, найдем соответствующие им значения $y = 0$ и $y = 2$. Таким образом можно сформулировать ответ:

При $a = 1$ графики функций будут иметь ровно две общие точки $(1; 2)$ и $(-1; 0)$.

Задача 20.56. (А.Г. Мордкович). При каких значениях k существуют такие значения $a \in (0; 1)$, что уравнение $\frac{k}{x} = a$:

а) не имеет корней;

б) имеет корни;

в) имеет ровно один корень?

Рассмотрим какие номера предлагают к решению обучающимся А.Г. Мерзляк и А.Г. Мордкович в учебниках 9-го класса [4; 10].

Задача 7.47. (А.Г. Мерзляк). Установите, сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра a:

1) $|x^2 - 4|x| + 3| = a$;

2) $x^2 + 3|x - 1| - 1 = a$.

Рассмотрим решение первого уравнения. Разобьём уравнение на две функции. $y = |x^2 - 4|x| + 3|$ и $y = a$. Для начала изобразим график первой функции, будем это делать в несколько этапов, отразим эти этапы в схеме:

$$y = x^2 - 4\,x + 3 \ \rightarrow y = x^2 - 4|x| + 3 \ \rightarrow \ y = |x^2 - 4|x| + 3|.$$

Вначале строим параболу $y = x^2 - 4\,x + 3$. Изобразим этап $y = x^2 - -4|x| + 3$, для этого необходимо график левой полуплоскости удалить и отразить часть графика правой полуплоскости относительно оси Oy на левую полуплоскость. Последний шаг $y = |x^2 - 4|x| + 3|$, отразить график, находящийся в нижней полуплоскости на верхнюю полуплоскость, относительно оси абсцисс.

Графиком функции $y = a$ является прямая параллельная оси абцисс, которая будет двигаться вдоль оси Oy в зависимости от значения параметра a. Изобразим в одной плоскости эти графики (рисунок 9).

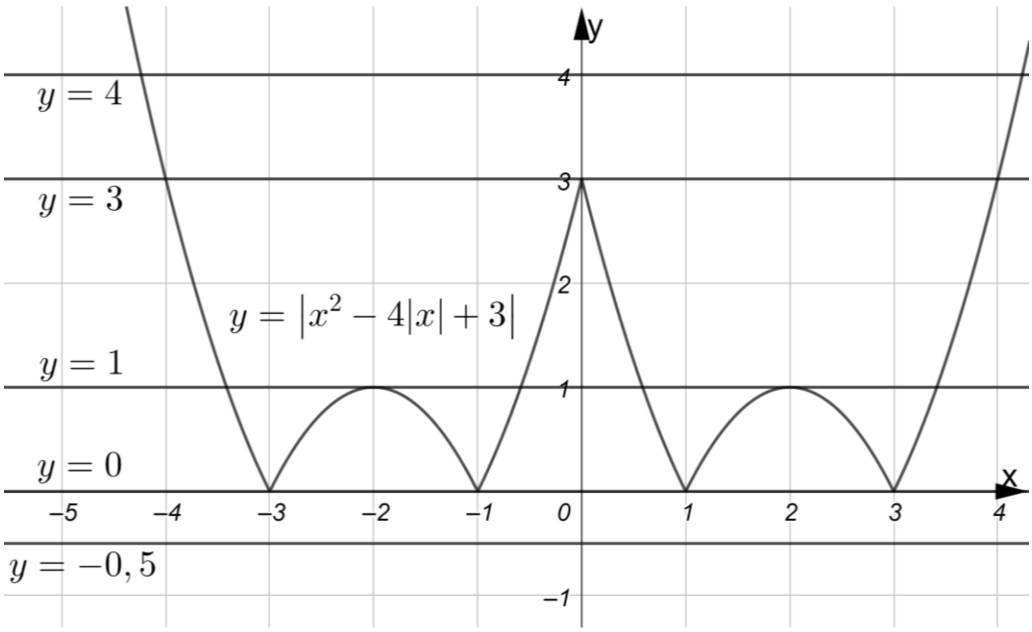

Рисунок 9 – Графики функций к задаче 7.47

Теперь довольно легко дать ответ на задачу:

При $a < 0$ уравнение корней не имеет: при $a = 0$ или $1 < a < 3$ четыре корня; при $0 < a < 1$ восемь корней; при $a = 1$ шесть корней; при $a = 3$ три корня; при $a > 3$ два корня.

Задача 11.6. (А.Г. Мерзляк). Сколько решений в зависимости от значения параметра a имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ |y| = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = a - |x|; \end{cases}$

3) $\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a? \end{cases}$

Разберем систему под номером три. Для начала построим график первого уравнения. Так как под модулями чисел находятся сразу две переменные, будем его раскрывать в зависимости от четверти, в которой находится график I, II, III, IV соответственно:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ y = 1 - x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0, y \geq 0, \\ y = 1 + x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0, y \leq 0, \\ y = -1 - x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, y \leq 0, \\ y = -1 + x. \end{cases}$$

Следовательно, фактически, необходимо построить график кусочно-заданной функции

$$y = \begin{cases} 1 - x, & \text{если } x \geq 0, y \geq 0; \\ 1 + x, & \text{если } x \leq 0, y \geq 0; \\ -1 - x, & \text{если } x \leq 0, y \leq 0; \\ -1 + x, & \text{если } x \geq 0, y \leq 0. \end{cases}$$

Графиком второго уравнения является окружность с центром в начале координат и радиусом равным $\sqrt{a}$. Изобразим одной системе координат оба графика (рисунок 10).

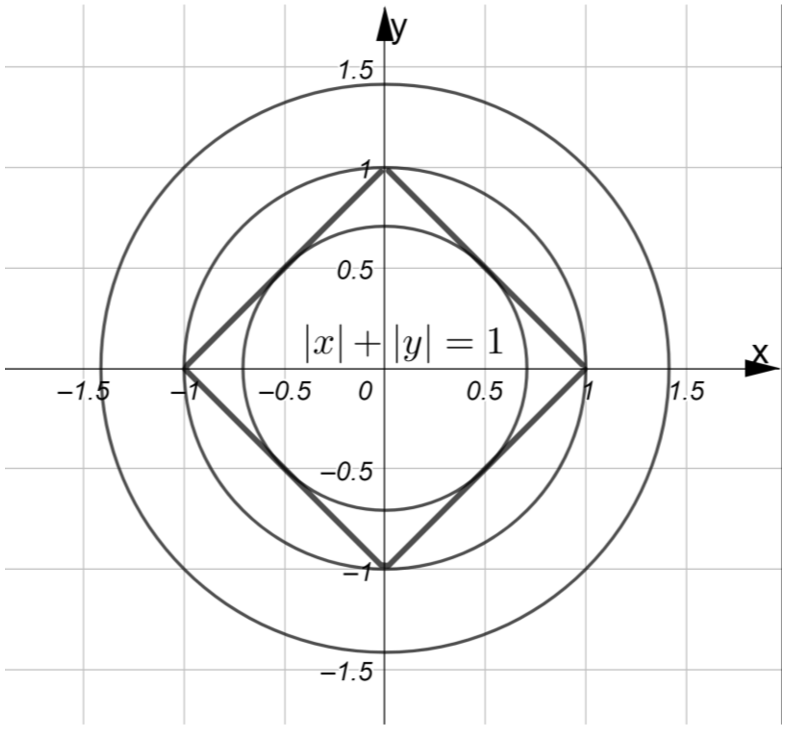

Рисунок 10 – Графики функций к третьей системе задачи 11.6

Из рисунка видно, что мы можем получить 8 корней, 4 корня или вовсе не получить корней.

Понятно, что при $a = 1$ будет 4 корня, так как радиус равен еденице,а для того чтобы найти a необходимо радиус возвести в квадрат, отсюда и $a = 1$.

Так же нас интересует второй случай, когда также количество корней равно четырем. Для начала необходимо понять, какой радиус у данной окружности. Ясно, что одной из точек соприкосновения будет середина диагонали единичного квадрата. Длина такой диагонали равна $\sqrt{2}$, тогда её половина $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ и есть радиус интересующей нас окружности. Тогда, для того, чтобы найти a необходимо $\sqrt{\frac{1}{2}}$ возвести в квадрат. Откуда и получаем, что $a = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

Теперь можно легко сформулировать ответ: если $a < 0{,}5$ или $a > 1$, то решений нет; если $a = 0{,}5$ или $a = 1$, то четыре решения; если $0{,}5 < a <$ < 1, то восемь решений.

Задача 18.67. (А.Г. Мерзляк). При каких значениях параметра a уравнение $(\sqrt{x} - a)(4x - 9) = 0$ имеет единственное решение.

Задача 8.58. (А.Г. Мордкович). При каких значениях параметра b прямая $x = b$ имеет с графиком уравнения $2|y + 3| - 2|y - 2| + |y - 4| =$ $= y + 2x$ ровно две общие точки?

Работаем по аналогии с предыдущими случаями. Получаем четыре промежутка: $(-\infty; -3), [-3; 2], (2; 4], (4; +\infty)$, на каждом из которых значения выражений $y + 3$, $y - 2$ и $y - 4$ сохраняют знак.

На промежутке $(-\infty; -3)$ значения выражений $y + 3$, $y - 2$ и $y - 4$ отрицательны. На промежутке $[-3; 2]$ выражения $y - 2$ и $y - 4$ принимают неположительные значения, а выражение $y + 3$ – неотрицательное. На промежутке $(2; 4]$ выражение $y - 4$ принимает неположительные значения, а выражения $y + +3, y - 2$ –неотрицательные.

На промежутке $(4; +\infty)$ значения выражений $y + 3$, $y - 2$ и $y - 4$ положительны. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности четырёх систем.

$$\begin{cases} y < -3, \\ -2y - 6 + 2y - 4 - y + 4 - y - 2x = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < -3, \\ -2y - 2x - 6 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \le y \le 2, \\ 2y + 6 + 2y - 4 - y + 4 - y - 2x = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \le y \le 2, \\ 2y - 2x + 6 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 < y \le 4, \\ 2y + 6 - 2y + 4 - y + 4 - y - 2x = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 < y \le 4, \\ -2y - 2x + 14 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 4, \\ 2y + 6 - 2y + 4 + y - 4 - y - 2x = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 4, \\ 6 - 2x = 0. \end{cases}$$

Следовательно, фактически, необходимо построить график кусочно-заданной функции.

Прямая $x = b$ параллельна оси Oy, она будет двигаться вдоль оси Ox в зависимости от коэффициента b.

Изобразим эти графики в одной системе координат, они будут выглядеть следующим образом (рисунок 11).

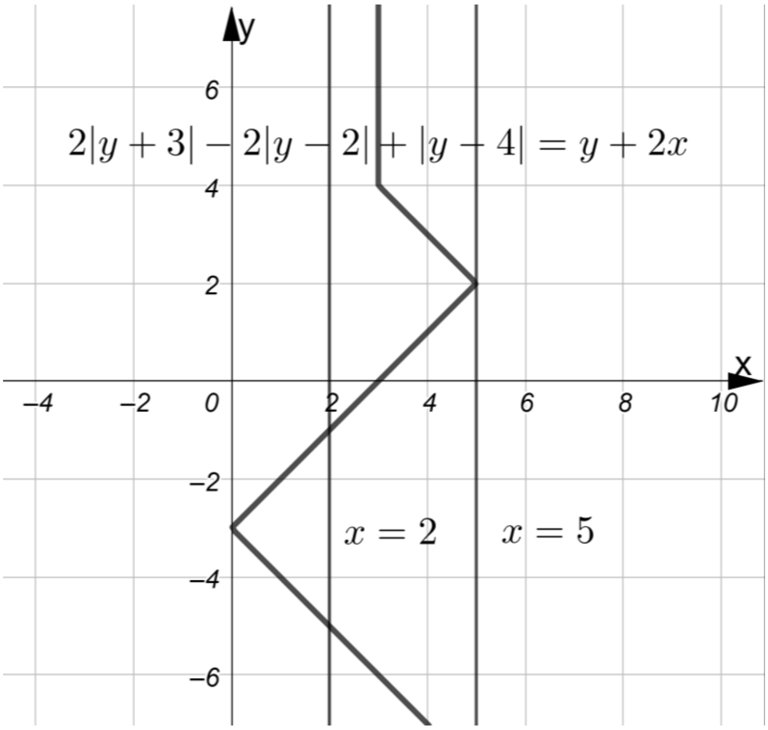

Рисунок 11 – Графики функций к третьей системе задачи 8.58

Количество решений будет зависеть от количества точек пересечения этих графиков.

Ответ: Пересечение графиков ровно в двух точках можно увидеть при $b = 5$ или $0 < b < 3$.

Задача 12.13. (А.Г. Мордкович). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x + y = xy \end{cases}$ имеет ровно три решения.

Изобразить график первой функции не составит труда, это окружность с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{a}$.

С графиком второго уравнения мы не знакомы. Попробуем преобразовать данное уравнение к более знакомому для нас виду:

$$x + y = xy;$$

$$x = xy - y;$$

$$x = y(x - 1);$$

$$y = \frac{x}{x-1} = \frac{(x-1)+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Однако, нельзя сказать, что графики $x + y = xy$ и $y = 1 + \frac{1}{x-1}$ совпадают. Дело в том, что у функции $y = 1 + \frac{1}{x-1}$ знаменатель не должен быть равен нулю ($x - 1 \neq 0$), чего не прослеживается в уравнении $x + y = xy$. Проверим значение уравнения $x = y(x-1)$ при $x = 1$. В таком случае получаем $1 = y \cdot 0$, что доказывает, что решений в данной точке нет.

Графиком функции $y = 1 + \frac{1}{x-1}$ является гипербола смещённая на одну единицу вправо и одну единицу вверх, где при $x = 1$ как раз будет проходить ассимптота.

Изобразим оба графика в одной системе координат (рисунок 12).

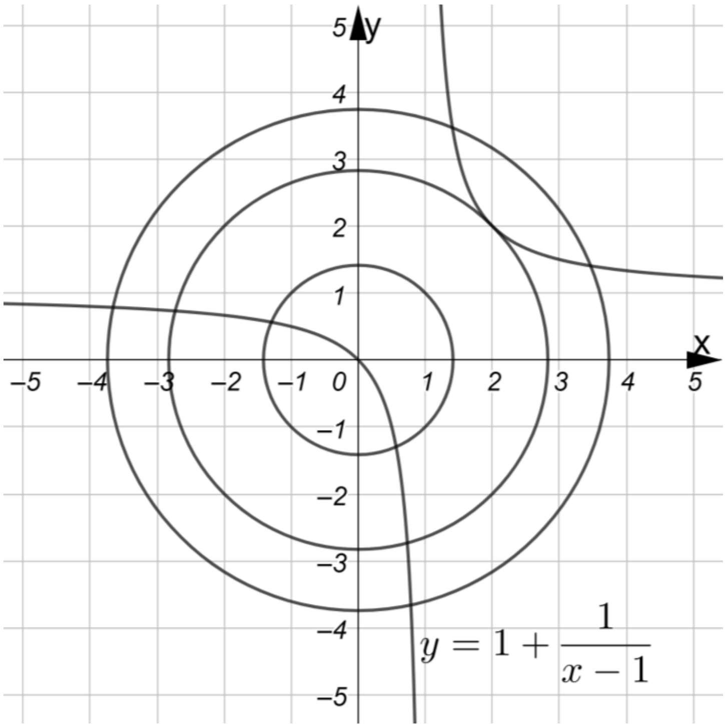

Рисунок 12 – Графики функций к третьей системе задачи 12.13

На рисунке видно, что единственный случай, когда система будет иметь три решения – это когда окружность коснётся второй ветви гиперболы.

Теперь необходимо найти координаты этой точки. Это сделать довольно легко. Изначально это была точка с координатами $(1; 1)$, после чего график был смещён на одну единицу вправо и одну единицу вверх, следовательно, координаты точки стали $(2; 2)$. Осталось только подставить координаты этой точки в уравнение окружности и найти параметр a:

$$2^2 + 2^2 = a, \text{откуда } a = 8.$$

Ответ: при $a = 8$.

Задача 15.59. (А.Г. Мордкович).

А. При каких значениях параметра a функция $y = 3 - \sqrt{x - a}$ определена во всех точках промежутка $[-11; 7]$?

Б. При каких значениях параметра a функция $y = 3 - \sqrt{x - 3}$ определена во всех точках промежутка $[a - 1; a + 1]$?

Выводы по главе 1

Мы проанализировали Примерную рабочую программу основного общего образования по математике углубленного уровня (для 7-9 классов образовательных организаций) от 2022 года. В результате чего выяснили, каких предметных образовательных результатов должен достигнуть обучающийся. А также проанализировали тематическое планирование, уделяя особое внимание основным видам деятельности обучающихся в результате освоения того или иного раздела [12].

Взяли за основу ряд книг углубленного уровня основного общего образования Мерзляка А.Г. и Мордковича А.Г., в которых отобрали параграфы, которые связаны с графическим методом решения уравнений с параметром [3-10].

Для каждого выделенного параграфа отразили особенности изложения и соотнесли каждый из них с разделами тематического планирования. А также провели сравнительную характеристику подходов к обучению некоторых параграфов.

В результате чего можно сделать следующие выводы.

Материал, изложенный в учебниках, может помочь обучающимся в достижении поставленных перед ними предметных результатов.

Содержание учебников соответствует основным видам деятельности тематического планирования, за исключением некоторого несоответствия по годам обучения. Довольно сильно заметно как, в частности, в учебниках Мордковича А.Г. идёт опережение Примерной рабочей программы по многим параграфам.

Однако, ни в одном из рассмотренных учебников не даётся четкого определения параметра, а также графического метода решения уравнений.

Что касаемо сравнения учебников между собой, то можно сказать, что Мордкович раскрывает практически каждую тему шире Мерзляка. У Мордковича есть довольно важные параграфы, относительно графического метода решения, которые никак не прослеживаются у Мерзляка. Также как количество решенный заданий, так и количество заданий для обучающихся Мордкович предлагает во много больше, чем Мерзляк.

Задания для решения школьниками каждого из учебников ранжированы по уровням сложности. Причем Мерзляк выделяет четыре уровня сложности, а Мордкович три. Также стоит заметить, что практически все задачи на параметры расположены на третьем либо четвёртом уровнях сложности.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА В ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ОГЭ

1.1 Методические особенности применения графического метода в обучении решению задач с параметрами

В данном параграфе будут рассмотрены методические особенности подготовки к обучению и самого обучения учащихся решению уравнений с параметром графическим методом.

Первая особенность будет завязана на использовании цифровых ресурсов для развития наглядно-образного мышления.

Для начала выделим три этапа формирования графического метода решения уравнений с параметрами:

1. Получение теоретический знаний.
2. Практика применение полученных знаний.
3. Самостоятельная работа.
4. Контроль полученных знаний и умений.

Теоретическую часть можно представить в виде лекций, видео уроков, разработанных специально для лучшего понимания графического метода. А также начинать урок с повторения уже изученных функций, свойств и их графиков. Немаловажный аспект состоит в также том, что лекции должны сопровождаться компьютерными презентациями с наглядными графиками, а порой и анимациями.

На втором этапе формируется умение решать уравнения. Этот этап можно разделить на два пункта.

Первый из которых это работа с простейшими заданиями, необходимыми для наработки навыка и лучшего запоминания алгоритма действий, в соответствии с той или иной ситуацией.

И второй – работа с заданиями с повышенного уровня сложности, которые представляют собой комбинацию простейших заданий. Задачами повышенной сложности как раз и будут являться задачи с параметром. На этом этапе нельзя избегать цифровых ресурсов.

Если есть возможность, организовать работу учащихся за компьютером, где они смогут самостоятельно создать функцию. Тогда обучающиеся смогут не только наглядно воспринимать информацию, но и путем воздействия и самостоятельного изменения графика функции (или их системы) видеть закономерность отклика программы на определенное действие или бездействие.

В случае отсутствия компьютеров, учитель может также реализовать интерактивную работу с графиками проецируя изображение с компьютера на доску. Это также довольно сильно влияет на восприятие материала школьниками.

Отличной программой для реализации вышеперечисленного является GeoGebra. GeoGebra – это бесплатная, кроссплатформенная динамическая математическая программа. С помощью данной платформы можно составлять задания, отслеживать этап и правильность выполнения их учащимися [1].

Третий и немаловажный этап – это работа дома. Ещё раз акцентируем внимание на том, что Примерная рабочая программа требует использовать цифровые ресурсы для построения графиков функций и изучения их свойств. Однако в учебниках редко прописывается их важность. Рассмотренные нами учебники содержат буквально по две строчки за весь курс основной школы, в которых описывается существование таких программ, однако нет ни рекомендаций к их использованию, ни упражнений, нацеленных на работу с ними. Следовательно, раз есть такие рекомендации, занимаясь дома, обучающийся тоже должен работать с цифровыми ресурсами. Эту работу также может реализовать платформа GeoGebra, так как на сайте есть реализация создания домашних работ.

Следует подчеркнуть, что отказа от письменной работы с графиками и перехода только на цифровые ресурсы быть не должно, так как обучающийся должен также уметь самостоятельно строить график, без сторонних ресурсов.

Четвертый этап – это контроль полученных знаний и умений. На этом этапе стоит отказаться от использования цифровых ресурсов. Аргументируется это тем, что у обучающегося на данном этапе должны уже без сторонних средств представлять и изображать графики искомых функций.

Рассмотрим ещё одну особенность, связанную с работой в той или иной системе координат.

Безусловно, большой проблемой графического решения уравнений с параметрами является работа с плоскостью $(x; a)$. Проблема кроется не только в том, что учащиеся не знают в каких случаях лучше ввести данную плоскость, а в каких остаться в плоскости $(x; y)$. Но и в том, что просто не смогут найти решения или ищут их неверно. Однако, порой введение данной плоскости является одним из эффективных методов решения задач с параметрами.

Почему же работа с данной плоскостью вызывает такие трудности? Дело в том, что учащиеся крайне мало решают примеров на работу с этой плоскостью. Мы в этом убедились, когда анализировали учебники углубленного уровня в которых авторы показывают решения одного или максимум двух простейших заданий на работу с данной плоскостью. А задачи для решения учащимися если и предоставляет, то присваивают данному заданию самый высокий уровень сложности, где попробуют свои силы далеко не все обучающиеся.

Следовательно, следует уделить больше внимания работе с плоскостью $(x; a)$.

Дело не только в решении ряда подобных номеров, но и в том, что учащиеся не могут понять, почему же мы можем использовать в решении данную плоскость. Необходимо напомнить о том, что параметр «равен в правах» с переменной в следствии чего ему можно «выделить» координатную ось.

Также необходимо помочь обучающемуся «узнавать» задачи, подходящие под рассматриваемый метод. И первый признак – это то, что в задаче должны фигурировать только параметр a и переменная x. Второй признак состоит в том, что при выражении параметра a получается несложная функция, график которой изображается на плоскости $(x; a)$ довольно легко. Однако стоит помнить, что нет правил без исключений и вполне вероятно, что задача будет подходить под критерии, но не будет решаться данным способом.

А также необходимо донести до учащимся схематичный процесс решения, в котором вначале строится графический образ затем пересекается полученный график прямыми перпендикулярными параметрической оси, после чего уже обращаться к условию и анализировать вопрос задачи.

Третья особенность связана со степенью использования форм усвоения учебного материала.

Большинство обучающихся легко решают линейные и квадратные уравнения без параметра, но те же уравнения с параметром вызывают у них затруднения. Чаще всего это объясняют степенями использования форм усвоения учебного материала в процессе обучения.

Первая форма – репродуктивная. Действия, выполняемые по образцу или алгоритму. Таким образом, обучающиеся просто воспроизводят ранее усвоенную информацию и в практически неизменном виде применяют её для выполнения типовых заданий.

Вторая форма усвоения учебного материала – продуктивная. Эта форма невозможна без репродуктивной формы усвоения учебного материала, но требует другого подхода к решению задач: необходимы чёткое понимание теории и творческий подход. Учащиеся не только воспроизводят ранее усвоенную информацию, применяют её в деятельности, но и способны преобразовать её для использования в нестандартных условиях.

Успешно усвоить материал по теме «Уравнения с параметрами» возможно только при реализации обеих форм.

Однако, реальное положение в школе таково: большое количество задач решается по некоторым алгоритмам, и быстрое их решение естественно зависит от уровня знания формул и умения их применять. При этом основное и главное усложнение задачи происходит за счет повышения операций, усложнения чисел. Большинство этапов решения таких задач у обучающихся приобретает автоматический или даже роботизированный характер, они не размышляют над каждым из них. Следовательно, нерациональное, а иногда и некорректное решение задачи.

Именно такие последствия несёт в себе пренебрежение продуктивной формой усвоения учебного материала.

Можно выделить следующие причины механического запоминания ряда действий при решении задач:

– выбор метода решения не вызывает трудностей и сомнений;

– решение сводится к одной и той же операции, которая может быть и довольно сложной, но состоящей из ряда элементарных операций;

– эту операцию (ее результат) учащемуся не надо выбирать среди других, которые возможны в сходных условиях;

– предлагаемые задачи являются задачами одного типа, в следствии чего не являются непривычными.

Учащиеся очень быстро перестают применять изученные определения, теоремы, сокращая обоснование решения задачи. Поэтому необходимо, чтобы нарушались вышеуказанные причины, т.к. нарушение хотя бы одной из них приводит к активизации мыслительной деятельности учащихся. Что как раз и представляют из себя задачи с параметрами.

1.2 Особенности решения задач с параметрами в ОГЭ с помощью графического метода

Сдача ОГЭ является неотъемлемой частью жизни каждого школьника. Именно поэтому каждое выполненное задание, особенно, если это задание оценивается в два балла абсолютно для каждого учащегося имеет большое значение. В данном пункте мы рассмотрим задание ОГЭ под номером 22, которое весит два балла. Для начала проанализируем статистику результатов ОГЭ по Челябинской области, с официального сайта «Министерство образования и науки Челябинской области» [11].

Будем брать за основу следующий документ данного сайта «Статистико-аналитический отчет о результатах государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего образования в 2021 году в Челябинской области»

Для начала обратимся к разделу «Основные результаты ОГЭ по учебному предмету математика». В этом разделе представлена таблица и диаграмма распределения первичных баллов участников ОГЭ по математике в 2021 г (рисунок 13) [11].

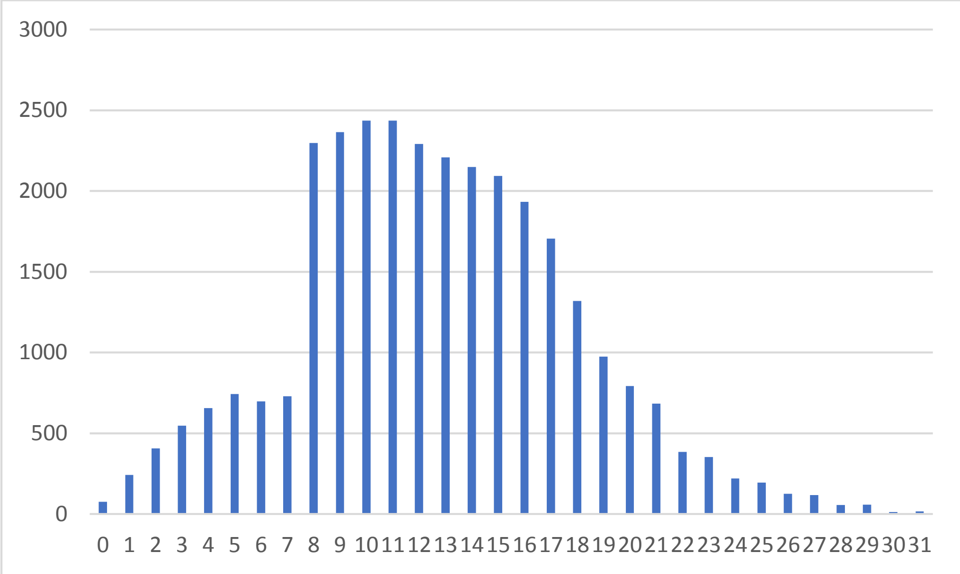

Рисунок 13 – Распределение участников в разрезе первичного балла

Из диаграммы можно заметить, что абсолютное число обучающихся получают от 8 до 17 баллов, что в своем большинстве оценивается как «удовлетворительно». Так как для получения отметки «3» необходимо набрать от 8 до 14 баллов, для «4» от 15 до 21, для «5» от 22 до 31.

Так как задания в ОГЭ расположены по уровню сложности, то также можно сказать, что абсолютное большинство учащихся даже не пытаются добираться до второй части, что конечно же ведёт к ещё большим потерям в баллах.

Таблица динамики результатов ОГЭ по математике полностью подтверждает факт того, что отметка «удовлетворительно» по математике самая распространенная на 2021 год (Таблица 20) [11].

Таблица 20 – Динамика результатов ОГЭ

	2018 г.		2019 г.		2021 г.	
	чел.	%	чел.	%	чел.	%
Получили «2»	2748	8,73	3043	9,41	4094	13,07
Получили «3»	15520	49,28	13290	41,09	16180	51,67
Получили «4»	10546	33,49	12367	38,24	9503	30,35
Получили «5»	2680	8,51	3640	11,26	1539	4,91

За 2021 доля получения отметки «3» составляет 51,67 %, что конечно же не может не огорчать. Также можно обратить внимание на 2019 г, в котором абсолютное большинство обучающихся поделили между собой отметки «3» и «4». В 2018 году самый большой процент учащихся снова получили отметку «удовлетворительно». Проследить динамику за эти три года несложно. Явно видно, что процент обучающихся с отметкой «2» за три года вырос на 5 %, процент «5» упал практически в два раза. Процент отметок «3» в каждый из годов занимает лидирующую позицию и колеблется в пределах 40-50 %.

Довольно легко сделать вывод о том, что учащиеся не могут или не умеют решить задания из второй части, в частности задание под номером 22. Действительно, этот факт подтверждается в разделе «Анализ результатов выполнения отдельных заданий или групп заданий по математике» [11].

Задание под номером 22 помечено, как задание высокого уровня сложности, и не просто так. Доля учащихся, которые справились с данным заданием составляет всего 2,77 %, что не соответствует ожидаемому проценту выполнения 3-15 %.

Также в документе приводится статистика выполнения данного задания обучающимися получившими ту или иную отметку. Доля учащихся, которые выполнили задание 22 и получили отметку «неудовлетворительно» – 0 %, «удовлетворительно» – 0 %, «хорошо» – 1,23 % и «отлично» – 35,61 %. Цифры статистики несомненно пугают. Даже половина отличников не могут решить данную задачу. Участники, получившие оценку 4 и ниже фактически с данным заданием не справились (или не приступали).

Что же из себя представляет на первый взгляд такое сложное задание?

Чаще всего требуется построить график функции и определить, при каких значениях параметра прямая, содержащая этот параметр, имеет с графиком то или иное количество точек пересечения. Следовательно, основная цель задания – проверить умение строить графики элементарных функций с предварительным исследованием их свойств. Также, несомненно, умение решать задачу с параметром показывает математическую грамотность школьника.

Также стоит отметить ошибки, которые учащиеся допускали при построении графика, что также отражено в документе [11].

Ошибки:

- допускали ошибки вычислительного характер;
- не находили допустимые значения для переменной x;
- допускали небрежность в построении графика;
- не приводили таблицу значений для построения графика;
- находили не все значения параметра;
- неверно строили график (отсутствовало соблюдение масштаба, отсутствие «выколотой» точки).

Также в документе указывается, что в учебно-методических комплексах в разделах «Функции и графики» предлагаются задания на построение и исследование одной функции: линейной, квадратичной, или функций, содержащих неизвестное под знаком модуля, но очень мало композиций функций. В свою очередь задание 22 в основном и состоит из композиций функций. А учителя математики не имеют достаточно времени для работы с таким материалом, это успешно дают лишь в классах с углубленным изучением математики, как мы с вами убедились в параграфах выше. Также в документе замечается, что учащиеся профильных классов показывают высокий уровень решения таких задач.

Мы убедились, что данное задание является на самом деле сложным для учащихся, а порой и нерешаемым. Увидели, что существует необходимость в повышении знаний в данной теме самостоятельно.

Для самостоятельной подготовки к ОГЭ существует большое количество платформ, но всё же самой актуальной является образовательный портал «Решу ОГЭ». Тысячи заданий с решениями для подготовки к ОГЭ 2022 года по всем предметам. Система тестов для подготовки и самоподготовки к ОГЭ. Однако, если открыть раздел с нашим заданием, углубиться в задачи и их решения, можно заметить, что объяснения по какому принципу решаются те или иные задания представлены уж в слишком сжатом виде и не каждый учащийся сможет в этом разобраться.

Следовательно, в пункте мы рассмотрим задачи с параметрами из Открытого банка заданий ОГЭ разных годов и их решения графическим методом. Графики функций будем изображать с помощью платформы GeoGebra. Задания расставлены в соответствии с изучением элементарных функций в школьном курсе математики. Также представлена классификация по типу задач [1; 13].

1. Взаимное расположение параболы и прямой.

Задача №1. Тип данной задачи характеризуется тем, что за счет разложения на множители числителя и знаменателя дроби и последующем сокращении одинаковых множителей уравнение всегда сводится к уравнению параболы (только в том случае, если уравнение параболы не было дано изначально). Также данный тип задачи характеризуется тем, что пересекающая график функция является прямой параллельной оси Ox, например $y = c$ (вместо параметра c может стоять любая другая буква).

Пример 1: Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях параметра c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку [13].

На первом шаге необходимо упростить уравнение на сколько это возможно. Знаменатель дроби уже разложен на множители.

В числители дроби находится биквадратное уравнение. Такое уравнение необходимо решать путем следующей замены $t = x^2$. В это случае числитель примет вид $t^2 - 13t + 36$.

Приравняем получившееся выражение к нулю и решим квадратное уравнение любым удобным способом. Например, по обратной теореме Виета, сумма корней уравнения $t^2 - 13t + 36 = 0$ равна коэффициенту b с противоположным знаком, то есть 13, а их произведение коэффициенту c , то есть 36. Такие числа найти довольно просто, это $x_1 = 4$ и $x_2 = 9$.

Для разложения квадратно трёхчлена на множители существует следующая формула $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, воспользовавшись которой получим: $t^2 - 13t + 36 = (t - 4)(t - 9)$. Вернемся к замене $t = x^2$, то есть заменим все t на x^2. Получим $x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - -4)(x^2 - 9)$.

Можем разложить выражения в скобках по формуле разность квадратов, так как числа 4 и 9 являются квадратами чисел 2 и 3 соответственно, имеем $(x^2 - 4)(x^2 - 9) = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$.

В результате получим следующую дробь

$$y = \frac{(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)}.$$

Можем в числители и знаменателе дроби сократить одинаковые множители, не забыв про область допустимых значений. Знаменатель не должен равняться нулю, что означает, что $x \neq -2$ и $x \neq 3$.

При сокращении функция примет следующий вид $y = (x - 2)(x + 3)$. Раскроем скобки и приведем подобные для получения уравнения параболы $y = x^2 + x - 6$.

Графиком данной функции будет являться парабола с выколотыми точками $(-2; -4)$ и $(3; 6)$. Найдём координаты вершины параболы используют следующие формулы: $x = -\frac{b}{2a}$, $y = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Подставив соответствующие коэффициенты получим: $x = -\frac{1}{2} = -0{,}5$, $y = -\frac{1-4(-6)}{4} = -\frac{1+24}{4} = -\frac{25}{4} = -6{,}25$. Теперь мы нашли координаты вершины параболы $(-0{,}5; -6{,}25)$. Парабола имеет ось симметрии, следовательно, достаточно найти координаты точек одной из ветвей параболы и симметрично отразить.

Прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку либо тогда, когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых – выколотая.

Изобразим это графически (рисунок 14):

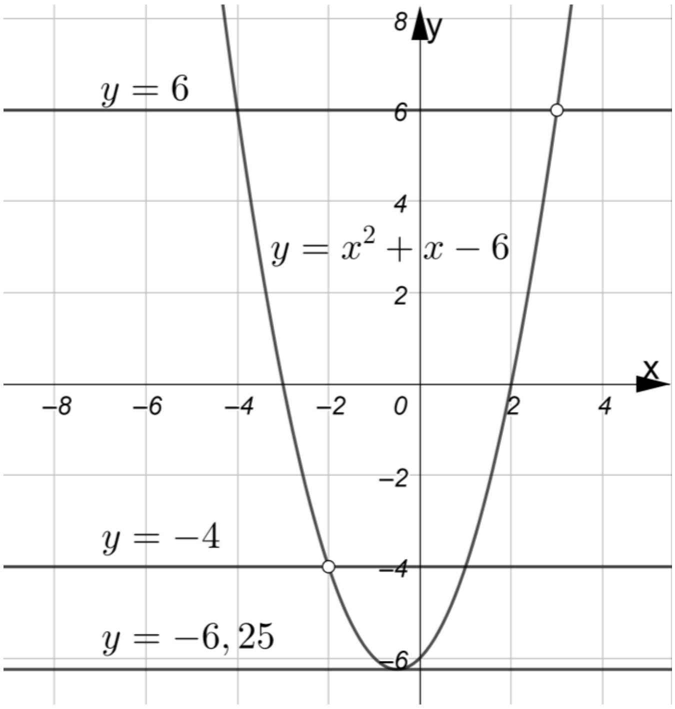

Рисунок 14 – Графики функций к первому примеру

Сформулируем ответ: прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку при $c = -6{,}25, c = -4, c = 6$.

Задача №2. Тип данной задачи характеризуется тем, что за счет разложения на множители числителя и знаменателя дроби и последующем сокращении одинаковых множителей уравнение всегда сводится к уравнению параболы (только в том случае, если уравнение параболы не было дано изначально). Также данный тип задачи характеризуется тем, что пересекающая график функция является прямой с неизвестным свободным коэффициентом, например $y = -2x + p$ (вместо параметра p может стоять любая другая буква, как и на месте коэффициента перед x любое другое число).

Пример 2: При каком значении p прямая $y = -2x + p$ имеет с параболой $y = x^2 + 2x$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки. Постройте в одной системе координат данную параболу и прямую при найденном значении p [13].

Найдём координаты вершины параболы используют следующие формулы: $x = -\frac{b}{2a}$, $y = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Подставив соответствующие коэффициенты получим: $x = -\frac{2}{2} = -1$, $y = -\frac{4-0}{4} = -1$. Теперь мы нашли координаты вершины параболы $(-1;\ -1)$. Парабола имеет ось симметрии, следовательно, достаточно найти координаты точек одной из ветвей параболы и симметрично отразить.

Если две функции имеют общую точку, её координаты удовлетворяют обоим функциям, пусть данная точка имеет координаты (x, y). Подставив, координаты этой точки в уравнения, мы их не изменим, однако будем знать, что x и y у них должны быть равны, следовательно можем приравнять две функции, так как y равны. Получим $-2x + p = x^2 + 2x$. Перенесем все слагаемые в одну часть и приведем подобные, имеем $x^2 + 4x - p = 0$. В результате видим уравнение параболы.

Прямая $y = -2x + p$ будет иметь с параболой единственную общую точку при условии, что дискриминант полученного квадратного уравнения равен нулю. Найдем дискриминант уравнения $x^2 + 4x - p = 0$ и приравняем его к нулю. $D = b^2 - 4ac = 16 - 4(-p) = 16 + 4p = 0$.

Решим получившееся линейное уравнение $16 + 4p = 0$:

$$4p = -16;$$

$$p = -4.$$

Подставим значение параметра $p = -4$ в уравнение $x^2 + 4x - p = 0$ и найдём значения x и y. Получим $x^2 + 4x + 4 = 0$. Значение дискриминанта мы уже знаем $D = 0$, найдём корень $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$. Подставим значение $x = -2$, например в функцию $y = x^2 + 2x$, получим

$y = 4 - 4 = 0$. Для проверки можно подставить значение $x = -2$ в линейную функцию $y = -2x - 4$ (изначальное уравнение прямой с найденным параметром $p = -4$), получим $y = 4 - 4 = 0$. Следовательно, координаты общей точки $(-2; 0)$.

Изобразим параболу $y = x^2 + 2x$ и прямую, при найденном значении параметра, $y = -2x - 4$ в одной системе координат (рисунок 15).

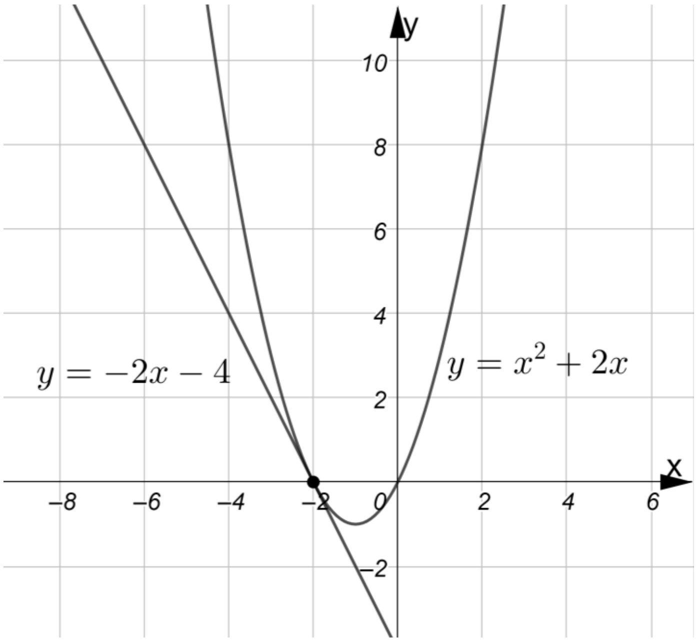

Рисунок 15 – Графики функций ко второму примеру

Задача №3. Тип данной задачи характеризуется тем, что за счет разложения на множители числителя и знаменателя дроби и последующем сокращении одинаковых множителей уравнение всегда сводится к уравнению параболы (только в том случае, если уравнение параболы не было дано изначально). Также данный тип задачи характеризуется тем, что пересекающая график функция является прямой с неизвестным коэффициентом при x (который отвечает за угол наклона прямой), например $y = kx$ (вместо параметра k может стоять любая другая буква).

Пример 3: Постройте график функции $y = \frac{(x^2+2,25)(x-1)}{1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку [13].

Для начала упростим выражение $y = \frac{(x^2+2,25)(x-1)}{1-x}$. Вынесем из второго множителя числителя минус за знак дроби $y = -\frac{(x^2+2,25)(1-x)}{1-x}$, при этом поменяем знаки у слагаемых в этом множителе на противоположные. Таким образом мы получаем одинаковые множители в числители и знаменателе дроби, которые можно сократить, не забыв, что знаменатель не должен быть равен нулю. Получаем $y = -x^2 - 2,25$, $x \neq 1$. Подставим $x = $ $= 1$ в $y = -x^2 - 2,25$ и найдем соответствующее x значение $y = -3,25$.

График исходной функции сводится к графику параболы $y = -x^2 -$ $-2,25$ с выколотой точкой $(1; -3,25)$.

Найдём координаты вершины параболы используют следующие формулы: $x = -\frac{b}{2a}$, $y = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Подставив соответствующие коэффициенты получим: $x = -\frac{0}{-2} = 0$, $y = -\frac{0-4(-1)(-2,25)}{4(-1)} = -\frac{-9}{-4} = -\frac{9}{4}$. Теперь мы нашли координаты вершины параболы $(0; -2,25)$. Парабола имеет ось симметрии, следовательно, достаточно найти координаты точек одной из ветвей параболы и симметрично отразить.

Если две функции имеют общую точку, её координаты удовлетворяют обоим функциям, пусть данная точка имеет координаты (x, y). Подставив, координаты этой точки в уравнения, мы их не изменим, однако будем знать, что x и y у них должны быть равны, следовательно можем приравнять две функции, так как y равны. Получим $kx = -x^2 - 2,25$. Перенесем все слагаемые в одну часть и приведем подобные, имеем $x^2 + kx + 2,25 = 0$. В результате видим уравнение параболы.

Прямая $y = kx$ будет иметь с параболой $y = -x^2 - 2,25$ единственную общую точку при условии, что дискриминант полученного квадратного уравнения равен нулю. Найдем дискриминант уравнения $x^2 +$ $+kx + 2,25 = 0$. и приравняем его к нулю. $D = b^2 - 4ac = k^2 - 9 = 0$.

Решим получившееся линейное уравнение $k^2 - 9 = 0$:

$$k^2 = 9;$$

$$k = \pm 3.$$

Мы нашли значение параметра в точках касания, во всех остальных случаях, либо будет две общие точки, либо общих точек вовсе не будет. Достижение состояния прямой $y = kx$, при котором она совпадет с осью Oy неможможно.

Однако, мы исключали точку, принадлежащую параболе с координатами $(1; -3{,}25)$, что означает, что если прямая $y = kx$ пройдет через эту точку, то с параболой будет только одна общая точка. Для рассмотрения этого случая подставим $x = 1$ в уравнение $x^2 + kx + 2{,}25 = 0$, получим$1 + k + 2{,}25 = 0$, перенесем все свободные члены вправо $k = -3{,}25$. При этом дискриминант этого уравнения будет больше нуля, значит, еще одно решение точно есть.

Изобразим на плоскости получившиеся функции (рисунок 16).

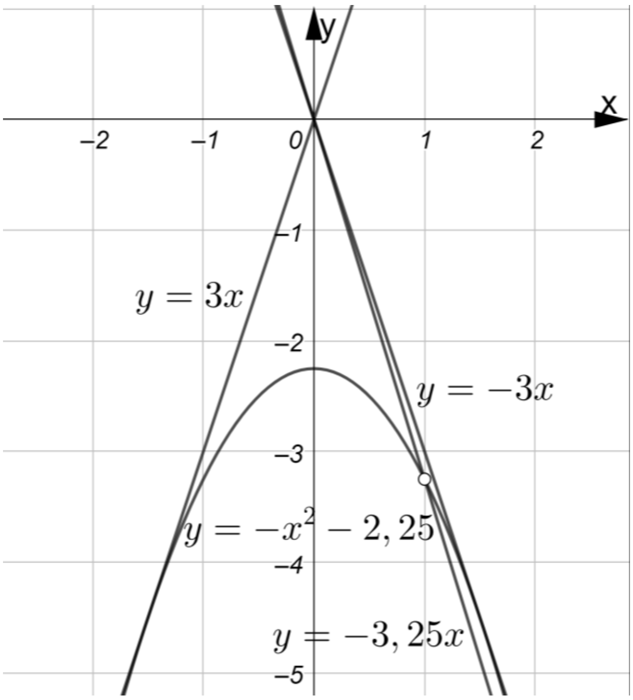

Рисунок 16 – Графики функций к третьему примеру

Сформулируем ответ: при $k = 3$, $k = -3$ и при $k = -3{,}25$ прямая $y = kx$ имеет с графиком $y = \frac{(x^2+2{,}25)(x-1)}{1-x}$ ровно одну общую точку.

2. Взаимное расположение гиперболы и прямой.

Задача №4. Тип данной задачи характеризуется тем, что за счет разложения на множители числителя и знаменателя дроби и последующем сокращении одинаковых множителей уравнение всегда сводится к уравнению гиперболы (только в том случае, если уравнение гиперболы не было дано изначально). Также данный тип задачи характеризуется тем, что пересекающая график функция является прямой параллельной оси Ox, например $y = c$ (вместо параметра c может стоять любая другая буква).

Пример 4: Постройте график функции $y = 3 - \frac{x+5}{x^2+5x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки [13].

Преобразуем выражение $3 - \frac{x+5}{x^2+5x}$. Вынесем в знаменателе дроби общий множитель за скобку $3 - \frac{x+5}{x(x+5)}$. Сократим одинаковые множители в числители и знаменателе дроби, не забыв, что знаменатель не должен быть равен нулю. Получим функцию $y = 3 - \frac{1}{x}$, где $x \neq -5$. Найдем значение y при $x = -5$, получаем $y = 3 + \frac{1}{5} = 3 + 0{,}2 = 3{,}2$.

Графиком данной функции является парабола, ветви которой будут находиться во II и IV четвертях (так как перед дробью знак минус), также центр гиперболы будет сдвинут в точку $(0; 3)$ и иметь выколотую точку с координатами $(-5; 3{,}2)$.

Изобразим данный график схематично по точкам, результат должен выглядеть следующим образом (рисунок 17):

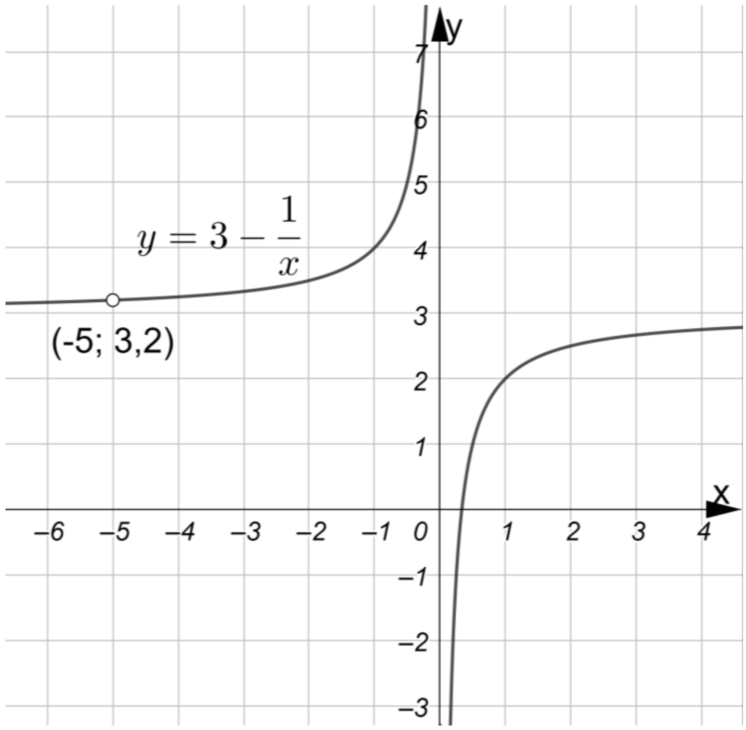

Рисунок 17 – График гиперболы с «выколотой» точкой

Довольно легко заметить, что прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки при $m = 3$. В всех остальных случаях будет одна общая точка.

Однако, точка с координатами $(-5; 3{,}2)$ не принадлежит графику, следовательно, через неё может пройти прямая $y = m$ и в этом случае также не будет общих точек с графиком функции $y = 3 - \frac{1}{x}$. В этом случае $m = 3{,}2$, а прямая будет иметь уравнение $y = 3{,}2$.

Изобразим получившиеся графики функций на одной системе координат (рисунок 18).

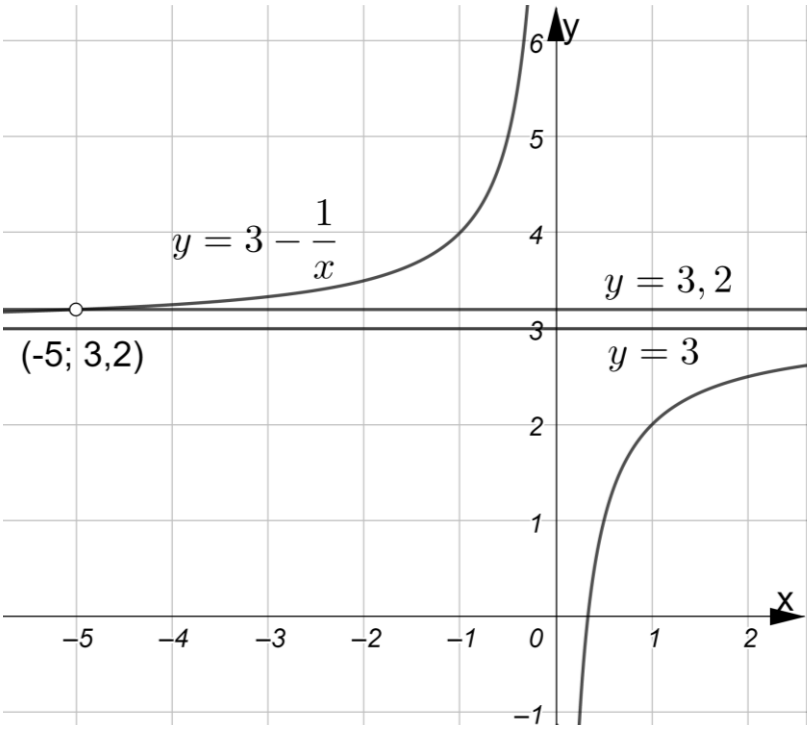

Рисунок 18 – Графики функций к четвёртому примеру

Сформулируем ответ: Прямая $y = m$ не имеет с графиком функции $y = 3 - \frac{x+5}{x^2+5x}$ ни одной общей точки при $m = 3$ и $m = 3{,}2$.

Задача №5. Тип данной задачи характеризуется тем, что за счет разложения на множители числителя и знаменателя дроби и последующем сокращении одинаковых множителей уравнение всегда сводится к уравнению гиперболы (только в том случае, если уравнение гиперболы не было дано изначально). Также данный тип задачи характеризуется тем, что пересекающая график функция является прямой с неизвестным коэффициентом при x (который отвечает за угол наклона прямой), например $y = kx$ (вместо параметра k может стоять любая другая буква).

Пример 5: Постройте график функции $y = \frac{2x+1}{2x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку [13].

Преобразуем выражение $\frac{2x+1}{2x^2+x}$. Вынесем в знаменателе дроби общий множитель за скобку $\frac{2x+1}{x(2x+1)}$. Сократим одинаковые множители в числители и знаменателе дроби, не забыв, что знаменатель не должен быть равен нулю. Получим $y = \frac{1}{x}$, где $2x + 1 \neq 0$, следовательно $x \neq -0{,}5$. Найдем значение y при $x = -0{,}5$, получаем $y = -\frac{1}{0{,}5} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$.

График данной функции представляет собой гиперболу $y = \frac{1}{x}$, с выколотой точкой с координатами $(-0{,}5; -2)$.

Изобразим данный график схематично, получим следующий результат (рисунок 19):

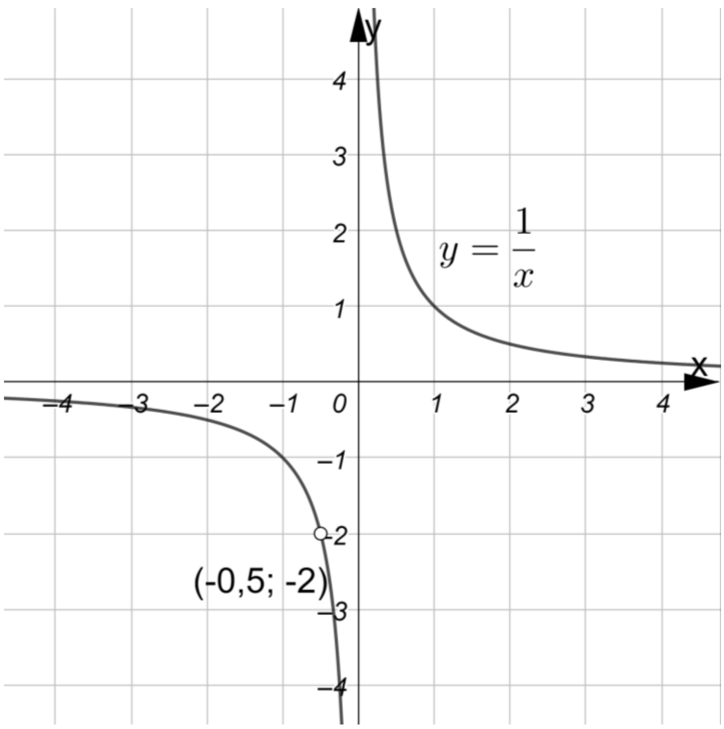

Рисунок 19 – График гиперболы с «выколотой» точкой

Прямая $y = kx$, с точкой в начале координат не имеет, и коэффициентом k, который влияет на угол наклона. Если $k = 0$, то точек пересечения с гиперболой не будет. Достижение состояния прямой $y = kx$, при котором она совпадет с осью Oy неможможно. Во всех остальных случаях будет две общие точки.

Однако, точка с координатами $(-0{,}5; -2)$ не принадлежит графику, следовательно, через неё может пройти прямая $y = kx$ и в этом случае также не будет общих точек с графиком функции $y = \frac{1}{x}$. Подставим в функцию $y =$

kx значения точки $(-0,5;-2)$, получим $-2=-0,5k$, откуда $k=4$. Уравнение прямой примет вид: $y=4x$.

Изобразим получившиеся графики функций на одной системе координат (рисунок 20).

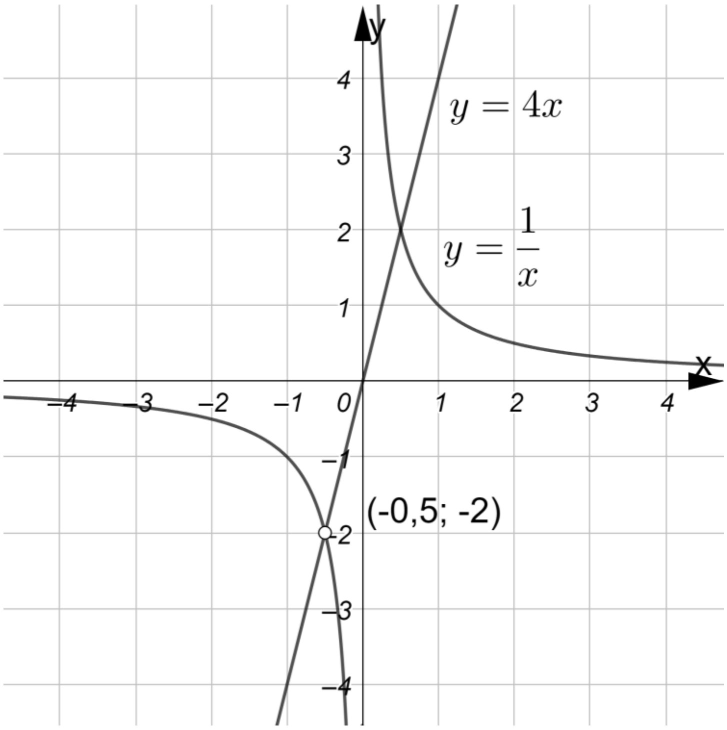

Рисунок 20 – Графики функций к пятому примеру

Сформулируем ответ: Прямая $y=kx$ имеет с графиком $y=\frac{2x+1}{2x^2+x}$ ни ровно одну общую точку при $k=4$.

3. Кусочно-заданные функции.

Задача №6. Тип данной задачи характеризуется тем, что условие сразу представлено в виде системы. Рассмотрим самое сложное задание из данного типа, которое предлагает сайт решу ОГЭ.

Пример 6: Постройте график функции $y=\begin{cases}x^2, \text{ если } |x|\le 1,\\ -\frac{1}{x}, \text{ если } |x|>1\end{cases}$ и определите, при каких значениях параметра c прямая $y=c$ имеет с графиком ровно одну общую точку [13].

Данный пример выбран, как самый сложный из категории, только лишь потому, что при переменных x стоят модули, что может запутать учащегося.

Однако, если немного поразмышлять, то сразу видно, что $|x| \leq 1$ означает, что $x \in [-1; 1]$. В свою очередь $|x| > 1$ раскрывается в виде промежутков следующим образом $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Если прочитаем всю систему, то заметим, что график функции $y = x^2$ должен быть изображён на промежутке $[-1; 1]$, а $y = -\frac{1}{x}$ на оставшихся промежутках $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Графиком первой функции является стандартная парабола, а вторым гипербола, ветви которой находятся во II и IV четвертях (т.к. пред дробью стоит знак минус).

Прямая $y = c$ будет параллельна оси абсцисс, и будет двигаться вдоль оси ординат в зависимости от коэффициента c.

Изобразим графики в одной плоскости (рисунок 21).

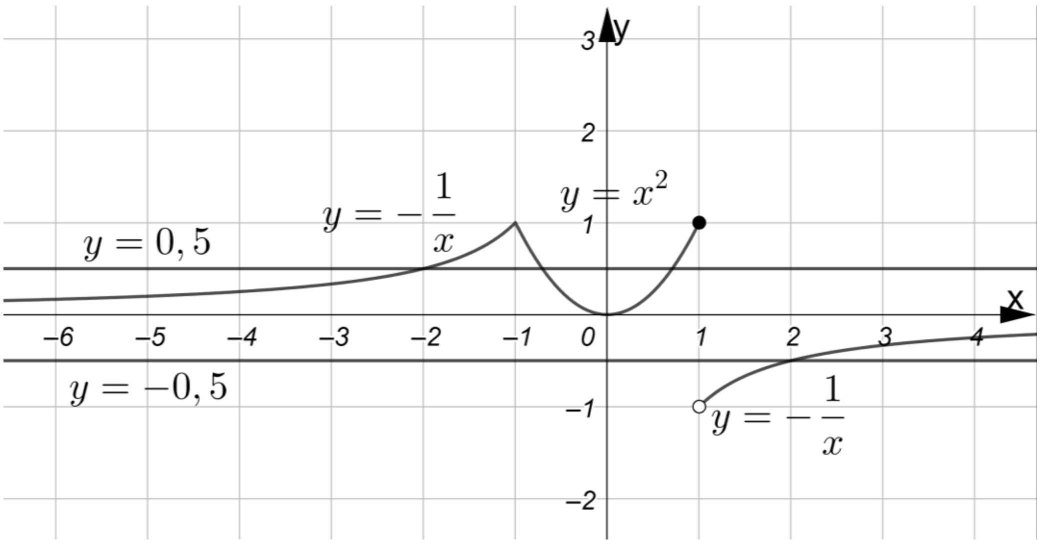

Рисунок 21 – Графики функций к шестому примеру

На графике наглядно видно, что при $c \in (-1;\ 0]$ графики будут иметь одну общую точку.

Ответ: $(-1;\ 0]$.

Задача №7. Тип данной задачи характеризуется тем, что нам дана некоторая функция, содержащая $|x|$. Для начала необходимо раскрыть модуль и уже потом представлять в виде системы, в результате чего задача сводится к предыдущему типу.

Пример 7: Постройте график функции $y = |x|(x+1) - 6x$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки [13].

Для начала необходимо раскрыть модуль функции:

$$y = |x|(x+1) - 6x;$$

$$\begin{cases} -x(x+1) - 6x, & \text{если } x < 0, \\ x(x+1) - 6x, & \text{если } x \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2 - x - 6x, & \text{если } x < 0, \\ x^2 + x - 6x, & \text{если } x \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2 - 7x, & \text{если } x < 0, \\ x^2 - 5x, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом, функция $y = |x|(x+1) - 6x$ представляет собой кусочно-заданную функцию, в результате чего решение данной задачи сводится к предыдущему типу.

Графиками обеих функций являются параболы. Мы могли бы найти координаты вершины параболы, изобразить первую ветвь параболы, после чего вторую изобразить симметрично, как предыдущий заданиях.

Здесь же можно заметить, что коэффициенты при старшей степени 1 и -1, что означает, что мы можем построить графики функций из известных графиков $y = x^2$ и $y = -x^2$ только используя параллельный перенос, без «растяжения». Воспользуемся этим. Для этого выделим полные квадраты: $y = -x^2 - 7x = -x^2 - 7x - \frac{49}{4} + \frac{49}{4} = -\left(x^2 + 7x + \frac{49}{4}\right) + \frac{49}{4} =$ $= -\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{49}{4}$;

$$y = x^2 - 5x = x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} = \left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) - \frac{25}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}.$$

Теперь можно сделать вывод о том, что график функции $y = -x^2 - -7x$ получается из графика функции $y = -x^2$ путём параллельного переноса вершины параболы в точку $(-\frac{7}{2}; \frac{49}{4})$, а график функции $y = x^2 - -5x$ путем параллельного переноса в точку $(\frac{5}{2}; -\frac{25}{4})$.

Прямая $y = m$ будет параллельна оси абсцисс, а также будет двигаться вдоль оси ординат в зависимости от коэффициента m.

Изобразим на координатной плоскости оба графика (рисунок 21).

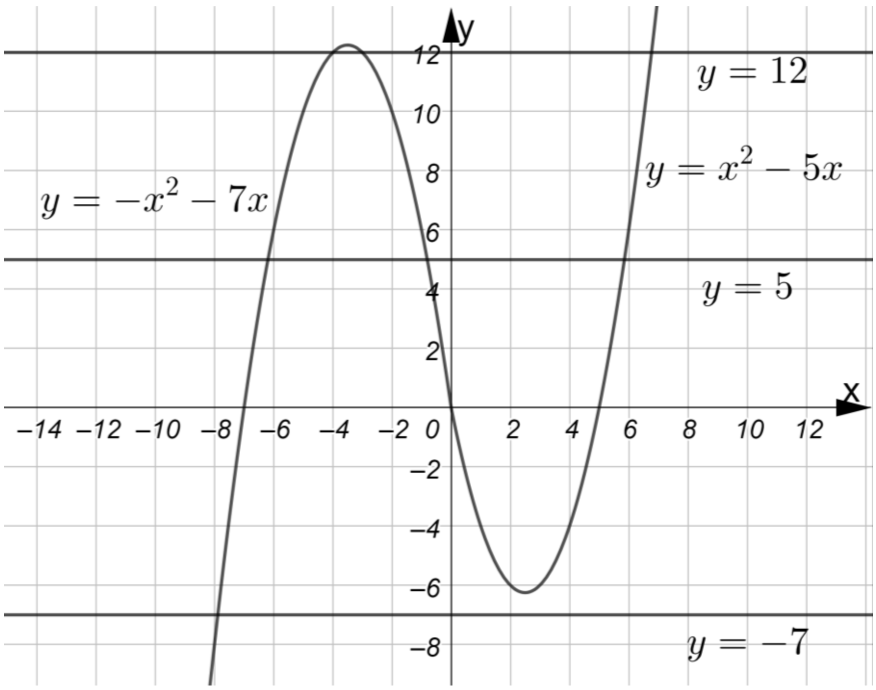

Рисунок 21 – Графики функций к седьмому примеру

Из графика видно, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции $y = = |x|(x + 1) - 6x$ ровно две общие точки когда прямая проходит через вершины парабол, а координаты вершин нам известны. Следовательно, можно сделать вывод, что при $m = -6{,}25$ и $m = 12{,}25$ график функций имеют ровно две общие точки.

Задача №8. Тип данной задачи характеризуется тем, что нам дана некоторая функция, содержащая сложный модуль, например $|x - 5|$ или $|2x - 5|$.

Пример 8: Постройте график функции $y = x^2 - |4x + 3|$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки [13].

Для начала необходимо раскрыть модуль:

$$y = x^2 - |4x + 3| = \begin{cases} x^2 + 4x + 3, & \text{если } x < -\dfrac{3}{4}, \\ x^2 - 4x - 3, & \text{если } x \geq -\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Как понять, какие ограничения накладывать? Для это необходимо приравнять под модульное выражение к нулю и найти значение переменной: $4x + 3 = 0 \ => x = -\frac{3}{4}$.

Теперь видно, что график получившихся функций – параболы, которые будут получены в результате смещения. Для того чтобы найти точку смещения необходимо выделить полные квадраты:

$$y = x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 - 1 = (x + 2)^2 - 1;$$

$$y = x^2 - 4x - 3 = x^2 - 4x + 4 - 7 = (x - 2)^2 - 7.$$

Следовательно, график функции $y = x^2 + 4x + 3$ можно получить из графика функции $y = x^2$ путём параллельного переноса на $(-2;\ -1)$, а график $y = x^2 - 4x - 3$ путем переноса на $(2;\ -7)$.

Прямая $y = m$ будет параллельна оси абсцисс, а также будет двигаться вдоль оси ординат в зависимости от коэффициента m.

Построим графики в одной системе координат (рисунок 11):

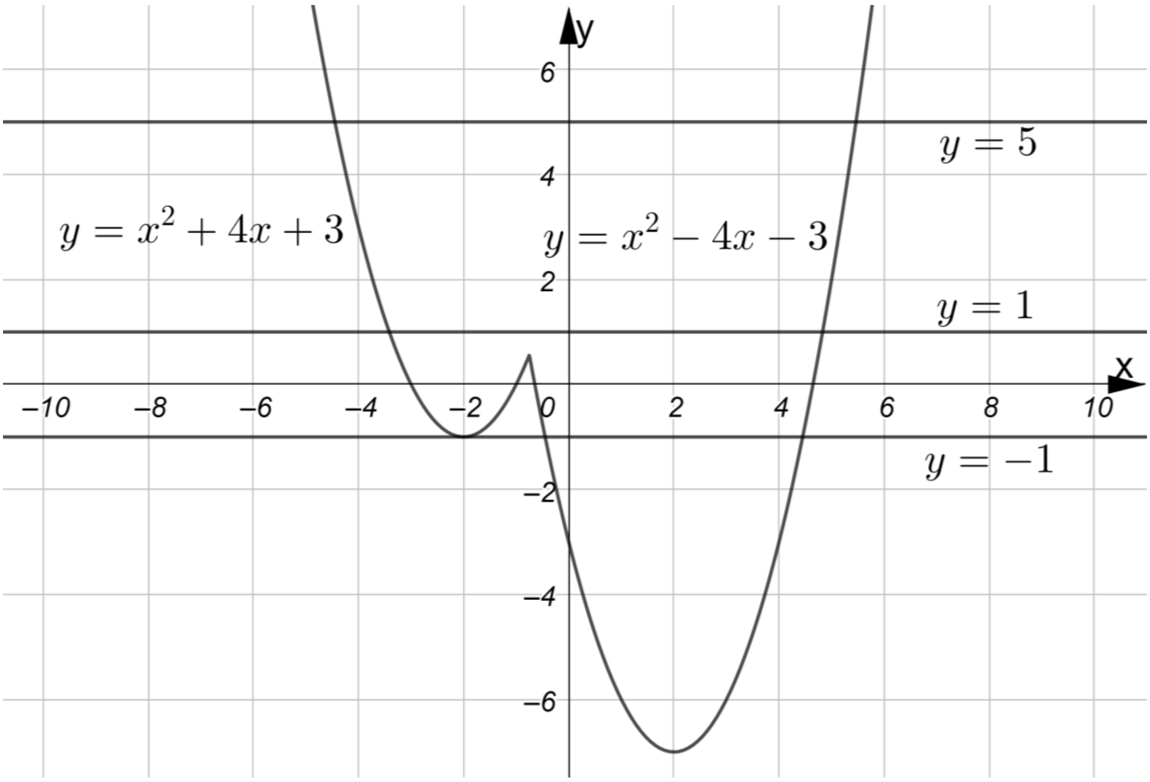

Рисунок 22 – Графики функций к восьмому примеру

По графику видно, что три точки пересечения достигаются только в двух случаях. Первый случай, когда прямая проходит через вершину параболы $y = x^2 + 4x + 3$. А так как координаты её вершины нам известны $(-2;\ -1)$, то $y = -1$, следовательно, $m = -1$. Второй случай, когда прямая проходит через точку соприкосновения парабол. Абсциссу координаты точки мы уже знаем, осталось найти ординату. Для этого подставим $x = -\frac{3}{4}$, например, в функцию $y = x^2 + 4x + 3$, получим: $y = \frac{9}{16} - 3 + 3 = \frac{9}{16}$. Следовательно, $m = \frac{9}{16}$.

Ответ: Графики имеют три точки пересечения при $m = -1$ или $m = \frac{9}{16}$.

Задача №9. Тип данной задачи характеризуется тем, что нам дана некоторая функция, содержащая следующую конструкцию $(\sqrt{4x+3})^2$ в числителе или знаменателе дроби. Подкоренное выражение может различаться.

Пример 9: Постройте график функции $y = \frac{x-2}{(\sqrt{x^2-2x})^2}$ и найдите все значение k, при которых прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку [13].

Для начала найдём область определения функции. Для этого зададим себе вопрос: «Какие значения функция принимать не может?». Так в функции есть корень, то подкоренное значение должно быть больше либо равно нулю. Следовательно, $x^2 - 2x \geq 0$. Однако не стоит забывать и про тот факт, что данное выражение находится в знаменателе дроби, а значит равенство нулю можно исключить. Следовательно, $x^2 - 2x > 0$.

Преобразуем неравенство: $x(x-2) > 0$. Отметив значения 0 и 2 как нули функции на числовой прямой. С помощью метода интервалов, довольно легко заметить, что значения, удовлетворяющие неравенству, находятся на интервалах $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. Следовательно, и область определения функции $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Теперь можно спокойно преобразовывать функцию $y = \frac{x-2}{(\sqrt{x^2-2x})^2}$ к более простому виду. На первом шаге можем убрать степень и корень, так как в области определения мы уже всё учли, получим:

$$y = \frac{x-2}{x^2-2x} = \frac{x-2}{x(x-2)} = \frac{1}{x}.$$

Получаем график гиперболы, который определен только на промежутках $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

В свою очередь, прямая $y = kx$ всегда проходит через начало координат, а коэффициент k влияет на угол поворота прямой, поэтому на графике данная функция будет собой представлять пучок прямых с центром в начале координат. Представим описанные графики в одной координатной плоскости (рисунок 22):

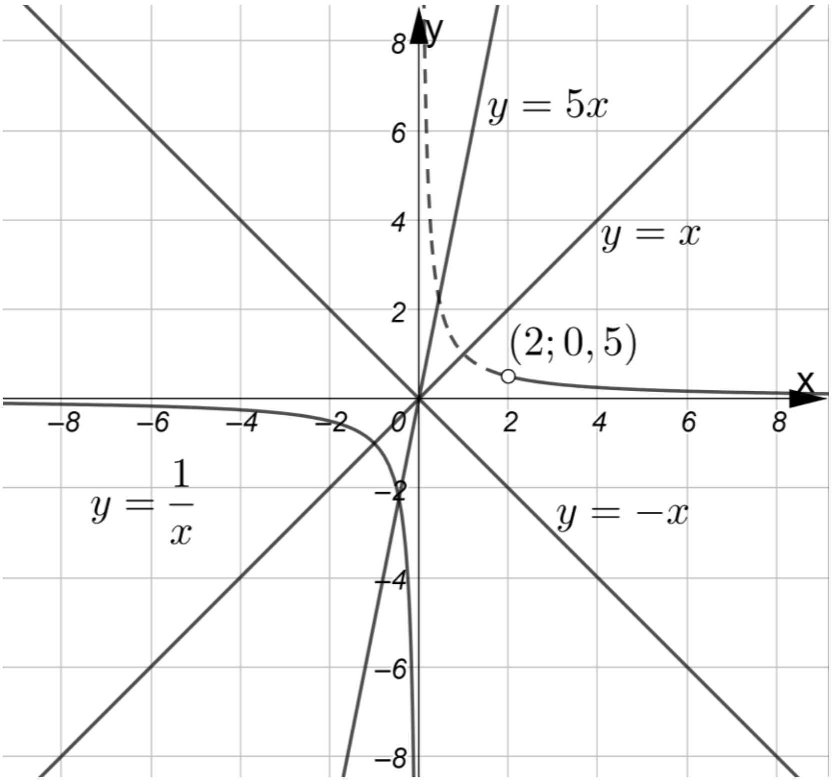

Рисунок 22 – Графики функций к девятому примеру

Довольно легко заметить, что одна точка пересечения возможна только когда прямая проходит через пунктирную часть гиперболы или «выколотую» точку.

Найдём коэффициент k, при котором прямая проходит через «выколотую» точку. Для начала необходимо найти координаты точки.

Подставим в уравнение гиперболы $y = \frac{1}{x}$ значение $x = 2$, в результате получим $y = 0{,}5$.

Подставим в уравнение прямой $y = kx$ координаты этой точки, получим $0{,}5 = 2k$. Откуда $k = 0{,}25$.

И чтобы прямая дальше шла по пунктирной линии, необходимо, чтобы коэффициент k увеличивался.

Ответ: Графики функций имеют одну общую точку при $0{,}25 \leq k < +\infty$.

Выводы по главе 2

Мы сформулировали методические особенности применения графического метода в обучении решению задач с параметрами.

Проанализировали статистику результатов ОГЭ за 2021 год, в частности задание под номером 22. В результате чего были сделаны выводы о том, что обучающиеся практически не справляются с решением данного типа заданий.

Разбили 22 задание из ОГЭ на группы, внутри которых выделили и охарактеризовали основные типы задач. А также привели примеры с подробным разборам решения к каждому типу задач.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выпускная квалификационная работа посвящена методическим особенностям применения графического метода при решении задач с параметрами в основной школе.

В ходе исследования были решены все поставленные задачи:

1) проанализирована Примерная рабочая программа основного общего образования по математике углубленного уровня;

2) изучен и проанализирован материал по данной теме в учебниках А.Г. Мерзляка и А.Г. Мордковича углубленного курса алгебры основной школы;

3) описаны особенности решения задач с параметрами графическим методом в школьном курсе математики;

4) проанализирована статистика результатов ОГЭ по Челябинской области, в результате чего выявлено, что решать подобные задания могут лишь 2 % обучающихся;

5) проанализированы и систематизированы задачи ОГЭ, в решении которых используется графический метод, а также приведены их подробные решения.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что поставленная цель достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Графический калькулятор GeoGebra: официальный сайт. – США, 2003. – URL: https://www.geogebra.org/ (дата обращения: 03.02.2022). – Текст : электронный.

2. **Мерзляк, А. Г.** Математика: 7 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков. – Москва : Вентана - Граф, 2019. – 285 с. – ISBN 978-5-360-10207-6. – Текст : непосредственный.

3. **Мерзляк, А. Г.** Алгебра: 8 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков. – Москва : Вентана - Граф, 2019. – 384 с. – ISBN 978-5-360-10153-6. – Текст : непосредственный.

4. **Мерзляк, А. Г.** Алгебра: 9 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков. – Москва : Вентана - Граф, 2019. – 399 с. – ISBN 978-5-360-10206-6. – Текст : непосредственный.

5. **Мордкович, А. Г.** Алгебра: 7 класс: учебник для общеобразовательных организаций (углубленный уровень). В 2 ч. Ч. 1 / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – Москва : Мнемозина, 2019. – 232 с. – ISBN 978-5-346-04407-9. – Текст : непосредственный.

6. **Мордкович, А. Г.** Алгебра: 7 класс: учебник для общеобразовательных организаций (углубленный уровень). В 2 ч. Ч. 2 / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – Москва : Мнемозина, 2019. – 231 с. – ISBN 978-5-346-04408-6. – Текст : непосредственный.

7. **Мордкович, А. Г.** Алгебра: 8 класс: учебник для общеобразовательных организаций (углубленный уровень). В 2 ч. Ч. 1 / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – Москва : Мнемозина, 2019. – 288 с. – ISBN 978-5-346-04410-9. – Текст : непосредственный.

8. **Мордкович, А. Г.** Алгебра: 8 класс: учебник для общеобразовательных организаций (углубленный уровень). В 2 ч. Ч. 2 / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – Москва : Мнемозина, 2019. – 351 с. – ISBN 978-5-346-04411-6. – Текст : непосредственный.

9. **Мордкович, А. Г.** Алгебра: 9 класс: учебник для общеобразовательных организаций (углубленный уровень). В 2 ч. Ч. 1 / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – Москва : Мнемозина, 2019. – 288 с. – ISBN 978-5-346-04286-0. – Текст : непосредственный.

10. **Мордкович, А. Г.** Алгебра: 9 класс: учебник для общеобразовательных организаций (углубленный уровень). В 2 ч. Ч. 2 / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – Москва : Мнемозина, 2019. – 287 с. – ISBN 978-5-346-04287-7. – Текст : непосредственный.

11. Региональный центр оценки качества и информатизации образования: официальный сайт. – Челябинск, 2013. – URL: https://rcokio.ru (дата обращения: 12.03.2021). – Текст : электронный.

12. РЕЕСТР примерных основных общеобразовательных программ: официальный сайт. – Москва, 2015. – URL: https://fgosreestr.ru (дата обращения: 10.02.2021). – Текст : электронный.

13. Решу ОГЭ: официальный сайт. – Москва, 2016. – URL: https://oge.sdamgia.ru (дата обращения: 23.04.2021). – Текст : электронный.