МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Обобщение некоторых задач, сводящихся к раскраске графов

Выпускная квалификационная работа

по направлению 44.03.05 Педагогическое образование

код, направление

Направленность программы бакалавриата

«Математика. Экономика»

Выполнил (а):

Студент (ка) группы ОФ - 513/086-5-1

Якушева Юлия Шамильевна

Проверка на объем заимствований:

71 % авторского текста

Работа рекомендована к защите

рекомендована/не рекомендована

« 6 » апреля 2017 г.

зав. кафедрой МиМОМ

(название кафедры)

Суховиенко Е.А.

Научный руководитель:

уч. степень, должность

к.ф.-м.н., доцент кафедры МиМОМ

Нигматулин Равиль Михайлович

Челябинск

2017 год

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Обобщение некоторых задач, сводящихся к раскраске графов

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05 Педагогическое образование
код, направление
Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»

Выполнил (а):
Студент (ка) группы ОФ – 513/086-5-1
Якушева Юлия Шамильевна

Проверка на объем заимствований:
___________% авторского текста

Работа _______________ к защите
рекомендована/не рекомендована
« ___ » ___________ 20__ г.
зав. кафедрой _______________
(название кафедры)
_____________ Фамилия И.О.

Научный руководитель:
уч. степень, должность
к.ф.-м.н., доцент кафедры МиМОМ
Нигматулин Равиль Михайлович

Челябинск
2017 год

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время теория графов активно развивается. Методы теории графов широко применяются в разделах дискретной математики. Они крайне важны при анализе и синтезе различных дискретных преобразователей: функциональных блоков компьютеров, комплексов программ и т.д. [2].

Первой работой теории графов как математической дисциплины считают статью Леонарда Эйлера (1736 г.), в которой рассматривалась задача о Кёнигсбергских мостах [6].

Дальнейшее развитие теория графов получила спустя почти 100 лет с развитием исследований по электрическим сетям, кристаллографии, органической химии и другим наукам. Графы служат удобным средством описания связей между объектами. Например, графом является схема линий метрополитена. Точками на ней представлены станции, а линиями – пути движения поездов [4].

Позднее появились работы, связанные с раскраской графа. Как наиболее яркий пример результатов в данной области стоит отметить проблему четырех красок (Френсис Гутри, 1852 г.). Раскраска графов на данный момент является одной из самых популярных и интенсивно изучаемых тем в теории графов. Данная работа посвящена практическим задачам, которые решаются с помощью раскраски графов. Рассмотрены задачи на составление расписаний, о размещении грузов, задача о составлении рейсов машин с вывозом товаров и другие. Большое практическое значение определяет актуальность данной темы и исходя из этого следует цель работы:

Цель данного исследования: постановка и решение обобщённых вариантов прикладных задач, с помощью раскраски графов.

Исходя из поставленной цели, нами были определены следующие **задачи:**

1. Рассмотреть типы прикладных задач, их постановку в терминах теории графов.

2. Сформулировать некоторые обобщения задачи о составлении расписания рейсов машин с вывозом товаров.

3. Найти решение сформулированных задач с помощью раскраски графов.

Объектом исследования является раскраска графов.

Предметом исследования является задача о составлении расписания рейсов машин с вывозом товаров и ее обобщения, решаемые с помощью раскраски графов.

Квалификационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, список литературы и приложений.

Во *введении* обосновывается актуальность данной темы, формулируются цель, задачи, характеризуется работа в целом.

В *первой главе* «Основные понятия и факты теории графов» даны базовые определения и теоремы.

Во *второй главе* «Прикладные задачи, сводящиеся к раскраске графов» рассматривается шесть типов прикладных задач, которые решаются с помощью раскраски графов. Каждая задача формулируется в терминах теории графов, приводится несколько задач на раскраску графов с их решением.

В *третьей главе* «Постановка некоторых задач, сводящихся к раскраске графов» рассматривается задача о составлении расписания рейсов машин с вывозом товаров и формулируются ее обобщения, решаемые с помощью раскраски графов.

В *заключении* подведены итоги работы.

В *приложении* представлена программа «Графоанализатор 1.3.4beta» и ее применение для решения задач сводящихся к раскраске графов, а также применение программы «Wolfram Mathematica 8.0» для нахождение хроматического полинома.

Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

1.1. Основные понятия теории графов

Для дальнейшего изложения материала в этом параграфе приводятся основные понятия теории графов [1, 2, 8, 11].

Понятие «граф» впервые было сформулировано венгерским математиком Д. Кёнига в 1936 г., хотя первые задачи, сводящиеся к графам, рассматривал еще Эйлер (XVIII в.).

Определение 1.1. Пусть V – непустое множество, $V^{(2)}$ – множество всех его двухэлементных подмножеств. Пара (V, E), где E – произвольное подмножество множества $V^{(2)}$, называется *графом* (*неориентированным графом*). Элементы множества V называются *вершинами графа*, а элементы множества E – *ребрами*. Итак, граф это конечное множество V вершин и множество E – ребер, $E \subseteq V^{(2)}$. Множества вершин и ребер графа G обозначаются символами VG и EG соответственно. Вершины и ребра графа называются его *элементами*. Число $|VG|$ вершин графа G называется его *порядком* и обозначается через$|G|$. Если $|G| = n$, $|EG| = m$, то G называют (n, m) – графом.

Определение 1.2. Говорят, что две вершины u и v графа *смежны*, если множество $\{u, v\}$ является ребром, и *не смежны* в противном случае. Если $e = \{u, v\}$ – ребро, то вершины u и v называют его *концами*. В этой ситуации говорят, что ребро e *соединяет* вершины u и v. Такое ребро обозначается символом uv. Два ребра называют *смежными*, если они имеют общий конец.

Рассмотрим некоторые графы специально вида и их свойства.

Определение 1.3. Граф G называется *полным*, если любые две его вершины смежны, т.е. $EG = (VG)^{(2)}$. Полный граф порядка n обозначается символом K_n, число ребер в нем равно $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Графы K_n, $n \leq 5$ изображены на рисунке 1.1.

Определение 1.4. Граф называется *пустым*, если в нем нет ребер. Пустой граф порядка n обозначается символом O_n.

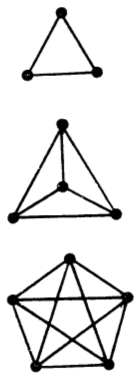


Рис. 1.1

Графы K_n

Определение 1.5. Граф называется *двудольным*, если существует такое разбиение множества его вершин на две части (*доли*), что концы каждого ребра принадлежат разным частям.

Если при этом любые две вершины, входящие в разные доли, смежны, то граф называется *полным двудольным*. Полный двудольный граф, доли которого состоят из p и из q вершин, обозначается символом $K_{p,q}$. При $p = 1$ получаем *звезду* $K_{1,q}$. Граф – звезда $K_{1,5}$ и полный двудольный граф$K_{3,3}$ изображены на рисунке 1.2.

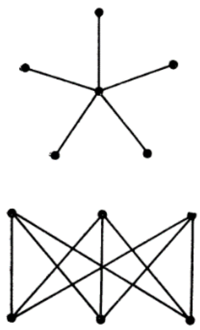


Рис. 1.2

Графы $K_{1,5}$ и $K_{3,3}$.

Как в применениях теории графов, так и в самой этой теории чаще существенно лишь то, что есть объекты (вершины графа) и связи между объектами (ребрами). С этих позиций графы, которые получаются один из другого изменением наименований вершин, разумно не различать. Сравнение графов основано на следующем определении.

Определение 1.6. Пусть G и H – графы, а $\varphi: VG \rightarrow VH$ – биекция. Если для любых u и v вершин графа G их образы $\varphi(u)$ и $\varphi(v)$ смежны в H тогда и только тогда, когда u и v смежны в G, то эта биекция называется *изоморфизмом графа G на граф H*. Если такой изоморфизм существует, то пишут $G \cong H$ (тогда и $H \cong G$) и говорим, что графы G и H *изоморфны*.

В некоторых ситуациях требуется различать изоморфные графы, и тогда рассматривается понятие помеченный граф.

Определение 1.7. Граф порядка n называется *помеченным*, если его вершинам присвоены некоторые метки, например, $1, 2, \dots, n$. Отождествив каждую из вершин графа с ее номером (и, следовательно, множество вершин – с множеством чисел $\{1,2,\dots,n\}$), определим *равенство* помеченных графов G и H одного и того же порядка: $G = H$ тогда, когда $EG = EH$. На рисунке 1.3 изображены три разных помеченных графа.

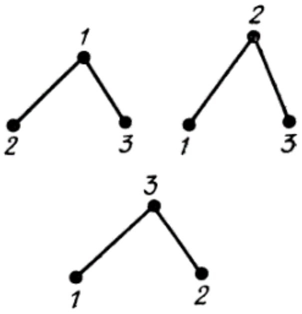


Рис. 1.3 Помеченные графы

Определение 1.8. Граф H называется *подграфом* (или *частью*) графа G, если $V(H) \subseteq V(G)$, $EH \subseteq EG$. Если H – подграф графа G, то говорят, что H *содержится в* G. Подграф H называется его остовным *подграфом* (или *фактором*), если $V(H) = V(G)$. Если множество вершин подграфа H есть U, а множество его ребер совпадает с множеством всех ребер графа G, оба конца которых принадлежат U, то H называется *подграфом, порожденным* (или *индуцированным*) *множеством* U, и обозначается через $G(U)$. На рисунке 1.4 изображены граф G и три его подграфа H_1, H_2 и H_3, среди которых H_3 является остовным, а H_2 – порожденным.

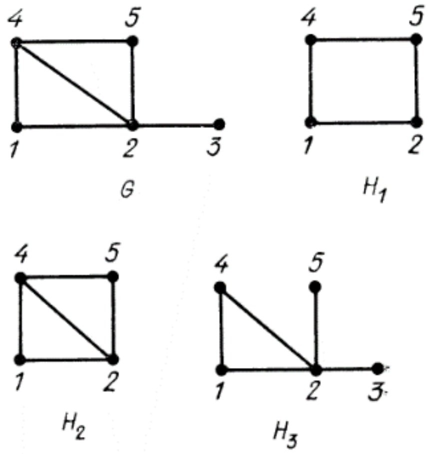


Рис. 1.4. Граф G и подграфы – H_1, H_2 и

Рассматриваются также подграфы, порожденные множествами ребер. Для $E' \subseteq EG$ множество ребер *порожденного подграфа* $G(E')$ совпадает с E', а множество вершин – с множеством концов ребер из E'.

Далее рассмотрим определения и факты, связанные с такими важными понятиями, как маршрут в графе и связность.

Определение 1.9. Чередующаяся последовательность $u_1, e_1, u_2, e_2, \dots, e_t, u_{t+1}$ вершин и ребер графа, такая что $e_i = u_i u_{i+1}$ ($i=\overline{1,t}$), называется *маршрутом*, *соединяющим вершины* u_1 и u_{t+1} (или (u_1, u_{t+1}) – *маршрутом*).

Очевидно, что этот маршрут можно задать последовательностью $u_1, u_2, \dots, u_{t+1}$ его вершин, а также последовательностью $e_1, e_2, \dots, e_t$ его ребер.

Определение 1.10. Маршрут называется *цепью*, если все его ребра различны, и *простой цепью*, если все его вершины, кроме, возможно, крайних, различны. Маршрут $u_1, e_1, u_2, e_2, \dots, e_t, u_{t+1}$ называется *циклическим*, если $u_1 = u_{t+1}$. Циклическая цепь называется *циклом*, а циклическая простая цепь – *простым циклом*. Число t ребер в маршруте $u_1, e_1, u_2, e_2, \dots, e_t, u_{t+1}$ называется его *длиной*. Простой цикл t длины называется – *циклом*, 3-цикл часто называют *треугольником*. Минимальная из длин циклов графа называется его *обхватом*.

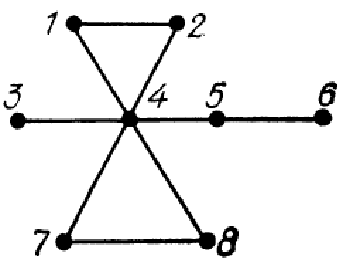


Рис. 1.5.
Обхват графа равен 3.

Рассмотрим граф, изображенный на рисунке 1.5. В нем простыми цепями является (1,2) и (1,2,4,7); (1,2,4,7,8,4) – цепь, не являющаяся простой; (1,2,4,7,8,4,2) – маршрут, не являющийся цепью; (1,2,4,1) – простой цикл. Обхват этого графа равен 3.

Определение 1.11. Граф называется *связным*, если любые две его несовпадающие вершины соединены маршрутом.

Рассмотрим еще один простой и важный тип графов. Это – деревья. Деревья важны не только потому, что они находят приложения в различных областях знания, но и в силу особого положения их в самой теории графов.

Определение 1.12. Граф называется *ациклическим*, если в нем нет циклов. *Дерево* – это связный ациклический граф. Каждый граф не содержащий циклов, называется *лесом*. Таким образом, компонентами леса являются деревья. Известны и другие определения дерева. В теореме 1.1. отражены некоторые из них.

Теорема 1.1. Для графа $G = (n, m)$ следующие утверждения эквивалентны:

(1) G – дерево;

(2) G – граф, в котором любые две вершины соединены единственной простой цепью;

(3) G – связный граф и $m = n - 1$;

(4) G – ациклический граф и $m = n - 1$;

(5) G – ациклический граф, и добавление нового ребра приводит к появлению точно одного простого цикла.

Доказательство данной теоремы рассматривается в [11].

Из определения дерева, следует важное свойство. Дерево – это связный граф с минимальным числом ребер.

Далее рассмотрим ориентированные графы и определения, факты, связанные с ориентированными маршрутами.

Определение 1.13. Ориентированный граф (или *орграф*) – это пара (V, E), где V – множество вершин, E – множество *ориентированных ребер*, которые называются *дугами*, $E \subseteq V^2$. Если $e = (u_1, u_2)$ – дуга, то вершины u_1 и u_2 называются *началом* и *концом* соответственно. Дуги на рисунке отмечаются стрелками, указывающими направление от начала к концу (рисунок 1.6).

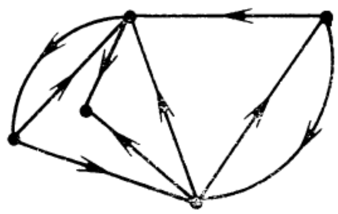


Рис. 1.6 Орграф

Определение 1.14. Путем в орграфе (V, E) называется последовательность

$$u_1, e_1, u_2, e_2, \dots, u_t, e_t, u_{t+1}, \tag{1}$$

где $t \geq 0$, u_i $(i = 1, 2, \dots, t + 1)$ – вершина из V и e_i $(i = 1,2, \dots, t)$ – дуга (u_i, u_{i+1}) из E. Иначе говоря, дуга e_i соединяет u_i с u_{i+1}. Следуя по пути (1), мы двигаемся от u_1 к u_2, от u_2 к u_3 и т.д., пока не достигнем u_{i+1}.

Поскольку t может равняться 0 единственная вершина u_1 также является путем, иначе говоря, это путь из u_1 в u_1.

Мы будем говорить, что вершина v *достижима* из вершины u, если имеется путь из u в v. По *определению 1.14.* отдельная вершина u считается путем, поэтому каждая вершина u достижима сама для себя.

Теорема 1.2. Если v достижима из u, то существует простой путь из u в v.

Доказательство данной теоремы рассматривается в [2, 8].

Определение 1.15. Если u и v – вершины орграфа (V, E), то под *расстоянием* от u до v будем понимать длину кратчайшего пути из u в v.

Заметим, что из u в v может быть несколько кратчайших путей. В то же время может оказаться, что из u в v вообще не будет путей, в этом случае расстояние не определено.

Поскольку при $u \neq v$ произвольный (u, v) – маршрут, не являющийся простой цепью, превращается в простую (u, v) – цепь после устранения «лишних кусков», то верны следующие утверждения.

Утверждение 1.1. При $u \neq v$ всякий (u, v) – маршрут содержит простую (u, v) – цепь.

Утверждение 1.2. Всякий цикл содержит простой цикл.

Утверждение 1.3. Объединение двух несовпадающих простых (u, v) – цепей содержит простой цикл.

Доказательство данного утверждения представлено в [2].

Утверждение 1.4. Если C и D – два несовпадающих простых цикла, имеющих общее ребро e, то граф $C \cup D - e$ также содержит простой цикл.

Доказательство данной теоремы приведено в [2].

Определение 1.16. Операция удаление вершин – называется *отождествление* (или *слияние*) *вершин*. То есть с ее помощью можно из имеющегося графа получать другие графы с меньшим числом элементов. Пусть u и v – две вершины графа G, $H = G - u - v$. К графу H присоединим новую вершину u', соединив ее ребром с каждой из вершин, входящих в объединение окружений вершин u и v в графе G. Говорят, что построенный граф получается из графа G *отождествлением вершин* u *и* v [2].

1.2. Понятия, связанные с раскраской графов

Важное место в теории графов занимают задачи на раскраску вершин или ребер графа. Для дальнейшего изложения приведем некоторые понятия из [1, 2, 8, 11].

Определение 2.1. Пусть G – некоторый граф, k – натуральное число. Произвольная функция вида $f: VG \to \{1,2,\dots,k\}$ называется *вершинной k-раскраской* (или *k-раскраской*) графа G. Раскраска называется *правильной*, если $f(u) \neq f(v)$ для любых смежных вершин u и v. Граф, для которого существует правильная k-раскраска, называется *k-раскрашиваемым* (или *раскрашиваемым k цветами*). В определении раскраски вместо множества $\{1,2,\dots,k\}$ можно взять произвольное k-элементное множество.

Правильную k-раскраску графа можно трактовать как окрашивание каждой его вершины в один из k цветов, при этом смежные вершины должны получать различные цвета. Поскольку функция f не обязательно сюрьективна, то при k-раскраске фактически может быть использовано менее k цветов. Таким образом, правильную k-раскраску графа G можно рассматривать, как разбиение $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_l = VG,\ l \leq k,$ множества вершин VG на не более чем k непустых классов, каждый из которых является независимым множеством. Классы этого разбиения называются *цветными классами*.

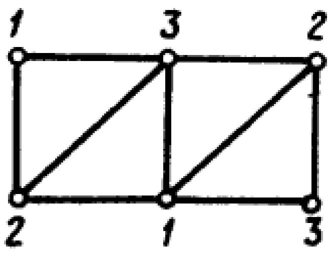


Рис. 2.1. 3-раскрашиваемый граф

На рисунке 2.1 изображен 3-раскрашиваемый граф и показана 3-раскраска.

Определение 2.2. Минимальное число k, при котором граф G является k-раскрашиваемым, называется *хроматическим числом* этого графа и обозначается $\chi(G)$. Если $\chi(G) = k$, то граф G называется *k-хроматическим*. Правильная k-раскраска графа G при $k = \chi(G)$ называется *минимальной*.

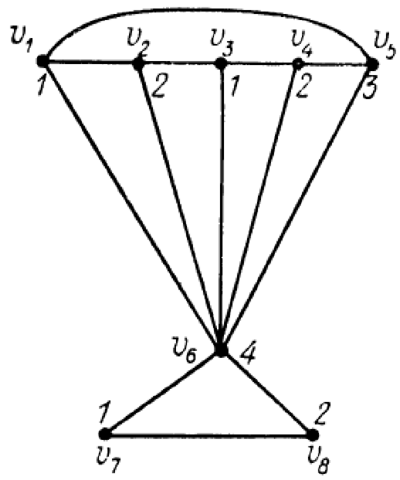


Рис. 2.2. 4-раскрашиваемый граф

Рассмотрим граф G, изображенный на рисунке 2.2. Для него указана правильная 4-раскраска. Этот граф нельзя раскрасить правильно меньшим числом цветов. Так как он содержит цикл $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$, для правильной раскраски которого нужно не менее трех цветов, а для вершины v_6 требуется новый цвет. Итак, $\chi(G) = 4$.

Задачи определения хроматического числа и построения минимальной раскраски произвольного графа являются очень сложными, эффективные алгоритмы их решения неизвестны.

Следующие теоремы дают оценки хроматического числа графа, выраженные через различные его характеристики.

Первый результат о раскраске характеризует свойства 2-раскрашиваемых графов (такие графы иногда называются двудольными).

Теорема 2.1. Граф G – 2-раскрашиваем тогда и только тогда, когда не содержит циклов нечетной длины.

Доказательство данной теоремы рассматривается в [2, 8].

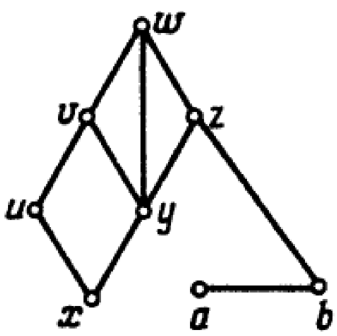


Рис. 2.3. $\chi(G) = 3$, $\Delta(G) = 4$, $\omega(G) = 3$

Оценим сверху и снизу значение $\chi(G)$. Выразим оценки через другие численные характеристики графа. Чтобы определить первую из них, введем обозначение $\deg u$ для *степени* вершины u, т.е. для числа вершин, связанных с u ребром. Затем определим для графа G величину $\Delta(G)$, равную максимальной из степеней $\deg u$ графа G. Например, в графе G на рисунке 2.3 $\Delta(G) = 4$, поскольку $\deg y = 4$.

Поскольку задачу правильной раскраски точно решить трудно, то актуальны оценки хроматического числа, выражаемые в терминах более или менее просто вычислимых параметров графа.

Рассмотрим несколько оценок хроматического числа, связанных со степенями вершин графа.

Через γ обозначим множество всех порождённых подграфов графа G, а через $\delta(G)$, как обычно, минимальную из степеней вершин графа G.

Теорема 2.2. Для любого графа G верно неравенство

$$\chi(G) \leq 1 + \max_{H \in \gamma} \delta(H)$$

Доказательство данной теоремы рассмотрено в [2].

Следствие. 2.1. Для любого графа G верно неравенство

$$\chi(G) \leq 1 + \Delta(G).$$

Некоторое улучшение последней оценки дает следующая теорема.

Теорема 2.3. (Теорема Брукса 1941 г.). Если G – связный граф не являющийся полным, и $\Delta(G) \geq 3$, то $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Доказательство данной теоремы рассматривается в [2, 8].

Тривиальной нижней границей для хроматического числа является *плотность*, т.е. число вершин в наибольшей клике графа G, обозначаемое символом $\omega(G)$. Для графа на рисунке 2.3 $\omega(G) = 3$, поскольку наибольшая клика есть треугольник.

Теорема 2.4. Имеет место неравенство $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Доказательство данной теоремы излагается в [2, 8].

На рисунке 2.4 приведен граф G, у которого хроматическое число $\chi(G)$ больше плотности $\omega(G)$ ($\chi(G) = 4$ и $\omega(G) = 3$).

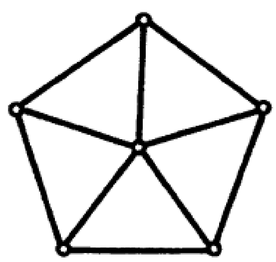


Рис. 2.4.
$\chi(G) > \omega(G)$

На первый взгляд может показаться, что плотность графа тесно связана с его хроматическим числом, и если плотность графа $\omega(G)$ невелика, то невелико и $\chi(G)$. Однако на самом деле разность $\chi(G) - \omega(G)$ может быть сколь угодно большим числом. А именно, следующая теорема верна.

Теорема 2.5. (А. А. Зыков, 1949 г.). Существуют графы без треугольников с произвольно большим хроматическим числом.

Доказательство этой теоремы представлено в [2].

Заметим, что графы, существовании которых гарантируется предыдущей теоремой, является экзотическими, поскольку для почти каждого графа G верно следующее утверждение: если $\omega(G) \leq k$, то и $\chi(G) \leq k$ (Ф. Колайтис, Х. Прёмель, В.Ротшильд, 1987 г.) [2].

Естественный интерес вызывает стремление уточнить оценку хроматического числа, устанавливаемую теоремой Брукса. Следующую гипотезу выдвинули Бородин О.В. и Косточка А.В. в 1977 г., но пока не доказанную или опровергнутую:

Гипотеза. Если $\Delta(G) \geq 9$ и $\omega(G) \leq \Delta(G)$, то $\chi(G) \leq \Delta(G) - 1$.

Следующая теорема дает асимптотику хроматического числа.

Теорема 2.6. (А. Д. Коршунов, 1980 г.). Хроматическое число почти каждого графа G порядка n удовлетворяет соотношению

$$\chi(G) \sim n/2\, log_2\, n.$$

Доказательство этой теоремы приведено в [2].

Еще одним важным понятием, связанным с раскраской графа, является понятие хроматической функции. С помощью этого понятия определяется количество раскрасок графа в несколько цветов.

Определение 2.3. Поскольку k-раскраской графа G является произвольное отображение вида $f: VG \rightarrow \{1,2, \dots, k\}$, то число попарно различных k-раскрасок этого графа равно числу всех таких отображений, т. е. t^n, где $n = |VG|$. Но если ограничиться только правильными раскрасками, то вопрос о числе различных среди них становится сложным. Количество попарно различных правильных k-раскрасок графа G называется *хроматической функцией* графа G и обозначается через $f(G, k)$.

Из *определения 2.3.* следует, что $f(G, \chi)$ равно числу попарно различных минимальных раскрасок графа G.

Очевидно, что наименьшее из чисел k, для которых $f(G, k) \neq 0$, есть $\chi(G)$.

Для некоторых графов хроматическая функция определяется совсем легко. Например, $f(O_n, k) = t^n$, так как цвета всех вершин пустого графа можно выбирать независимо друг от друга. При правильной раскраске полного графа K_n первая вершина может иметь любой из k заданных цветов, а для окраски каждой из последующих вершин разрешается использовать на один цвет меньше, чем для предыдущей.

Поэтому $f(K_n, k) = t(t-1)\dots(t-n+1)$. Итак, имеем

$$f(K_n, k) = \begin{cases} t(t-1)\dots(t-n+1), & \text{если } t \geq n, \\ 0, & \text{если } t < n. \end{cases}$$

В общем случае, как отмечалось выше, вычисление хроматической функции сопряжено с большими трудностями.

Поскольку $f(K_n, k)$ – полином от k, то верно следующее следствие.

Следствие 2.2. Хроматическая функция $f(G, k)$ любого графа является полиномом от k.

Поэтому хроматическую функцию $f(G, k)$ обычно называют хроматическим полиномом графа G.

Глава 2. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ, СВОДЯЩИЕСЯ К РАСКРАСКЕ ГРАФОВ

2.1. Типы прикладных задач

В этом параграфе мы приводим несколько типов задач, решаемые с помощью раскраски графов [2, 8, 12, 13,15,16]. Нами не было обнаружено источника, в котором приводился бы полный обзор практических задач, решение которых сводится к раскраске графов. В этом параграфе мы попытались собрать воедино все известные практические задачи на раскраску графов.

1. *Задача о составлении расписания*

Предположим, что нужно прочитать несколько лекций за кратчайшее время. Чтение каждой лекции в отдельности занимается один час, но некоторые из лекций не могут читаться одновременно (например, их читает один преподаватель или требуется одна и та же аудитория).

Требуется составить расписание так, чтобы чтение всех лекций заняло минимально возможное время (в качестве «единицы времени» считается одна пара) [2].

2. *Задача распределения оборудования*

Заданы множества $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ работ и механизмов соответственно. Для выполнения каждой из работ требуется некоторое время, одинаковое для всех работ, и некоторые механизмы. При этом никакой из механизмов не может быть одновременно занят в нескольких работах.

Нужно распределить механизмы так, чтобы общее время выполнения всех работ было минимальным [2].

3. *Задача о проектировании коробки скоростей*

Коробка скоростей – механизм для изменения частоты вращения ведомого вала при постоянной частоте вращения ведущего. Имеется n шестерен, которые размещаются на k валах.

Задача, стоящая перед конструктором коробки, заключается в минимизации ее размеров, а это часто сводится к поиску наименьшего числа валов k, на которых размещаются n шестерен [2].

4. *Задача о размещении грузов*

Имеется n грузов, которые нужно разместить в контейнеры для перевозки, причем некоторые грузы нельзя помещать в один контейнер.

Какое наименьшее количество контейнеров потребуется для перевозки всех грузов, и как нужно разместить грузы в этих контейнерах [2]?

5. *Задача об авиарейсах*

Имеем k самолетов, и мы должны назначить им n рейсов, где i-й рейс проходит во временном интервале (a_i, b_i). Очевидно, что если два рейса перекрываются, то мы не можем назначить тот же самый самолёт для обоих перелетов.

Требуется составить авиарейсы так, чтобы ни один самолет не был задействован в двух перелетов одновременно [8].

6. *Задача о составлении рейса машин с вывозом товара*

Машина с вывозом товаров может за один день объехать ряд мест. Рейсом такой машины является последовательность пунктов, которые она посетит за данный день, при условии, что рейс должен быть закончен в течении одного рабочего дня. Мы хотим найти множество рейсов со следующими свойствами:

1) каждый пункт посещается за неделю определенное число раз;

2) рейсы можно распределить среди шести дней недели (воскресение – нерабочий день) таким образом, чтобы ни один пункт не посещался дважды за один день; ни в один день число рейсов не превосходило число машин с вывозом товаров.

3) Общее время работы всех машин за неделю минимально.

7. Задача о спортивных турнирах по круговой системе

В соревновании задействованы n команд, где каждая команда должна играть ровно m раз в течение фиксированного количества раундов. Обычно количество команд n является четным. В случаях, когда n нечетно, может быть введена дополнительная «фиктивная команда», и команда, назначенная для игры с фиктивной командой, встречается с ней в соответствии с расписанием игр. Расписание турнир по круговой системе считается допустимым, если каждая команда в расписании конкурирует не чаще одного раза за раунд.

Требуется составить расписание игр так, чтобы каждая команда провела заданное число игр с другими командами в течение фиксированного количества раундов [12].

8. Задача о коллективном поведении живых организмов

Путь одного муравья, пчелы, термита и осы часто слишком прост, но их коллективное и социальное поведение имеет большое значение. Коллективное и социальное поведение живых существ показывает, что продвинутые млекопитающие также пользуются социальной жизнью.

Дано n представителей (муравьи, пчелы, термиты, осы и т.д.), которые нужно распределить на классы живых организмов, обладающими общими свойствами.

На какое наименьшее количество классов млекопитающих потребуется распределить этих представителей [13]?

9. Задача о частотных диапазонах в станциях сотовой сети

Имеется n базовых станций (вышек сотовой связи), которые расположены так, что у них есть общие зоны покрытия. Так как число диапазонов частот, которые используются в системе мобильной радиосвязи ограниченно, то могут возникать взаимные помехи из-за того, что различные базовые станции (например, с общей зоной покрытия) используют одинаковый диапазон частот.

Требуется распределить частоты между базовыми станциями таким образом, чтобы минимизировать помехи, оказываемые станциями друг на друга [15].

Рассмотренные выше задачи могут быть сведены к построению и раскраске некоторого графа. В этом графе учитываются связи между объектами: наличие какого-либо общего свойства или конкуренции. Такой граф принято называть графом конфликтов (Conflict Graph) [19]. Его раскраска позволяет найти разбиение всех объектов на независимые множества, в каждом из которых элементы не являются конкурирующими объектами. В следующем параграфе рассматриваются постановки этих задач в терминах теории графов, а решение задач сводится к нахождению хроматического числа и минимальной раскраски графа конфликтов [8, 16].

2.2 Постановка задач в терминах теории графов

1. Задача о составлении расписания

Построим граф *G*, в котором вершины соответствуют лекциям. Две вершины этого графа смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им лекции не могут читаться одновременно. Любая правильная раскраска графа *G* определяет допустимое расписание: лекции, соответствующие вершинам графа, составляющим цветной класс, читаются одновременно. И, наоборот, любое расписание определяет правильную раскраску графа *G*.

Если для раскраски n вершин использовались цвета $1,2,\ldots,k$, то вершины, раскрашенные в i-й цвет, дают список лекций, которые нужно читать на i-й паре. Минимальная раскраска графа дает расписание с минимальным временем проведения всех пар [2].

Рассмотрим пример.

Требуется составить расписание для проведения занятий по 11 дисциплинам $D_1, D_2, \ldots, D_{10}, D_{11}$ студентам 5 групп $G_1, G_2, G_3, G_{4,} G_5$ так, чтобы было затрачено наименьшее возможное время. Для каждой дисциплины время проведения занятия одинаковое – 1 пара. В таблице 1 «+» отмечены дисциплины, которые должны быть проведены для студентов заданных групп.

Таблица 1. Дисциплины и группы

Дисциплина	Группа				
	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
D_1				+	
D_2			+		
D_3	+	+		+	
D_4			+		
D_5					+
D_6	+				+
D_7		+		+	
D_8			+		+
D_9		+			
D_{10}			+		+
D_{11}	+			+	

Решение.

Построим граф с вершинами $D_1, D_2, \ldots, D_{10}, D_{11}$. Соединим ребрами вершины, в соответствии с таблицей 1. Получим граф, изображенный на рисунке 3.1. Вершины D_1, D_3, D_7 и D_{11} этого графа порождают в нем подграф, изоморфный графу K_4.

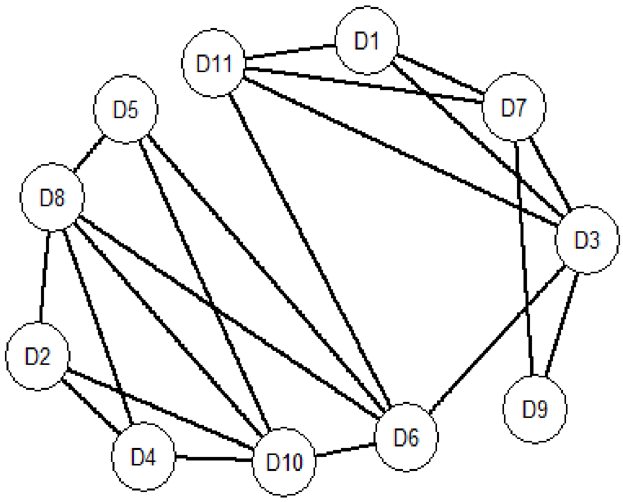


Рис. 3.1. Граф к задаче о составлении расписаний

Следовательно, хроматическое число нашего графа не меньше 4, $\chi(G) \geq 4$. На рисунке 3.2 указана правильная раскраска нашего графа в 4 краски.

Следовательно, хроматическое число графа равно 4, $\chi(G) = 4$ т. е. все занятия можно провести за 4 пары.

Сопоставляем данные с таблицей 1 и соответствующее расписание указано в таблице 2. Первой паре будут соответствовать дисциплины, для которых вершины раскрашены в зеленый цвет – $D_1, D_{4,} D_6, D_9$. Второй паре

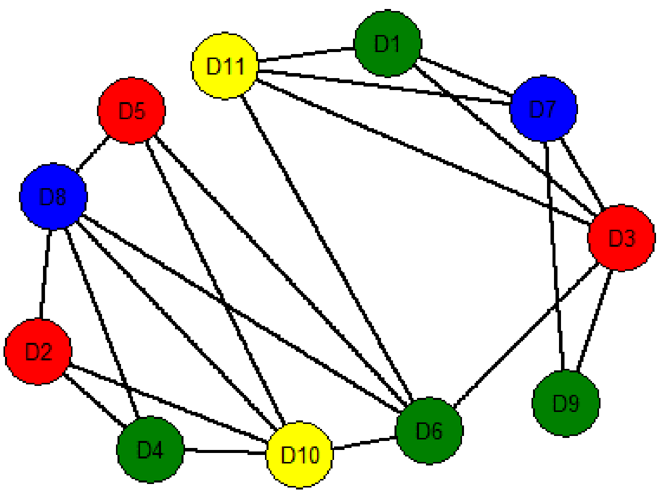


Рис. 3.2. Раскраска графа

соответствуют дисциплины, соответствующие вершины для которых раскрашены в красный цвет – D_2, D_3, D_5. Вершины D_7, D_8, покрашенные в синий цвет, будут соответствовать дисциплинам третьей пары. Для четвертой пары остаются дисциплины, соответствующие вершины для которых покрашены в желтый цвет – D_{10}, D_{11}.

Таблица 2. Расписание

Пары	Список проведенных дисциплин	Расписание по группам				
		G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
1	D_1, D_4, D_6, D_9	D_6	D_9	D_4	D_1	D_6
2	D_2, D_3, D_5	D_3	D_3	D_2	D_3	D_5
3	D_7, D_8		D_7	D_8	D_7	D_8
4	D_{10}, D_{11}	D_{11}		D_{10}	D_{11}	D_{10}

2. *Задача распределения оборудования*

Построим граф G, в котором вершины соответствуют работам. Две вершины этого графа смежны тогда и только тогда, когда для соответствующих им работ требуется хотя бы один общий механизм. Любая правильная раскраска графа G определяет допустимое распределение оборудования. И, наоборот, любое распределение оборудования определяет правильную раскраску графа G. Если для раскраски n вершин использовались цвета $1,2, \dots, k$, то вершины, раскрашенные в i-й цвет, дают список работ, которые можно выполнять одновременно на i-м временном интервале продолжительностью t_0. Минимальная раскраска графа дает распределение оборудования с наименьшим временем $T_{min} = \chi(G) \cdot t_0$ [2].

Рассмотрим пример.

Пусть имеется 9 механизмов, которые требуется для выполнения 10 работ. Все работы выполняются за одно и тоже время $t_0 = 1$ч. Использование механизмов для проведения каждой из работ указано в таблице 3.

Таблица 3. Работа и механизмы

Механизм	Работа									
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
b_1	+			+		+				+
b_2		+	+				+		+	
b_3		+			+			+		
b_4						+			+	
b_5	+				+				+	
b_6				+				+		+
b_7			+	+		+				
b_8	+							+		
b_9			+	+		+	+			+

Решение.

Построим граф с вершинами $a_1, a_2, \dots, a_9, a_{10}$. Соединим ребрами вершины, в соответствии с таблицей 3. Получим граф, изображенный на рисунке 3.3. Вершины a_1, a_4, a_6 и a_{10} этого графа порождают в нем подграф, изоморфный графу K_4. Следовательно, хроматическое число нашего графа не меньше 4, $\chi(G) \geq 4$.

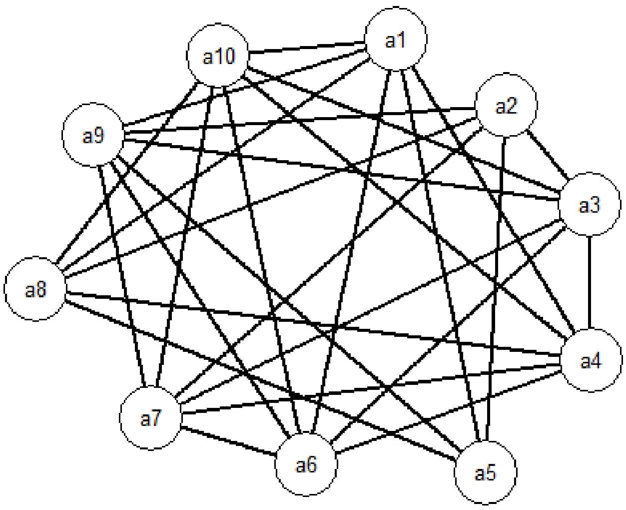


Рис. 3.3. Граф к задаче о распределении оборудования

На рисунке 3.4 указана правильная раскраска нашего графа в 5 красок. Сопоставляем данные с таблицей 3 и соответствующее расписание указано в таблице 4. В первый час указаны работы a_2, a_6, для которых вершины раскрашены в красный цвет. Во второй час указаны работы a_3, a_8, для них

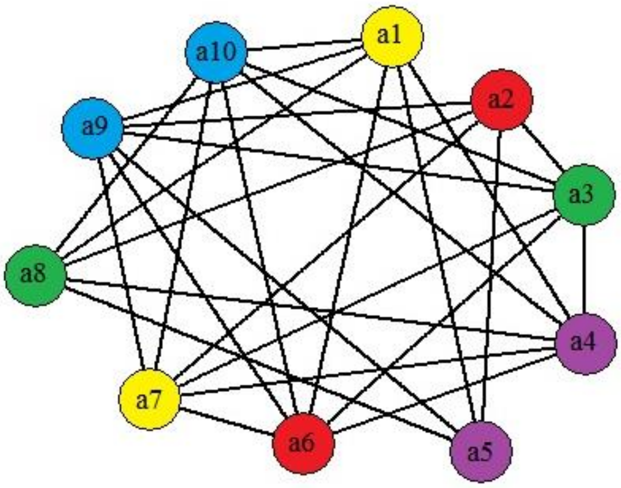


Рис. 3.4. Раскраска графа

вершины раскрашены в зеленый цвет. Далее, для третьего, четвертого и пятого часа, указываем соответственно работы, соответствующие вершины для которых покрашены в голубой (a_9, a_{10}), желтый (a_1, a_7) и фиолетовый (a_4, a_5) цвета.

Таблица 4. Расписание выполнения работ

Время	Выполняемые работы	Использованные механизмы	Свободные механизмы
1-й час	a_2, a_6	$b_1, b_2, b_3, b_4, b_7, b_9$	b_5, b_6, b_8
2-й час	a_3, a_8	$b_2, b_3, b_6, b_7, b_8, b_9$	b_1, b_4, b_5
3-й час	a_9, a_{10}	$b_1, b_2, b_4, b_5, b_6, b_9$	b_3, b_7, b_8
4-й час	a_1, a_7	b_1, b_2, b_5, b_8, b_9	b_3, b_4, b_6, b_7
5-й час	a_4, a_5	$b_1, b_3, b_5, b_6, b_7, b_9$	b_2, b_4, b_8

Таким образом, хроматическое число графа равно 5, $\chi(G) = 5$ т. е. минимальное время выполнения работ за 5 часов,

$$T_{min} = \chi(G) \cdot t_0 = 5 \cdot 1 = 5.$$

3. *Задача о проектировании коробки скоростей*

Построим граф *G*, вершины которого биективно соответствуют шестерням. Две вершины этого графа смежны тогда и только тогда, когда две шестерни не могут находиться на одном валу (например, они могут быть в зацеплении, или их общий вес велик для одного вала и т.д.). Любая правильная раскраска определяет шестерни, которые могут находиться на одном валу. И, наоборот, любое размещение шестерен, которые могут находиться на одном валу, определяют минимальную раскраску графа. Если для раскраски n вершин использовались цвета $1,2,\dots,k$, то вершины раскрашенные в i-й цвет дают набор шестерен, которые можно разместить на i-м валу. Минимальная раскраска графа даёт минимальное количество валов, необходимых при проектировании коробки скоростей, равное хроматическому числу $\chi(G)$ [2].

4. *Задача о размещении грузов*

Построим граф *G*, в котором вершины соответствуют грузам. Две вершины этого графа смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им грузы нельзя поместить в один контейнер. Любая правильная раскраска графа *G* определяет допустимое распределение грузов. И наоборот любое распределение грузов определяет правильную раскраску графа *G*. Если для раскраски n вершин использовались цвета $1,2,3,\dots,k$, то вершины, раскрашенные в i-й цвет, дают список грузов, которые нужно поместить в i-й контейнер. Минимальная раскраска графа дает распределение грузов в минимальное число контейнеров, равное $\chi(G)$ [2].

Рассмотрим пример.

Имеется 15 грузов, которые нужно распределить в наименьшее число контейнеров. В таблице 5 знаком «×» отмечены те пары грузов, которые нельзя помещать в один контейнер.

Таблица 5. Грузы

Грузы	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
a_1		×		×			×	×		×		×	×		
a_2	×		×			×			×		×			×	×
a_3		×			×				×			×	×		
a_4	×					×		×		×				×	
a_5			×				×				×	×			×
a_6		×		×				×	×				×	×	
a_7	×				×					×	×	×			
a_8	×			×		×			×				×		×
a_9		×	×			×		×			×	×		×	
a_{10}	×			×			×						×	×	
a_{11}		×			×		×		×						×
a_{12}	×		×		×		×		×					×	
a_{13}	×		×			×		×		×					×
a_{14}		×		×		×			×	×		×			
a_{15}		×			×			×			×		×		

Решение.

Построим граф с вершинами $a_1, a_2, \ldots, a_{14}, a_{15}$. Соединим ребрами вершины, соответствующие грузам, которые нельзя перевозить в одном контейнере. Получим граф, изображенный на рисунке 3.6. Вершины a_1, a_2, a_9 и a_{12} этого графа порождают в нем подграф, изоморфный графу K_4. Следовательно, хроматическое число нашего графа не меньше 4, $\chi(G) \geq 4$.

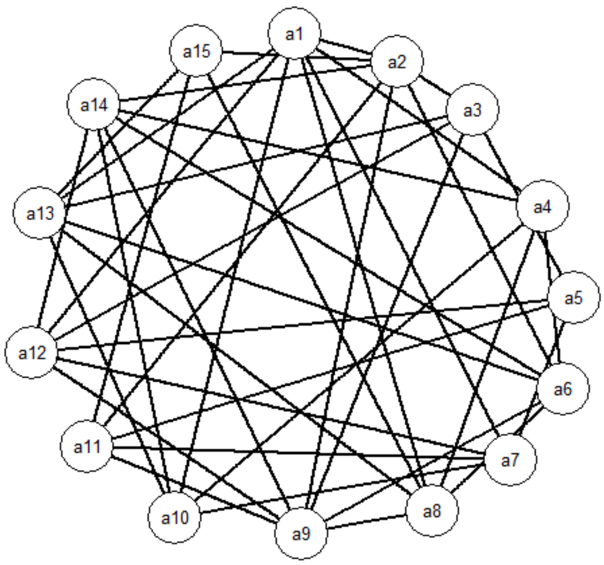


Рис. 3.6. Граф к задаче о размещении грузов

На рисунке 3.7 указана раскраска графа в 4 краски. Следовательно, хроматическое число графа равно 4, $\chi(G) = 4$, т. е. все грузы можно разместить в 4 контейнера.

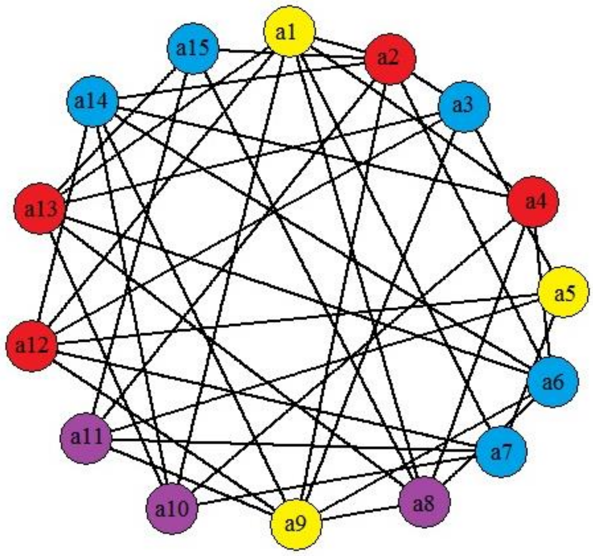


Рис. 3.7. Раскраска графа

Соответствующий список размещения грузов в контейнерах указано в таблице 6. В первый контейнер размещены грузы, для которых вершины раскрашены в красный цвет – a_2, a_4, a_{12}, a_{13}. Вершины, раскрашенные в фиолетовый цвет – a_8, a_{10}, a_{11} определяют список грузов, помещаемых во второй контейнер. В третий контейнер размещаются грузы, для которых соответствующие вершины раскрашены в голубой цвет – $a_3, a_6, a_7, a_{14}, a_{15}$. В четвертом контейнере оказываются грузы a_1, a_5, a_9, соответствующие им вершины раскрашены в желтый цвет.

Таблица 6. Размещение груза в контейнерах

Номер контейнера	Список грузов
1	a_2, a_4, a_{12}, a_{13}
2	a_8, a_{10}, a_{11}
3	$a_3, a_6, a_7, a_{14}, a_{15}$
4	a_1, a_5, a_9

Таким образом, минимальная раскраска графа дает распределение грузов в минимальное число контейнеров, равное $\chi(G) = 4$.

5. *Задачи об авиарейсах*

Построим граф G, в котором вершины соответствуют рейсам. Две вершины этого графа смежны тогда и только тогда, когда соответствующие временные интервалы перекрываются. Любая правильная раскраска графа G определяет минимальное количество рейсов. И, наоборот, минимальное количество рейсов определяет правильную раскраску графа G. Если для раскраски n вершин использовались цвета $1,2,3,\dots,k$, то вершины, раскрашенные в i-й цвет, дают список рейсов, которые определяет минимальное время. Минимальная раскраска графа G дает расписание авиарейсов, равное $\chi(G)$ [8].

6. *Задача о составлении рейса машин с вывозом товара*

Построим граф G, в котором вершины соответствуют рейсам. Две вершины этого графа смежны тогда и только тогда, когда два различных рейса содержат один и тот же пункт. Любая правильная раскраска графа G определяет множество рейсов со свойствами, описанными в пункте 2, относящемся к данной задаче. И, наоборот, множество рейсов, удовлетворяющее данным свойствам, определяет правильную раскраску G. Тогда данная совокупность рейсов может быть распределена между шестью днями недели, чтобы выполнялись свойства рейсов, тогда и только тогда, когда вершины $V(G)$ можно разбить на шесть классов, где каждому классу соответствует i-й цвет, определяющий день недели. Требуется так раскрасить вершины, чтобы никакие две вершины одного цвета не соединялись ребром [8, 16].

7. *Задача о спортивных турнирах по круговой системе*

Построим граф G, вершины которого соответствуют встрече двух команд (паре команд). Две вершины этого граф смежны тогда и только тогда, когда в двух различных встречах участвует одна та же команда (т.е. во встречах есть общая команда). Любая правильная раскраска графа G определяет некоторое расписание игр. И, наоборот, любое расписание игр определяет правильную раскраску графа G. Если для раскраски n вершин использовались цвета $1,2,\dots,k$, то вершины, раскрашенные в i-й цвет, дают список команд, которые будут играть в i-м раунде. Требуется раскрасить граф, используя k цветов, где k представляет количество заданных раундов [12].

8. *Задача о коллективном поведении живых организмов*

Построим граф G, в котором вершины соответствуют представителям живых организмов. Две вершины смежны тогда и только тогда, когда не имеют общих черт и их нельзя поместить в один класс. Цвета для раскраски графа соответствуют конкретным классам живых организмов. Любая правильная раскраска графа G определяет допустимое распределение живых организмов на классы. Если для раскраски n вершин использовались цвета $1,2,3,\dots,k$, то вершины, раскрашенные в i-й цвет, дают список представителей, которые нужно соотнести в i-й класс. Минимальная раскраска графа дает распределение видов в минимальное число классов живых организмов, равное $\chi(G)$ [13].

9. *Задача о частотных диапазонах в станциях сотовой сети*

Построим граф G, вершины которого соответствуют зоне покрытия для одной станции (вышки). Две вершины смежны тогда и только тогда, когда зона покрытия имеет общую границу и перекрывается. Если у вышек есть общая зона покрытия, то этим станциям нельзя задавать одинаковую частоту (чтобы не было помех), т.е. они конкурируют за частоту. Проблема распределения диапазонов частот в системах сотовой связи сводится к раскраске построенного графа. За каждым цветом закреплен диапазон частот. Любая правильная раскраска графа G определяет допустимое распределение диапазонов частот по станциям. И наоборот допустимое распределение диапазонов частот по станциям определяет правильную раскраску графа G. Если для раскраски n вершин использовались цвета $1,2,3,\dots,k$, то вершины, раскрашенные в i-й цвет – это станции, которые используют один и тот же i-й диапазон частот, не создавая помех. Минимальная раскраска графа дает распределение частот по базовым станциям, а хроматическое число $\chi(G)$ определяет минимальное число диапазонов частот, необходимых для работы всей сети без помех [15].

Глава 3. ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧ, СВОДЯЩИХСЯ К РАСКРАСКЕ ГРАФОВ

3.1. Постановка задач, сводящихся к раскраске графов

В этом параграфе мы сформулируем несколько вариантов обобщения задачи о составлении расписания рейсов машин с вывозом товаров. В качестве исходной задачи мы рассматриваем задачу № 3.6.1. (глава 3) из [9]. Она формулируется следующим образом:

Машина с вывозом товаров может за один день объехать ряд мест. Рейсом такой машины является последовательность пунктов, которые она посетит за данный день, при условии, что рейс должен быть закончен в течении одного рабочего дня. Мы хотим найти множество рейсов со следующими свойствами:

1) каждый пункт посещается за неделю определенное число раз;

2) рейсы можно распределить среди шести дней недели (воскресение – нерабочий день) таким образом, чтобы ни один пункт не посещался дважды за один день; ни в один день число рейсов не превосходило число машин с вывозом товаров.

3) Общее время работы всех машин за неделю минимально.

Сформулируем 1 вариант обобщения задачи о составлении расписания рейсов машин с вывозом товаров.

Задача 1.

Заданы множество пунктов $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ – склады, пункты самовывоза товара и др. и множество рейсов $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, каждый из которых включает в себя несколько различных пунктов. Рейсом машины является последовательность пунктов $r_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im_i}\}$, $1 \le i \le n$, $m_i \le k$, которые она посетит за данный день, при условии, что рейс должен быть закончен за время t_i, где

$$t_i = \begin{cases} a, 1 \le i \le n_1 \\ b, n_1 < i \le n_2, a > b > c. \\ c, n_2 < i \le n \end{cases}$$

Требуется найти расписание (распределение рейсов по дням недели) со следующими свойствами:

1) каждый пункт посещается за неделю хотя бы один раз;

2) рейсы нужно распределить среди нескольких дней недели таким образом, чтобы ни один пункт не посещался дважды за один день;

3) Общее время работы всех машин за неделю минимально,

$$T = \min_{P(G)} \sum_k T_k,$$

где минимум вычисляется на P(G) – множестве всевозможных раскрасок графа G.

T_k – максимальное время в k-й день,

$$T_k = \max(t_{k1}, t_{k2}, \dots, t_{ks}),$$

где s – это количество рейсов в k-й день.

Постановка задачи в терминах теории графов.

Построим граф *G*, в котором вершины соответствуют рейсам. Две вершины этого графа смежны тогда и только тогда, когда два различных рейса содержат один и тот же пункт. Любая правильная раскраска графа *G* дает распределение рейсов на несколько дней недели (по числу цветов, и требуется, чтобы их было не более шести) таким образом, чтобы каждый пункт посещался хотя бы раз в неделю, но ни один пункт не посещался дважды за один день. И, наоборот, множество рейсов, которые можно распределить на несколько дней недели таким образом, чтобы каждый пункт посещался хотя бы раз в неделю, но ни один пункт не посещался дважды за один день (каждый цвет соответствует определенному дню), определяет правильную раскраску *G*. Тогда данная совокупность рейсов может быть распределена между несколькими днями недели, чтобы выполнялись свойства рейсов, тогда и только тогда, когда вершины можно разбить на не более шесть классов, где каждому классу соответствует i-й цвет.

Требуется так раскрасить вершины, чтобы никакие две вершины одного цвета не соединялись ребром.

Чтобы решить задачу, нужно из всех возможных раскрасок графа G выбрать ту, для которой T будет наименьшим.

Непосредственное решение задачи перебором всех раскрасок является очень сложным. Поэтому важно знать границы изменения наименьшего времени T, т.е. его верхнюю и нижнюю оценку. В следующем утверждении мы указываем двустороннюю оценку наименьшего времени T с помощью хроматического числа графа конфликтов.

Утверждение 3.1. Дано множество $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ – рейсы. Рассмотрим задачу, в которой для рейсов $r_1, r_2, \dots, r_k$ требуется время a, для рейсов $r_{\mathrm{k}+1}, \dots, r_m$ требуется время b и для рейсов $r_{\mathrm{m}+1}, \dots, \mathrm{r_n}$ требуется время c, причем $a > b > c$. Тогда общее время работы всех машин за неделю будет удовлетворять двусторонней оценке:

$$a + (\chi - 1) \cdot c \leq T_{min} \leq T\big(P(G)\big) \leq \chi \cdot a, \tag{2}$$

где $P(G)$ – любая раскраска графа G.

Доказательство:

Построим граф G. Найдём хроматическое число $\chi = \chi(G)$. Потому как $T_{min} = T_1 + T_2 + \dots + T_k$ – сумма времени по дням. А дней столько же сколько и хроматическое число, $k = \chi$. Сравним слагаемые в суммах.

$T_1 + T_2 + \dots + T_\chi$ и $a + \underbrace{c + \dots + c}_{\chi - 1}$. Причем по условию существует $T_i = a$, т.к. есть рейсы со временем a. Предположим, что это $T_1 = a$. Сравним остальные значения по дням со значением c. Очевидно $T_i \geq c$, потому что $\max(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}) \geq \mathrm{c}$. Следовательно слагаемые $T_2 + \dots + T_\chi$ не меньше c и значит их сумма не меньше суммы $\underbrace{c + \dots + c}_{\chi - 1}$.

Тогда общее время будет удовлетворять неравенств

$$a + (\chi - 1) \cdot c \leq T_{min}.$$

Нижняя оценка неравенства доказана. Докажем верхнюю.

$T_{min} = T_1 + T_2 + \cdots + T_k$ – сумма времени по дням. Тогда каждое слагаемое в этой сумме либо $T_i = a$, либо $T_i < a$. Значит сумма этих слагаемых $T_1 + T_2 + \cdots + T_k$ может принимать самое большое значение когда все $T_i = a$ и больше чем $\chi \cdot a$ быть не может. Следовательно, $T_{min} \le \chi \cdot a$. Верхняя оценка неравенства доказана.

Сформулируем 2 вариант обобщения задачи о составлении расписания рейсов машин с вывозом товаров.

Задача 2 являться обобщением задачи 1. В ней учитываются количество использованных в каждый день машин.

Задача 2.

Заданы множества: пункты $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ – склады, пункты самовывоза товара и др.; l-машины и рейсы $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, каждый из которых включает в себя несколько различных пунктов. Рейсом машины является последовательность пунктов $r_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{iq_i}\}$, $1 \le i \le n$, $q_i \le k$, которые она посетит за данный день, при условии, что рейс должен быть закончен за время t_i, где

$$t_i = \begin{cases} a, 1 \le i \le n_1 \\ b, n_1 < i \le n_2, a > b > c. \\ c, n_2 < i \le n \end{cases}$$

Требуется найти расписание (распределение рейсов по дням недели) со следующими свойствами:

1) каждый пункт посещается за неделю хотя бы один раз;

2) рейсы нужно распределить среди нескольких дней недели таким образом, чтобы ни в один день число рейсов не превосходило число машин;

3) Общее время работы всех машин за неделю минимально,

$$T = \min_{P(G)} \sum_k T_k,$$

где минимум вычисляется на P(G) – множестве всевозможных раскрасок графа G.

T_k – максимальное время в k-й день,

$$T_k = \max(t_{k1}, t_{k2}, \dots, t_{ks}),$$

где s – это количество рейсов в k-й день, $s \le l$.

Постановка задачи в терминах теории графов.

Построим граф G, в котором вершины соответствуют рейсам. Две вершины этого графа смежны тогда и только тогда, когда два различных рейса содержат один и тот же пункт. Любая правильная раскраска графа G дает распределение рейсов на несколько дней недели (по числу цветов, и требуется, чтобы их было не более шести) таким образом, чтобы каждый пункт посещался хотя бы один раз в неделю, и ни в один день число рейсов не превосходило число машин (т.е. в один цвет должны быть раскрашены не более, чем l вершин ($q_i \le l$)). И, наоборот, множество рейсов, которые можно распределить на несколько дней недели таким образом, чтобы каждый пункт посещался хотя бы один раз в неделю, и ни в один день число рейсов не превосходило число машин (каждый цвет соответствует определенному дню и в один цвет раскрашены не более, чем l вершин ($q_i \le l$)), определяет правильную раскраску G. Тогда данная совокупность рейсов может быть распределена между несколькими днями недели, чтобы выполнялись свойства расписание рейсов, тогда и только тогда, когда вершины можно разбить на не более шесть классов, где каждому классу соответствует i-й цвет.

Требуется так раскрасить вершины, чтобы никакие две вершины одного цвета не соединялись ребром и количество раскрашенных вершин в один цвет не превосходило l.

Чтобы решить задачу, нужно из всех возможных раскрасок графа G выбрать ту, для которой T будет наименьшим.

Сформулируем 3 вариант обобщения задачи о составлении расписания рейсов машин с вывозом товаров.

Задача 3 являться обобщением задачи 1 и задачи 2. В ней требуется определить максимальное количество машин в день.

Задача 3.

Заданы множество пунктов $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ – склады, пункты самовывоза товаров и др. и множество рейсов $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, каждый из которых включает в себя несколько различных пунктов. Рейсом машины является последовательность пунктов $r_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im_i}\}$, $1 \le i \le n, m_i \le k$, которые она посетит за данный день, при условии, что рейс должен быть закончен за время t_i, где

$$t_i = \begin{cases} a, 1 \le i \le n_1 \\ b, n_1 < i \le n_2, a > b > c. \\ c, n_2 < i \le n \end{cases}$$

Требуется найти расписание (распределение рейсов по дням недели) со следующими свойствами:

1) каждый пункт посещается за неделю хотя бы два раза;

2) рейсы нужно распределить среди нескольких дней недели таким образом, чтобы ни один пункт не посещался дважды за один день;

3) Определить максимальное количество машин в день.

Постановка задачи в терминах теории графов.

Построим граф *G*, в котором вершины соответствуют рейсам. Две вершины этого графа смежны тогда и только тогда, когда два различных рейса содержат один и тот же пункт. Любая правильная раскраска графа *G* дает распределение рейсов на несколько дней недели (по числу цветов, и требуется, чтобы их было не более шести) таким образом, чтобы каждый пункт посещался хотя бы два раза в неделю, но ни один пункт не посещался дважды за один день. И, наоборот, множество рейсов, которые можно распределить на несколько дней недели таким образом, чтобы каждый пункт посещался хотя бы два раза в неделю, но ни один пункт не посещался дважды за один день (каждый цвет соответствует определенному дню и в один цвет необходимо раскрасить как можно больше вершин), определяет правильную раскраску *G*. Тогда данная совокупность рейсов может быть распределена между несколькими днями недели, чтобы выполнялись свойства расписание рейсов, тогда и только тогда, когда вершины можно разбить на не более шесть классов, где каждому классу соответствует i-й цвет.

Требуется так раскрасить вершины, чтобы в один цвет было раскрашено максимальное количество вершин и никакие две вершины одного цвета не соединялись ребром.

3.2. Решение задач

В этом параграфе мы формулируем и решаем примеры для обобщенных задач о составлении расписания рейсов машин с вывозом товаров из п. 3.1.

Задача 1.

Заданы множества $R = \{r_1, r_2, \dots, r_{10}\}$ и $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{12}\}$ рейсы и пункты соответственно. 10 рейсов разбиты на 3 группы:

1 группа. Долгие рейсы – 11 ч.

2 группа. Средние рейсы – 9 ч.

3 группа. Быстрые рейсы – 7 ч.

Необходимо распределить рейсы так, чтобы среди нескольких дней недели ни один пункт не посещался дважды за один день и, хотя бы один раз в неделю.

В таблице 7 отмечены рейсы, которые содержат один и тот же пункт. Требуется определить общее время работы всех машин за неделю,

$$T = \min_{P(G)} \sum_k T_k,$$

где минимум вычисляется на P(G) – множестве всевозможных раскрасок графа G.

T_k – максимальное время в k-й день,

$$T_k = \max(t_{k1}, t_{k2}, \dots, t_{ks}),$$

где s – это количество рейсов в k-й день.

Таблица 7. Расписание рейсов для задачи 1

Рейсы	Пункты												Время, T_k
	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	
r_1	+	+	+		+				+	+			11
r_2	+		+	+		+	+			+		+	9
r_3			+		+	+			+		+		7
r_4								+				+	7
r_5		+		+			+				+		7
r_6			+							+		+	9
r_7	+		+				+		+				11
r_8		+			+					+	+		11
r_9		+											9
r_{10}	+						+				+		7

Решение

Построим граф с вершинами $r_1, r_2, \dots, r_{10}$. Соединим ребрами вершины, в соответствии с таблицей 7. Получим граф, изображенный на рисунке 4.1. Вершины $r_1, r_2, r_3, r_5, r_8, r_{10}$ образуют полный подграф, изоморфный графу K_6,

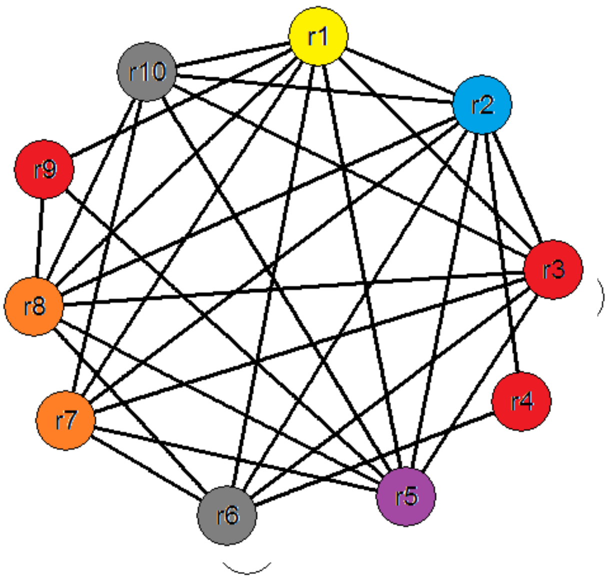


Рис. 4.2. 1 вариант раскраски ии графа

следовательно хроматическое число графа не меньше 6, $\chi(G) \geq 6$.

На рисунке 4.2. указан один из вариантов раскраски графа в 6 красок.

Сопоставляем полученную раскраску с таблицей 7 и составляем первый вариант расписания рейсов (см. таблица 8). В понедельник выполняется рейс r_1, вершина которого раскрашена в желтый цвет и указано максимальное время работы машины за этот день $T_1 = 11$. Во вторник выполняется один рейс r_2. Соответствующая ему вершина покрашена в синий цвет, а время работы равно $T_2 = 9$. В среду выполняются рейсы r_3, r_4, r_9, соответствующие им вершины покрашены в красный цвет и время выполнения всех рейсов равно $T_3 = 9$. В четверг выполняется один рейс r_5, соответствующая ему вершина раскрашена в фиолетовый цвет и время работы равно $T_4 = 7$. В серый цвет покрашены вершины, соответствующие рейсам r_6, r_{10}, которые выполняются в пятницу за время $T_5 = 9$. В субботу выполняются рейсы r_7, r_8 (вершины оранжевого цвета) за время $T_6 = 11$.

Таблица 8. 1 вариант расписание рейсов

Дни недели	Рейсы	Пункты												Время, T_k
Понедельник	r_1	s_1	s_2	s_3		s_5				s_9	s_{10}			11
Вторник	r_2	s_1		s_3	s_4		s_6	s_7			s_{10}		s_{12}	9
Среда	r_3, r_4, r_9		s_2	s_3		s_5	s_6		s_8	s_9		s_{11}	s_{12}	9
Четверг	r_5		s_2		s_4			s_7				s_{11}		7
Пятница	r_6, r_{10}	s_1		s_3				s_7			s_{10}	s_{11}	s_{12}	9
Суббота	r_7, r_8	s_1	s_2	s_3		s_5		s_7		s_9	s_{10}	s_{11}		11

Общее время работы всех машин за неделю

$$T = 11 + 9 + 9 + 7 + 9 + 11 = 56 \text{ ч.}$$

Мы построили граф конфликт и раскрасили его. Теперь по раскраске графа можем найти оценку, т.е. минимальное и максимальное время работы всех машин за неделю.

Рассмотрим некоторые способы уточнения оценки

$$a + (\chi - 1) \cdot c \leq T_{min} \leq T(P(G)) \leq \chi \cdot a \qquad (2)$$

Находим общее время работы для всех машин за неделю, которое удовлетворяет двусторонней оценке

$$\mathrm{a} + (\chi - 1) \cdot \mathrm{c} \leq \mathrm{T_{min}} \leq T\big(P(G)\big)$$

$$11 + (6 - 1) \cdot 7 \leq \mathrm{T_{min}} \leq 6 \cdot 11$$

$$\text{Получим } 46 \leq \mathrm{T}_{\min} \leq 66.$$

Используя хроматический полином, найдём количество различных раскрасок этого графа. Хроматический полином найдем с помощью программы «Wolfram Mathematica» (см. Приложение 2).

$$f(G,z) = -15120z + 53604z^2 - 80556z^3 + 67893z^4 - 35561z^5 + 12055z^6 - 2654z^7 + 367z^8 - 29z^9 + z^{10}.$$

$f(G,0) = f(G,1) = \cdots = f(G,5) = 0$, $f(G,6) = 25920$ – количество способов раскраски графа G в 6 цветов. С учетом перестановки цветов, получим число различных раскрасок

$$\frac{f(G,6)}{6!} = 36.$$

Получили 36 различных раскрасок. Но построить их все будет трудоемко.

Проверим можно ли уменьшить время работы всех машин за неделю с помощью операции слияния вершин. Вершины r_7 и r_9 несмежны и в данной раскраске относятся к разным цветовым группам. Зададим граф $G_1 = G - r_7 - r_9$. К графу G_1 присоединим новую вершину r_9, соединив ее ребром с каждой из вершин, входящих в объединение окружений вершин r_7 и r_9 в графе G. В результате слияния вершин получили граф, изображенный на рисунке 4.3.

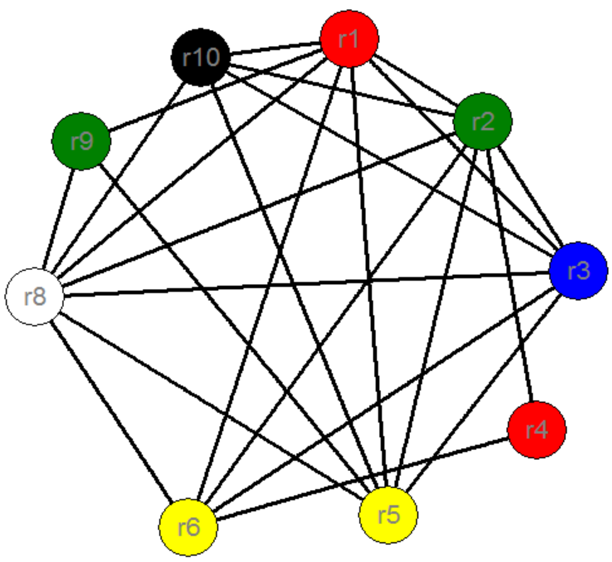


Рис. 4.3.Граф G_1.

Слияние вершин r_7 *и* r_9

У нового графа найдём хроматическое число и общее время работы всех машин за неделю (см. таблицу 9). В понедельник выполняются рейсы r_1, r_4, вершины которого раскрашены в красный цвет и указано максимальное время работы машин за этот день $T_1 = 11$. Во вторник выполняются рейсы r_2, r_9. Соответствующие ему вершины покрашены в зеленый цвет, а время работы равно $T_2 = 9$. В среду выполняется один рейс r_3, соответствующая ему вершина покрашена в синий цвет и время выполнения рейса равно $T_3 = 7$. В четверг выполняются рейсы r_5, r_6, соответствующие им вершины раскрашены в желтый цвет и время работы всех рейсов равно $T_4 = 9$. В белый цвет покрашена вершина, соответствующая рейсу r_8, которая выполняется в пятницу за время $T_5 = 11$. В субботу выполняется рейс r_{10} (вершина черного цвета) за время $T_6 = 7$.

Таблица 9. Расписание рейсов после первого склеивания вершин

Дни недели	Рейсы	Пункты												Время, T_k
Понедельник	r_1, r_4	s_1	s_2	s_3		s_5			s_8	s_9	s_{10}		s_{12}	11
Вторник	r_2, r_9	s_1	s_2	s_3	s_4		s_6	s_7			s_{10}		s_{12}	9
Среда	r_3			s_3		s_5	s_6			s_9		s_{11}		7
Четверг	r_5, r_6		s_2	s_3	s_4			s_7			s_{10}	s_{11}	s_{12}	9
Пятница	r_8		s_2			s_5					s_{10}	s_{11}		11
Суббота	r_{10}	s_1						s_7				s_{11}		7

Общее время работы всех машин за неделю

$$T = 11 + 9 + 7 + 9 + 11 + 7 = 54 \text{ ч.}$$

Хроматическое число этого графа не увеличилось, следовательно, мы можем вершины r_7 и r_9 раскрасить в один цвет. Следовательно, для графа G_1 можно построить раскраску, указанную на рисунке 4.3. Общее время работы всех машин за неделю не изменилось.

Продолжим использовать операцию слияния вершин для того, чтобы уменьшить время работы всех машин за неделю с помощью графа G_1. Вершины r_6 и r_9 несмежны и в данной раскраске относятся к разным цветовым группам. Зададим граф $G_2 = G_1 - r_6 - r_9$. К графу G_2 присоединим новую вершину r_6, соединив ее ребром с каждой из вершин, входящих в объединение окружений вершин r_6 и r_9 в графе G_1. В результате слияния вершин получили граф, изображенный на рисунке 4.4.

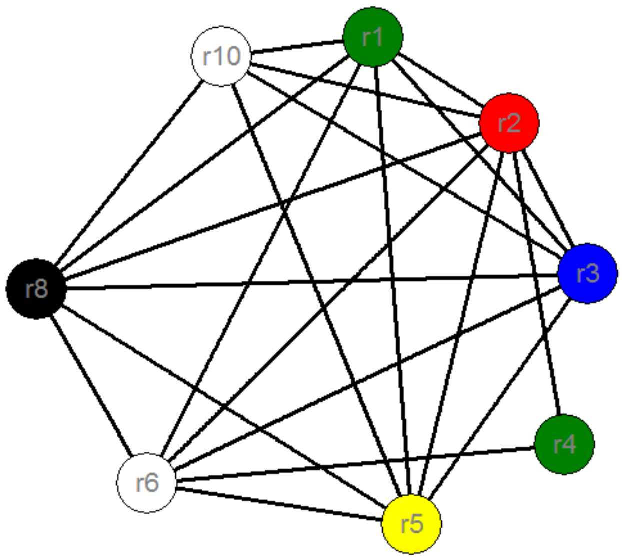


Рис. 4.4. Граф G_2.

Слияние вершин r_6 $и$ r_9

У нового графа найдём хроматическое число и общее время работы всех машин за неделю (см. таблицу 10). В понедельник выполняются рейсы r_1, r_4, вершины которого раскрашены в зеленый цвет и указано максимальное время работы машин за этот день $T_1 = 11$. Во вторник выполняется один рейс r_2. Соответствующая ему вершина покрашена в красный цвет, а время работы равно $T_2 = 9$. В среду выполняется рейс r_3, соответствующая ему вершина покрашена в синий цвет и время выполнения рейса равно $T_3 = 7$. В четверг выполняется рейс r_5, соответствующая ему вершина раскрашена в желтый цвет и время работы равно $T_4 = 7$. В черный цвет покрашена вершина, соответствующая рейсу r_8, которая выполняется в пятницу за время $T_5 = 11$. В субботу выполняются рейсы r_6, r_{10} (вершины белого цвета) за время $T_6 = 9$.

Таблица 10. Расписание рейсов после второго склеивания вершин

Дни недели	Рейсы	Пункты												Время, T_k
Понедельник	r_1, r_4	s_1	s_2	s_3		s_5			s_8	s_9	s_{10}		s_{12}	11
Вторник	r_2	s_1		s_3	s_4		s_6	s_7			s_{10}		s_{12}	9
Среда	r_3			s_3		s_5	s_6			s_9		s_{11}		7
Четверг	r_5		s_2		s_4			s_7				s_{11}		7
Пятница	r_8		s_2			s_5					s_{10}	s_{11}		11
Суббота	r_6, r_{10}	s_1		s_3				s_7			s_{10}	s_{11}	s_{12}	9

Общее время работы всех машин за неделю

$$T = 11 + 9 + 7 + 7 + 11 + 9 = 54 \text{ ч.}$$

С помощью слияния вершин мы проверили невозможность уменьшения времени работы всех машин за неделю. Исходя из рассуждений, можно сделать вывод, что минимальное время работы всех машин за неделю составляет 54 ч.

Рассмотрим второй вариант раскраски графа в 6 красок. Граф указан на рисунке 4.5.

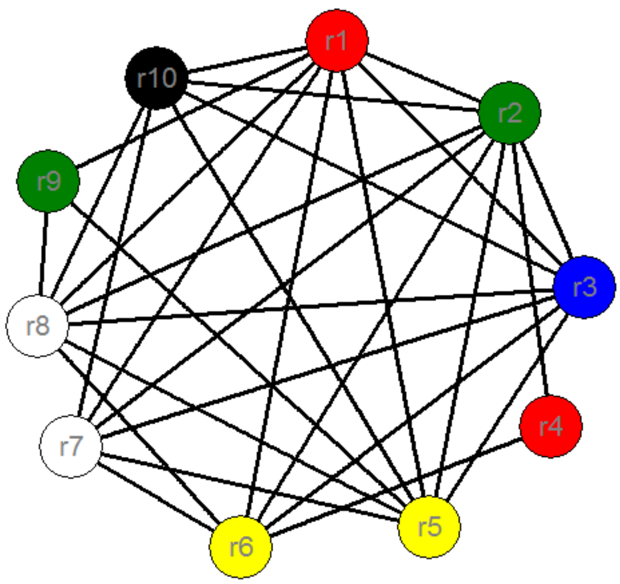


Рис. 4.5. 2 вариант раскраски графа

Сопоставляем полученную раскраску с таблицей 7 и соответствующее расписание рейсов указано в таблице 11. В понедельник выполняются рейсы r_1, r_4, вершины которого раскрашены в красный цвет и указано максимальное время работы машин за этот день $T_1 = 11$. Во вторник выполняются рейсы

r_2, r_9. Соответствующие им вершины покрашены в зеленый цвет, а время работы всех рейсов равно $T_2 = 9$. В среду выполняется один рейс r_3, соответствующая ему вершина покрашена в синий цвет и время выполнения рейса равно $T_3 = 7$. В четверг выполняются рейсы r_5, r_6, соответствующие им вершины раскрашены в желтый цвет и время выполнения работы всех рейсов равно $T_4 = 9$. В белый цвет покрашены вершины, соответствующие рейсам r_7, r_8, которые выполняются в пятницу за время $T_5 = 11$. В субботу выполняется один рейс r_{10} (вершина черного цвета) за время $T_6 = 7$.

Таблица 11. 2 вариант расписание рейсов

Дни недели	Рейсы	Пункты												Время, T_k
Понедельник	r_1, r_4	s_1	s_2	s_3		s_5			s_8	s_9	s_{10}		s_{12}	11
Вторник	r_2, r_9	s_1	s_2	s_3	s_4		s_6	s_7			s_{10}		s_{12}	9
Среда	r_3			s_3		s_5	s_6			s_9		s_{11}		7
Четверг	r_5, r_6		s_2	s_3	s_4			s_7			s_{10}	s_{11}	s_{12}	9
Пятница	r_7, r_8	s_1	s_2	s_3		s_5		s_7		s_9	s_{10}	s_{11}		11
Суббота	r_{10}	s_1						s_7				s_{11}		7

Общее время работы всех машин за неделю

$$T = 11 + 9 + 7 + 9 + 11 + 7 = 54 \text{ ч.}$$

Первый вариант раскраски графа показал, что общее время работы всех машин за неделю составляет $T = 56$ ч. Использовав операцию слияние вершин в графе мы доказали, что 56 ч. это не минимальное время работы всех машин за неделю. Рассмотрев второй вариант раскраски графа можно увидеть ,что общее время работы всех машин за неделю составляет $T = 54$ ч.

Таким образом, общее время работы всех машин за неделю составляет 54 ч.

Задача 2.

Заданы множества $R = \{r_1, r_2, \dots, r_{10}\}$, $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{12}\}$ и $l = 2$ рейсы, пункты и машины соответственно. 10 рейсов разбиты на 3 группы:

1 группа. Долгие рейсы – 11 ч.

2 группа. Средние рейсы – 9 ч.

3 группа. Быстрые рейсы – 7 ч.

Необходимо распределить рейсы так, чтобы среди нескольких дней недели ни в один день число рейсов не превосходило число машин, и каждый пункт посещался хотя бы один раз в неделю.

В таблице 12 отмечены рейсы, которые содержат один и тот же пункт. Требуется определить общее время работы всех машин за неделю,

$$T = \min_{P(G)} \sum_k T_k,$$

где минимум вычисляется на P(G) – множестве всевозможных раскрасок графа G.

T_k – максимальное время в k-й день,

$$T_k = \max(t_{k1}, t_{k2}, \dots, t_{ks}),$$

где s – это количество рейсов в k-й день.

Таблица 12. Расписание рейсов для задачи 2

Рейсы	Пункты												Время, T_k
	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	
r_1	+	+	+		+				+	+			11
r_2	+		+	+		+	+			+		+	9
r_3			+		+	+			+		+		7
r_4								+				+	7
r_5		+		+			+				+		7
r_6			+							+		+	9
r_7	+		+				+		+				11
r_8		+			+					+	+		11
r_9		+											9
r_{10}	+						+				+		7

Решение

Построим граф с вершинами $r_1, r_2, \dots, r_{10}$. Соединим ребрами вершины, соответствующие рейсам, которые содержат один и тот же пункт. Получим граф, изображенный на рисунке 4.1. Вершины $r_1, r_2, r_3, r_5, r_8, r_{10}$ образуют полный подграф, изоморфный графу K_6.

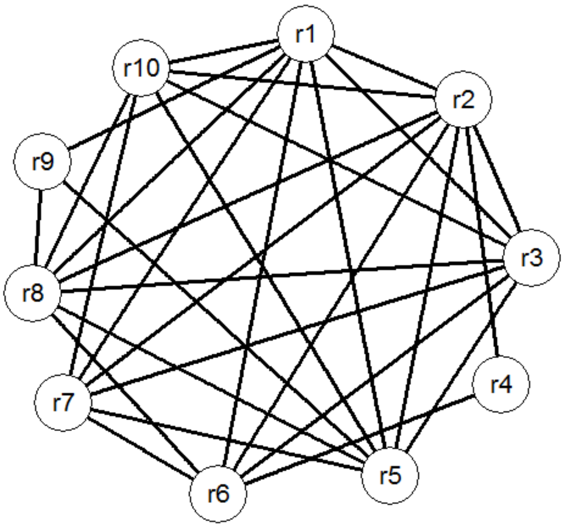


Рис. 4.1. Граф к задаче о составлении
рейса машин с вывозом товара

Следовательно хроматическое число графа не меньше 6, $\chi(G) \geq 6$.

На рисунке 4.2. указана первый вариант раскраски графа в 6 красок.

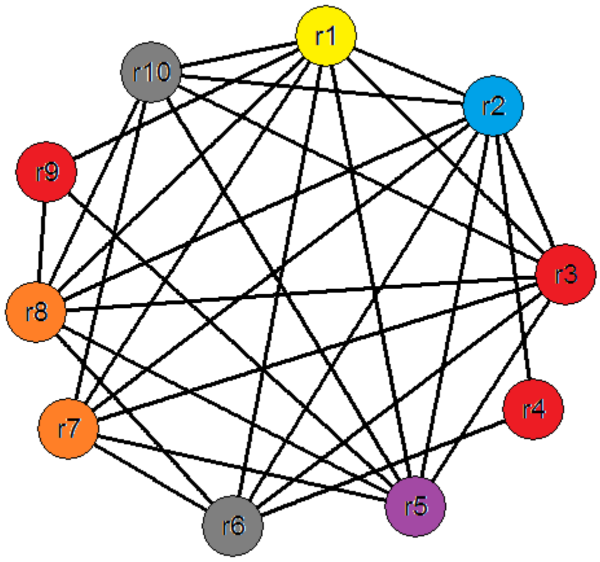


Рис. 4.2. 1 вариант раскраски
графа

На графе видно, что вершины r_3, r_4 и r_9 раскрашены в красный цвет, но по свойствам расписания рейсов число рейсов не должно превосходить число машин, т.е. $r_i \leq 2$. Следовательно, это раскраска не удовлетворяет условиям задачи по числу машин.

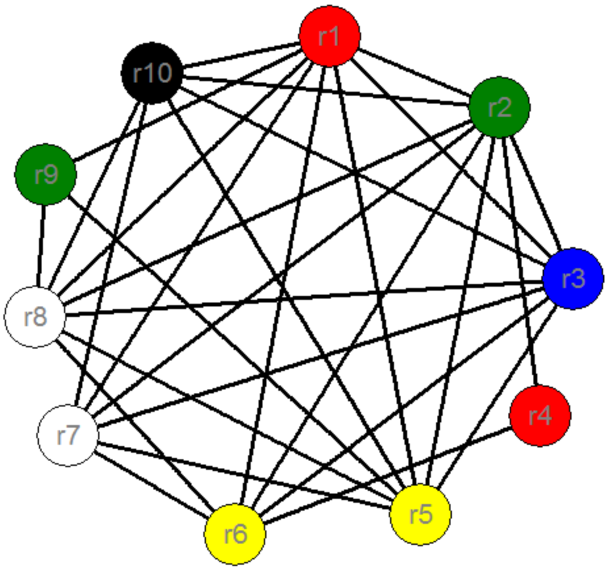


Рис. 4.5. 2 вариант раскраски графа

Рассмотрим второй вариант раскраски графа в соответствии с нашими свойствами. На рисунке 4.5. указана новая раскраска графа и она подходит нашим условиям.

Значит, хроматическое число графа равно 6, $\chi(G) = 6$ т. е. все рейсы можно посетить за шесть дней.

Соответствующее расписание рейсов по дням указано в таблице 13.

Таблица 13. 2 вариант расписание рейсов

Дни недели	Рейсы	Число машин	Пункты												Время, T_k
Понедельник	r_1, r_4	2	s_1	s_2	s_3		s_5			s_8	s_9	s_{10}		s_{12}	11
Вторник	$r_{2,} r_9$	2	s_1	s_2	s_3	s_4		s_6	s_7			s_{10}		s_{12}	9
Среда	r_3	1			s_3		s_5	s_6			s_9		s_{11}		7
Четверг	r_5, r_6	2		s_2	s_3	s_4			s_7			s_{10}	s_{11}	s_{12}	9
Пятница	r_7, r_8	2	s_1	s_2	s_3		s_5		s_7		s_9	s_{10}	s_{11}		11
Суббота	r_{10}	1	s_1						s_7				s_{11}		7

В понедельник выполняются рейсы r_1, r_4, вершины которого раскрашены в красный цвет и указано максимальное время работы машины за этот день $T_1 = 11$. Во вторник выполняются рейсы $r_{2,} r_9$. Соответствующие ему вершины покрашены в зеленый цвет, а время работы равно $T_2 = 9$. В среду выполняется один рейс r_3, соответствующая ему вершина покрашена в синий цвет и время выполнения всех рейсов равно $T_3 = 7$. В четверг выполняются рейсы r_5, r_6, соответствующие им вершины раскрашены в желтый цвет и время работы равно $T_4 = 9$. В белый цвет покрашены вершины, соответствующие рейсам r_7, r_8, которые выполняются в пятницу за время $T_5 = 11$. В субботу выполняется один рейс r_{10} (вершина черного цвета) за время $T_6 = 7$.

Таким образом, общее время работы всех машин за неделю

$$T = 11 + 9 + 7 + 9 + 11 + 7 = 54 \text{ ч.}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На данный момент раскраска графов является одной из самых популярных и интенсивно изучаемых тем в теории графов.

В последнее время ей уделяется очень много внимания в математических кругах, так как, возникшая при решении головоломок и различных занимательных задач, теория графов стала простым, но, несмотря на это, достаточно отличным средством решения задач и вопросов, относящихся к обширному кругу проблем.

В данной работе были выбраны типы прикладных задач из различных источников, их постановку в терминах теории графов, сформулированы некоторые обобщения задачи о составлении расписания рейсов машин с вывозом товаров и были найдены решения сформулированных задач с помощью раскраски графов.

В обобщенной задаче о составлении расписания рейсов машин с вывозом товаров был предложен способ удовлетворения двусторонней оценки минимального времени работы всех машин за неделю. Уточнение происходит с помощью раскраски графов, а именно нахождения хроматического числа и слияние вершин. Решение задачи нахождения хроматического числа и правильной раскраски графа является сложной задачей и эффективные алгоритмы на данный момент не известны. Эти задачи очень трудны в решении без использования дополнительного программного обеспечения. Решение обобщенных задач было продемонстрировано на примерах.

Таким образом, задачи решены в полном объеме, цель достигнута.

Список литературы

1. Асанов, М. О. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы [Текст] / М. О. Асанов [и др.]. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 288 с.
2. Емеличев, В. А. Лекции по теории графов [Текст]: учеб. пособие для студентов, обучающихся по специальностям «Математика» и «Прикладная математика»/ В. А. Емеличев [и др.]. – М.: Наука, Гл. ред. Физматлит., 1990. – 384 с.
3. Зимин, С. Н. Составление учебного расписания, используя теорию графов [Текст] / С. Н. Зимин// Современные наукоемкие технологии: сб. статей. – Пенза, 2007. – №11. – С. 74-75.
4. Зыков, А.А. Основы теории графов [Текст]/ А. А. Зыков. – М.: Вузовская книга, 2004. – 664 с.
5. Лебедев, Б. К. Алгоритм раскраски графов [Текст] / Б. К. Лебедев, О. Б. Лебедев // Известия Юфу. Технические науки: сб статей. – Ростов-на-Дону, 2015. – С. 202-204.
6. Мельников, О. Теория графов в занимательных задачах [Текст]: учеб.-метод. пособие для общеобразоват. шк./ О. И. Мельников. – 5-е изд. – М.: ЛИБРОКОМ, 2013. – 237 с.
7. Моторина, Е. А. Структура и содержание занятия «Раскраски графов» факультативного курса «Элементы теории графов и ее приложения» [Текст] /Е. А. Моторина// Успехи современной науки и образования: сб. науч. статей. — Белгород, 2015. — №3. — С. 61-63.
8. Робертс, Ф.С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам [Текст]: [пер. с англ.] / А.М. Раппопорта, С.И. Травкина; под ред. А.И. Теймана. – М.: Наука, Гл. ред. Физматлит, 1986. – 496 с.

9. Серебряков, А. В. Введение в теорию графов [Текст]: учеб. пособие для студентов всех специальности / А. В. Серебряков. – Саратов: изд. Саратов. гос. технич. ун-та, 2009. – 33 с.

10. Соколова, А. А. Раскраска графов [Текст] / А. А. Соколова //Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования: сб. науч. статей/АГУ. – Барнаул, 2015. – С. 354-356.

11. Харари, Ф. Теория графов [Текст] / В.П. Козырева; под ред. Г.П. Гаврилова. – 2-е. изд. – М.: УРСС, 2003. – 300 с.

12. Lewis, R., Thompson, J. On the application of graph colouring techniques in round-robin sports scheduling [Электронный ресурс] / R. Lewis, J. Thompson // Operational Research Group, Cardiff School of Mathematics, Prifysgol Caerdydd /Cardiff University, Wales, 2010. – С. 1-27. – Режим доступа: https://docviewer.yandex.ru/view/193063575/?*=ViFFtDHHfUAmVwqAi1%2Bh0tdDuBJ7InVybCI6Imh0dHA6Ly9yaHlkbGV3aXMuZXUvcGFwZXJzL3Nwb3J0c1BhcGVyLnBkZiIsInRpdGxlIjoic3BvcnRzUGFwZXIucGRmIiwidWlkIjoiMTkzMDYzNTc1IiwieXUiOiIyMjgxMjA0MjcxNDkzNDgxOTY3Iiwibm9pZnJhbWUiOnRydWUsInRzIjoxNDk2NjY2MTY0MjU2fQ%3D%3D&page=26&lang=en, свободный.

13. Sinha, S., Deb, S. Graph Coloring Problem Solution Using Modified Flocking Algorithm [Электронный ресурс] / S. Sinha, S. Deb // Proceedings of the Third International Conference on Soft Computing for Problem Solving. Advances in Intelligent Systems and Computing /Springer, New Delhi, 2014. – С. 1-13. – Режим доступа: https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-981-10-0451-3_20, свободный.

14. Берж, К. Теория графов и её применения [Электронный ресурс] / К. Берж. – М.: Иностранная литература, 1962. – 320 с. – Режим доступа: http://bookre.org/reader?file=1221065, свободный.

15. Мурзаков, Д. Э., Зенков, М.А., [и др.]. Применение алгоритма последовательной раскраски графа в сотовой сети [Электронный ресурс] / Д. Э. Мурзаков, М. А. Зенков // Естественные и математические науки в современном мире: сб. статей по материалам XXXI междунар. науч.-практ. конф. № 6 (30). – Новосибирск: изд. Сибак, 2015. – С. 22-33. – Режим доступа: https://sibac.info/conf/naturscience/xxxi/42333, свободный.

16. Селезнева, С. Н. Задача выбора маршрутов и ее частный случай задача распределения рейсов по дням. Графовая модель для задачи распределения рейсов [Электронный ресурс] / С. Н Селезнева// Официальный сайт кафедры математической кибернетики и лаборатории дискретных управляющих систем факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова. – Режим доступа: http://mk.cs.msu.ru/images/1/1b/Dm-mag-lect7i-selezn.pdf, свободный.

17. Фляйшнер, Г. Эйлеровы графы и смежные вопросы [Электронный ресурс] / Г. Фляйшер. – М.: Мир, 2002. – 335 с. – Режим доступа: http://bookre.org/reader?file=560142, свободный.

18. Официальный сайт программы для работы с графами [Электронный ресурс]: Графоанализатор. – 2004. – Режим доступа: http://grafoanalizator.unick-soft.ru/, свободный.

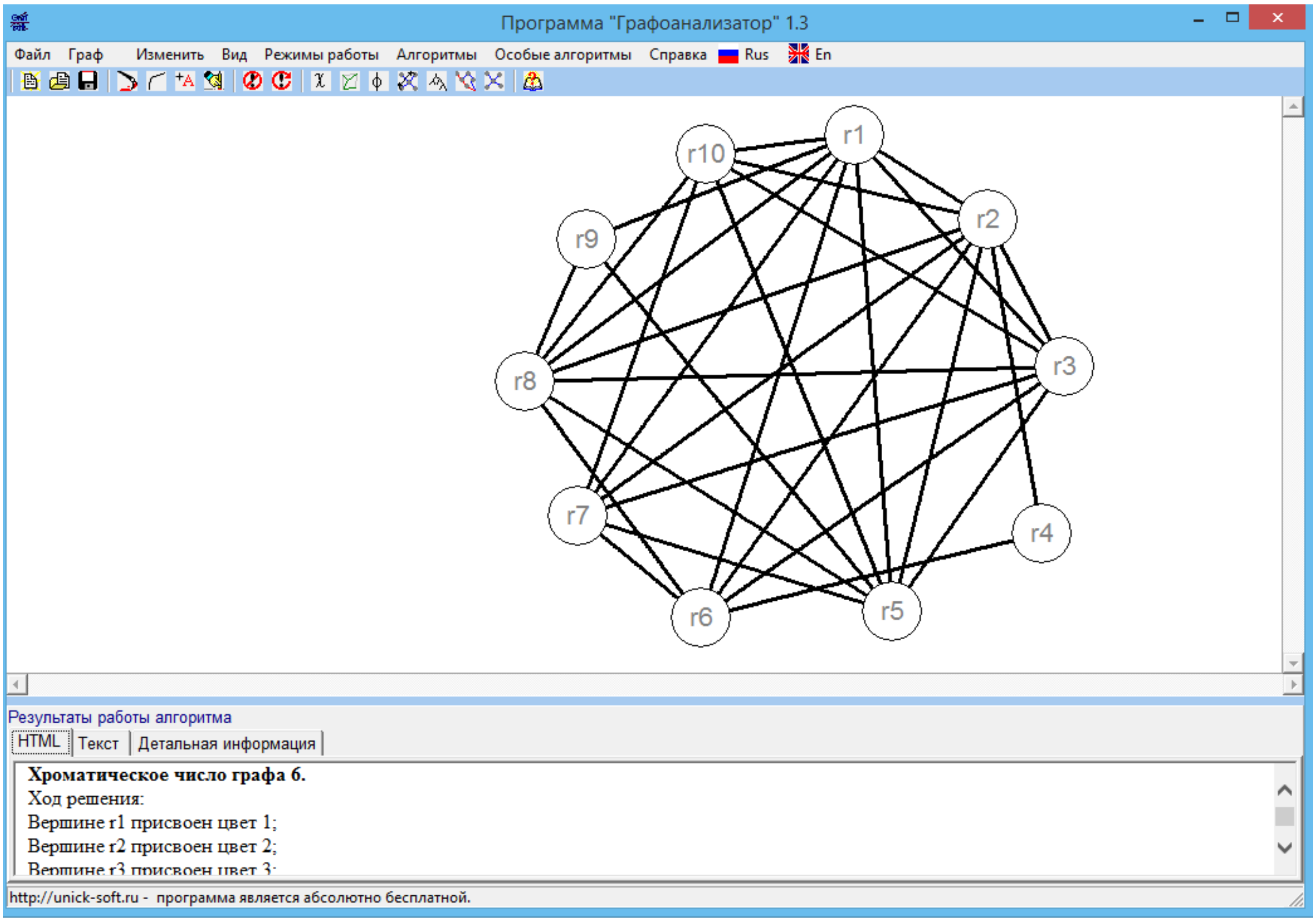
19. Wikipedia – the free Encyclopedia [Электронный ресурс]: Conflict Graph. – Режим доступа: https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_coloring, свободный.

20. Официальный сайт программы «Wolfram Mathematica» [Электронный ресурс]: «Wolfram Mathematica» – 2008. – Режим доступа: http://www.wolfram.com/mathematica/, свободный.

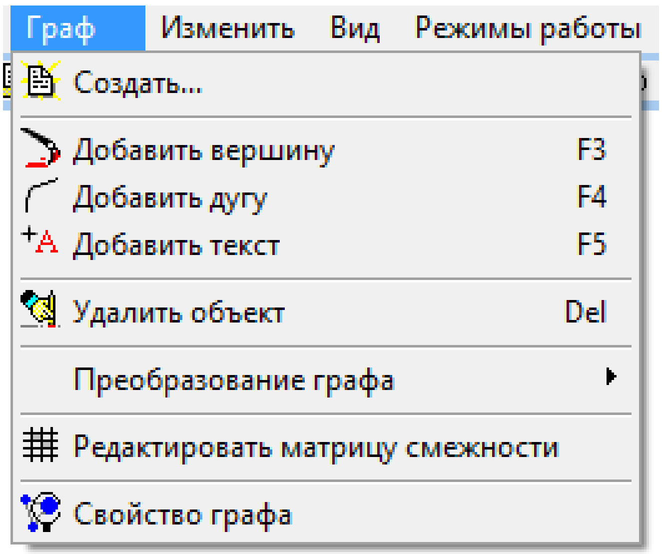
ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Программа «Графоанализатор 1.3.4beta»

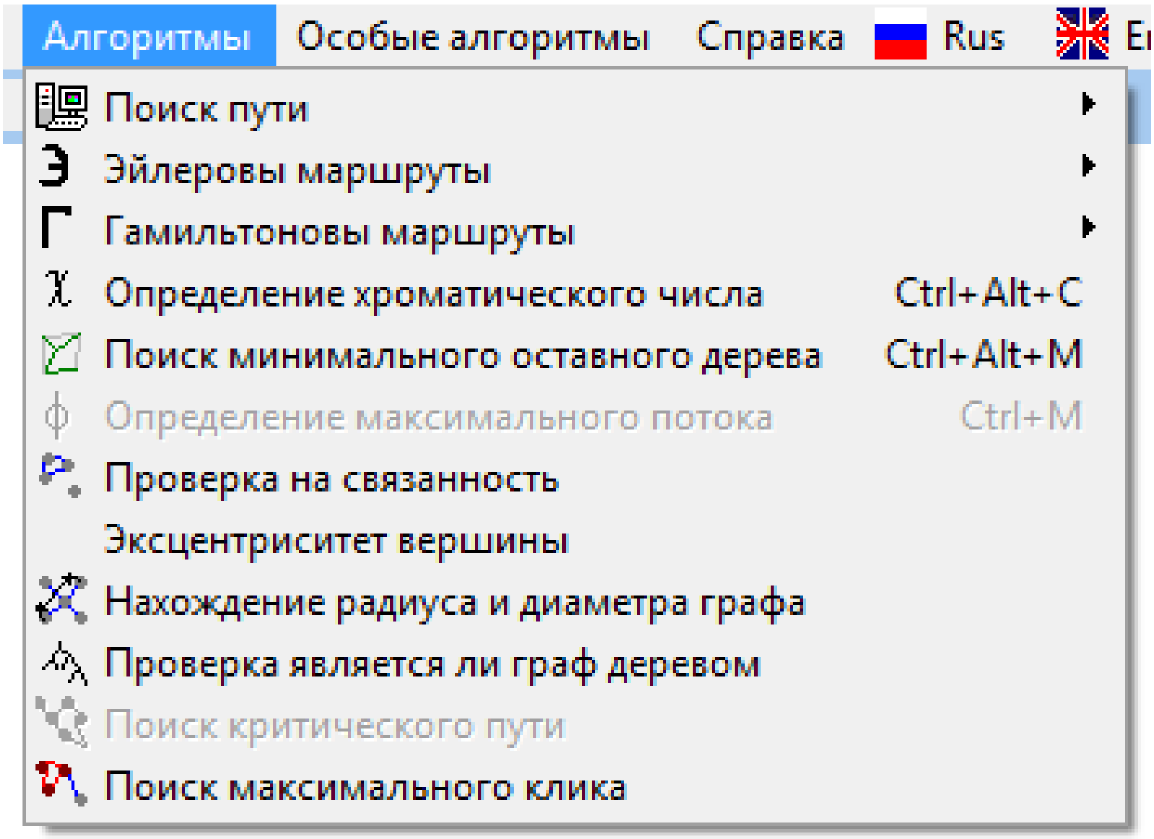
1. Рабочее окно программы «Графоанализатор».



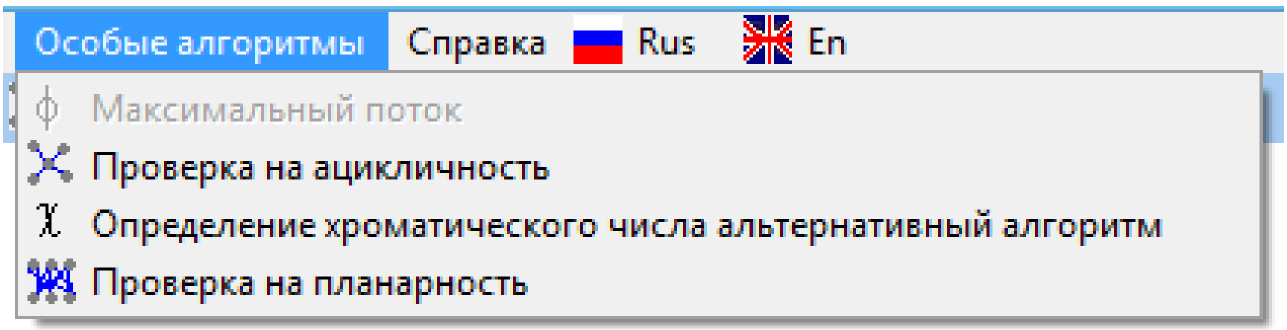
2. Меню создания графа.



3. Меню основных алгоритмов.



4. Меню особых алгоритмов.



ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Программа «Wolfram Mathematica»

Wolfram Mathematica 8.0 - [ChromNumber.nb *]

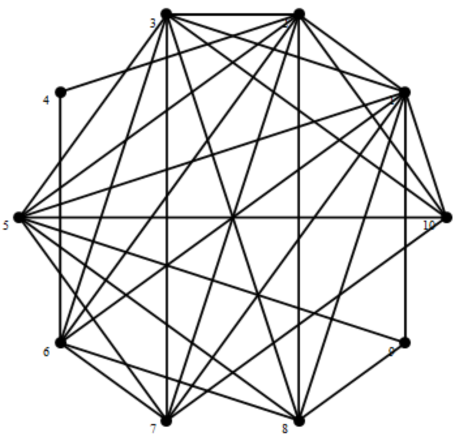
ChromNumber.nb *

```
In[7]:= Needs["Combinatorica`"]

EG := {{1, 2}, {1, 3}, {1, 5}, {1, 6}, {1, 7}, {1, 8}, {1, 9}, {1, 10}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {2, 6},
  {2, 7}, {2, 8}, {2, 10}, {3, 5}, {3, 6}, {3, 7}, {3, 8}, {3, 10}, {4, 6}, {5, 7}, {5, 8}, {5, 9},
  {5, 10}, {6, 7}, {6, 8}, {7, 10}, {8, 9}}

In[12]:= ShowLabeledGraph[G = AddEdges[EmptyGraph[10], EG]]

Out[12]=
```




```
In[29]:= n = V[G]

Out[29]= 10

In[30]:= ChromaticNumber[G]

Out[30]= 6
```

Wolfram Mathematica 8.0 - [ChromNumber.nb *]

ChromNumber.nb *

```
In[29]:= n = V[G]
Out[29]= 10

In[30]:= ChromaticNumber[G]
Out[30]= 6

In[31]:= MinimumVertexColoring[G]
Out[31]= {1, 2, 3, 1, 4, 4, 5, 5, 2, 6}

In[32]:= MaximumClique[G]
Out[32]= {1, 2, 3, 5, 7, 10}

In[33]:= P[z_] = Collect[ChromaticPolynomial[G, z], z]
```

Out[33]= $-15\,120\,z + 53\,604\,z^2 - 80\,556\,z^3 + 67\,893\,z^4 - 35\,561\,z^5 + 12\,055\,z^6 - 2654\,z^7 + 367\,z^8 - 29\,z^9 + z^{10}$

```
In[34]:= Table[P[z], {z, 1, 6}]
Out[34]= {0, 0, 0, 0, 0, 25 920}

In[35]:= P[6] / 6!
Out[35]= 36
```