МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Ю.А. Ахкамова

ЛИНЕЙНАЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

Челябинск

2019

УДК 512.8 (021)

ББК 22.143я73

А95

Ахкамова, Ю.А. Линейная и векторная алгебра [Текст]: учебное пособие / Ю.А. Ахкамова. – Челябинск: Изд-во Южно-Урал. гос. гуман.-пед. ун-та, 2019.– 117 с.

ISBN 978-5-6042129-4-3

Пособие содержит теоретическую часть, задачи по разделам линейной алгебры, векторной алгебры, сборник индивидуальных заданий и снабжено большим количеством разобранных задач, выполняемых в рамках самостоятельной работы студентов. В каждом примере приводятся основные положения, формулы, облегчающие решение стандартных задач и изучение соответствующего раздела математики.

Учебное пособие соответствует программам дисциплины «Алгебра и геометрия» и дисциплины «Математика» для студентов бакалавриата педагогических вузов, обучающихся по направлению «Педагогическое образование», а также по направлению «Профессиональное обучение» (по отраслям).

Рецензенты

С.А. Севостьянова, канд. пед. наук, доцент

Е.А. Кравченко, канд. пед. наук, доцент

ISBN 978-5-6042129-4-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Одним из видов самостоятельной учебной работы студентов является выполнение индивидуальных заданий. Решение заданий и тесты способствуют более глубокому изучению ими курса математики, поскольку активизируют самостоятельную работу студентов, а преподавателю позволяет управлять учебным процессом и оценивать качество усвоения изучаемого материала.

Профессиональный уровень бакалавра с высшим образованием во многом зависит от того, умеет ли он использовать математический аппарат при анализе и решении практических задач. С учетом этого пособие снабжено большим количеством разобранных задач, выполняемых в рамках самостоятельной работы студентов. При этом в каждом примере приводятся основные положения и формулы, облегчающие решение подобных задач, следовательно, и изучения соответствующего раздела математики, что должно в свою очередь, привести к формированию у обучающихся требуемых компетенций.

Пособие содержит систематизированные сведения дисциплин« Алгебра и геометрия», «Математика» по модулям: «Линейная алгебра» [1–3,5–6], «Векторная алгебра» [1–2,4].

Материал пособий [3–5] переработан и включен в данное учебное пособие с дополнениями: теоретические вопросы, тесты для самопроверки, задачи для аудиторных занятий с ответами. Наличие тестовых задач поможет как преподавателю, так и студенту определить степень и качество усвоения изучаемых разделов науки.

К выполнению заданий следует приступить лишь после изучения теоретического материала, соответствующего каждой теме. Краткий теоретический материал дан в этом пособии, теоретический материал с доказательствами теорем можно почерпнуть из учебников [7– 10].

Завершающим этапом работы является защита выполненных задач. Во время защиты студент должен уметь правильно отвечать на контрольные вопросы, пояснять решения задач, решать задачи аналогичного типа.

Учебное пособие соответствует программедисциплины «Математика» для студентов бакалавриатапедагогических вузов, обучающихся по направлению «Педагогическое образование», профиля «Биология. Химия» и по направлению «Профессиональное обучение» (по отраслям), профили «Правоведение и правохранительная деятельность», «Информатика и вычислительная техника», «Экономика и управление», «Транспорт», «Декоративно-прикладное искусство и дизайн», а также соответствует программе дисциплины «Алгебра и геометрия» для студентов бакалавриатапедагогических вузов, обучающихся по направлению «Педагогическое образование», профиля:«Информационные технологии в образовании».

«ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА»

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1. Матрицы и действия над ними. Свойства операций над матрицами.
2. Определители второго и третьего порядков.
3. Определитель n-го порядка.Свойства определителей.
4. Обратная матрица. Решение матричных уравнений.
5. Системы линейных уравнений. Матричный метод решения систем линейных уравнений.
6. Правило Крамера решения системы линейных уравнений.
7. Теорема Кронекера–Капелли. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
8. Системы однородных линейных уравнений.

1. МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ. СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МАТРИЦАМИ

Определение.Матрицей размера m×n называется прямоугольная таблицаA = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$чисел, состоящая из mстрок иnстолбцов.

Числа $\boldsymbol{a}_{\mathrm{ij}}$ называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится, где i– номер строки, j– номер столбца.

<u>Пример.</u>

$A_{2\text{x}5}$= $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 6.47 & \sqrt{3} \\ 80 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Матрица может состоять из одного столбца, или состоять из одной строки, и даже из одного элемента.

Определение. Матрица называется **квадратной**, если число её строк равно числу её столбцов, т.е. $m=n$.

Определение. Квадратная матрица называется **диагональной**, если на главной диагонали расположены ненулевые числа, вне главной диагонали – нули.

Определение.Диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, а остальные элементы – нули, называется **единичной**.

Пример единичной матрицы третьего порядка:

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Определение.Матрица называется **нулевой**, если все её элементы равны нулю.

Пример нулевой матрицы

$O_{2x5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они *определены только для матриц одинаковой размерности.*

Определение.Суммой матрицA+B одного размера является матрица C того же размера, каждый элементc_{ij} которой равен $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Пример.Даны матрицыA = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,найти 2A + B.

Решение:

2A =$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, тогда2A+B=$\begin{pmatrix} 2+1 & 4+2 & 6+3 \\ 4+2 & 2+1 & 18+4 \\ 6+3 & 4+2 & 6=3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 3 & 12 \\ 9 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Операция **умножения (деления)** матрицы любой размерности на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix},$$

причем выполняются α (A+B) =αA ±αB, A(α±β) = αA ±βA, α и β- числа.

Определение. Матрица называется **ступенчатой (трапецеидальной)**, если в каждой её строке первый ненулевой элемент стоит правее, чем в предыдущей.

<u>Пример</u> ступенчатой матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Определение.Произведением матрицыA=$(a_{ij})_{mxk}$ имеющий m строк и k столбцов, **на матрицу**, B=$(b_{ij})_{k\times n}$,имеющую kстрок и nстолбцов, является матрица С, имеющая mстрок иn столбцов, у которой элементc_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы А иj-го столбца матрицыB. Матрицу А в этом случае называют согласованной с В.

Определение. Матрицу A^T называют **транспонированной** матрицей к А, если элементы каждой строки матрицы А стали столбцами матрицыA^T под теми же номерами.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Лемма. (Свойства действий над матрицами)

Пусть A, B– матрицы одинаковой размерности и *a,b*– некоторые числа.

Тогда верны следующие утверждения:

1. A+B = B+A.
2. A + (B + C) = (A + B) + C.
3. a(A + B) = aA + aB.
4. (ab)A = a (bA).
5. A(BC) = (AB)Cпри согласованности матриц.
6. A(B + C) = AB + AC при согласованности матриц.
7. AE = A, EA = A.
8. $(AB)^T = B^TA^T$.

Замечание: Вообще говоря, AB≠BA, даже тогда, когда оба произведения существуют. Однако, если для каких – либо матриц соотношение AB=BA выполняется, то такие матрицы называются **перестановочными.**

<u>Пример.</u> Найти произведение матриц $A_{3x1}=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$ и $B_{1x3}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

Решение:

$$(AB)_{3x3}=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1\\4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1\\3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\8 & 16 & 4\\6 & 12 & 3\end{pmatrix}.$$

$$(BA)_{1x1}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}=(2\cdot 1+4\cdot 4+1\cdot 3)=(2+16+3)=(21).$$

<u>Пример.</u> Найти произведение матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$ на $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\5 & 6\end{pmatrix}$

Решение

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+10 & 4+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 16\end{pmatrix}.$$

2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО, ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ

Определение. Определителем второго порядка матрицы Аназывается число, которое сопоставляется квадратной матрице второго порядка по следующему правилу:

$|A| = \det A = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$(из произведения элементов, стоящих на главной диагонали $a_{11}a_{22}$ вычитаем произведение элементов, стоящих на побочной диагонали $a_{21}a_{12}$)

Определение. Определителем третьего порядка матрицы А называется число, которое сопоставляется квадратной матрице третьего порядка по следующему правилу:

$$|A|=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}–a_{31}a_{22}a_{13}–a_{21}a_{12}a_{33}–$$

$a_{32}a_{23}a_{11}$

Замечание. Формулу вычисления определителя третьего порядка можно запомнить, приписав к определителю **первые два** столбца. Со знаком плюс берутся произведения элементов, стоящих на главной диагонали и на диагоналях, параллельных к ней, со знаком минус – произведения элементов на побочной диагонали и диагоналей, параллельных к ней.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

<u>Пример.</u> Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2- 4 + 0- 4- 0- 0 = - 6$$

Определение.МиноромM_{ij} элемента a_{ij} определителя $|A|$ называется определитель, полученный из$|A|$ вычёркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнениемA_{ij}элементаa_{ij} называется выражение

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

<u>Пример.</u> Вычислить минерыM_{11},M_{12}, M_{44}и соответствующие алгебраические дополнения определителя$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение

Для определителя$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ укажем некоторые миноры и алгебраические дополнения:

минорM_{11}= $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, минор$M_{12}$ = $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 2,

минорM_{44} = $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ = 9. $A_{11} = M_{11} = -4$; $A_{12} = -M_{12} = -2$; $A_{44} = M_{44} = 9$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение матрицы размерности $m \times n$. Как обозначается?

2. Чем являются элементы числовой матрицы? Как обозначается элемент, стоящий вi -той строке иj -том столбце матрицыA?

3. Какая матрица называется квадратной? Что называется порядком квадратной матрицы?

4. Какая матрица называется нулевой? диагональной? единичной?

5. Дайте определение матрицы, транспонированной к данной A. Какова размерность транспонированной матрицы? Как обозначается транспонированная матрица?

6. Дайте определение равных матриц.

7. Дайте определение суммы двух матриц.

8. Можно ли складывать матрицы разных размерностей?

9. Дайте определение произведения матрицы на число α.

10. Какая матрица называется противоположной матрицей к матрице A?

11. Дайте определение разности двух матриц.

12. Перечислите свойства линейных операций над матрицами.

13. Дайте понятие согласованной матрицы A к матрице B.

14. Дайте определение произведения матрицы A на матрицу B.

15. В каком случае существуют произведения AB и BA?

16. Пусть существуют произведения ABиBA. Справедливо ли равенство $AB=BA$?

17. Запишите формулу для вычисления определителя второго порядка. Как обозначается определитель матрицы?

18. Запишите формулу для вычисления определителя третьего порядка.

19. Дайте определение минора элементаa_{ij} матрицы A порядков 2, 3. Как обозначаетсяминор элементаa_{ij}?

20. Дайте определение алгебраического дополнения элемента a_{ij} матрицы A порядков 2, 3. Как обозначается?

Тесты для самопроверки

1. Даны матрицы$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$,$C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда матрица $D = A - B + C$ имеет вид…

а)$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Укажите случаи, при которых операция умножения определена корректно (не менее двух вариантов ответа)

а)$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix}$

3. Даны две матрицы A=$\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Элемент первой строки второго столбца произведения$A \cdot B$ равен…

а) 18; б) 16; в) 9; г) 23.

4. Даны матрицыA=$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда произведение матриц$A \cdot B$ равно…

а) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 16 & 8 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$; г)$\begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}$.

5. Определитель$\begin{vmatrix} 3 & -k \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$ равен нулю при k, равном…

а) – 1; б) – 4; в) 1; г) 11.

3.ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ*n*-гоПОРЯДКА. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Определение. Определителем матрицы n-го порядка называется число, которое сопоставляется квадратной матрице n-го порядка, получаемое по определенному правилу (Теорема Лапласа).

Свойства определителей:

1. Определитель не меняет знак при транспонировании: $|A| = |A^T|$.

2. От перемены местами двух строк (или столбцов) определитель меняет знак. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$

3. Определитель с нулевой строкой (или столбцом) равен нулю.

4. Определитель с двумя равными строками (или столбцами) равен нулю.

5. Определитель, все элементы i-ой строки (столбца) которого представляют сумму двух слагаемых, равна сумме двух определителей, все элементы которых, кроме i-ой строки (столбца), те же, что и в исходном, а в i-ой строке (столбце) первого определителя стоят первые слагаемые, в i-ой строке (столбце) второго определителя – вторые.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

6. Определитель диагональной матрицы равен произведению элементов на главной диагонали.

7.Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число (не равное нулю).

Теорема Лапласа. Определитель матрицы n-го порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки или столбца на их алгебраические дополнения.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -1 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 7 & 6 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

=3(84+12+10+3-120+28)– 5(– 12– 12– 3– -4)– (– 10+21– 30– 3)= =51+155+22=228.

Теорема аннулирования. Сумма произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельной строки (или столбца) равна нулю.

4.ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определение. Квадратная матрица A называется **вырожденной**, если определитель нулевой:$|A|=0$, и **невырожденной**, если определитель ненулевой.

Определение. Матрица B называется обратной к матрице A, если $AB=BA=E$. Обозначение:$B=A^{-1}$.

Теорема о существовании обратной матрицы.

Если квадратная матрица A вырождена, то обратная для неё матрица не существует. Если квадратная матрица A **невырождена**, то обратная для неё матрица может быть найдена по формуле $A^{-1}=\frac{1}{|A|}(A^*)^T$

гдеA* - матрица, присоединённая к матрице A, полученная из матрицы путём замены её элементов на их алгебраические дополнения.

$$(A^*)^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

__**Пример.**__ Найти обратную матрицу к матрице A.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$.

1) $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}=2–4=–2\neq0$.

2) $(A^*)^T=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $\boldsymbol{A}^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Проверка. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{E}$.

Значит, обратная матрица найдена верно.

Введем понятия матричных уравнений.

Простейшими матричными уравнениями называются соотношения вида AX=B и XA=B.

Здесь A и B – известные матрицы, X – неизвестная матрица.

Пусть матрица A невырожденная, тогда существует A^{-1}. Умножим первое уравнение на A^{-1} слева, а второе – справа. Получим решения матричного уравнения 1-го вида

$$AX = B\Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B\Rightarrow EX=A^{-1}B\Rightarrow X=A^{-1}B.$$

и матричного уравнения 2-го вида

$$XA= B\Rightarrow XAA^{-1} = BA^{-1}\Rightarrow XE= BA^{-1}\Rightarrow X= BA^{-1}.$$

<u>Пример.</u> Решить матричное уравнение

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

Решение:

Данное уравнение первого вида. Для его решения находим обратную матрицу для матрицы $\boldsymbol{A}$:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}. A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -10 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{B}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -10 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -21 & 3 & -3 \\ -26 & -38 & -46 \\ 11 & 11 & -1 \end{pmatrix}.$

$$X=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -21 & -13 & 19 \\ -26 & -38 & -46 \\ 11 & 11 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определение. Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Числа $\boldsymbol{a}_{11},\ldots,\boldsymbol{a}_{mn}$ называются коэффициентами при неизвестных.

Основной матрицей системы называется матрица $\boldsymbol{A}$, составленная из коэффициентов при неизвестных:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Неизвестные $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n$ образуют столбец неизвестных:

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \\ \cdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}.$$

Числа $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ называются свободными членами уравнений и образуют столбец свободных членов:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \ldots \\ \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix}.$$

Определение.Решением системы уравнений называется совокупность чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, которые, при подстановке их вместо соответствующих неизвестных, обращает каждое уравнение в верное числовое равенство.

Определение. Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**. Если система не имеет ни одного решения, то она называется **несовместной**.

Определение. Система называется **определенной**, если она имеет только одно решение и **неопределенной**, если более одного.

Система линейных n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$ может быть записана в матричной форме $AX = B$,

где A – основная матрица,

B – столбец свободных членов,

X – столбец неизвестных.

Это матричное уравнение первого вида.

<u>**Пример.**</u> Решить матричным методом определенную систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 18, \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

Решение

Матричная форма системы уравнений имеет вид: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \\ 16 \end{pmatrix}$.

Найдем обратную матрицу по формуле$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$.

$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -10 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда по формуле получим решение:

$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -10 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 18 \\ 16 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства определителей.

2. Дайте определение минора элементаa_{ij} матрицы A порядка n. Как обозначается?

3. Дайте определение алгебраического дополнения элемента a_{ij} матрицы A порядка n. Как обозначается?

4. Сформулируйте теорему Лапласа о разложении определителя по элементам строки (столбца).

5. Дайте определение обратной матрице к данной матрицеA. Как обозначается?

6. Дайте определение невырожденной матрицы.

7. Для какой матрицы существует обратная матрица?

8. Запишите формулу для нахождения обратной матрицы к невырожденной A второго порядка; третьего порядка.

9. Какая система уравнений называется линейной?

10. Запишите систему линейных уравнений в матричной форме.

11. Дайте определение решения системы m линейных уравнений с nпеременными.

12. Дайте определение совместной системы линейных уравнений.

13. Дайте определение несовместной системы линейных уравнений.

14. Дайте определение определенной системы линейных уравнений.

15. Дайте определение неопределенной системы линейных уравнений.

16. Какая система линейных уравнений называется невырожденной?

17. Запишите в матричном виде решение невырожденной системы $AX = B$.

Тесты для самопроверки

1. Разложение определителя $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ по третьей строке имеет вид…

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$.

2. При каких данных значениях λ и μ матрица $A=\begin{pmatrix} -\lambda & 3 \\ -2 & \mu \end{pmatrix}$ не имеет обратной?

а) λ=3, μ=2; б) λ=0, μ=0; в) λ= –2, μ=3; г) λ= 1, μ=4.

3. Если (x_0,y_0) – решение системы линейных уравнений

$\begin{cases} 5x + 6y = 1 \\ 2x - 4y = -6 \end{cases}$, то $2x_0 - y_0$ равно…

а) 3; б) 2; в) –3; г) –1.

6.ПРАВИЛО КРАМЕРА РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решение системы по правилуКрамера возможно при условиях, что основная матрица $\boldsymbol{A}$– квадратная и невырожденная ($|A|\neq 0$).

Теорема.ПустьΔ – определитель матрицы$\boldsymbol{A}$,

Δ_j–определитель матрицы,получаемый из $\boldsymbol{A}$ заменой$\boldsymbol{j}$-того столбца столбцом свободных членов.

Тогда,если$\Delta\neq 0$, тосистема имеет единственное решение, определяемоепоформуламКрамера: $\boxed{\boldsymbol{x}_j=\frac{\Delta_j}{\Delta}}$, (где j=1,2,…,$n$).

<u>**Пример.**</u>По формуламКрамера решить систему$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=3, \\ 2x_1+x_2+x_3=11, \\ x_1+x_2 2x_3=8. \end{cases}$

Решение

Найдем определитель системы:$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$=2-1+2-1+4-1=5.

Так как$\Delta\neq 0$, то система имеет единственное решение.

Вычислим определителиΔ_1,Δ_2,Δ_3 матриц, полученных из матрицы $\boldsymbol{A}$ заменойсоответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$\Delta_1=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix}=20;\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix}=10;\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix}=5.$

Теперь по формулам Крамера

$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{20}{5}=4;$

$x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{10}{5}=2;$

$x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{5}{5}=1.$

Проверка. $1\cdot4-1\cdot2+1\cdot1=3$, $2\cdot4+1\cdot2+1\cdot1=11$,

$1\cdot4+1\cdot2+2\cdot1=8$. Значит, решение системы найдено верно.

7.ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА–КАПЕЛЛИ. МЕТОД ГАУССА РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определение. Элементарными преобразованиями строк матрицы называются:

1. перемена местами двух строк матрицы;
2. умножение строки на любое не равное нулю число;
3. вычеркивание нулевой строки;
4. прибавление к одной из строк любой другой строки, умноженной на некоторое число.

Матрица, полученная после элементарных преобразований строк, эквивалентна исходной.Определитель при элементарных преобразованиях 1-3 изменяется.

Определение.Рангом матрицы $\boldsymbol{A}$ размера $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ называется количество ненулевых строк в эквивалентной ей ступенчатой матрице.

<u>Пример</u>. Найти ранг матрицы **А**, если

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение

С помощью элементарных преобразований приводим матрицу к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 8 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, ранг матрицы равен трем.

Определение. Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными. Матрица её коэффициентов при неизвестных, дополненная столбцом свободных членов, называется **расширенной матрицей** коэффициентов.

<u>Пример.</u>Составить расширенную матрицу системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Решение

Расширенная матрица системы имеет следующий вид: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

Сущность метода Гаусса

В отличие от матричного метода и метода Крамера метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с **произвольным** числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Расширенную матрицу системы с помощью элементарных преобразований приводят к ступенчатому (трапецеидальному) виду.

Получив ступенчатую матрицу, определим, какие неизвестные будут базисными, а какие свободными. Для этого отбрасываем нулевые строки. Неизвестная, соответствующая столбцу, в котором стоит первый ненулевой элемент данной строки, является базисной. Остальные неизвестные – свободные. Свободным неизвестным придаем некоторые действительные числа.

Восстанавливаем систему с базисными неизвестными, которая является равносильной исходной системе, затем находим решение.

Теорема Кронекера-Капелли. При совпадении рангов расширенной и основной матриц система совместна, при равенстве ранга с числом неизвестных система определенна.

Пример. Решить определенную систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Решение

Расширенную матрицу системы с помощью элементарных преобразований приводят к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 2 & -10 \\ 0 & 6 & 3 & 15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Восстановим систему с базисными неизвестными, которая является равносильной исходной системе:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 0x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

затем находим решение: $x_1=4$; $x_2=2$; $x_3=1$.

Пример. Решить неопределенную систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Решение

Расширенную матрицу системы с помощью элементарных преобразований приводят к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

При исследовании системы линейных уравнений используем теорему Кронекера–Капелли: система линейных уравнений совместна, тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы. (ранги совпали и равны двум). Система неопределенна.

Неизвестная, соответствующая столбцу ступенчатой матрицы, в котором стоит первый ненулевой элемент данной строки, является базисной. (x_1,x_3 – базисные) Остальные неизвестные – свободные. (x_2– свободная)

Свободной неизвестной придаем некоторое действительное число.

Восстановим систему с базисными неизвестными, которая является равносильной исходной системе:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 = c, \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - x_3 - c, \\ x_2 = c, \\ x_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - 1 - c, \\ x_2 = c, \\ x_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - c, \\ x_2 = c, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$ где c–действительное число.

Контрольные вопросы

1. Запишите формулы Крамера. Условия применения этих формул.

2. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли (критерий совместности системы).

3. Запишите основную и расширенную матрицы системы m линейных уравнений с n переменными.

4. В каком случае система линейных уравнений определенна?

5. В каком случае система линейных уравнений неопределенна?

6.Объясните суть прямого хода метода Гаусса.

7.Объясните суть обратного хода метода Гаусса.

Тест для самопроверки

1. Ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & -1 \\ 4 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$ равен…

а) 1; б) 0; в) 2; г) 4.

2. При каких данных значенияхλ иμ матрица$A=\begin{pmatrix} -\lambda & 3 \\ -2 & \mu \end{pmatrix}$ не имеет обратной?

а) λ=3,μ=2; б) λ=0,μ=0; в)λ=–2,μ=3; г)λ=1,μ=4.

3. Если (x_0, y_0) – решение системы линейных уравнений

$\begin{cases} 5x+6y=1, \\ 2x-4y=-6 \end{cases}$, то $2x_0 – y_0$ равно…

а) 3; б) 2; в) –3; г) –1.

4. Разность между числом базисных и свободных переменных системы уравнений $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3-x_4+x_5=0, \\ x_2+2x_3+x_4-x_5=0, \\ x_3-2x_4=0 \end{cases}$ равна…

а) 2; б) 0; в) 1; г) 3.

8.СИСТЕМЫ ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система линейных уравнений называется **однородной**, если свободный член в каждом уравнении равен нулю.

Пример однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=0, \\ 2x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+2x_2=0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна.

Очевидно, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ – нулевое (или тривиальное) решение однородной системы.

Если число уравнений равно числу неизвестных, т.е. $m=n$, и определитель системы отличен от нуля – система имеет только тривиальные решения.

Кроме тривиального, *система может иметь и другие решения (нетривиальные).*

Если $m \neq n$ и множество решений системы бесконечно, то можно построить фундаментальную систему решений.

Контрольные вопросы

1. Какие переменные совместной системы линейных уравнений называются базисными и какие – свободными?

2. Сколько базисных переменных может иметь совместная система линейных уравнений? Сколько свободных переменных может иметь совместная система линейных уравнений?

3.Совместна или несовместна система линейных уравнений, если расширенная матрица системы после k-того хода метода Гаусса содержит строку, все элементы которой, кроме последнего, равны нулю?

4. Дайте определение однородной системы линейных уравнений.

5.Какое решение однородной системы называется нулевым или тривиальным?

6.Может ли однородная система линейных уравнений быть несовместной?

7.Сформулируйте необходимое и достаточное условие того, чтобы однородная система линейных уравнений имела только тривиальное решение.

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

№1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Найти: $2A+4B-3C$.

№2. Выполнить действия:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

№3. Найти матрицу C, заданную формулой: $C=AB^T-3B$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

№4. Выполнить действие $AB-BA$.

$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

№5. Найти матрицу $D=3AB-(BC)^T$, если

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

№6. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

№7. Решите уравнение:

$$\begin{vmatrix} x-4 & 5 \\ 4-x & x-1 \end{vmatrix} = 9.$$

№8. Для элементов матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ найти все миноры и алгебраическое дополнение A_{12}.

№9. Для элементов матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ найти минор M_{32} и алгебраическое дополнение A_{32}.

№ 10. Вычислить определители, используя их свойства:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 251 & 448 & 37 \\ 250 & 447 & 36 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 8 & 28 & 38 & 48 \\ 4 & 14 & 19 & 24 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

№ 11. Вычислить определители, используя теорему о разложении определителя по элементам ряда:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -8 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 9 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

№12. Найти матрицы, обратные данным, если они существуют:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

№13.Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; б)$X\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\text{X}+\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$.

№14. Решить определенные системы матричным методом:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 14, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

№15.Решить определенные системы методом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 14, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

№16.Найти ранг матриц:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 3 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 12 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

№17.При каких значенияхα ранг матрицы$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & \alpha & 6 \end{pmatrix}$ равен 2?

№18. При каких значениях α ранг матрицы$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & \alpha & -2 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ равен

а) 1; б) 2; в) 3?

№19. Решить определенные системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$ б)$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 10, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

№20. Исследовать системы на совместность и в случае совместности, решить методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 5x_1 + 5x_3 = 0. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 8, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 8, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -5 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = -4, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 9. \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 8, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = -4, \\ 4x_1 + 8x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 16 \end{cases}$

Ответы к задачам для аудиторных занятий

1. $\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -10 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.   **2. а)** $\begin{pmatrix} -1 & 21 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$;   **2.б)** $\begin{pmatrix} 6 & -18 & 21 \\ -2 & 6 & -7 \\ 4 & -12 & 14 \end{pmatrix}$;   **2.в)** –18.

3. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 25 & 26 \end{pmatrix}$.   **4.** $\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -15 & -9 \end{pmatrix}$.   **5.** $\begin{pmatrix} -8 & 22 \\ 7 & -11 \\ 16 & -8 \end{pmatrix}$.

6. а)-33; **6.б)**-36;   **6.в)**0; **6.г)**10.   **7.**x1 = –5; x2 = 5.

8. $M_{11} = 5$; $M_{12} = -2$; $M_{21} = 3$; $M_{22} = -1$; $A_{12} = 2$.   **9.** $M_{32} = 3$; $A_{32} = -3$.

10.а)0; **10.б)**0; **10в)**17;   **10.г)**0.   **11.а)**-20;   **11.б)**-90.

12.а) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;   **12.б)** не существует;

12.в) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & -5 & -10 \\ -3 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$;   **12г.)** $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

13.а) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 22 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;   **13.б)** $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$;   **13.в)** $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 13 & 29 \\ -26 & -48 \\ 22 & 26 \end{pmatrix}$.

14.а) $x_1 = -3; x_2 = 15; x_3 = -2$;   **14.б)** $x_1 = -1; x_2 = 3; x_3 = -1$.

15. а) $x_1 = -3$; $x_2 = 15$; $x_3 = -2$;   **15.б)** $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = 1$.

16.а) $r(A) = 2$;   **16.б)** $r(A) = 2$;   **16.в)** $r(A) = 2$;

16.г) $r(A) = 2$;   **16.д)** $r(A) = 3$.

17. $\alpha = 2$. **18.а)** $\alpha = -4$; **18.б)** $\alpha \neq -4$; **18.в)** ни при каких α.

19. а) $x_1 = 1; x_2 = 2$; $x_3 = 1$;   **19.б)** $x_1 = -1; x_2 = 3$; $x_3 = -1$;

19.в) $x_1 = 2; x_2 = -1$; $x_3 = 1$.

20.а) $x_1 = 0; x_2 = 0$; $x_3 = -0$; **20.б)** $x_1 = 0; x_2 = 9$; $x_3 = -4$;

20.в) $x_1 = \frac{-1}{8}; x_2 = \frac{-1}{4}$; $x_3 = \frac{1}{8}$; **20.г)** $x_1 = \frac{20-90c}{102}; x_2 = \frac{154+72c}{102}$; $x_3 = \frac{80-3c}{-51}$; $x_4 = c$;

где c–действительное число; **20.д)** $x_1 = 1; x_2 = 1$; $x_3 = -1$; $x_4 = -1$;

20.е) $x_1 = \frac{1-17c}{18}; x_2 = \frac{67+31c}{36}$; $x_3 = \frac{-4+5c}{9}$; $x_4 = c$;

где c–действительное число.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Вариант 1

1. Выполнить действия над матрицами $2\cdot(3A+B)-2\cdot A^T\cdot B$, где

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}4 & 6 & -2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & -2\\ 2 & -1 & -2 & -3\\ 3 & 0 & -1 & 2\\ 2 & -3 & 2 & 1\end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}2x_1-2x_2-3x_3=6,\\ x_1+x_2+2x_3=-2,\\ 2x_1-x_2-2x_3=2\end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 7 & -1 & 5\\ 5 & 4 & 3 & 0 & 9\end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+5x_3-x_4=3,\\ 2x_1-3x_2-3x_3+4x_4=1,\\ 4x_1+x_2+3x_3+2x_4=3,\\ 5x_1-2x_2+x_3+3x_4=5\end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 2

1. Выполнить действия над матрицами $B^T\cdot A-2\cdot A^T\cdot B$, где

$$A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 5\\ 1 & -3 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 6 & -2 & 1\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}2 & 5 & 3 & 2\\ 0 & -4 & 5 & -2\\ 1 & 3 & -8 & 1\\ 3 & -1 & 2 & -1\end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 7 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 3

1. Выполнить действия над матрицами $A - (A + B)\cdot(A^T - 3\cdot B)$, где

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -6 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 7 & -1 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 = -1, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 4

1. Выполнить действия над матрицами $A^T \cdot (A - B) + 2 \cdot A \cdot B$, где

$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 7 & -1 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 5, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 5

1. Выполнить действия над матрицами $(2\cdot A+B)\cdot 2\cdot B-A^T$,где

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & -2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}-3 & 2 & 6 & 0\\ 2 & 5 & -2 & 2\\ 1 & 6 & -8 & 1\\ -2 & -1 & 2 & 5\end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=1,\\ 2x_1+3x_2-x_3=8,\\ x_1-x_2+2x_3=-1\end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 & 1 & 4\\ 9 & 2 & 7 & -1 & 5\\ 5 & 4 & 3 & 0 & 9\end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases}2x_1+x_2+5x_3-x_4=1,\\ 3x_1+3x_2-2x_3-5x_4=2,\\ x_1-x_2+2x_3+3x_4=10,\\ 3x_1+2x_2+7x_3-2x_4=1\end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 6

1. Выполнить действия над матрицами$A\cdot B–2\cdot(A+B)\cdot A^T$,где

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & -4 & 3\\ 0 & 2 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 2 & 7 & -1 & 5 \\ 8 & 4 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = -5, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = -3 \end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 7

1. Выполнить действия над матрицами $A-(A+B)\cdot(A^T-3\cdot B)$, где

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -2, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 2 & 7 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 5, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 8

1. Выполнить действия над матрицами $2\cdot A^T - A\cdot B\cdot(B - A)$,где

$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\qquad B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 2 & 7 & -1 & 5 \\ -8 & 3 & 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_4 = -9, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -7, \\ 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 12, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 9

1. Выполнить действия над матрицами $(A–B)\cdot(A+B)–2\cdot A^T\cdot B$,где

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ -4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1+4x_2-3x_3=-7, \\ x_1-3x_2+2x_3=0, \\ 2x_1-5x_2-x_3=-1 \end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -9 & 2 & 7 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=1, \\ 2x_1-x_2-3x_3=2, \\ 3x_1-x_3+x_4=2, \\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4=3 \end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 10

1. Выполнить действия над матрицами 2·(3A+D) $2\cdot(3A+B)-2\cdot A^T\cdot B$,где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 7 & -1 & 5 \\ -6 & 5 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 11

1. Выполнить действия над матрицами $2\cdot(A^T + B) - 3\cdot B\cdot A^2$,где

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 7 & 4 & -1 & 5 \\ 7 & 4 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 12, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 12

1. Выполнить действия над матрицами$B^T \cdot A – 2 \cdot A^T \cdot B$,где

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & -1 & 5 \\ 7 & 4 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 13

1. Выполнить действия над матрицами $(A–B) \cdot A+3 \cdot B^T$, где

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 5 & 7 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 14

1. Выполнить действия над матрицами $A-(A+B)\cdot(A^T-3\cdot B)$, где

$A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\qquad B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 6 \end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 7 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 15

1. Выполнить действия над матрицами $A\cdot B-2\cdot(A+B^T)\cdot A$, где

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}2 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1 & -3\\ 1 & -1 & 1 & 3\end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=4,\\ x_1-3x_2+3x_3=2,\\ 5x_1+3x_2+3x_3=4\end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 & 1 & 4\\ -7 & 2 & 7 & -1 & 5\\ 5 & 4 & 3 & 8 & 9\end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases}3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3,\\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=-3,\\ x_1+2x_2-4x_4=-3,\\ x_1-x_2-4x_3+9x_4=22\end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 16

1. Выполнить действия над матрицами $A\cdot(A-B)+2\cdot B^T\cdot A$, где

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 5\\ 4 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}3 & 1 & 3 & 4\\ 2 & 2 & 1 & 4\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 4\end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}3x_1 - x_2 + x_3 = 4,\\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4,\\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 16\end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 & 1 & 4\\ -4 & 2 & 7 & -1 & 5\\ 7 & 6 & 3 & 0 & 9\end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases}2x_1 + x_3 + 4x_4 = 9,\\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8,\\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5,\\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1\end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 17

1. Выполнить действия над матрицами $5\cdot A\cdot B + A\cdot(B - A^T)$, где

$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & 4 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 3 & -1\\ 3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 5 & 1\end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}x_1 + 2x_2 + x_3 = 8,\\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5,\\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10\end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 & 1 & 4\\ 1 & 6 & 7 & -1 & 5\\ 7 & 4 & 3 & 8 & 9\end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases}x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5,\\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1,\\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1,\\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5\end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 18

1. Выполнить действия над матрицами $3\cdot(A–B)–2\cdot A^T\cdot B$,где

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -4 & 0 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 7 & -1 & 5 \\ -9 & 4 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 19

1. Выполнить действия над матрицами $2\cdot A^T+3\cdot B\cdot(A\cdot B–2\cdot A)$,где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5,\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1,\\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 8\end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 & 1 & 4\\ 1 & 6 & 7 & -1 & 5\\ -4 & 4 & 3 & 8 & 9\end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases}x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 4,\\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0,\\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4,\\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 8\end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 20

1. Выполнить действия над матрицами $2\cdot A\cdot B-(A+B)\cdot(A^T-B)$,где

$A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 6\\ 2 & 4 & 3\\ 0 & -3 & 4\end{pmatrix}$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}2 & 6 & 4 & 6\\ 3 & -3 & -1 & -2\\ 2 & 9 & -1 & -1\\ -1 & -6 & 0 & 1\end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 - x_3 = 4,\\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11,\\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11.\end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 & 1 & 4\\ 1 & 6 & 7 & -1 & 5\\ -6 & 4 & 3 & 8 & 9\end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 10. \end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 21

1. Выполнить действия над матрицами $3\cdot(A+B)(A\cdot B - 2\cdot A^T)$,где

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 6 & -7 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & -8 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -4, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 7 & -1 & 5 \\ -5 & 4 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 3, \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 22

1. Выполнить действия над матрицами $A^T\cdot(2\cdot A+B^2)-B^T$,где

$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 6 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 7 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 1 \end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 23

1. Выполнить действия над матрицами $4 \cdot A^T \cdot B - (A^2 + B)$, где

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 15, \\ -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 7 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 8, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 9, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 11 \end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 24

1. Выполнить действия над матрицами $(A+B)\cdot A^T - 3\cdot B^2$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & -4 & 0 \\ -8 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 7 & -1 & 5 \\ -5 & 4 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 25

1. Выполнить действия над матрицами $2\cdot A - A\cdot B\cdot(B^T - A)$,где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & -2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 4, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 7 & -1 & 5 \\ -6 & 4 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 3, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 26

1. Выполнить действия над матрицами $2\cdot(3A+B)-2\cdot A^T\cdot B$,где

$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -1 & 5 \\ 8 & 4 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 27

1. Выполнить действия над матрицами $B^T \cdot A - 2 \cdot A^T \cdot B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -8 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -1 & 5 \\ 7 & 4 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 28

1. Выполнить действия над матрицамиA–(A+B)·(A^T–3·B),где

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_{23} = -6, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 7 & -1 & 5 \\ 9 & 4 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 - 2x_4 = -1, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 29

1. Выполнить действия над матрицами$A\cdot(A–B)+2\cdot A^T\cdot B$,где

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ -3 & 3 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель$\begin{vmatrix}1 & 1 & -3 & 0\\ 2 & 5 & 1 & 2\\ 0 & 6 & 4 & 1\\ 6 & -1 & -1 & 5\end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=1,\\ 2x_1-3x_2-x_3=-4,\\ 3x_1+x_2+2x_3=1\end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 7 & -1 & 5\\ 5 & 4 & 3 & 0 & 9\end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=7,\\ x_1+2x_3+2x_4=5,\\ 4x_1+x_2-x_3=3,\\ 2x_1+x_2+x_3=1\end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Вариант 30

1. Выполнить действия над матрицами $(2\cdot A+B)\cdot B–A^T$, где

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & -2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 2 \\ 1 & 6 & -8 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

4. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 2 & 7 & -1 & 5 \\ 8 & 4 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача1. Выполнить действия над матрицами

$B\cdot A - C^2$, где $A=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Решение

$B\cdot A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix} 5\cdot 0-1\cdot(-1)+0\cdot(-1) & 5\cdot 5-1\cdot(-1)+0\cdot 0 \\ 1\cdot 0-1\cdot(-1)+1\cdot(-1) & 1\cdot 5-1\cdot(-1)+1\cdot 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$C^2=C\cdot C=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+5\cdot 1 & 1\cdot 5+5\cdot 1 \\ 1\cdot 1+1\cdot 1 & 1\cdot 5+1\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$

Итак, $B\cdot A - C^2=\begin{pmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 16 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$

Задача 2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение

Для вычисления определителя разложим его по второй строке:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0\cdot A_{21}+(-2)\cdot A_{22}+(-4)\cdot A_{23}+0A_{24}=(-2)\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}+$$

$$(-4)\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=(-2)\cdot(0+6-4-(0-2+24))+4\cdot(4+4-2-(2+2-8))=$$

$(-2)\cdot(-20)+4\cdot 10=40+40=80$

Задача 3. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3, \\ -2x_1+6x_2+x_3=2, \\ -x_1+x_2+x_3=2 \end{cases}$

а) с помощью обратной матрицы,

б) по формулам Крамера.

Решение

а) Обозначим $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -2 & 6 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$.

Запишем систему в матричном виде: $A\cdot X = B$.

При невырожденной матрице A получим решение $X = A^{-1}\cdot B$.

Найдем обратную матрицу A^{-1} по формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ -2 & 6 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=6 + 2 + 2 - 6 - 1 - 4 = - 1\neq 0.$$

Вычислим алгебраические дополнения A_{ij} элементов матрицы A.

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}6 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=6 - 1 = 5$, $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=- (-2-(-1)) = 1$,

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-2 & 6\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2 - (-6) = 4$, $A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}= -(-2 - (-1)) = 1$,

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}= 1 - 1 = 0$, $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{vmatrix}= -(1 - 2) = 1$,

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 6 & 1\end{vmatrix}= -2 - (-6) = 4$, $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}= -(1 - 2) = 1$,

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -3\\ -2 & 6\end{vmatrix}= 6 - 4 = 2$.

Такимобразом, $A^{-1}=-\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}5 & 1 & 4\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -1 & -4\\ -1 & 0 & -1\\ -4 & -1 & -2\end{pmatrix}$

Следовательно, $X = A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix}-5 & -1 & -4\\ -1 & 0 & -1\\ -4 & -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-1-8\\ 1+0-2\\ 4-1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$.

б) Формулы Крамера имеют вид

$$x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta},\ j= 1,2,3,$$

где Δ – ненулевой определитель матрицы A системы, Δ_j – определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой j-го столбца столбцом свободных членов B.

Вычислим определители:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ -2 & 6 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}== 6 + 2 + 2 - 6 - 1 - 4 = - 1\neq 0,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-1 & -2 & -1\\ 1 & 6 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=- 6 - 4 - 1 + 12 + 1 + 2 = 4,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ -2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}= 1 + 1 + 4 - 1 - 2 - 2 = 1,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ -2 & 6 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}= 12 + 2 + 2 - 6 - 1 - 8 = 1.$$

Итак, $x_1 = \frac{4}{-1} = -4$, $x_2 = \frac{1}{-1} = -1$, $x_3 = \frac{1}{-1} = -1$.

Задача 4.Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 1 & 11\\ 1 & 1 & 2 & 8\end{pmatrix}$

Решение

Матрицу с помощью элементарных преобразований приводят к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 1 & 11\\ 1 & 1 & 2 & 8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 1 & 11\\ 0 & 2 & 1 & 5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 3 & -1 & 5\\ 0 & 2 & 1 & 5\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & -6 & 2 & -10\\ 0 & 6 & 3 & 15\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & -6 & 2 & -10\\ 0 & 0 & 5 & 5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 3 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Ранг равен трем.

Задача 5.Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases}x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 3x_4 = -2\\ 2x_1 - x_2 - 16x_3 + 4x_4 = 26\\ -3x_1 + 2x_2 + 27x_3 - 7x_4 = -42\end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Решение

При исследовании системы линейных уравнений используем теорему Кронекера–Капелли: система линейных уравнений совместна, тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.

Составим расширенную матрицу системы

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -16 & 4 & 26 \\ -3 & 2 & 27 & -7 & -42 \end{array}\right).$$

Чтобы определить ранг матрицы, приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк. Матрицы, получаемые после преобразований, являются эквивалентными.

Будем обозначать это знаком $\Leftrightarrow$.

Прибавим сначала ко второй строке первую, умноженную на –2, а затем к третьей – первую, умноженную на 3:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & -30 & 10 & 30 \\ -3 & 2 & 27 & -7 & -42 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & -30 & 10 & 30 \\ -3 & 2 & 27 & -7 & -42 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & -30 & 10 & 30 \\ 0 & 8 & 48 & -16 & -48 \end{array}\right).$$

Умножим вторую строку матрицы на$-\frac{1}{5}$, третью строку умножим на$\frac{1}{8}$, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & -6 \end{array}\right).$$

Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на –1, и получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы системы и равен 2, следовательно, система имеет решение.

Так как ранг матрицы меньше, чем количество переменных в системе, то система имеет бесконечно много решений.

Чтобы найти решения, прибавим к первой строке вторую строку, умноженную на–2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

После проведенных преобразований расширенной матрицы система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_3 + x_4 = 10, \\ x_2 + 6x_3 - 2x_4 = -6. \end{cases}$$

Выбираем в качестве свободных переменныхx_3 иx_4.

Полагаем $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, тогда $x_1=10+5c_1 - c_2$, $x_2 = -6-6c_1+2c_2$.

Итак, система уравнений имеет решения

$(10+5c_1-c_2; -6-6c_1+2c_2; c_1; c_2)$, где$c_1, c_2$ – действительные числа.

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1. Модуль вектора. Коллинеарность и компланарность векторов.
2. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Направляющие косинусы.
3. Скалярное произведение векторов и его свойства. Вычисление в координатах и приложения скалярного произведения.
4. Векторное произведение и его свойства. Вычисление в координатах и приложения векторного произведения.
5. Смешанное произведение, его свойства и геометрический смысл.

1. МОДУЛЬ ВЕКТОРА. КОЛЛИНЕАРНОСТЬ И КОМПЛАНАРНОСТЬ ВЕКТОРОВ.

Определение. Величины, которые полностью определяются своим численным значением, называются **скалярными.**

Например: площадь S,объем V,сила тока I, время t, работаA, масса m.

Другие величины, например: сила$\vec{F}$ и ускорение $\vec{a}$, определяются не только числовыми значениями, но и направлением. Такие величины называются **векторными**. Геометрически векторные величины изображаются с помощью вектора.

Определение. Вектор — это направленный прямолинейный отрезок, имеющий определенную длину и направление. Если точкаA— начало вектора, точкаB — конец, то вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$(или $\vec{a}$). Вектор$\overrightarrow{BA}$ называется **противоположным**вектору $\vec{a}$ и обозначается -$\vec{a}$.

Определение. Длиной (модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$называется длина отрезка AB, обозначается$\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется **нулевым.** Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным**.

Замечание. Нулевой вектор не имеет направления.

Определение. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется **ортом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}°$.

Определение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **коллинеарны**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Обозначаются $\vec{a}\backslash\backslash\vec{b}$

Определение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **равны,** если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины. Обозначаются $\vec{a}=\vec{b}$.

Определение. Три вектора в пространстве называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение вектора.

2. Дайте определение длины вектора.

3. Дайте определение нулевого вектора.

4. Дайте определение равных векторов.

5. Какие два вектора называются коллинеарными?

6. Какие векторы называются компланарными?

2. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ. НАПРАВЛЯЮЩИЕ КОСИНУСЫ

Линейными операциями над векторами являются сложение, разность и умножение вектора на скаляр.

1). Сложение векторов.

а) *Правило треугольника.*

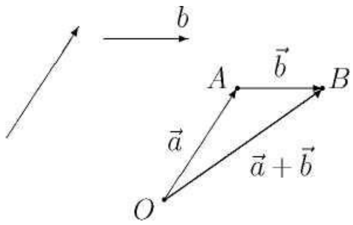

Рис.1.

Возьмем произвольную точку *O*. Откладываем вектор $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$. Далее, от точки *A* откладываем вектор $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$. Искомый вектор $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OB}$(рис. 1).

б) *Правило параллелограмма.*

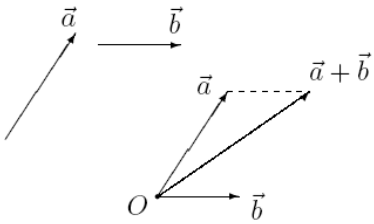

Рис. 2

Возьмем произвольную точку *O*. Откладываем от точки *O* векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Достраиваем полученную фигуру до параллелограмма. Искомый вектор $\vec{a}+\vec{b}$ – «длинная» диагональ параллелограмма (рис. 2).

2). Разность векторов.

а) *Правило треугольника.*

Возьмем произвольную точку *O*. Откладываем вектор $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$и вектор $\vec{b}$ $=\overrightarrow{OB}$.

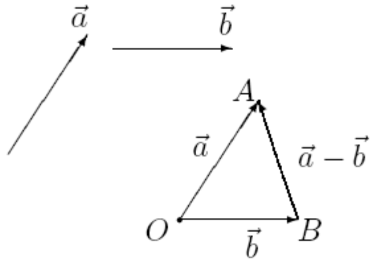

Рис.3.

Искомый вектор $\vec{a}$-$\vec{b}$=$\overrightarrow{BA}$(рис. 3).

б) *Правило параллелограмма.*

Возьмем произвольную точку O. От точки O векторы $\vec{a}$и$\vec{b}$. Достраиваем полученную фигуру до параллелограмма.

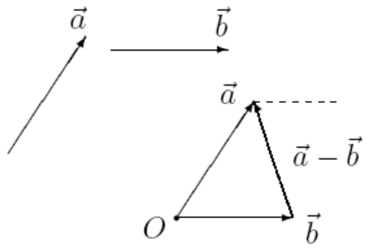

Рис.4.

Искомый вектор$\vec{a}$–$\vec{b}$ – «короткая» диагональ параллелограмма (рис. 4).

3). Произведение вектора на скаляр

Определение. Произведением вектора $\vec{a}$ на скаляр λ называется вектор $\lambda\vec{a}$, который имеет длину$|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, коллинеарен вектору $\vec{a}$и имеет направление вектора $\vec{a}$, если $\lambda> 0$ и противоположное направление, если $\lambda < 0$ (рис. 5).

Рис.5

Пусть в пространстве задана направленная прямая (ось) $\vec{L}$.

Определение.Проекцией точки A на ось $\vec{L}$называется точка A', в которой пересекаются ось$\vec{L}$с плоскостью, перпендикулярной $\vec{L}$и проходящей через A (рис. 6).

Пусть $\overrightarrow{AB}$ - произвольный ненулевой вектор. A' иB' - проекции на $\vec{L}$ точекAи B соответственно. Рассмотрим вектор$\overrightarrow{A'B'}$.

Определение.Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось$\vec{L}$называется положительное число $\overrightarrow{A'B'}$, если $\overrightarrow{AB}$и $\vec{L}$ – одинаково направлены и -$\overrightarrow{A'B'}$, если противоположно направлены (рис. 5). Обозначаетсяпр$_{\vec{L}}\overrightarrow{AB}$

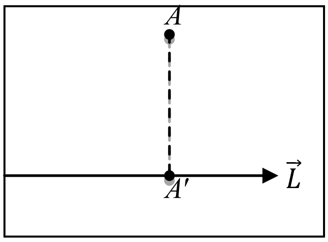

Рис.6

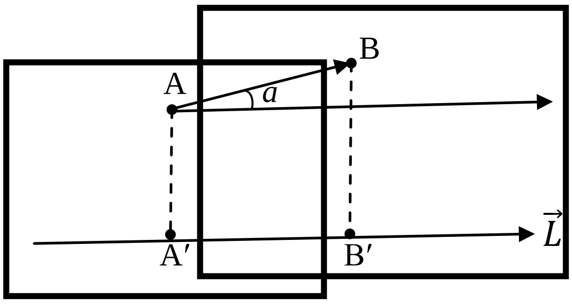

Рис.7

Угол α - угол между векторами$\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$($0\leq a\leq \pi$).

Свойства проекций

Свойство 1. Проекция вектора$\vec{a}$ на $\vec{L}$ равна произведению модуля вектора $\vec{a}$ на косинус угла α:пр$_{\vec{L}}\vec{a}$=$|\vec{a}|$·cosα.

Следствие 1.1.Проекция вектора $\vec{a}$ на $\vec{L}$пр$_{\vec{L}}\vec{a}$> *0 (< 0),* если вектор образует с осью$\vec{L}$ острый (тупой) угол, и равна нулю, если этот угол прямой.

Следствие 1.2.Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.

Свойство 2.Проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось.

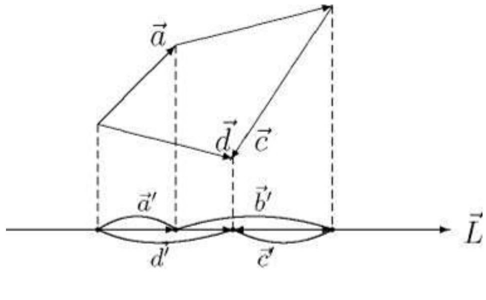

Рис.8

Рассмотрим вектор$\vec{d}$= $\vec{a}$ + $\vec{b}$ + $\vec{c}$.Из рис. 8 легко видеть, что

$$\text{пр}_{\vec{L}}\vec{d}=|\vec{a}| + |\vec{b}| - |\vec{c}| = \text{пр}_{\vec{L}}\vec{a} + \text{пр}_{\vec{L}}\vec{b} + \text{пр}_{\vec{L}}\vec{c}$$

Свойство 3.$\text{пр}_{\vec{L}}(\lambda\vec{a})=\lambda\cdot\text{пр}_{\vec{L}}\vec{a}$

Разложение вектора по ортам координатных осей

Под системой координат на плоскости (в пространстве) понимают способ, позволяющий численно описать положение точки на плоскости (в пространстве).

Одной из таких систем является прямоугольная (декартова) система координат.

Прямоугольная система координат задается взаимно перпендикулярными прямыми – осями, каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный отрезок.

Точкой пересечения осей называют началом координат.

Вектор, имеющий начальной точкой начало координат и конечной произвольную точкуM, называется радиус-вектором точки M.

Координатами точки M в системе координат называют координаты радиус-вектора.

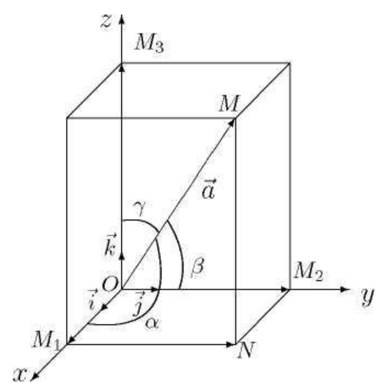

Рис.9

На координатных осях *Ox, Oy, Oz*отметим орты$\vec{i}$, $\vec{j}$, *и* $\vec{k}$соответственно.$\vec{a}=\overrightarrow{OM}$(рис. 9). Проекции $\vec{a}$на координатные оси

соответственно:$a_x= np_x\vec{a}=|\overrightarrow{OM_1}|$, $a_y= np_y\vec{a}=|\overrightarrow{OM_2}|$, $a_z= np_z\vec{a}=|\overrightarrow{OM_3}|$.

Кроме того, $\vec{a}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1N}+\overrightarrow{NM}$ (по определению суммы векторов). Т.к. $\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{M_1N}$, $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OM_3}$, то

$$\vec{a}= \overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3}.$$

С другой стороны:

$$\overrightarrow{OM_1}=\left|\overrightarrow{OM_1}\right|\cdot\vec{\imath} = a_x\cdot\vec{\imath},$$

$$\overrightarrow{OM_2}=\left|\overrightarrow{OM_2}\right|\cdot\vec{\jmath} = a_y\cdot\vec{\jmath},$$

$$\overrightarrow{OM_3}=\left|\overrightarrow{OM_3}\right|\cdot\vec{k} = a_z\cdot\vec{k}.$$

Из формулы $\vec{a}= \overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3}$ получим: $\vec{a} = a_x\cdot\vec{\imath}+a_y\cdot\vec{\jmath}+a_z\cdot\vec{k}$.

Определение. Формула $\vec{a} = a_x\cdot\vec{\imath}+a_y\cdot\vec{\jmath}+a_z\cdot\vec{k}$ является основной в векторном исчислении и называется **разложением вектора по ортам координатных осей.**

Числа a_x, a_y, a_z называются **координатами вектора** $\vec{a}$, т.е. координаты– проекции вектора на соответствующие координатные оси.

Линейные операции над векторами

• Сумма, разность векторов в координатной форме:

При сложении (вычитании) векторов их одноименные координаты складываются (вычитаются).

• Умножение вектора на скаляр:

При умножении вектора на скаляр координаты вектора умножаются на этот скаляр.

Свойства линейных операций над векторами

1. $\vec{a}+\vec{b}= \vec{b}+\vec{a}$;
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
3. $\lambda_1(\lambda_2\vec{a}) = \lambda_1\lambda_2\vec{a}$;
4. $(\lambda_1+ \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}$;
5. $\lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

Формула длины вектора

Если в пространстве задана прямоугольная декартова система координат $Oxyz$, то точка Mпространства, имеющая координаты x(абцисса),y (ордината), z(апликата), обозначается$M(x;y;z)$.

Пусть $\overrightarrow{AB}=(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, где$A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$.

Длина (модуль) вектора$\overrightarrow{AB}$ dмежду двумя точками$A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ определяется по формуле

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Пример.Даны точки$A(1; 0; 7)$ и$B(4; 4; 7)$. Найти d.

Решение

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(4-0)^2+(7-7)^2}$ $=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ (ед.)

Модуль и направляющие косинусы вектора

Зная проекции вектора$\vec{a}$, можно легко найти выражение для модуля вектора:

$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$, т.е. модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его проекций на оси координат.

Пример .

Вычислить проекцию вектора$\vec{a}=(2; -1;\ 4)$, на вектор $2\vec{b}-\vec{c}$, где $\vec{b}=(3; -1;\ 1)$,$\vec{c}=(-2; 1;\ 1)$.

Решение

$2\vec{b}-\vec{c}=(8; -3; 1)$, $\vec{a}=(2; -1; 4)$, тогда

$$\text{пр}_{2\vec{b}-\vec{c}}\vec{a}=\frac{(\vec{a}\cdot(2\vec{b}-\vec{c}))}{|2\vec{b}-\vec{c}|}=\frac{16+3+4}{\sqrt{64+9+1}}=\frac{23}{\sqrt{74}}$$

Пусть углы вектора $\vec{a}$с осями Ox, Oy, Ozравныα, β, γ соответственно. По свойству 1 проекции вектора на ось имеем:

$a_x=|\vec{a}|cos\alpha$ $\qquad$ $cos\alpha={a_x}/{|\vec{a}|}$

$a_y = |\vec{a}|cos\beta$ $\qquad$ $cos\beta = {a_y}/{|\vec{a}|}$

$a_y = |\vec{a}|cos\gamma$ $\qquad$ $cos\gamma = {a_z}/{|\vec{a}|}$

Определение. Числа$cos\alpha$, $cos\beta$, $cos\gamma$ называются **направляющими косинусами вектора $\vec{a}$.**Ониявляются координатами орт вектора.

Пример.

Из формулы проекций вектора на ось получим:

$$|\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)$$

Сократив на$|\vec{a}|^2\neq 0$, получим соотношение$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Пример. Вычислить орт вектора$\vec{a}=(2;-1;4)$.

Решение

$$\vec{a}^0=\left(\frac{2}{\sqrt{4+1+16}};\ \frac{-1}{\sqrt{4+1+16}};\ \frac{4}{\sqrt{4+1+16}}\right)=\left(\frac{2}{\sqrt{21}};\ \frac{-1}{\sqrt{21}};\ \frac{4}{\sqrt{21}}\right).$$

Действия над векторами

Пусть$\vec{a} = a_x\cdot\vec{\imath} + a_y\cdot\vec{\jmath} + a_z\cdot\vec{k} = (a_x;a_y;a_z)$, $\vec{b} = b_x\cdot\vec{\imath} + b_y\cdot\vec{\jmath} + b_z\cdot\vec{k} = (b_x;b_y;b_z)$.

Линейные операции над векторами

• Сумма, разность векторов

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\cdot\vec{\imath} + \left(a_y \pm b_y\right)\cdot\vec{\jmath} + (a_z \pm b_z)\cdot\vec{k} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y)$$

• Умножение вектора на скаляр

$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\cdot\vec{\imath}+ \lambda a_y\cdot\vec{\jmath}+ \lambda a_z\cdot\vec{k}=(\lambda a_x;\ \lambda a_y;\ \lambda a_z)$

Равенство векторов

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases}$$

Коллинеарность векторов

Выясним условия коллинеарности.$\vec{a}||\vec{b} \Longrightarrow \vec{b}=\lambda\vec{a}$, т.е

$\vec{b} = b_x \cdot\vec{\imath}+b_y\cdot\vec{\jmath}+ \lambda a_z\cdot\vec{k}=\lambda a_x \cdot\vec{\imath}+ \lambda a_y\cdot\vec{\jmath}+ \lambda a_z\cdot\vec{k}$

Отсюда $b_x = a_x\lambda$, $b_v = a_v\lambda$, $b_z = a_z\lambda$, поэтому $\lambda =\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{b_z}$

Критерий коллинеарности векторов.

Проекции коллинеарных векторов пропорциональны.

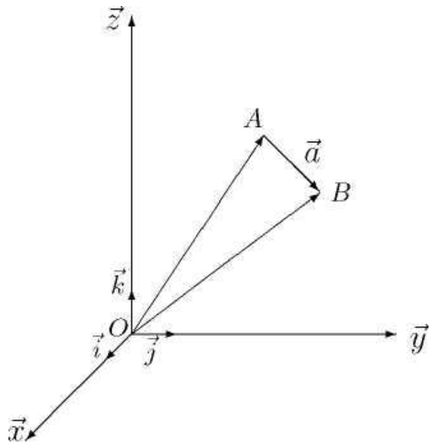

Рис. 10

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2\vec{\imath}+y_2\vec{\jmath}+z_2\vec{k})- (x_1\vec{\imath}+y_1\vec{\jmath}+z_1\vec{k})$ $=(x_2-x_1)\vec{\imath}+(y_2-y_1)\vec{\jmath}+(z_2-z_1)\vec{k}$

Координаты вектора равны разностям соответствующих координат его конца и начала.

$\overrightarrow{AB} =(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$.(рис.10)

Пример. Вычислить, при каком значенииα и βвекторы$\vec{a}=(-1;\alpha;-8)$и $(2;-6;\beta)$будут коллинеарны.

Решение

Векторы $\vec{a}||\vec{b}$, следовательно$\frac{-1}{2} = \frac{\alpha}{-6} = \frac{-8}{\beta}$, вычисляя$\begin{cases} \frac{\alpha}{-6} = \frac{-1}{2}, \\ \frac{-8}{\beta} = \frac{-1}{2}, \end{cases}$находим α=3, β=16.

Деление отрезка в данном отношении

Если отрезок, концами которого служат точки$A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, разделен точкой$C(x_c;\ y_c;\ z_c)$ в отношении $\lambda\neq-1$(где$\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|} =\lambda$), то координаты точки Cопределяются по формулам

$x_c= \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$; $\qquad y_c = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$;

$z_c = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$.

Пример. Даны точки $A(1;\ 0;\ 8)$ и $B(6;\ 9;-12)$. Найти координаты точки C, если отрезок AB разделен ею в отношении $\lambda = \frac{1}{3}$.

Решение

$$x_c = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{1+\frac{1}{3}\cdot}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1+2}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = \frac{9}{4} = 2{,}25;$$

$$y_c = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{0+\frac{1}{3}\cdot 9}{1+\frac{1}{3}} = \frac{0+3}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{4} = 2{,}25;$$

$$z_c = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} = \frac{8+\frac{1}{3}\cdot(-12)}{1+\frac{1}{3}} = \frac{8-4}{\frac{4}{3}} = \frac{4}{\frac{4}{3}} = \frac{12}{4} = 3.$$

Пример. В треугольнике ABC известны координаты вершин $A(-2;\ -1)$, $B(-3;\ 1)$, $C(5;\ 3)$. Найти модуль вектора медианы $\overline{AN}$.

Решение

Эту задачу можно решить несколькими способами.

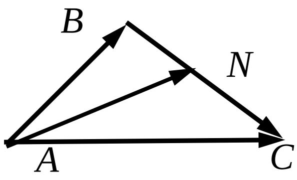

Рис.11

1-ый способ. Так как точка N – середина отрезка BC(рис.11), то, применяя формулу для вычисления координат середины отрезка, имеем

$$x_N = \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{-3+5}{2} = 1 \qquad y_N = \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Таким образом, $N(1;2)$. Найдем координаты $\overline{AN}$ = (1– (–2); 2–(–1))=(3;3). Тогда $\overline{AN} = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

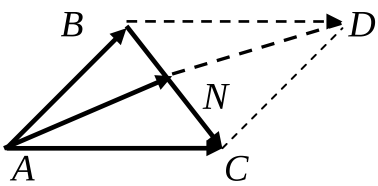

Рис.12

2-ый способ. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}$ = (–3–(–2); 1– (–1)) = (–1; 2)

$\overrightarrow{AC}$ = (5– (–2); 3– (–1)) = (7;4).

Достроим треугольник до параллелограмма (рис.12)и воспользуемся тем, что $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$ = (–1+7;2+4)=(6;6).

Так как$\overline{AD} \uparrow\uparrow \overline{AN}$ и по свойству диагоналей точка N – середина AD, то медиана$\overline{AN}$=$\frac{1}{2}\overline{AD}$=$\frac{1}{2}$(6; 6)=$\left(\frac{6}{2};\frac{6}{2}\right)$=(3;3). Тогда $|\overline{AN}|$=$\sqrt{3^2+3^2}$=$\sqrt{18}$=$3\sqrt{2}$.

Пример.Найти координаты точки T, являющейся точкой пересечения медиан треугольника с вершинами $P(p_1, p_2,p_3)$, $Q(q_1, q_2,q_3)$и $R(r_1, r_2,r_3)$.

Решение

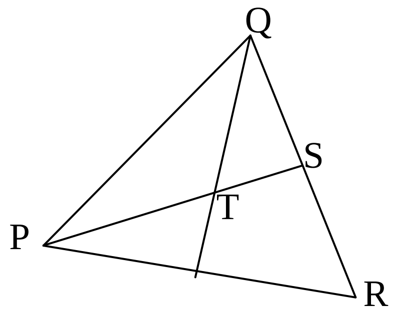

Рис.13

Обозначим через S точку пересечения медианы PT и стороны QR

(рис.13), а через(s_1, s_2,s_3) – координаты этой точки. В силу сказанного выше$s_1 = \frac{q_1+r_1}{2}$, $s_2 =\frac{q_2+r_2}{2}$, $s_3 = \frac{q_3+r_3}{2}$. Известно, что точка пересечения медиан отсекает от медианы$\frac{2}{3}$ ее длины (если считать от вершины треугольника). Это означает, что точкаT делит отрезок PS в отношении 2.

Следовательно,

$t_1 = \frac{p_1+2s_1}{1+2}= \frac{p_1+q_1+r_1}{3}$, $t_2 = \frac{p_2+2s_2}{1+2} = \frac{p_2+q_2+r_2}{3}$, $t_3 = \frac{p_3+2s_3}{1+2} = \frac{p_3+q_3+r_3}{3}$.

Пример.В параллелограмме $ABCD$ известны координаты вершин A(1;2;–1),B(2; –2;1),C(–1;2;2). Найти координаты вершины D, орт вектора $\overrightarrow{BD}$.

Решение

Векторы$\overrightarrow{BC}$=$\overrightarrow{AD}$,так как$\overrightarrow{BC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$, и по свойству параллелограмма $|\overrightarrow{BC}|$=$|\overrightarrow{AD}|$. Тогда эти векторы имеют одинаковые координаты(рис.14).

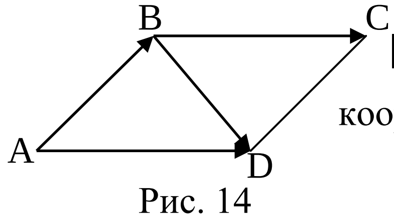

Рис. 14

Имеем$\overrightarrow{AD}$=$\overrightarrow{BC}$=(–1–2;2–(–2);2–1)=(–3;4;1).

Так как точка D является концом вектора $\overrightarrow{AD}$, то для того, чтобы найти её координаты, используем формулу$\overrightarrow{\text{Век}}$=*Кон.–Нач.*, тогда

D=(–3+1;4+2;1+(–1))=(–2;6;0).

Вектор $\overrightarrow{BD}$ имеет координаты$\overrightarrow{BD}$=(–2–2;6–(–2);0–1)=(–4;8; –1), тогда модуль вектора $\overline{BD}$ равен$|\overline{BD}|$=$\sqrt{(-4)^2+8^2+(-1)^2}$=$\sqrt{16+64+1}$=$\sqrt{81}$=9. Из определения следует, что$\overrightarrow{BD^0}$ – орт вектора$\overline{BD}$ будет иметь следующие координаты:

$\overrightarrow{BD^0}$ =$\left(\frac{-4}{9};\frac{8}{9};\frac{-1}{9}\right)$.

Пример.Найти координаты вектора$\vec{x}$= (11, –2, 11) в базисе

$\vec{a}$ = (1, –2, –1). $\vec{b}$ = (3, 0, 5), $\vec{c}$=(0, –2, 2).

Решение

Обозначим координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\overrightarrow{a,}\overrightarrow{b,}\overrightarrow{c}$ через (x_1,x_2,x_3). Этоозначает, что выполнено векторное равенство

$$\vec{x} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c}.$$

Приравнивая последовательно первые, вторые и третьи координаты векторов, стоящих в левой и правой частях этого равенства, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1+3x_2+0x_3=11, \\ -2x_1-0x_2-2x_3=-2, \\ -x_1+5x_2+2x_3=11 \end{cases}$$

Решим эту систему по формуламКрамера. Имеем

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}=28 \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix} 11 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 11 & 5 & 2 \end{vmatrix}=56,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 11 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 11 & 2 \end{vmatrix}=84, \qquad \Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 11 \end{vmatrix}=-28.$$

Следовательно,x_1=$\frac{\Delta_1}{\Delta}$ = 2,x_2=$\frac{\Delta_2}{\Delta}$ = 2,x_3=$\frac{\Delta_3}{\Delta}$ = –1.

Итак, решение является(2;3;–1).

Контрольные вопросы

1. Дайте определение суммы двух векторов (по правилу параллелограмма,треугольника).

2. Дайте определение произведения вектора на числоα.

3. Какой вектор называется противоположным вектором к данному?

4. Дайте определение разности векторов

5. Перечислите свойства линейных операций над векторами.

6. Дайте определения разложения вектора по базису, координат вектора.

7. Дайте определение базиса на плоскости. Дайте определение базиса в трехмерном пространстве.

8. Какие два вектора называются ортогональными?ортонормированными?

9. Что называется координатами вектора$\vec{a}$ в базисе$\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}$?

10. В чем заключается необходимое и достаточное условие коллениарности двух ненулевых векторов?

11. В чем заключается необходимое и достаточное условие компланарности трех ненулевых векторов?

12. Дайте определение декартовой прямоугольной системы координат в пространстве.

13. Что называется радиус-вектором точки Mотносительно декартовой прямоугольной системы координат $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$?

14. Пусть в декартовой прямоугольной системе координат даны точки$A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и$B(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Чему равны координаты вектора$\overrightarrow{AB}$в этой системе координат?

15. Что значит разделить отрезок AB в отношенииλ, где$\lambda \neq -1$?

16. Пусть в декартовой прямоугольной системе координат даны точки$A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и$B(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Чему равны координаты точки$C(x;\ y;\ z)$, делящей отрезок ABв отношении λ?

Тесты для самопроверки

1. Даны точки $A(1; -3)$, $B(-5; 7)$. Тогда точка $C(x; y)$, которая делит отрезок AB пополам, имеет координаты…

а) (3;5); б) (–4;4); в) (–2;2); г) (–6;10).

2. Расстояние между точками $A(1, 2, 3)$ и $B(-5, 5, 1)$ равно…

а) 49; б) –7; в) 7; г) 0.

3. Пусть $(\vec{\boldsymbol{i}},\vec{\boldsymbol{j}},\vec{\boldsymbol{k}})$ – ортонормированный базис трехмерного пространства, на векторах $\overline{\boldsymbol{AB}} = \vec{\boldsymbol{i}}+\vec{\boldsymbol{j}}$ и $\overline{\boldsymbol{AC}} = -3\vec{\boldsymbol{j}}-\vec{\boldsymbol{k}}$ построен треугольник. Тогда длина стороны CB равна…

а) $3\sqrt{2}$; б) 6; в) $\sqrt{6}$; г) $2\sqrt{5}$.

4. Даны векторы $\vec{\boldsymbol{a}} = (1; -4; 0)$, $\vec{\boldsymbol{b}} = (4;3;1)$. Тогда проекция вектора $\vec{\boldsymbol{b}} - \vec{\boldsymbol{a}}$ на ось Ox равна…

а) 4; б) 5; в) 3; г) – 3.

3. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ И ЕГО СВОЙСТВА. ВЫЧИСЛЕНИЕ В КООРДИНАТАХ И ПРИЛОЖЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется *число,* равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)$$

С другой стороны $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cdot\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$.

Свойства скалярного произведения

1. Переместительный закон (коммутативность): $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$.

2. Сочетательный закон: $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$.

3. Распределительный закон:$\vec{a}$ $(\vec{b}+\vec{c})$ $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины:$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$. В частности:$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$.

Скалярное произведение в координатах

$\vec{a} = a_x\cdot\vec{i} + a_y\cdot\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\cdot\vec{i} + b_y\cdot\vec{j} + b_z\vec{k}$.

$\cdot$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k})$ $(b_x\cdot\vec{i}$ + $b_y\cdot\vec{j}$ + $b_z\vec{k})=$ $a_xb_x\cdot\overrightarrow{i^2}+a_xb_y\cdot\vec{i}\vec{j}+a_xb_z\cdot\vec{i}\vec{k}+a_yb_x\cdot\vec{j}\vec{i}$ + $a_yb_y\cdot\overrightarrow{j^2}+a_yb_z\cdot\vec{j}\vec{k}+a_zb_x\cdot\vec{k}\vec{i}++a_zb_y\cdot\vec{k}\vec{j}+a_zb_z\cdot\overrightarrow{k^2}=a_xb_x\cdot1+0+0+0+a_yb_y\cdot1+0+0+0+a_zb_z\cdot1=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

Скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат.

Пример. Вычислить скалярное произведение векторов$\vec{b}$=(2;–1; –5),$\vec{c}$=(3;2;–5).

Решение

$\vec{b}\cdot\vec{c} = 2\cdot3+(-1)\cdot2+(-5)\cdot(-5) = 29$.

Угол между векторами

Угол между векторамиможно найти по формуле:

$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

Пример. Вычислить угол между векторами$\vec{b}$ = (2;–1; –5), $\vec{c}$(3;2;–5).

Решение

$\cos\varphi = \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|}$.

$|\vec{b}| = \sqrt{30}$, $|\vec{c}| =\sqrt{3^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{38}$, $\vec{b}\cdot\vec{c} = 2\cdot3+(-1)\cdot2+(-5)\cdot(-5) = 29$.

Таким образом,$\cos\varphi=\frac{29}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{38}} = \frac{29}{\sqrt{1140}}$.

Пример. Известно, что$|\vec{a}|$=3,$|\vec{b}|$=2, угол между векторамиφ=$\frac{\pi}{3}$. Найти модуль вектора$\vec{p}$ = 2$\vec{a}$+$\vec{b}$.

Решение

Воспользуемся свойствами скалярного произведения для отыскания модуля вектора $\overline{p}$. Имеем

$$|\vec{p}|=|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})}=\sqrt{4\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}}=$$

$$\sqrt{4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\sqrt{4|\vec{a}|^2+4|\vec{a}|\cdot\vec{b}\cdot cos\varphi+|\vec{b}|^2}=$$

$$\sqrt{4\cdot3^2+4\cdot3\cdot2\cdot\frac{1}{2}+2^2}=\sqrt{52}$$

Пример. В треугольнике *ABC* известны координаты вершин*A*(1;2; –5), *B*(–3;4;2),*C*(–1;3;5). Найти угол при вершине *A*.

Решение

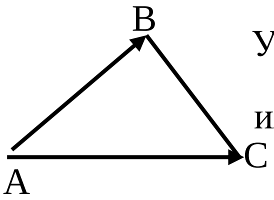

Рис. 15

Угол при вершине A является углом между векторами$\overrightarrow{AB}$ и$\overrightarrow{AC}$.(рис.15)

Найдем координаты и модули этих векторов. Имеем, что

$\overrightarrow{AB}$ = (–3–1; 4–2; 2–(–1)) = (–4; 2; –3)

$\overrightarrow{AC}$ = (–1–1; 3–2; 5–(–1)) = (–2; 2; 6).

Тогда $|\overline{AB}|$=$\sqrt{(-4)^2+2^2+3^2}=\sqrt{29}$и $|\overline{AC}|$=$\sqrt{(-2)^2+1^2+6^2}$=$\sqrt{41}$.

Найдем скалярное произведение$\overline{AB}\cdot\overline{AC}$ по теореме о вычислении скалярного произведения.

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC} = -4\cdot(-2)+2\cdot1+3\cdot6 = 8 + 2 + 18 = 28.$$

Используя формулу для вычисления косинуса угла между векторами, имеем

$$\cos\angle A = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|} = \frac{28}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{41}} = \frac{28}{\sqrt{1189}} \Longrightarrow \angle A = \arccos\left(\frac{28}{\sqrt{1189}}\right) \approx \frac{\pi}{5} = 36°.$$

Определение. Векторы$\vec{a}$ и$\vec{b}$– **ортогональны**, если угол между векторами прямой.

Определение. Векторы $\vec{a}$и $\vec{b}$ – **ортогонормированные**, если угол между векторами прямой и длины векторов единичные.

Теорема.(необходимое и достаточное условие ортогональности векторов $\vec{a}$и$\vec{b}$)Векторы $\vec{a}$и $\vec{b}$ – **ортогональны**,тогда и только тогда,когда их скалярное произведение равно нулю.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение скалярного произведения двух векторов. Как обозначается?

2. Дайте определение проекции точки на ось.

3. Дайте определение проекции вектора на ось.

4. Как выражается скалярное произведение двух векторов с использованием проекции одного вектора на другой?

5. Перечислите основные свойства скалярного произведения.

6. Как выражается скалярное произведение через координаты векторов в декартовой системе координат?

7. Как выражается длина вектора через его координаты в прямоугольной системе координат?

8. Как выражается расстояние между точками$A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и$B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ через их координаты в декартовой прямоугольной системе координат?

9. Чему равен уголφ между ненулевыми векторами $\vec{a}$и $\vec{b}$?

10.Сформулировать необходимое и достаточное условие ортогональности векторов$\vec{a}$и $\vec{b}$?

11.Дайте определение направляющих косинусов вектора.

12.В каком случае векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$,$\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют правую тройку? левую тройку?

Тесты для самопроверки

1. Даны векторы$\vec{a}$=(0;4;3) и$\vec{b}$=(1;–2; 2). Тогда косинус угла между этими векторамиcos($\vec{a}$^$\vec{b}$) равен …

а) 2; б) – 2; в)$\frac{-2}{15}$; г)$\frac{2}{15}$.

2. Проекция вектора$\vec{b}$=(–2;3;4)·на вектор$\vec{a}$=(1;–2;2) равна…

а) 3; б) $\sqrt{29}$; в) – 3; г) 0.

3. Векторы $\vec{a}$= (–1; 4; –3) и $\vec{b}$ =(5; m; 2m) перпендикулярны при m, равном…

а) – 2,5; б) 2,5; в) $-\frac{5}{3}$; г) $\frac{5}{3}$.

4. Пусть($\vec{i}$,$\vec{j}$) – ортонормированный базис плоскости. Тогда косинус угла между векторами$\vec{a}$ = 4$\vec{i}$ + 3$\vec{j}$ и$\vec{b}$ = 3$\vec{j}$ равен…

а)$\frac{13}{5}$; б) $\frac{2}{3}$; в)$\frac{3}{7}$; г)$\frac{3}{5}$.

4.ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА. ВЫЧИСЛЕНИЕ В КООРДИНАТАХ И ПРИЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

В этом вопросе будут изучены две новые по сравнению со школьным курсомоперации над векторами, указанные в названии.

Определение и свойства векторного произведения

Начнем с определения ориентации тройки векторов.

Определение.Упорядоченная тройка некомпланарных векторов ($\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$)называется **правой**,если с конца третьего вектора поворот от первого вектора ко второму выглядит происходящим против часовой стрелки, и **левой**– противном случае.

Пример правой и левой троек векторов ($\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$)

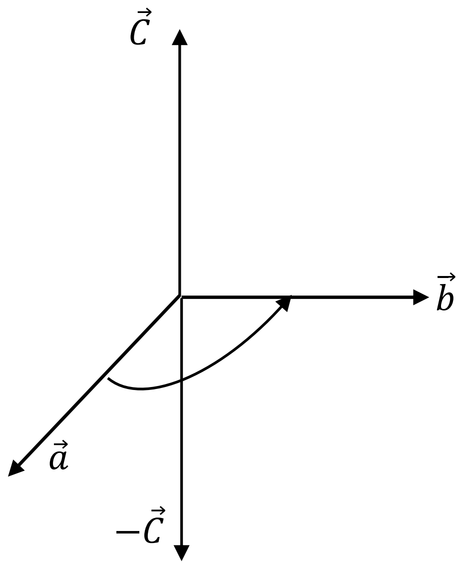

Рис.16

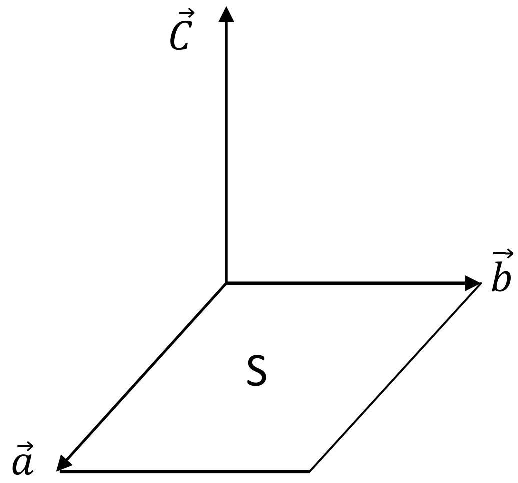

Рис.17

(Правую тройку векторов называют также положительно ориентированной, а левую – отрицательно ориентированной.) (рис.16, рис.17).

Перестановка двух соседних векторов меняет ориентацию тройки, а циклическая перестановка не меняет.

Определение. Векторным произведением неколлинеарных векторов$\vec{a}$ и $\vec{b}$называется вектор$\vec{c}$,такой, что:

1. Вектор $\vec{c}$ ортогонален к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Тройка векторов ($\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$) –правая.

3. $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\vec{a}\wedge\vec{b})$.

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$обозначается через$\vec{a}\times\vec{b}$или $[\vec{a},\vec{b}]$.

Векторное произведение коллинеарных векторов по определению равно нуль-вектору.

Пусть дана декартова система координат в трехмерном пространстве, а (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3)– координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в этой системе.Тогда

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}).$$

Сформулируем основные свойства векторного произведения.

Если $\vec{a}$, $\vec{b}$и $\vec{c}$– произвольные векторы, k– произвольное число, то верны следующие свойства:

Свойство1.Векторное произведение антикоммутативно:$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$.

Свойство2.Скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения$k\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times k\vec{b} = k(\vec{a}\times\vec{b})$,где k -число.

Свойство3. Векторное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов по первому аргументу $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

Свойство4.Векторное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов по второму аргументу$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$

Свойство5.Векторы$\vec{a} \parallel \vec{b}$ тогда и только тогда, когда$\vec{a}\times\vec{b} =\vec{0}$;

Свойство 5 дает еще один критерий коллинеарности векторов.

Свойство 6. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$неколлинеарны, то модуль векторного произведения этих векторов равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах. Свойство 6 часто называют геометрическим смыслом векторного произведения.

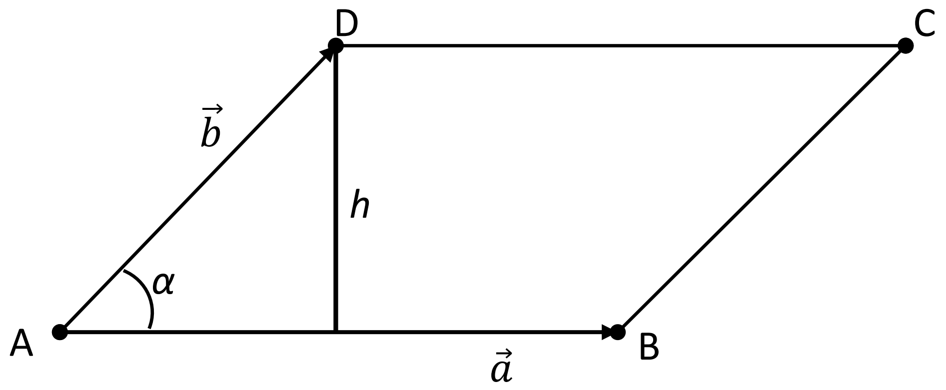

Рис.18

В самом деле, пусть ABCD – параллелограмм, построенный на неколлинеарных векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$как на сторонах (при этом $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\vec{b}=\overrightarrow{AD}$), S – площадь этого параллелограмма, h – длина его высоты, опущенной из точки D, а α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$(рис.18.). Тогда

$$S = |\vec{a}|\cdot h = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\alpha = |\vec{a}\times\vec{b}|.$$

<u>Пример</u>вычисления площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \overrightarrow{AB},\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, где$A(3; 2; -3)$,$B(5; 1; -1)$,$D(1; -2;1)$.

Решение

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{B} = \overrightarrow{AD}$.

$$\vec{a} = \big(5-3; 1-2; -1-(-3)\big) = (2; -1; 2), \vec{b} = (-2; -4; 4).$$

$\vec{a}\times b = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = (4; -12; -10)$

$S = |\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{4^2 + (-12)^2 + (-10)^2} = \sqrt{260}$(ед^2.).

<u>Пример.</u>Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \overrightarrow{2m} + 2\vec{n}$и$\vec{b} = 3\vec{m} - 7\vec{n}$, где $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 2$, векторы$\vec{m}$ и$\vec{n}$ образуют угол$\frac{\pi}{6}$.

Решение

Геометрический смысл модуля векторного произведения – площадь параллелограмма, построенного на векторах$\vec{a}$ и$\vec{b}$.

Выразим векторное произведение $\vec{a}$ и $\vec{b}$через произведение $\vec{m}$ и$\vec{n}$:

$$(3\vec{m}-7\vec{n})\times(2\vec{m}+2\vec{n}) = 6\vec{m}\times\vec{n} - 14\vec{n}\times\vec{m} \qquad 20\vec{m}\times\vec{n}$$

Вычислим модуль векторного произведения:

$S=20|\vec{m}\times\vec{n}| = 20\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 40(\text{ед}^2.)$.

Пример. Даны векторы $\vec{a}$ = (1, 2, –1), $\vec{b}$ = (1, 1, 2) и $\vec{c}$= (1, –1, 0). Найти вектор $\vec{d}$ длины $\sqrt{2}$, ортогональный вектору $\vec{a}$, компланарный векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и образующий острый угол с положительным направлением оси *Oz*.

Решение

Обозначим координаты вектора $\vec{d}$ через (x_1, x_2, x_3). Из условий $|\vec{d}| = \sqrt{2}$ и $\vec{d}\perp\vec{a}$ вытекают равенства $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2$ и $x_1+2x_2-x_3=0$ соответственно, а из компланарности векторов $\vec{d}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ – равенство $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

Раскрывая определитель из левой части последнего равенства по первой строке, получаем систему уравнений $\begin{cases} x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 2\ , \\ x_1+2x_2-x_3 = 0\ , \\ 2x_1+2x_x-2x_3 = 0. \end{cases}$

Вычитая из третьего уравнения второе, получаем $x_1-x_3=0$, т.е. $x_1=x_3$. Из второго уравнения вытекает теперь, что $x_2=0$. Учитывая первое уравнение, получаем, что $x_1=\pm 1$. Итак, наша система имеет два решения: $\vec{d}_1$=(1;0;1) и $\vec{d}_2$= (– 1; 0; –1). До сих пор мы не использовали условие о том, что вектор $\vec{d}$ образует острый угол с положительным направлением оси *Oz*. Это означает, что если *z* – произвольный вектор, направление которого совпадает с положительным направлением оси *Oz*, то угол $(\vec{d}\hat{}\vec{z})$ – острый, т.е. $\vec{d}\vec{z} > 0$. Ясно, что в качестве $\vec{z}$ можно взять вектор $\vec{z}_0$= (0;0;1). Поскольку $\vec{d}_1\vec{z}_0 = 1$, а $\vec{d}_2\vec{z}_0 = -1$, получаем, что $\vec{d}$= (1;0; 1).

Итак, $\vec{d}$= (1; 0; 1).

Механический смысл векторного произведения

Момент силы $\vec{F}$, приложенной к точке A относительно точки O, равен векторному произведению $\vec{O}A$ на $\vec{F}$. (рис.19)

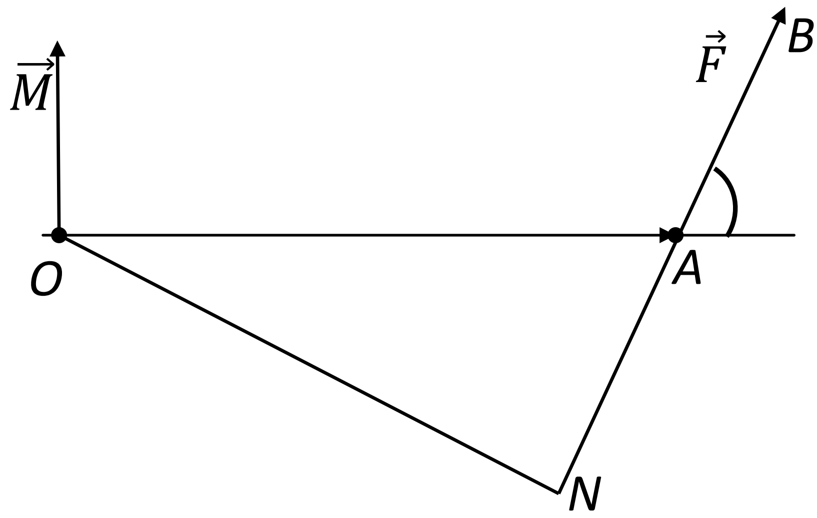

Рис.19

Пример. Найти направляющие косинусы вектора силы $\vec{\boldsymbol{f}}$= (–7; 7; 7). Определить момент $\vec{\boldsymbol{m}}$ силы $\vec{\boldsymbol{f}}$, приложенной в точке B(9; –7; 3) относительно точки A(2; –5; –3).

Решение

Найдем длину вектора силы $|\vec{\boldsymbol{f}}|=\sqrt{(-7)^2+7^2+7^2}=7\sqrt{3}$. Поскольку направляющие косинусы вектора силы $\vec{\boldsymbol{f}}$ равны отношению соответствующих координат вектора к его длине, то

$\cos\alpha = \frac{-7}{7\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\beta = \frac{7}{7\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\gamma = \frac{7}{7\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$\overrightarrow{AB}$ = (9–2; –7–(–5); 3–(–3)) = (7; –2; 6).

Момент $\vec{\boldsymbol{m}}$ силы $\vec{\boldsymbol{f}}$ относительно точки A(2; –5; –3) равен векторному произведению векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{\boldsymbol{f}}$.

Имеем $\overrightarrow{AB} \times \vec{\boldsymbol{f}}=\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 7 & 7 \end{vmatrix}\vec{\boldsymbol{i}}-\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ -7 & 7 \end{vmatrix}\vec{\boldsymbol{j}}+\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -7 & 7 \end{vmatrix}\vec{\boldsymbol{k}}= -56\cdot\vec{\boldsymbol{i}} - 91\cdot\vec{\boldsymbol{j}} + 35\cdot\vec{\boldsymbol{k}}$.

Вычисление площади треугольника

Пример вычисления площади треугольника, построенного на векторах $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, где A(3; 2; –3), B(5; 1; –1), D(1; –2; 1).

Решение

$$\vec{a}\times b=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = (4; -12; -10).$$

$S=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{4^2+(-12)^2+(-10)^2}=\sqrt{260}$(ед^2.).

В данном случае при вычислении площади треугольника площадь параллелограмма делим на два:$S_\Delta = \frac{\sqrt{260}}{2}$(ед^2.).

__Пример__. Векторы$\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол$\varphi = \frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}|$, найти модуль векторного произведения$\vec{p}\times\vec{q}$, где$\vec{p} = \vec{a}-2\vec{b}$и$\vec{q} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

Решение

Выразим$\vec{p}\times\vec{q}$ через векторы$\vec{a}$ и$\vec{b}$, применяя свойства векторного произведения:$\vec{p}\times\vec{q} = (\vec{a}-2\vec{b})\times(2\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}-4\vec{b}\times\vec{a}-2\vec{b}\times\vec{b}$.

Так как$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$, и$\vec{a}\times\vec{b}= -\vec{b}\times\vec{a}$, то получим, что

$\vec{p}\times\vec{q}=(\vec{a}-2\vec{b})\times(2\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}-4\vec{b}\times\vec{a}-2\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}+5\vec{a}\times\vec{b}-\vec{0}=5\vec{a}\times\vec{b}$

Тогда$|\vec{p}\times\vec{q}|=5|\vec{a}\times\vec{b}|$, а из определения векторного произведения следует, что $|\vec{p}\times\vec{q}|=5|\vec{a}\times\vec{b}|=5|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\frac{\pi}{6} = 5\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{2} = 15$.

__Пример.__ Найти площадь треугольника, построенного на векторах

$\vec{p}=3\vec{a}-\vec{b}$и $\vec{q}=\vec{a}+2\vec{b}$ и, где$\vec{a}=(1; 0; 1)$,$\vec{b}=(2; -1;2)$.

Решение

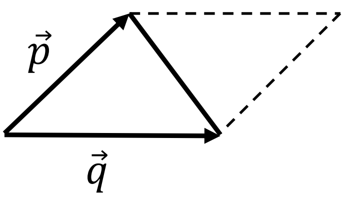

Рис.20

Найдем координаты векторов$\vec{p}$и$\vec{q}$.

$\vec{p}=3\vec{a}-\vec{b}=(3-2; 0+1; 3-2)=(1; 1; 1)$,

$\vec{q}=\vec{a}+2\vec{b}=(1+2; 0-2; 1+4)=(3; -2; 5)$.

Для вычисления площади треугольника используем формул

$$S_\Delta= \frac{1}{2}S_\lozenge= \frac{1}{2}|\vec{p}\times\vec{q}|.$$

Найдем представление векторного произведения$\vec{p}\times\vec{q}=\vec{c}$ в декартовом базисе, используя теорему.

$$\vec{c}=\vec{p}\times\vec{q}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 5\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 5\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=$$

$$(5+2)\cdot\vec{i}-(5-3)\cdot\vec{j}+(-2-3)\cdot\vec{k}=7\vec{i}-2\vec{j}-5\vec{k}.$$

Тогда$\vec{c}$ = (7; –2; –5) $\Rightarrow|\vec{c}|=\sqrt{7^2+(-2)^2+(-5)^2}=\sqrt{78}\Rightarrow$

Учитывая, что площадь треугольника вдвое меньше площади паралеллограмма, построенного на векторах, как на сторонах (рис.20.)

$\Rightarrow S_{\Delta}=\frac{1}{2}\sqrt{78}$(ед^2.).

Контрольные вопросы

1. Дайте определение векторного произведения двух векторов. Как обозначается?

2. Каков геометрический смысл модуля векторного произведения двух неколлинеарных векторов?

3. Перечислите основные свойства векторного произведения.

4. Сформулировать необходимое и достаточное условие (критерий) коллинеарности векторов$\vec{a}$ и $\vec{b}$?

5. Запишите формулу, по которой вычисляется векторное произведение векторов, заданных покоординатно.

6. Каков механический смысл векторного произведения двух неколлинеарных векторов?

5.СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ, ЕГО СВОЙСТВА И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

В отличие от предыдущих операций смешанное произведение имеет три аргумента.

Определение. Смешанным произведениемвекторов$\vec{a}$,$\vec{b}$, $\vec{c}$, называется число, равное скалярному произведению векторного произведения векторов$\vec{a}$ и $\vec{b}$ на вектор$\vec{c}$.Смешанное произведение векторов$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ обозначается через$\vec{a}\vec{b}\vec{c}$или $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Укажем ряд свойств смешанного произведения, из которых первое, наиболее важное, назовем теоремой.

<u>Теорема1.(</u>Критерием компланарности векторов)

Смешанное произведение векторов$\vec{a}$, $\vec{b}$и $\vec{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.

<u>Теорема 2.(</u>Геометрическим смысл смешанного произведения)

Смешанное произведение некомпланарных векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком плюс, если тройка ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$)правая, и со знаком минус, если эта тройка левая.

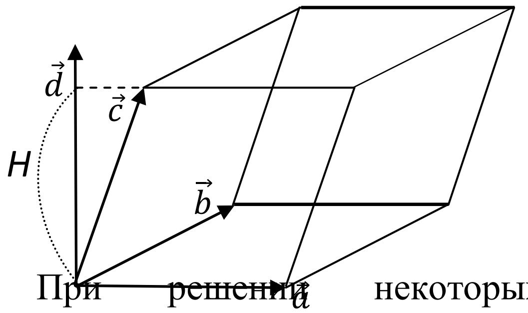

Рис.21

При решении некоторых задачбывает удобна следующая формулировка:объем параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах (рис.21), равен модулю их смешанного произведения.

Отметим, что из теоремы 1 данной главы вытекает следующий факт:тройка векторов является правой (левой) тогда и только тогда, когда их смешанное произведение больше нуля (соответственно меньше нуля).

При решении некоторых задач бывает полезно следующее наблюдение, вытекающее из первого утверждения теоремы: если два из трех векторов коллинеарны (в частности, равны), то их смешанное произведение равно нулю.Упорядоченные тройки ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$)и ($\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$) имеют одну и ту же ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед.

Следовательно, смешанные произведения$\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и$\vec{b}\vec{c}\vec{a}$ либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком минус, и потому

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$.

Вычисление смешанного произведения в координатах

Пусть векторы$\vec{i}$,$\vec{j}$, $\vec{k}$,- орты декартовой системы координат в трехмерном пространстве, (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3) – координаты векторов$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.Найти их смешанное произведение:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Пример. Являются ли компланарными векторы (1; –1; 2), (–5; 3; 2), (2; –2; –2)?

Решение

Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю смешанного произведения этих векторов.

Поскольку, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ = – 6 – 4 + 20 – 12 + 4 + 10 = 12, то данные векторы не компланарны.

Пример. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – некомпланарные вектора. Упростить выражение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot(3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$

Решение

Используя свойства смешанного произведения, имеем

$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot(3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}) = \vec{a}\vec{b}(3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})=3\vec{a}\vec{b}\vec{a}+2\vec{a}\vec{b}\vec{b}-\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0+0-\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Пример. Пусть $\vec{a}$=(1;–1; 2), $\vec{b}$=(–2;0;3), $\vec{c}$=(–1;1; –3). Найти смешанное произведение $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})\cdot\vec{c}$.

Решение

Используя свойства смешанного произведения, упростим выражение

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})\vec{c}= \vec{a}\vec{a}\vec{c} + 2\vec{a}\vec{b}\vec{c} - 3\vec{a}\vec{c}\vec{c} + \vec{b}\vec{a}\vec{c} + 2\vec{b}\vec{b}\vec{c} - 3\vec{b}\vec{c}\vec{c} =$

$= \vec{0} + 2\vec{a}\vec{b}\vec{c} - \vec{0} + \vec{b}\vec{a}\vec{c} + \vec{0} - \vec{0} = 2\vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{b}\vec{a}\vec{c} = 2\vec{a}\vec{b}\vec{c} - \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Тогда по теореме о вычислении смешанного произведения получаем, что

$$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})\vec{c}=\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2.$$

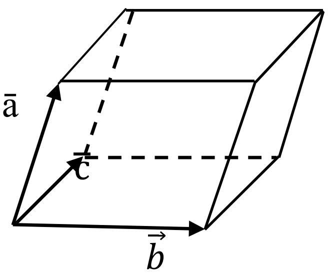

Рис.22

Модуль смешанного произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ трех некомпланарных векторов $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.(рис.22)

$$V_{пар}=|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = 2ед^3.$$

Пример. Найти объем тетраэдра $ABCD$ с вершинами A(2; –1;1), B(1; 1; 0), C(–1;3; 2), D(3; –2; –1).

Решение

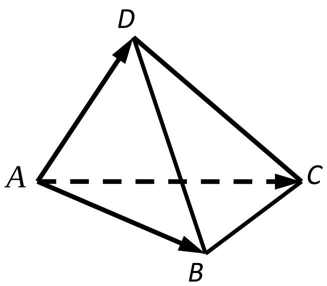

Рис.23

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AB}$ = (–1; 2; –1), $\overrightarrow{AC}$ = (–3; 4; 1), $\overrightarrow{AD}$ = (1; –1; –2).

Из школьного курса известно, что $V_{ABCD}=\frac{1}{2}V_{пар}$.(рис.23).Тогда, используя геометрическое истолкование смешанного произведения и теорему о вычислении смешанного произведения, имеем

$$V_{ABCD}=\frac{1}{2}V_{пар}\cdot\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}-1 & 2 & -1\\ -3 & 4 & 1\\ 1 & -1 & -2\end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|-2|=\frac{1}{3}.$$

<u>Пример.</u>Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках A(0; 0 ;1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2). Найти длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*.

Решение

Рассмотрим следующие векторы:

$\overrightarrow{AB}$ = (2–0; 3–0; 5–1) = (2; 3; 4), $\overrightarrow{AC}$ = (6–0; 2–0; 3–1) = (6; 2; 2),

$\overrightarrow{AD}$ = (3–0; 7–0; 2–1) = (3; 7; 1).

Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$и$\overrightarrow{AD}$, равен$\frac{1}{6}$ от смешанного произведения этих векторов:$V=\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}|$.

Вычислим смешанное произведение

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 6 & 2 & 2\\ 3 & 7 & 1\end{vmatrix} = 4 + 18 + 168 - 24 - 28 - 18 = 120.$$

Тогда,$V=\frac{1}{6}\cdot120 = 20$(ед.^{3}).

Найдем длину высоты, опущенной из вершины *D*. Имеем$V=20$ед^3., с другой стороны$V=\frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot H$. Отсюда$H =\frac{3V}{S_{ABC}}$.

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 2\end{vmatrix}; -\begin{vmatrix}2 & 4\\ 6 & 2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & 2\end{vmatrix}\right) = (-2; +20; -14).$

$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 20^2 + (-14)^2} = \sqrt{600} = 10\sqrt{6}$и $S_{ABC} = 5\sqrt{6}$(ед^2.).

Следовательно,$H = \frac{3\cdot20}{5\sqrt{6}}=\frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$(ед.).

Контрольные вопросы

1.Дайте определение смешанного произведения трех векторов. Как обозначается?

2.Каков геометрический смысл модуля смешанного произведения трех некомпланарных векторов?

3.Сформулировать необходимое и достаточное условие (критерий) компланарности трех векторов?

4.Запишите формулу, по которой вычисляется смешанное произведение векторов,заданных покоординатно.

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

№1. Даны векторы $\vec{a}$ = (2; 3), $\vec{b}$ = (–1; 1), $\vec{c}$ = (–3; –1). Начертить вектор $2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$. Определить его координаты.

№2. Даны точки $A(2;4)$, $B(5;8)$. Найти вектор $\overrightarrow{AB}$ и $|\overrightarrow{AB}|$.

№3. Вектор $\vec{a}$ образует с координатными осями углы α = 45°, β=60°, γ=120° и $|\vec{a}|$ =4. Найти проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси.

№4. Используя основное свойство направляющих косинусов, проверить: может ли вектор составлять с координатными осями следующие углы:

а) α = 45°, β=60°, γ=60°;

б) α = 45°, β=135°, γ=60°;

в) α = 90°, β=150°, γ=60°.

№5. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ = (3; 4; 12).

№6. Известны координаты векторов $\vec{a}$ = (3; –2; 6) и $\vec{b}$ = (–2; 1; 0). Найти координаты следующих векторов:

а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$; в) $\vec{a}+2\vec{b}$; г) $2\vec{a}-3\vec{b}$.

№7. При каких значениях k и m векторы $\vec{a}$ = (2; m; –3) и $\vec{b}$ = (–4; 8; k) будут коллинеарны?

№8. Найти орт вектора $\vec{a}$ = (6; –2; –3).

№9. Для векторов $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{k}$ найти:

а) проекцию вектора $4\vec{a}-3\vec{b}$ на ось Oz;

б) проекции вектора $2\vec{a}-\vec{b}$ на координатные оси.

№10. Даны точки $A(4; -1)$ и $B(2;-1)$. Определить координаты точки M, симметричной точке A относительно точки B.

№11. Определить середины сторон треугольника с вершинами в точках $A(1; -3)$, $B(3; -5)$ и $C(-5; 7)$.

№12. Точки (2; –1), (– 1; 0) (–2; 2) являются серединами сторон треугольника. Определить его вершины.

№13. Даны три вершины параллелограмма$A(3; -5)$, $B(5; -3)$ и $C(-1; 3)$. Определить четвертую вершину D, противоположную вершине B.

№14. Определить координаты концов отрезка, который точками (2;2) и (1;5) разделен на три равные части.

№15.Отрезок, ограниченный точками$A(-1;8;3)$ и 5(9; –7; –2), разделен точками C, D, E, F на пять равных частей. Найти координаты этих точек.

№16. Векторы$\vec{a}$ и$\vec{b}$ образуют угол$\frac{2\pi}{3}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Вычислить:

а)$\vec{a}\vec{b}$;   б)$\vec{a}\vec{a}$; в) $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$;

г) $(3\vec{a} + 2\vec{b})(4\vec{a}-5\vec{b})$ д) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\mathrm{b})$.

№17.Дано, что$|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Определить, при каком значении параметра $к$ векторы $\vec{a} + k\vec{b}$, и $\vec{a} - k\vec{b}$будут ортогональны.

№18.Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$образуют угол$\frac{\pi}{4}$, $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$.Найти угол между векторами$\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$и$\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

№19.Даны векторы $\vec{a} = (4; -2; -4)$ и $\vec{b} = (6; -3; 2)$. Вычислить:

а) $\vec{a}\vec{b}$;   б)$\sqrt{\vec{a}\vec{a}}$;   в)$\sqrt{\vec{b}\vec{b}}$;

г) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$;   д) $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$.

№20.Векторы$\vec{a}$и$\vec{b}$ ортогональны, вектор$\vec{c}$ образует с ними углы, равные$\frac{\pi}{3}$. Зная, что$|a| = 3$, $|\vec{b}|= 5$, $|\vec{c}| = 8$вычислить:

а) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{b} + 3\vec{c})$; б) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} + \vec{b}+ \vec{c})$;

в) $(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})$.

№21. Даны вершины треугольника$A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$ и $C(3; -2; 1)$. Определить его внутренний угол при вершине B.

№22. Даны векторы $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (1; -2; 3)$, $\vec{c} = (2; -1; 1)$. Найти вектор $\vec{x}$, ортогональный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$,такой, что$\vec{x}\vec{c} = -14$.

№23.Для векторов$\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$,$\vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j}$,$\vec{c} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ найти $\text{Пр}_{\vec{c}}\,(3\vec{a} + 2\vec{b})$.

№24. Для векторов $\vec{a}$ = (1; 2; 5) и $\vec{b}$ = (2; –4; 6) найти

а)$(2\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} - 3\vec{b})$;

б) $|3\vec{a} - \vec{b}|$;

в) угол между векторами$\vec{p} = (3\vec{b} - \vec{a})$ и$\vec{q} = (\vec{a} + 2\vec{b})$;

г)$\text{Пр}_{(3\vec{a}-\vec{b})}(\vec{a} + 2\vec{b})$.

№25.Указать вид тройки (левую или правую) образуют векторы:

а)$\vec{a}$ = (2; 8; –5), $\vec{b}$ = (1; 9; 0), $\vec{c}$ = (0; –5; 5);

б)$\vec{a}$ = (7; 1; 3), $\vec{b}$ = (2; 1; 1), $\vec{c}$ = (3; –1; 1);

в)$\vec{a}$ = (1; 3; –2), $\vec{b}$ = (0; 1; –2), $\vec{c}$ = (3; –13; 4);

№26.Дано: $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ и$\vec{a}\vec{b} = 12$. Вычислить $|\vec{a}\times\vec{b}|$.

№27. Дано: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$ и$|\vec{a}\times\vec{b}| = 72$. Вычислить$\vec{a}\vec{b}$.

№28. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Вычислить:

а)$\left|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})\right|$;   б)$\left|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})\right|$.

№29. Даны векторы $\vec{a}$ = (3; – 1; – 2), $\vec{b}$= (1; 2; – 1). Вычислить:

а)$|\vec{a}\times\vec{b}|$;   б) $(2\vec{a} - 3\vec{b})\times(\vec{a} + 2\vec{b})$.

№30.Вектор $\vec{x}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ = (3; 2; 2) и $\vec{b}$ = (18; – 22; – 5) , образует с осью Oy тупой угол. Найти координаты вектора $\vec{x}$, зная, что

$|\vec{x}| = 14$.

№31. Даны точкиA(1; 2; 0), B(3; 0; –3), C(5; 2; 6). Вычислить площадь треугольника ABC.

№32. Даны вершины треугольникаA(1;– 1; 2), B(5; –6; 2) и C(l; 3;–1). Вычислить длину высоты, опущенной из точкиB на сторону AC.

№33.Вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между$\vec{a}$ и $\vec{b}$равен 30°.Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$,вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

№34. Даны векторы $\vec{a}$ = (1; – 1; 3), $\vec{b}$ = (– 2; 2;1), $\vec{c}$ = (3; –2; 5).Вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

№35.Проверить, будут ли следующие векторы компланарными:

а)$\vec{a}$ = (2; 3; –1), $\vec{b}$ = (1; –1; 3), $\vec{c}$ = (1; 9; –11);

б) $\vec{a}$ = (3; –2; 1), $\vec{b}$ = (2; 1; 2), $\vec{c}$ = (3; –1; –2);

в) $\vec{a}$ = (2; –1; 2), $\vec{b}$ = (1; 2; –3), $\vec{c}$ = (3; –4; 7);

№36.При каком значении α векторы$\vec{a} = \alpha\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$,$\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$будут компланарны?

№37.Найти объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках A(2; – 1; 1), B(5; 5;4), C(3;2;–1) и D(4; 1;3).

№38.Даны вершины тетраэдраA(2; 3; 1), B(4; 1; –2), C(6; 3; 7) и D(– 5; –4; 8). Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

Ответы к задачам для аудиторных занятий

1.(4; 10). **2**. (3; 4); 5. **3.**$\vec{a}$ = ($2\sqrt{2}$; 2; –2).**4.а)** Может; **4.б)** Не может; **4.в)** Может. **5.**cosα = $\frac{3}{13}$,cosβ = $\frac{4}{13}$,cosγ = $\frac{12}{13}$. **6.а)**(1; –1; 6);**6.б)**(1; –3; 6);**6.в)**(–1; 0; 6); **6.г)**(12; –7; 12). **7.**k =6, m =–4. **8.**$\left(\frac{6}{7};\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right)$.

9.а) 14;**9.б)** $2\vec{a}$–$\vec{b}$ = (7; –6; 8). **10**. (3; –1). **11**. (–2; 2); (2; –4); (–1; 1).

12. (1; 0); (–5; 4); (3; –2). **13**. (2; 6). **14.**(3;–1),(0;8).

15.C(1; 5; 2), D(3; 2; 1), E(5; –1; 0), F(7; –4; –1). **16.а)**−6; **16.б)** 9; **16.в)** 37; **16.г)** 38;**16.д)**–61. **17.**$\pm$0,6. **18.**$arccos\frac{2}{\sqrt{10}}$. **19.а)** 22; **19.б)** 6; **19.в)** 7; **19.г)** 129; **19.д)** 52. **20.а)**–62; **20.б)** 162; **20.в)**373. **21.**$\frac{\pi}{4}$;

22.(–7; 7; 7).**23.**–11. **24.а)**– 228;**24.б)**$\sqrt{182}$; **24.в)**$\frac{98}{\sqrt{350}\cdot\sqrt{182}}$;**24.г)**$\frac{98}{\sqrt{182}}$.

25.а) правую; **25.б)** правую; **25.в)** левую. **26.**$\frac{2}{\sqrt{7}}$. **27.** 16.**28.а)** 24;**28.б)** 84. **29. а)**(5; 1; 7); **29. б)** (35; 7; 49). **30.** (–4; –6; 12).

31. 14. **32.** 5. **33.** 27. **34.**–7.**35.а)** да; **35.б)** нет; **35.в)** да.

36.α = –1. **37.**3. **38**. 11.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Вариант 1

1. Найти длины векторов $\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{p}-\vec{q}$, если $|\vec{p}|=7$, $|\vec{q}|=2$, а угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{\pi}{3}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=5\vec{p}+7\vec{q}$, $\vec{p}=(3;\ 7;\ 0)$, $\vec{q}=(6;\ 4;\ -1)$?

3. Даны координаты точек $A(-2;\ 1;\ 1)$, $B(2;\ 3;\ -2)$, $C(0;\ 0;\ 3)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$.

4. Даны координаты точек $A(-2;\ 1;\ 1)$, $B(2;\ 3;\ -2)$, $C(0;\ 0;\ 3)$. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

5. Даны координаты точек $A(-2;\ 1;\ 1)$, $B(2;\ 3;\ -2)$, $C(0;\ 0;\ 3)$. Найти вектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору $\overrightarrow{AB}$, причем $\vec{a}\cdot\overrightarrow{CB} = 1$.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{a}=(2;\ 1;\ 2)$, $\vec{b}=(4;\ 2;\ 2)$, $\vec{c}=(-3;\ -3;\ -3)$?

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$, $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=1$, а угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{\pi}{3}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(1;\ -1;\ 2)$, $C(0;\ 1;\ -1)$, $D(-3;\ 0;\ 1)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Вариант 2

1. Найти длины векторов $\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{p}-\vec{q}$, если $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=4$, а угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{\pi}{4}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=4\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=-\vec{p}+4\vec{q}$, $\vec{p}=(7;\ 9;\ -2)$, $\vec{q}=(5;\ 4;\ 3)$?

3. Даны точки $A(3;\ -2;\ 1)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(-1;\ -2;\ 4)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$.

4. Даны точки $A(3;\ -2;\ 1)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(-1;\ -2;\ 4)$. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

5.Даны точки$A(3; –2; 1)$, $B(–4; –2; 0)$, $C(–1; –2; 4)$. Найти вектор $\vec{\boldsymbol{a}}$, коллинеарный вектору$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, скалярное произведение которого на вектор$\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$равно 14.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{\boldsymbol{a}}$=(4; –1; –6),$\vec{\boldsymbol{b}}$=(1; –3; –7), $\vec{\boldsymbol{c}}$=(2; –1; –4)?

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{\boldsymbol{a}}$ и$\vec{\boldsymbol{b}}$, если $\vec{\boldsymbol{a}}=2\vec{\boldsymbol{p}}+3\vec{\boldsymbol{q}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}=\vec{\boldsymbol{p}}-2\vec{\boldsymbol{q}}$, $|\vec{\boldsymbol{p}}|=2$, $|\vec{\boldsymbol{q}}|=1$, а угол между$\vec{\boldsymbol{p}}$ и $\vec{\boldsymbol{q}}$ равен$\frac{\pi}{3}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках

A(–3; –5; 6), B(2; 1; –4), C(0; –3; –1), D(–5; 2; –8). Найти длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*.

Вариант 3

1. Найти длины векторов $\vec{\boldsymbol{p}}+\vec{\boldsymbol{q}}$ и$\vec{\boldsymbol{p}}-\vec{\boldsymbol{q}}$, если $|\vec{\boldsymbol{p}}|=5$, $|\vec{\boldsymbol{q}}|=4$, а угол между$\vec{\boldsymbol{p}}$ и$\vec{\boldsymbol{q}}$равен $\frac{\pi}{6}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{\boldsymbol{a}}$ и $\vec{\boldsymbol{b}}$, если $\vec{\boldsymbol{a}}=-4\vec{\boldsymbol{p}}+\mathbf{3}\vec{\boldsymbol{q}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}=8\vec{\boldsymbol{p}}-6\vec{\boldsymbol{q}}$, $\vec{\boldsymbol{p}}=(5; 0; -2)$, $\vec{\boldsymbol{q}}=(6; 4; 3)$?

3. Даны точки$A(5; 2; 0)$, $B(5; 3; –1)$, $C(6; 4; –1)$.Найти проекцию вектора$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$на вектор$\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$.

4.Даны точки$A(5; 2; 0)$, $B(5; 3; –1)$, $C(6; 4; –1)$. Найти косинус угла между векторами$\overrightarrow{\boldsymbol{CA}}$и$\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$.

5.Даны точки $A(5; 2; 0)$, $B(5; 3; –1)$, $C(6; 4; –1)$.Найтивектор $\vec{\boldsymbol{a}}$, коллинеарный вектору$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, скалярное произведение которого на вектор$\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$ равно 25.

6.Являются ли компланарными векторы $\vec{\boldsymbol{a}}$=(3; 4; 2),$\vec{\boldsymbol{b}}$=(1; 1; 0), $\vec{\boldsymbol{c}}$=(8; 11; 6).

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{\boldsymbol{a}}$ и$\vec{\boldsymbol{b}}$, если $\vec{\boldsymbol{a}}=2\vec{\boldsymbol{p}}-\vec{\boldsymbol{q}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}=\vec{\boldsymbol{p}}+3\vec{\boldsymbol{q}}$, $|\vec{\boldsymbol{p}}|=3$, $|\vec{\boldsymbol{q}}|=2$, а угол между$\vec{\boldsymbol{p}}$ и $\vec{\boldsymbol{q}}$ равен$\frac{\pi}{2}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках

A(4; –1; 3), B(4; –1; 3), C(0; –5; 1), D(3; 2; –6). Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Вариант 4

1. Найти длины векторов $\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{p}-\vec{q}$, если $|\vec{p}|=10$, $|\vec{q}|=3$, а угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{2\pi}{3}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=2\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=-4\vec{p}-6\vec{q}$, $\vec{p}=(8;3;-1)$, $\vec{q}=(4; 1; 3)$?

3. Даны точки $A(0; -1; -2)$, $B(-3; -7; -5)$, $C(2; 3; 0)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$.

4. Даны точки $A(0; -1; -2)$, $B(-3; -7; -5)$, $C(2; 3; 0)$. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

5. Даны точки $A(0; -1; -2)$, $B(-3; -7; -5)$, $C(2; 3; 0)$. Найти вектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору $\overrightarrow{AB}$, скалярное произведение которого на вектор $\overrightarrow{CB}$ равно 27.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{a}=(5; 3; 4)$, $\vec{b}=(4; 3; 3)$, $\vec{c}=(9; 5; 8)$.

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$, $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=1$, а угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{\pi}{4}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(1; -1; 1)$, $B(-2; 0; 3)$, $C(2; 1; -1)$, $D(2; -2; -4)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Вариант 5

1. Найти длины векторов $\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{p}-\vec{q}$, если $|\vec{p}|=7$, $|\vec{q}|=3$, а угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{\pi}{6}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=4\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=-2\vec{p}+6\vec{q}$, $\vec{p}=(3; -1; 6)$, $\vec{q}=(5; 7; 10)$?

3. Даны точки$A(2; –4; 6)$, $B(0; –2; 4)$, $C(6; –8; 10)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$на вектор$\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$.

4.Даны точки$A(2; –4; 6)$, $B(0; –2; 4)$, $C(6; –8; 10)$.Найтикосинус угла между векторами$\overrightarrow{\boldsymbol{CA}}$ и$\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$.

5.Даны точки$A(2; –4; 6)$, $B(0; –2; 4)$, $C(6; –8; 10)$.Найти вектор $\vec{\boldsymbol{a}}$, коллинеарный вектору$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, скалярное произведение которого на вектор$\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$ равно 2.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{\boldsymbol{a}}=(4; 1; 2)$,$\vec{\boldsymbol{b}}=(9; 2; 5)$,

$\vec{\boldsymbol{c}}=(1; 1; –1)$.

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{\boldsymbol{a}}$ и$\vec{\boldsymbol{b}}$, если $\vec{\boldsymbol{a}}=4\vec{\boldsymbol{p}}+\vec{\boldsymbol{q}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}=\vec{\boldsymbol{p}}-\vec{\boldsymbol{q}}$, $|\vec{\boldsymbol{p}}|=7$, $|\vec{\boldsymbol{q}}|=2$, а угол между$\vec{\boldsymbol{p}}$ и $\vec{\boldsymbol{q}}$равен$\frac{\pi}{4}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(2; –1; 2)$, $B(1; 2; –1)$, $C(3; 2; 1)$, $D(–4; 2; 5)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Вариант 6

1. Найти длины векторов $\vec{\boldsymbol{p}}+\vec{\boldsymbol{q}}$ и$\vec{\boldsymbol{p}}-\vec{\boldsymbol{q}}$, если $|\vec{\boldsymbol{p}}|=2$, $|\vec{\boldsymbol{q}}|=4$, а угол между$\vec{\boldsymbol{p}}$ и$\vec{\boldsymbol{q}}$равен$\frac{\pi}{6}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{\boldsymbol{a}}$ и $\vec{\boldsymbol{b}}$, если $\vec{\boldsymbol{a}}=6\vec{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{3}\vec{\boldsymbol{q}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}=–2\vec{\boldsymbol{p}}+6\vec{\boldsymbol{q}}$, $\vec{\boldsymbol{p}}=(1; -2; 4)$, $\vec{\boldsymbol{q}}=(7; 3; 5)$?

3. Даны точки$A(0; 1; –2)$, $B(3; 1; 2)$, $C(4; 1; 1)$. Найти проекцию вектора$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ на вектор$\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$.

4.Даны точки$A(0; 1; –2)$, $B(3; 1; 2)$, $C(4; 1; 1)$.Найти косинус угла между векторами$\overrightarrow{\boldsymbol{CA}}$ и$\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$.

5.Даны точки $A(0; 1; –2)$, $B(3; 1; 2)$, $C(4; 1; 1)$.Найти вектор $\vec{\boldsymbol{a}}$, коллинеарный вектору$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, скалярное произведение которого на вектор$\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$равно 5.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{\boldsymbol{a}}=(5; 3; 4)$, $\vec{\boldsymbol{b}}=(4; 3; 3)$,$\vec{\boldsymbol{c}}=(9; 5; 8)$.

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$и$\vec{b}$, если $\vec{a}$=$\vec{p}$–3$\vec{q}$, $\vec{b}$=$\vec{p}$+2$\vec{q}$, |$\vec{p}$|=0,2, |$\vec{q}$|=1, а угол между$\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен$\frac{\pi}{2}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках A(1; 2; 0), B(3; 0; –3), C(5; 2; 6), D(8; 4; –9). Найти длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*.

Вариант 7

1. Найти длины векторов $\vec{p}+\vec{q}$ и$\vec{p}-\vec{q}$, если |$\vec{p}$|=9, |$\vec{q}$|=2, а угол между$\vec{p}$ и$\vec{q}$равен$\frac{\pi}{4}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}$ и$\vec{b}$, если $\vec{a}$=2$\vec{p}-3\vec{q}$, $\vec{b}$=5$\vec{p}+4\vec{q}$, $\vec{p}$=(2; –1; 4),$\vec{q}$=(3; –7; –6)?

3. Даны точки*A*(2; 1; –1), *B*(6; –1; –4), *C*(4; 2; 1). Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор$\overrightarrow{AC}$.

4.Даны точки*A*(2; 1; –1), *B*(6; –1; –4), *C*(4; 2; 1). Найти косинус угла между векторами$\overrightarrow{CA}$и$\overrightarrow{CB}$.

5.Даны точки *A*(2; 1; –1), *B*(6; –1; –4), *C*(4; 2; 1). Найти вектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору$\overrightarrow{AB}$, скалярное произведение которого на вектор$\overrightarrow{CB}$ равно 4.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{a}$=(5; 3; 4), $\vec{b}$=(4; 3; 3),$\vec{c}$=(9; 5; 8).

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и$\vec{b}$, если $\vec{a}$=$\vec{p}$–4$\vec{q}$, $\vec{b}$=3$\vec{p}$+$\vec{q}$, |$\vec{p}$|=1, |$\vec{q}$|=2, а угол между$\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен$\frac{\pi}{6}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках *A*(14; 4; 5),*B*(–5; –3; 2), *C*(–2; –6; –3), *D*(–2, 2, –1). Найти длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*.

Вариант 8

1. Найти длины векторов $\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{p}-\vec{q}$, если |$\vec{p}$|=3, |$\vec{q}$|=2, а угол между$\vec{p}$ и$\vec{q}$равен$\frac{\pi}{3}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}$ и$\vec{b}$, если $\vec{a}$=3$\vec{p}-2\vec{q}$,

$\vec{b}=-6\vec{p}+4\vec{q}$, $\vec{p}$=(5; –1; –2),$\vec{q}$=(6; 0; 7)?

3. Даны точкиA(2; –8; –1), B(4; –6; 0),C(–2; –5;–1). Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор$\overrightarrow{AC}$.

4.Даны точкиA(2; –8; –1), B(4; –6; 0),C(–2; –5;–1). Найти косинус угла между векторами$\overrightarrow{CA}$ и$\overrightarrow{CB}$.

5.Даны точкиA(2; –8; –1), B(4; –6; 0),C(–2; –5;–1). Найти вектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору$\overrightarrow{AB}$, скалярное произведение которого на вектор$\overrightarrow{CB}$ равно 5.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{a}$=(–2; –4; –3) $\vec{b}$=(4; 3; 1), $\vec{c}$=(6; 7; 4)?

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и$\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+5\vec{q}$, $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=0{,}5$, а угол между$\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен$\frac{5\pi}{6}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках A(–2; 0; –4), B(–1; 7. 1),C(4; –8; –4),D(1; –4; 6). Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Вариант 9

1. Найти длины векторов $\vec{p}+\vec{q}$ и$\vec{p}-\vec{q}$, если $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, а угол между$\vec{p}$ и$\vec{q}$равен $\frac{3\pi}{4}$.

2.Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}$ и$\vec{b}$, если $\vec{a}=2\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}+5\vec{q}$, $\vec{p}$=(–9; 5; 3), $\vec{q}$=(7; 1; –2)?

3. Даны точкиA(–1; –2; 1), B(–4; –2; 5),C(–8; –2; 0). Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор$\overrightarrow{AC}$.

4. Даны точки A(–1; –2; 1), B(–4; –2; 5),C(–8; –2; 0). Найти косинус угла между векторами$\overrightarrow{CA}$и$\overrightarrow{CB}$.

5. Даны точкиA(–1; –2; 1), B(–4; –2; 5),C(–8; –2; 0). Найти вектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору$\overrightarrow{AB}$, скалярное произведение которого на вектор$\overrightarrow{CB}$ равно 6.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{a}$=(3; 10; 5),$\vec{b}$=(–2; –2; 3), $\vec{c}$=(2; 4; 3)?

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и$\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+5\vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 0,5$, а угол между$\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен$\frac{5\pi}{6}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках A(–2; 0; –4),B(–1; 7; 1),C(4; –8; –4), D(1; –4; 6). Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Вариант 10

1. Найти длины векторов $\vec{p}+\vec{q}$ и$\vec{p}-\vec{q}$, если $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=3$, а угол между$\vec{p}$ и$\vec{q}$равен$\frac{3\pi}{4}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=-2\vec{p}+4\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}+5\vec{q}$, $\vec{p}$=(4; 2; 9), $\vec{q}$=(0; –1; 3)?

3. Даны точкиA(6; 2; –3), B(6; 3; –2), C(7; 3; –3). Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор$\overrightarrow{AC}$.

4. Даны точкиA(6; 2; –3), B(6; 3; –2), C(7; 3; –3).Найти косинус угла между векторами$\overrightarrow{CA}$и$\overrightarrow{CB}$.

5. Даны точкиA(6; 2; –3), B(6; 3; –2), C(7; 3; –3).Найтивектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору$\overrightarrow{AB}$, скалярное произведение которого на вектор$\overrightarrow{CB}$равно 7.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{a}$=(5; 3; 4), $\vec{b}$=(–1; 0; –1), $\vec{c}$=(4; 2; 4)?

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и$\vec{b}$, если $\vec{a}=\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}+\vec{q}$, $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, а угол между$\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен$\frac{3\pi}{4}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках A(2; –1; –2),B(1; 2; 1), C(5; 0; –6), D(–10; 9; –7). Найти длину высоты, опущенной из вершиныD на грань ABC.

Вариант 11

1. Найти длины векторов $\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{p}-\vec{q}$, если $|\vec{p}|=5$, $|\vec{q}|=2$, а угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{\pi}{6}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=5\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}+4\vec{q}$, $\vec{p}=(2; -1; 6)$, $\vec{q}=(-1; 3; 8)$?

3. Даны точки $A(-2; 4; -6)$, $B(0; 2; -4)$, $C(-6; 8; -10)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$.

4. Даны точки $A(-2; 4; -6)$, $B(0; 2; -4)$, $C(-6; 8; -10)$. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

5. Даны точки $A(-2; 4; -6)$, $B(0; 2; -4)$, $C(-6; 8; -10)$. Найти вектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору $\overrightarrow{AB}$, скалярное произведение которого на вектор $\overrightarrow{CB}$ равно 12.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{a}=(2; 3; 2)$, $\vec{b}=(4; 7; 5)$, $\vec{c}=(2; 0; -1)$?

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-\vec{q}$, $|\vec{p}|=10$, $|\vec{q}|=1$, а угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{\pi}{2}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках

A(–1; 2; 4), B(–1; –2; –4), C(3; 0; –1), D(7; –3; 1). Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Вариант 12

1. Найти длины векторов $\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{p}-\vec{q}$, если $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=2$, а угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{\pi}{8}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{p}-4\vec{q}$, $\vec{b}=9\vec{p}+7\vec{q}$, $\vec{p}=(5; 0; 8)$, $\vec{q}=(-3; 1; 7)$?

3. Даны точки $A(-4; 0; 4)$, $B(-1; 6; 7)$, $C(1; 10; 9)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$.

4. Даны точки $A(-4; 0; 4)$, $B(-1; 6; 7)$, $C(1; 10; 9)$. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

5. Даны точкиA(–4; 0; 4), B(–1; 6; 7), C(1; 10; 9). Найтивектор $\vec{\boldsymbol{a}}$, коллинеарный вектору$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, скалярное произведение которого на вектор$\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$равно 20.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{\boldsymbol{a}}$=(7; 3; 4),$\vec{\boldsymbol{b}}$=(–1; –2; –1), $\vec{\boldsymbol{c}}$=(4; 2; 4)?

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{\boldsymbol{a}}$ и$\vec{\boldsymbol{b}}$, если $\vec{\boldsymbol{a}}$=$\vec{\boldsymbol{p}}$+3$\vec{\boldsymbol{q}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$=$\vec{\boldsymbol{p}}$–2$\vec{\boldsymbol{q}}$, |$\vec{\boldsymbol{p}}$|=2, |**q**|=3, а угол между$\vec{\boldsymbol{p}}$ и $\vec{\boldsymbol{q}}$ равен$\frac{\pi}{3}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках A(1; 5; –7), B(–3; 6; 3), C(–2; 7; 3), D(–4; 8; –12). Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Вариант 13

1. Найти длины векторов $\vec{\boldsymbol{p}}$+$\vec{\boldsymbol{q}}$ и$\vec{\boldsymbol{p}}$-$\vec{\boldsymbol{q}}$, если |$\vec{\boldsymbol{p}}$|=7, |$\vec{\boldsymbol{q}}$|=4, а угол между$\vec{\boldsymbol{p}}$ и$\vec{\boldsymbol{q}}$равен$\frac{5\pi}{6}$.

2.Являются ли коллинеарными векторы $\vec{\boldsymbol{a}}$ и $\vec{\boldsymbol{b}}$, если $\vec{\boldsymbol{a}}$=6$\vec{\boldsymbol{p}}$– 2$\vec{\boldsymbol{q}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}=-3\vec{\boldsymbol{p}}+\boldsymbol{7}\vec{\boldsymbol{q}}$, $\vec{\boldsymbol{p}}$=(–1; 3; 4), $\vec{\boldsymbol{q}}$=(4; 5; –1)?

3. Даны точкиA(0; 1; 0), B(0; 2; 1), C(1; 2; 0). Найти проекцию вектора$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ на вектор$\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$.

4. Даны точкиA(0; 1; 0), B(0; 2; 1), C(1; 2; 0). Найти косинус угла между векторами$\overrightarrow{\boldsymbol{CA}}$и $\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$.

5. Даны точкиA(0; 1; 0), B(0; 2; 1), C(1; 2; 0). Найти вектор $\vec{\boldsymbol{a}}$, коллинеарный вектору$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, скалярное произведение которого на вектор$\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$ равно 8.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{\boldsymbol{a}}$=(7; 3; 4),$\vec{\boldsymbol{b}}$=(–1; –2; –1), $\vec{\boldsymbol{c}}$=(2; 1; 2)?

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{\boldsymbol{a}}$ и$\vec{\boldsymbol{b}}$, если $\vec{\boldsymbol{a}}$=4$\vec{\boldsymbol{p}}$–$\vec{\boldsymbol{q}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$=$\vec{\boldsymbol{p}}$+2$\vec{\boldsymbol{q}}$, |$\vec{\boldsymbol{p}}$|= 5, |$\vec{\boldsymbol{q}}$|= 4, а угол между$\vec{\boldsymbol{p}}$ и $\vec{\boldsymbol{q}}$ равен$\frac{\pi}{4}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках

$A(5; 2; 0)$,$B(2; 5; 0)$, $C(1; 2; 4)$, $D(–1; 1; 1)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Вариант 14

1. Найти длины векторов $\vec{p}+\vec{q}$ и$\vec{p}$-$\vec{q}$, если $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=4$, а угол между$\vec{p}$ и$\vec{q}$равен$\frac{5\pi}{6}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=6\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=-2\vec{p}+7\vec{q}$, $\vec{p}=(–1; 3; 4)$, $\vec{q}=(2; –1; 0)$?

3. Даны точки$A(1; 4; –1)$, $B(–2; 4; –5)$, $C(8; 4; 0)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор$\overrightarrow{AC}$.

4. Даны точки$A(1; 4; –1)$, $B(–2; 4; –5)$, $C(8; 4; 0)$.Найти косинус угла между векторами$\overrightarrow{CA}$и$\overrightarrow{CB}$.

5. Даны точки$A(1; 4; –1)$, $B(–2; 4; –5)$, $C(8; 4; 0)$.Найтивектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору$\overrightarrow{AB}$, скалярное произведение которого на вектор$\overrightarrow{CB}$равно 7.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{a}=(6; 3; 4)$, $\vec{b}=(–1; –2; –1)$, $\vec{c}=(2; 4; 2)$?

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и$\vec{b}$, если $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}–2\vec{q}$, $|\vec{p}|=6$, $|\vec{q}|=7$, а угол между$\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен$\frac{\pi}{3}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(3; 10; –1)$, $B(–2; 3; –5)$, $C(–6; 0; –3)$, $D(1; –1; 2)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Вариант 15

1. Найти длины векторов $\vec{p}+\vec{q}$ и$\vec{p}$-$\vec{q}$, если $|\vec{p}|=5$, $|\vec{q}|=4$, а угол между$\vec{p}$ и$\vec{q}$равен$\frac{5\pi}{6}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}$ и$\vec{b}$, если $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}$, $\vec{b}=-2\vec{p}+7\vec{q}$, $\vec{p}=(4; 2; –7)$, $\vec{q}=(5; 0; –2)$?

3. Даны точки$A(0; 2; –4)$, $B(8; 2; 2)$, $C(6; 2; 4)$. Найти проекцию вектора$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ на вектор$\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$.

4. Даны точки$A(0; 2; –4)$, $B(8; 2; 2)$, $C(6; 2; 4)$.Найти косинус угла между векторами$\overrightarrow{\boldsymbol{CA}}$и $\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$.

5. Даны точки$A(0; 2; –4)$, $B(8; 2; 2)$, $C(6; 2; 4)$.Найтивектор $\vec{\boldsymbol{a}}$, коллинеарный вектору$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, скалярное произведение которого на вектор$\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$ равно 8.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{\boldsymbol{a}}=(1; –2; 6)$,$\vec{\boldsymbol{b}}=(1; 0; 1)$,
$\vec{\boldsymbol{c}}=(2; –6; 17)$?

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{\boldsymbol{a}}$ и$\vec{\boldsymbol{b}}$, если $\vec{\boldsymbol{a}}=7\vec{\boldsymbol{p}}+\vec{\boldsymbol{q}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}=\vec{\boldsymbol{p}}–3\vec{\boldsymbol{q}}$, $|\vec{\boldsymbol{p}}|=3$, $|\vec{\boldsymbol{q}}|=1$, а угол между$\vec{\boldsymbol{p}}$ и $\vec{\boldsymbol{q}}$ равен$\frac{3\pi}{4}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках
A(1; 21; –1), B(2; 3; 1),C(3; 2; 1), D(5; 9; –8). Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Вариант 16

1. Найти длины векторов $\vec{\boldsymbol{p}}+\vec{\boldsymbol{q}}$ и $\vec{\boldsymbol{p}}-\vec{\boldsymbol{q}}$, если $|\vec{\boldsymbol{p}}|=2$, $|\vec{\boldsymbol{q}}|=7$, а угол между$\vec{\boldsymbol{p}}$ и$\vec{\boldsymbol{q}}$равен$\frac{\pi}{8}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{\boldsymbol{a}}$ и $\vec{\boldsymbol{b}}$, если $\vec{\boldsymbol{a}}=\overrightarrow{\boldsymbol{2p}}–3\vec{\boldsymbol{q}}$,
$\vec{\boldsymbol{b}}=–7\vec{\boldsymbol{p}}+\boldsymbol{4}\vec{\boldsymbol{q}}$, $\vec{\boldsymbol{p}}=(2; 0; –5)$,$\vec{\boldsymbol{q}}=(2; 0; –5)$?

3. Даны точки$A(3; –6; 9)$,$B(0; –3;6)$, $C(9; –12; 15)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$на вектор$\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$.

4. Даны точки$A(3; –6; 9)$,$B(0; –3;6)$, $C(9; –12; 15)$. Найти косинус угла между векторами$\overrightarrow{\boldsymbol{CA}}$ и$\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$.

5. Даны точки$A(3; –6; 9)$,$B(0; –3;6)$, $C(9; –12; 15)$. Найти вектор $\vec{\boldsymbol{a}}$, коллинеарный $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, скалярное произведение которого на вектор$\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$ равно 12.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{\boldsymbol{a}}=(3; 7; 2)$,$\vec{\boldsymbol{b}}=(–2; 0; –1)$,
$\vec{\boldsymbol{c}}=(2; 2; 1)$?

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}$, $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=4$, а угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{\pi}{3}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(0;\ -1;\ -1)$, $B(-2;\ 3;\ 5)$, $C(1;\ -5;\ -9)$, $D(-1;\ -6;\ 3)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Вариант 17

1. Найти длины векторов $\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{p}-\vec{q}$, если $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=7$, а угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{\pi}{6}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=4\vec{p}-3\vec{q}$, $\vec{b}=-7\vec{p}+5\vec{q}$, $\vec{p}=(-1;\ 2;\ 8)$, $\vec{q}=(3;\ 7;\ -1)$?

3. Даны точки $A(8;\ 3;\ -1)$, $B(5;\ 2;\ -1)$, $C(4;\ 3;\ 1)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$.

4. Даны точки $A(8;\ 3;\ -1)$, $B(5;\ 2;\ -1)$, $C(4;\ 3;\ 1)$. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

5. Даны точки $A(8;\ 3;\ -1)$, $B(5;\ 2;\ -1)$, $C(4;\ 3;\ 1)$. Найти вектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору $\overrightarrow{AB}$, скалярное произведение которого на вектор $\overrightarrow{CB}$ равно 13.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{a}=(3;\ 2;\ 1)$, $\vec{b}=(1;\ -3;\ -7)$, $\vec{c}=(1;\ 2;\ 3)$?

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}-\vec{q}$, $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=5$, а угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{2\pi}{3}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(1;\ 2;\ -3)$, $B(1;\ 0;\ 1)$, $C(-2;\ -1;\ 6)$, $D(0;\ -5;\ -4)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Вариант 18

1. Найти длины векторов $\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{p}-\vec{q}$, если $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=7$, а угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{\pi}{3}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=2\vec{p}+4\vec{q}$, $\vec{b}=-7\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{p}=(-1; 2; 8)$, $\vec{q}=(3; 0; -1)$?

3. Даны точки $A(3; 3; -1)$, $B(5; 1; -2)$, $C(4; 1; -3)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$.

4. Даны точки $A(3; 3; -1)$, $B(5; 1; -2)$, $C(4; 1; -3)$. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

5. Даны точки $A(3; 3; -1)$, $B(5; 1; -2)$, $C(4; 1; -3)$. Найти вектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору $\overrightarrow{AB}$, скалярное произведение которого на вектор $\overrightarrow{CB}$ равно 23.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{a}=(4; 3; 1)$, $\vec{b}=(6; 7; 4)$, $\vec{c}=(2; 0; -1)$?

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$, $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, а угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{\pi}{4}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(2; 3\ 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(7; 5; -3)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Вариант 19

1. Найти длины векторов $\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{p}-\vec{q}$, если $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=4$, а угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{3\pi}{4}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=\vec{p}+4\vec{q}$, $\vec{b}=-3\vec{p}+8\vec{q}$, $\vec{p}=(1; 0; 1)$, $\vec{q}=(-2; 3; 5)$?

3. Даны точки $A(-1; 2; -3)$, $B(0; 1; -2)$, $C(-3; 4; -5)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$.

4. Даны точки$A(-1;\ 2;\ -3)$, $B(0;\ 1;\ -2)$, $C(-3;\ 4;\ -5)$. Найти косинус угла между векторами$\overrightarrow{CA}$и$\overrightarrow{CB}$.

5. Даны точки$A(-1;\ 2;\ -3)$, $B(0;\ 1;\ -2)$, $C(-3;\ 4;\ -5)$. Найти вектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору$\overrightarrow{AB}$, скалярное произведение которого на вектор$\overrightarrow{CB}$ равно 10.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{a}=(4;\ 3;\ 1)$,$\vec{b}=(1;\ -2;\ 1)$,
$\vec{c}=(2;\ 2;\ 2)$?

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и$\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, $|\vec{p}|=7$, $|\vec{q}|=2$, а угол между$\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен$\frac{\pi}{4}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках
$A(-1;\ -5;\ 2)$, $B(-6;\ 0;\ -3)$,$C(3;\ 6;\ -3)$,$D(-10;\ 6;\ 7)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Вариант 20

1. Найти длины векторов $\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{p}-\vec{q}$, если $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=5$, а угол между$\vec{p}$ и$\vec{q}$равен$\frac{3\pi}{4}$.

2.Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=5\vec{p}+3\vec{q}$,
$\vec{b}=2\vec{p}+\mathbf{8}\vec{q}$, $\vec{p}=(-2;\ 4;\ 1)$, $\vec{q}=(1;\ -2;\ 7)$?

3. Даны точки$A(2;\ 3;\ 2)$,$B(-1;\ -3;\ -1)$, $C(-3;\ -7;\ -3)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$на вектор$\overrightarrow{AC}$.

4. Даны точки$A(2;\ 3;\ 2)$,$B(-1;\ -3;\ -1)$, $C(-3;\ -7;\ -3)$. Найти косинус угла между векторами$\overrightarrow{CA}$ и$\overrightarrow{CB}$.

5. Даны точки $A(2;\ 3;\ 2)$,$B(-1;\ -3;\ -1)$, $C(-3;\ -7;\ -3)$. Найтивектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору$\overrightarrow{AB}$, скалярное произведение которого на вектор$\overrightarrow{CB}$ равно 3.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{a}=(3;\ 1;\ -1)$,$\vec{b}=(-2;\ -1;\ 0)$,
$\vec{c}=(5;\ 2;\ -1)$?

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$и$\vec{b}$, если $\vec{a}$=2$\vec{p}$–3$\vec{q}$, $\vec{b}$=3$\vec{p}$+$\vec{q}$, |$\vec{p}$|=4, |$\vec{q}$|=1, а угол между$\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен$\frac{\pi}{6}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках *A*(1; 0; 2), *B*(1; 2; –1),*C*(2; –2; 1),*D*(2; 1; 0). Найти длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*.

Вариант 21

1. Найти длины векторов $\vec{p}$+$\vec{q}$ и$\vec{p}$-$\vec{q}$, если |$\vec{p}$|=2, |$\vec{q}$|=3, а угол между$\vec{p}$ и$\vec{q}$равен$\frac{3\pi}{4}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}$=4$\vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{b}$=2$\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{p}$=(1; 2; –3),$\vec{q}$=(2; –1; –1)?

3. Даны точки*A*(1; –1; 0), *B*(–2; –1; 4),*C*(8; –1; –1). Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор$\overrightarrow{AC}$.

4. Даны точки *A*(1; –1; 0), *B*(–2; –1; 4),*C*(8; –1; –1).Найти косинус угла между векторами$\overrightarrow{CA}$ и$\overrightarrow{CB}$.

5. Даны точки*A*(1; –1; 0), *B*(–2; –1; 4),*C*(8; –1; –1). Найти вектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору$\overrightarrow{AB}$, скалярное произведение которого на вектор$\overrightarrow{CB}$равно 11.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{a}$=(3; 3; 1),$\vec{b}$=(1; –2; 1), $\vec{c}$=(1; 1; 1)?

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$и$\vec{b}$, если $\vec{a}$=5$\vec{p}$–$\vec{q}$, $\vec{b}$=$\vec{p}$+$\vec{q}$, |$\vec{p}$|=5, |$\vec{q}$|=3, а угол между$\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен$\frac{5\pi}{6}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках *A*(1; 1; 2), *B*(–1; 1; 3), *C*(2; –2; 4), *D*(–1; 0; –2). Найти длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*.

Вариант 22

1. Найти длины векторов $\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{p}-\vec{q}$, если $|\vec{p}|=7$, $|\vec{q}|=3$, а угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{3\pi}{4}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=-2\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=4\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{p}=(3; 5; 4)$, $\vec{q}=(5; 9; 7)$?

3. Даны точки $A(-4; 3; 0)$, $B(0; 1; 3)$, $C(-2; 4; -2)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$.

4. Даны точки $A(-4; 3; 0)$, $B(0; 1; 3)$, $C(-2; 4; -2)$. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

5. Даны точки $A(-4; 3; 0)$, $B(0; 1; 3)$, $C(-2; 4; -2)$. Найти вектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору $\overrightarrow{AB}$, скалярное произведение которого на вектор $\overrightarrow{CB}$ равно 17.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{a}=(1; -1; -3)$, $\vec{b}=(3; 2; 1)$, $\vec{c}=(2; 3; 4)$?

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=5\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=2$, а угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{\pi}{3}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(2; 1; 4)$, $B(-1; 5; -2)$, $C(-7; -3; 2)$, $D(-6; -3; 6)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Вариант 23

1. Найти длины векторов $\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{p}-\vec{q}$, если $|\vec{p}|=7$, $|\vec{q}|=1$, а угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{3\pi}{4}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=4\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{p}=(1; 4; -2)$, $\vec{q}=(1; 1; -1)$?

3. Даны точки $A(7; 0; 2)$, $B(7; 1; 3)$, $C(8; -1; 2)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$.

4. Даны точкиA(7; 0; 2), B(7; 1; 3),C(8; –1; 2).Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{CA}}$и$\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$.

5. Даны точкиA(7; 0; 2), B(7; 1; 3),C(8; –1; 2).Найти вектор $\vec{\boldsymbol{a}}$, коллинеарный вектору$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, скалярное произведение которого на вектор$\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$ равно 22.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{\boldsymbol{a}}$=(1; 5; 2),$\vec{\boldsymbol{b}}$=(–1; 1; –1), $\vec{\boldsymbol{c}}$=(1; 1; 1)?

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{\boldsymbol{a}}$ и$\vec{\boldsymbol{b}}$, если $\vec{\boldsymbol{a}}$=3$\vec{\boldsymbol{p}}$–4$\vec{\boldsymbol{q}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$=$\vec{\boldsymbol{p}}$+3$\vec{\boldsymbol{q}}$, |$\vec{\boldsymbol{p}}$|=2, |$\vec{\boldsymbol{q}}$|=3, а угол между$\vec{\boldsymbol{p}}$ и $\vec{\boldsymbol{q}}$ равен$\frac{\pi}{4}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках A(7; 2; 4),B(7; –1; –2),C(3; 3; 1),D(–4; 2; 1). Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Вариант 24

1. Найти длины векторов $\vec{\boldsymbol{p}}$+$\vec{\boldsymbol{q}}$ и$\vec{\boldsymbol{p}}$-$\vec{\boldsymbol{q}}$, если |$\vec{\boldsymbol{p}}$|=8, |$\vec{\boldsymbol{q}}$|=1, а угол между$\vec{\boldsymbol{p}}$ и$\vec{\boldsymbol{q}}$равен$\frac{\pi}{3}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{\boldsymbol{a}}$ и$\vec{\boldsymbol{b}}$, если $\vec{\boldsymbol{a}}$= 4$\vec{\boldsymbol{p}} - 2\vec{\boldsymbol{q}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$=$\vec{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{8}\vec{\boldsymbol{q}}$, $\vec{\boldsymbol{p}}$=(1; –2; 5), $\vec{\boldsymbol{q}}$=(3; –1; 0)?

3. Даны точкиA(2; 2; 7), B(0; 0; 6),C(–2; 5; 7). Найти проекцию вектора$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ на вектор$\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$.

4. Даны точкиA(2; 2; 7), B(0; 0; 6),C(–2; 5; 7). Найти косинус угла между векторами$\overrightarrow{\boldsymbol{CA}}$ и $\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$**.**

5. Даны точкиA(2; 2; 7), B(0; 0; 6),C(–2; 5; 7). Найти вектор $\vec{\boldsymbol{a}}$, коллинеарный вектору$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, скалярное произведение которого на вектор$\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$равно 21.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{\boldsymbol{a}}$=(3; 2; 1),$\vec{\boldsymbol{b}}$=(2; 3; 4), $\vec{\boldsymbol{c}}$=(3; 1; –1)?

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$и$\vec{b}$, если $\vec{a}$=7$\vec{p}$–2$\vec{q}$, $\vec{b}$=$\vec{p}$+3$\vec{q}$, |$\vec{p}$|=0,5, |$\vec{q}$|=2, а угол между$\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен$\frac{\pi}{2}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках *A*(–4; 2; 6), *B*(2; –3; 0), *C*(–10; 5; 8), *D*(–5; 2; –4). Найти длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*.

Вариант 25

1. Найти длины векторов $\vec{p}+\vec{q}$ и$\vec{p}$-$\vec{q}$, если |$\vec{p}$|=8, |$\vec{q}$|=1, а угол между$\vec{p}$ и$\vec{q}$равен$\frac{\pi}{4}$.

2.Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}$= $6\vec{p} - 3\vec{q}$,
$\vec{b}$= $-2\vec{p} + 8\vec{q}$, $\vec{p}$=(3; 4; –1),$\vec{q}$=(2; –1; 1)?

3. Даны точки*A*(0; 3; –6), *B*(9; 3; 6),*C*(12; 3; 3).Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор$\overrightarrow{AC}$.

4. Даны точки*A*(0; 3; –6), *B*(9; 3; 6),*C*(12; 3; 3). Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{CA}$и $\overrightarrow{CB}$.

5. Даны точки*A*(0; 3; –6), *B*(9; 3; 6),*C*(12; 3; 3). Найтивектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору$\overrightarrow{AB}$, скалярное произведение которого на вектор $\overrightarrow{CB}$равно 20.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{a}$=(2; 3; 1),$\vec{b}$=(–1; 0; –1),
$\vec{c}$=(2; 2; 2)?

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$и$\vec{b}$, если $\vec{a}$=6$\vec{p}$–$\vec{q}$, $\vec{b}$=5$\vec{p}$+$\vec{q}$, |$\vec{p}$|=0,5, |$\vec{q}$|=4, а угол между$\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен$\frac{5\pi}{6}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках *A*(1; 3; 6), *B*(2; 2; 1), *C*(–1; 0; 1), *D*(–4; 6; –3). Найти длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*.

Вариант 26

1. Найти длины векторов $\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{p}-\vec{q}$, если $|\vec{p}|=7$, $|\vec{q}|=2$, а угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{\pi}{3}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=5\vec{p}+7\vec{q}$, $\vec{p}=(3; 7; 0)$, $\vec{q}=(6; 4; -1)$?

3. Даны координаты точек $A(-2; 1; 1)$, $B(2; 3; -2)$, $C(0; 0; 3)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$.

4. Даны координаты точек $A(-2; 1; 1)$, $B(2; 3; -2)$, $C(0; 0; 3)$. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

5. Даны координаты точек $A(-2; 1; 1)$, $B(2; 3; -2)$, $C(0; 0; 3)$. Найти вектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору $\overrightarrow{AB}$, скалярное произведение которого на вектор $\overrightarrow{CB}$ равно 1.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{a}=(2; 1; 2)$, $\vec{b}=(4; 2; 2)$, $\vec{c}=(-3; -3; -3)$?

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=2\vec{p}+3\mathbf{q}$, $\vec{b}=\mathbf{p}-2\vec{q}$, $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=1$, а угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{\pi}{3}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(1; 2; 0)$, $B(1; -1; 2)$, $C(0; 1; -1)$, $D(-3; 0; 1)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Вариант 27

1. Найти длины векторов $\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{p}-\vec{q}$, если $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=4$, а угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{\pi}{4}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=4\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=-\vec{p}+4\vec{q}$, $\vec{p}=(7; 9; -2)$, $\vec{q}=(5; 4; 3)$?

3. Даны точки $A(3; -2; 1)$, $B(-4; -2; 0)$, $C(-1; -2; 4)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$.

4.Даны точки$A(3; –2; 1)$, $B(–4; –2; 0)$, $C(–1; –2; 4)$. Найти косинус угла между векторами$\overrightarrow{\boldsymbol{CA}}$ и$\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$.

5.Даны точки$A(3; –2; 1)$, $B(–4; –2; 0)$, $C(–1; –2; 4)$.Найти вектор $\vec{\boldsymbol{a}}$, коллинеарный вектору$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, скалярное произведение которого на вектор$\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$равно 14.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{\boldsymbol{a}}=(4; –1; –6)$,$\vec{\boldsymbol{b}}=(1; –3; –7)$, $\vec{\boldsymbol{c}}=(2; –1; –4)$?

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{\boldsymbol{a}}$ и$\vec{\boldsymbol{b}}$, если $\vec{\boldsymbol{a}}=2\vec{\boldsymbol{p}}+3\vec{\boldsymbol{q}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}=\vec{\boldsymbol{p}}–2\vec{\boldsymbol{q}}$, $|\vec{\boldsymbol{p}}|=2$, $|\vec{\boldsymbol{q}}|=1$, а угол между$\vec{\boldsymbol{p}}$ и $\vec{\boldsymbol{q}}$ равен$\frac{\pi}{3}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(–3; –5; 6)$, $B(2; 1; –4)$, $C(0; –3; –1)$, $D(–5; 2; –8)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Вариант 28

1. Найти длины векторов $\vec{\boldsymbol{p}}+\vec{\boldsymbol{q}}$ и$\vec{\boldsymbol{p}}-\vec{\boldsymbol{q}}$, если $|\vec{\boldsymbol{p}}|=5$, $|\vec{\boldsymbol{q}}|=4$, а угол между$\vec{\boldsymbol{p}}$ и$\vec{\boldsymbol{q}}$равен$\frac{\pi}{6}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{\boldsymbol{a}}$ и $\vec{\boldsymbol{b}}$, если $\vec{\boldsymbol{a}}=–4\vec{\boldsymbol{p}}+\boldsymbol{3}\vec{\boldsymbol{q}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}=8\vec{\boldsymbol{p}}–6\vec{\boldsymbol{q}}$, $\vec{\boldsymbol{p}}=(5; 0; –2)$,$\vec{\boldsymbol{q}}=(6; 4; 3)$?

3. Даны точки$A(5; 2; 0)$, $B(5; 3; –1)$,$C(6; 4; –1)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ на вектор$\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$.

4.Даны точки$A(5; 2; 0)$, $B(5; 3; –1)$,$C(6; 4; –1)$.Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{\boldsymbol{CA}}$и$\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$.

5.Даны точки$A(5; 2; 0)$, $B(5; 3; –1)$,$C(6; 4; –1)$.Найтивектор $\vec{\boldsymbol{a}}$, коллинеарный вектору$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, скалярное произведение которого на вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$равно 25.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{\boldsymbol{a}}=(3; 4; 2)$,$\vec{\boldsymbol{b}}=(1; 1; 0)$,

$\vec{c}$=(8; 11; 6)?

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=2\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+3\vec{q}$, $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=2$, а угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{\pi}{2}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(4; -1; 3)$, $B(-2; 1; 0)$, $C(0; -5; 1)$, $D(3; 2; -6)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Вариант 29

1. Найти длины векторов $\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{p}-\vec{q}$, если $|\vec{p}|=10$, $|\vec{q}|=3$, а угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{2\pi}{8}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=2\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=-4\vec{p}-6\vec{q}$, $\vec{p}=(8; 3; -1)$, $\vec{q}=(4; 1; 3)$?

3. Даны точки $A(0; -1; -2)$, $B(-3; -7; -5)$, $C(2; 3; 0)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$.

4. Даны точки $A(0; -1; -2)$, $B(-3; -7; -5)$, $C(2; 3; 0)$. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

5. Даны точки $A(0; -1; -2)$, $B(-3; -7; -5)$, $C(2; 3; 0)$. Найти вектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору $\overrightarrow{AB}$, скалярное произведение которого на вектор $\overrightarrow{CB}$ равно 27.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{a}$=(5; 3; 4),$\vec{b}$=(4; 3; 3), $\vec{c}$=(9; 5; 8)?

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и$\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$, $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=1$, а угол между$\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен$\frac{\pi}{4}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках *A*(1; –1; 1), *B*(–2; 0; 3),*C*(2; 1; –1),*D*(2; –2; –4). Найти длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*.

Вариант 30

1. Найти длины векторов $\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{p}-\vec{q}$, если $|\vec{p}|=7$, $|\vec{q}|=3$, а угол между$\vec{p}$ и$\vec{q}$равен$\frac{\pi}{3}$.

2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}$ и$\vec{b}$, если $\vec{a}=4\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=-2\vec{p}+6\vec{q}$, $\vec{p}$=(3; –1; 6),$\vec{q}$=(5; 7; 10)?

3. Даны точки*A*(2; –4; 6), *B*(0; –2;4),*C*(6; –8; 10). Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор$\overrightarrow{AC}$.

4.Даны точки*A*(2; –4; 6), *B*(0; –2; 4),*C*(6; –8; 10).Найтикосинус угла между векторами $\overrightarrow{CA}$и$\overrightarrow{CB}$.

5.Даны точки*A*(2; –4; 6), *B*(0; –2; 4),*C*(6; –8; 10).Найти вектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору$\overrightarrow{AB}$, скалярное произведение которого на вектор $\overrightarrow{CB}$равно 2.

6. Являются ли компланарными векторы $\vec{a}$=(4; 1; 2),$\vec{b}$=(9; 2; 5), $\vec{c}$=(1; 1;–1)?

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и$\vec{b}$, если $\vec{a}=4\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-\vec{q}$, $|\vec{p}|=7$, $|\vec{q}|=2$, а угол между$\vec{p}$ и $\vec{q}$равен$\frac{\pi}{4}$.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках *A*(2; –1; 2), *B*(1; 2; –1), *C*(3; 2; 1), *D*(–4; 2; 5). Найти длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача1. Найти длины векторов $\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{p}-\vec{q}$, если $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=4$, а угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{\pi}{3}$.

Решение

Длина вектора равна квадратному корню из скалярного квадрата этого вектора.

Итак, $(\vec{p}+\vec{q})\cdot(\vec{p}+\vec{q}) = \vec{p}\cdot\vec{p} + 2\vec{p}\cdot\vec{q} + \vec{q}\cdot\vec{q} = |\vec{p}|^2 + 2|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\cos\varphi + |\vec{q}|^2 =$

$= 3^2+2\cdot3\cdot4\cdot\cos\frac{\pi}{3}+4^2=9+24\frac{1}{2}+16=37$. Значит, $|\vec{p}+\vec{q}|=\sqrt{37}$.

Аналогично, $(\vec{p}-\vec{q})\cdot(\vec{p}-\vec{q}) = \vec{p}\cdot\vec{p}-2\vec{p}\cdot\vec{q} + \vec{q}\cdot\vec{q} = |\vec{p}|^2 - 2|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\cos\varphi + |\vec{q}|^2 = 3^2 - 2\cdot3\cdot4\cdot\cos\frac{\pi}{3} + 4^2 = 9 - 24\cdot\frac{1}{2} + 16 = 13$. Значит, $|\vec{p}-\vec{q}|=\sqrt{13}$.

Задача2. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=5\vec{p}+4\vec{q}$, $\vec{p}=(1; 5; -1)$, $\vec{q}=(2; 0; -1)$?

Решение

$\vec{a}= 3\cdot(1; 5; -1)- (2; 0; -1) = (3; 15; -3) - (2; 0; -1) = (1; 15; -2)$,

$\vec{b}= 5\cdot(1; 5; -1) + 4\cdot(2; 0; -1) = (5; 25; -5) + (8; 0; -4) = (13; 25; -9)$.

Условие коллинеарности векторов – пропорциональность соответствующих координат. Имеем $\frac{1}{13} \neq \frac{15}{25} \neq \frac{-2}{-9}$. Следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.

Задача3. Даны точки $A(2; -1; -1)$, $B(3; 2; -1)$, $C(0; 0; 4)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$.

Решение

$\text{пр}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$.

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и длину вектора $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}=(3-2; 2-(-1); -1 - (-1))=(1; 3; 0)$,

$\overrightarrow{AC}=(0 - 2; 0 - (-1)) = (-2; 1; 5)$,

$|\overrightarrow{AC}|= \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{30}$.

Вычислим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ = 1·(–2) + 3·1 + 0·5 = 1.

Таким образом,пр$_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{\sqrt{30}}$.

Задача4. Даны точкиA(2; –1; –), B(3; 2; –1),C(0; 0; 4). Найти косинус угла φ между векторами$\overrightarrow{CA}$ и$\overrightarrow{CB}$.

Решение

$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|}$.

$\overrightarrow{CA}$ = (2–0; –1–0; –1–4) = =(2; –1; –5), $\overrightarrow{CB}$ = (3–0; 2–0; –1–4) = (3; 2; –5).

$|\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{30}$, $|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{38}$,

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ = 2·3 + (–1)·2 + (–5)·(–5) = 29.

Таким образом,$\cos\varphi = \frac{29}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{38}} = \frac{29}{\sqrt{1140}}$.

Задача5. Даны точкиA(2; –1; –1), B(3; 2; –1), C(0; 0; 4).Найти вектор $\vec{\boldsymbol{a}}$, коллинеарный вектору$\overrightarrow{AB}$, скалярное произведение которого на вектор$\overrightarrow{CB}$ равно 1.

Решение

В силу коллинеарности вектор $\vec{\boldsymbol{a}}$ можно представить в виде $\vec{\boldsymbol{a}}=\lambda\cdot\overrightarrow{AB}$, то есть $\vec{\boldsymbol{a}}$=(λ; 3λ; 0). По условию задачи $\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\overrightarrow{CB}$ = 1, значитλ·3 + 3λ·2 + 0·(–5) = 9λ=1, отсюда $\lambda = \frac{1}{9}$и $\vec{\boldsymbol{a}}=\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}; 0\right)$.

Задача6. Являются ли компланарными векторы $\vec{\boldsymbol{a}}$=(1; –1; 2), $\vec{\boldsymbol{b}}$=(–5; 3; 2),$\vec{\boldsymbol{c}}$=(2; –2; –2)?

Решение

Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю смешанного произведения этих векторов.

Поскольку, $\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}\cdot\vec{\boldsymbol{c}}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ = –6 – 4 + 20 – 12 + 4 + 10 = 12, то данные векторы не компланарны.

Задача7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{\boldsymbol{a}}$ и $\vec{\boldsymbol{b}}$, если $\vec{\boldsymbol{a}}=\vec{\boldsymbol{p}}-4\vec{\boldsymbol{q}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}=2\vec{\boldsymbol{p}}+\vec{\boldsymbol{q}}$, $|\vec{\boldsymbol{p}}|=2$, $|\vec{\boldsymbol{q}}|=3$, а угол φ между векторами $\vec{\boldsymbol{p}}$ и $\vec{\boldsymbol{q}}$ равен $\frac{\pi}{6}$.

Решение

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{\boldsymbol{a}}$ и $\vec{\boldsymbol{b}}$**,** равна модулю векторного произведения векторов $\vec{\boldsymbol{a}}$ и $\vec{\boldsymbol{b}}$**,** т.е. $S = |\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}|$. Итак,

$\vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{b}}=(\vec{\boldsymbol{p}}-4\vec{\boldsymbol{q}})\times(2\vec{\boldsymbol{p}}+\vec{\boldsymbol{q}})=2\vec{\boldsymbol{p}}\times\vec{\boldsymbol{p}}+\vec{\boldsymbol{p}}\times\vec{\boldsymbol{q}}-8\vec{\boldsymbol{q}}\times\vec{\boldsymbol{p}}-4\vec{\boldsymbol{q}}\times\vec{\boldsymbol{q}}=2\cdot\vec{\boldsymbol{0}}+\vec{\boldsymbol{p}}\times\vec{\boldsymbol{q}}+8\vec{\boldsymbol{p}}\times\vec{\boldsymbol{q}}-4\cdot\vec{\boldsymbol{0}}=9\vec{\boldsymbol{p}}\times\vec{\boldsymbol{q}}$,

$|\vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{b}}|=9|\vec{\boldsymbol{p}}\times\vec{\boldsymbol{q}}|=9|\vec{\boldsymbol{p}}|\cdot|\vec{\boldsymbol{q}}|\cdot\sin\varphi = 9\cdot2\cdot3\cdot\sin\frac{\pi}{6} = 9\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{2} = 27.$

Следовательно, $S = 27$ ед^2.

Задача8. Дан тетраэдр $ABCD$ с вершинами $A(3, -2, 1)$, $B(4, -3, 0)$, $C(5, -1, 1)$ и $D(4, -4, 2)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

Решение

Положим $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$.

Обозначим через H длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины D, через V объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, а через S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Ясно, что $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8$, $\quad V_{пар}=|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = 8$ед^3.

$V = S\cdot H$. Далее, $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Найдем сначала вектор $\vec{a}\times\vec{b}$, обозначив через $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ тот ортонормированный базис, в котором даны координаты всех векторов. Имеем $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} = (1, -2, 3)$.

Следовательно, $S = |\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$ и $H = \frac{V}{S} = \frac{8}{\sqrt{14}}$.

Ответ: $\frac{8}{\sqrt{14}}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов: в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Издательство АСТ, 2014. – Ч. 1. – 368 с.

2. Рябушко, А.П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учебник: в 3 ч. / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е.Юруть; под ред. А.П. Рябушко. – Минск: Вышейшая школа, 2013. – Ч. 1. – 271 с.

3. Осмоловский, В.И. Линейная алгебра: учебное пособие для самостоятельной работы студентов факультета СиЛП / В.И. Осмоловский, Ю.А.Назырова.– Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2002 – 35 с.

4. Назырова, Ю.А.Векторная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие / Ю.А.Назырова, В.И. Осмоловский.– Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2004.– 57 с.

5. Ахкамова, Ю.А. Математика: сборник индивидуальных заданий / Ю.А. Ахкамова, Т.П.Гаврилова. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2014. – Ч.I. – 127с.

6. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты: учебное пособие / Л.А. Кузнецов. – СПб.: Изд-во Лань, 2015. – 240 с.

7. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие / под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2008. – 575 с.

8. Высшая математика для экономического бакалавриата: учебник и практикум / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Юрайт , 2017. – 909 с.

9. Солодовников, А.С. Математика в экономике: учебник: в 2 ч. / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Брайлов, И.Г. Шандра. – М.: Финансы и статистика, 2007. – Ч. 1. – 384 с.

10. Баврин, И.И. Высшая математика для химиков, биологов и медиков: учебник и практикум для прикладного бакалавриата.– М.: Издательство Юрайс, 2017. – 329 с.

Учебное издание

Ахкамова Юлия Абдулловна

ЛИНЕЙНАЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

ISBN 978-5-6042129-4-3

Рекомендовано РИС ЮУрГГПУ
Протокол № 16 (пункт 2), 2018 г.

Издательство ЮУрГГПУ
454080, г. Челябинск пр. Ленина, 69

Технический редактор Т.Н.Никитенко
Эксперт Т.А. Шульгина

Подписано в печать 12.12.2018. Тираж 100 экз.
Формат 70*90/16 Объём 8,55 усл.-п.л.
Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ЮУрГГПУ
484080, г. Челябинск, пр. Ленина, 69