МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Формирование предметных результатов при обучении решению задач на доказательство

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»

Форма обучения: очная

Проверка на объем заимствований:
64 % авторского текста
Работа ______________к защите
Рекомендована/не рекомендована
« 25 » мая 2020 г.
И.о. зав. Кафедрой МиМОМ
____________ Шумакова Е.О.

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513/086-5-1
Дудина Алёна Викторовна

Научный руководитель:
кандидат педагогических наук,
доцент
Винтиш Татьяна Юрьевна

Челябинск
2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Нынешние образовательные реформы в РФ определяются сменой знаний образовательной парадигмы на компетентностную. В образовании компетентностный подход понимается как направленность учебного процесса на формирование и развитие основных компетентностей личности. Это требует отхода от традиционной информационно-накопительной направленности обучения, в том числе обучения математике, и перенос акцента с усвоения нормативно определенных знаний, умений и навыков на формирование и развитие у школьников способности самостоятельно практически действовать, применять индивидуальный положительный опыт и достижения в нестандартных, творческих, жизненных ситуациях, то есть на формирование ключевых компетентностей, необходимых для жизни в обществе и быстроменяющемся мире.

В примерной образовательной программе сформулированы следующие предметные результаты освоения математики обучающимися 5-9 классов на базовом уровне, которые должны:

– описывать отдельные выдающиеся результаты, полученные в ходе развития математики как науки;

– знать примеры математических открытий и их авторов, в связи с отечественной и всемирной историей;

– понимать роль математики в развитии России [34, с.56].

Проблема исследования: выявление методических основ обучения школьников решению задач на доказательство и их роль в формировании предметных результатов.

Гипотеза исследования: обучение школьников навыкам решения задач на доказательство помогает им усваивать материал более эффективно и прочно.

Объектом исследования является процесс обучения математике в основной школе.

Предмет исследования: методика обучения школьников решению задач на доказательство.

Цель работы: выявить методические основы обучения школьников решению задач на доказательство и их влияния на формирование предметных результатов.

Задачи исследования:

1) выявить психолого-методические основы формирования предметных и ключевых компетентностей учащихся основной школы в процессе обучения геометрии;

2) проанализировать методику реализации критериев активизации учебной познавательной деятельности учащихся на уроках математики;

3) выделить основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме теоремы;

4) разработать методические рекомендации по обучению доказательству и применению теорем школьного курса математики основной школы.

Методы исследования: анализ научно-методической литературы по теме исследования; систематизация и обобщение теоретического и задачного материала.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: проблема, цель, задачи, объект, предмет и методы исследования.

В первой главе изучаются теоретические основы формирования предметных знаний учащихся.

Вторая глава посвящена методическим основам обучения решению задач на доказательство. В ней рассмотрены цели изучения теорем, методические рекомендации по обучению доказательствам и решению задач, связанных с данными теоремами.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведенного исследования.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПРЕДМЕТНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

1.1 Психолого-методические основы формирования предметных и ключевых компетентностей учащихся основной школы в процессе обучения геометрии

В условиях быстрого развития общества, информационной среды, современных потребностей рынка труда репродуктивная система обучения устарела. На сегодня успешными являются люди, которые умеют системно мыслить, анализировать, сравнивать, практически решать профессиональные и жизненные проблемы. Поэтому среди задач современной общеобразовательной школы является формирование у учащихся умений самостоятельно принимать решения, работать в команде, быть инициативными, готовыми к стрессовым ситуациям. Эти качества можно формировать у учащихся на уроках математики в условиях компетентностного подхода к обучению.

В противоположность концепции «усвоения знаний, умений и навыков» компетентностный подход в обучении имеет целью такое усвоение учащимися умений, что позволяет им эффективно действовать в личных, жизненных и профессиональных, а особенно в новых и проблемных ситуациях. Следовательно, компетентностный подход усиливает прикладной и практический характер предметного обучения. Главной задачей учителя при таких условиях является мотивирование учащихся к инициативе и самостоятельности, создание развивающей среды для реализации способностей и интересов.

Предметные знания, умения и навыки являются важной, но недостаточной образовательной целью. Одной из проблем современного школьного математического образования является несоответствие между количеством приобретенных учащимися знаний и их возможностями применять эти знания в жизненной практике. На сегодня важно сформировать у молодежи личностные качества, которые помогут адаптироваться к общественным и естественным изменениям. Неслучайно компетентностный подход является одним из направлений стратегии развития образования в РФ. В ФГОС компетентностный подход обозначается как направленность учебно-воспитательного процесса на достижение результатов, которыми являются иерархически подчиненные ключевая, обще-предметная и предметная (отраслевая) компетентности.

Ученые-педагоги выделяют пять сквозных ключевых компетентностей: умение учиться; здоровье-сохраняющая; общекультурная (коммуникативная); социально-трудовая; информационная.

Определения понятий в Государственном стандарте свидетельствуют о конкретизации ключевых образовательных компетенциях на уровне образовательных областей и предметов для каждой ступени обучения. Это означает, что формирование ключевых компетентностей невозможно без формирования предметных компетентностей в рамках конкретного предмета. Компетентность как интегрированный результат учебной деятельности учащихся формируется прежде всего на основе овладения содержанием образования.

В формировании ключевых компетентностей школьников значительную роль играет обучение геометрии (формирование соответствующих предметных компетенций).

Геометрия, как наука, возникла из жизненных потребностей человека в глубокой древности. Изменяясь от практической в чисто дедуктивной, она превратилась в феномен общечеловеческой культуры. Все, что нас окружает – геометрия. Геометрические знания и умения, геометрическая культура являются сегодня профессионально значимыми для многих современных специальностей: дизайнеров, конструкторов, ученых и рабочих. Среди школьных предметов математического цикла геометрия выделяется вольнодумством, нежеланием подчиняться алгоритмам, а иногда даже логике. Она является мощным средством развития личности.

Геометрия помогает познать окружающий мир, в котором большинство предметов напоминают различные геометрические фигуры. Мы живем в мире геометрии. Чтобы ориентироваться в нем, нужно научиться понимать, как он устроен. Геометрия формирует у человека пространственное воображение, знакомит с пространственными формами и законами их восприятия. С другой стороны, геометрия имеет все возможности для развития обоих полушарий головного мозга человека, поскольку в ней интуитивно понятные факты логически обосновываются и доказываются. Действительно, геометрия, по мнению О. Д. Александрова, это «лед и пламя». Это единственный школьный предмет, основанный на последовательном доказывании всех утверждений. А если человек разбирается в доказывании, то его невозможно манипулировать.

В обучении математики роль геометрии не исчерпывается ее содержанием. Наглядные интерпретации помогают лучшему пониманию свойств геометрических фигур, их проявления в реальной жизни. Также, для успешного формирования предметных и ключевых компетентностей ученикам необходимо решить немало геометрических задач.

Предметные компетенции формулируются в Государственном стандарте через требования к уровню учебных достижений учащихся по геометрии. Разработка методики формирования геометрических и ключевых компетентностей учащихся предусматривает уточнения перечня, содержания и уровней сформированности предметных и ключевых компетентностей как результата обучения учащихся содержательных линий и отдельных тем по геометрии в основной школе. Нужно также определить какие ключевые компетентности и каким образом формируются средством геометрии среди других учебных предметов.

Математическая компетентность – это умение видеть и применять математику в реальной жизни, понимать содержание и метод математического моделирования, умение строить математическую модель, исследовать ее методами математики, интерпретировать полученные результаты, оценивать погрешность вычислений.

Формирование математической компетентности у учащихся основной школы на уроках геометрии предусматривает следующие компоненты.

Процедурная компетентность – умение решать типовые математические задачи. Формирование предусматривает:

– обучения алгоритмов решения геометрических задач;

– выработка умения систематизировать типовые задачи, находить критерии сведения задач к типовым; распознавать типовую задачу или сводить ее к типовой;

– выработка умения использовать различные информационные источники для поиска процедур решения геометрических задач (учебник, справочник, интернет-ресурсы).

Логическая компетентность – владение дедуктивным методом доведения и опровержения утверждений. Формирование предусматривает:

– выработка умений использовать на практике понятийный аппарат дедуктивных теорий (определение геометрических понятий, аксиомы, свойства геометрических фигур и их доказательство, приведение примеров и контрпримеров и т. п);

– выработка умений воспроизводить дедуктивные доведения и доведения правильности процедур решения геометрических задач;

– выработка умений приводить дедуктивные обоснования правильности решения задач и искать логические ошибки в неверных дедуктивных рассуждениях;

– выработка умений использовать математическую и логическую символику на практике.

Технологическая компетентность – владение современными математическими пакетами. Формирование предусматривает:

– выработка умений использовать в обучении пакеты символьных преобразований, электронные таблицы (Excel, Gran 2Д(3Д), DG) и др.;

– выработка умений оценивать погрешности при использовании приближенных вычислений;

– выработка умений строить компьютерные модели для предметной области задачи с целью их эвристического, приближенного или точного решения.

Исследовательская компетентность – владение методами исследования практических и прикладных задач математическими методами. Формирование предусматривает:

– выработка умений строить математические модели при решении практических проблем;

– выработка умений строить аналитические модели задач;

– выработка умений выдвигать и проверять справедливость гипотез, опираясь на известные методы (индукция, аналогия, обобщение), а также на собственный опыт исследований;

– выработка умений интерпретировать результаты, полученные формальными методами;

– систематизировать полученные результаты, исследовать пределы достоверности полученных результатов, устанавливать связи с предыдущими результатами, искать аналогии в других разделах математики.

Методологическая компетентность – умение оценивать целесообразность использования математических методов для решения практических и прикладных задач. Формирование предусматривает:

– выработка умений анализировать эффективность решения задач математическими методами;

– обучение рефлексии собственного опыта решения задач и преодоления препятствий с целью постоянного совершенствования собственной методологии проведения исследований.

Формирование математической компетентности у учащихся основной школы на уроках геометрии предполагает разной степени формирования процедурной, логической, технологической, исследовательской и методологической составляющей на каждом из уровней требований к учебным достижениям учащихся по геометрии с учетом психологических особенностей, уровня интеллектуального развития и образовательных потребностей школьников соответствующего возраста.

Организация учебной деятельности учащихся основной школы по геометрии с целью формирования ключевых и предметных компетентностей предполагает: отказ от репродуктивного повторения геометрических фактов; приоритет учебных задач, которые активизируют мыслительную деятельность школьников (практических работ, задач практического содержания); активное использование приемов выбора, сравнения, классификации, преобразования, конструирования; установление связей между геометрическими понятиями на основе собственного опыта учащихся; использование ИКТ. Особенностями системы упражнений по геометрии для формирования предметных и ключевых компетентностей учащихся основной школы являются: анализ свойств геометрических фигур с различных точек зрения средством системы упражнений; привлечение упражнений на установление соответствия между предметной, вербальной, графической и символьной моделями; применение контрпримеров; выделение типовых геометрических задач в качестве ориентировочной основы действий; решению геометрической зада разными способами.

По мнению профессора Ю. Я. Когана новизна компетентностного подхода в обучении заключается в новых образовательных технологиях. Из содержания понятия компетентности очевидно, что речь идет про методы активного обучения. Поэтому определение методов активизации учебной деятельности учащихся по геометрии и отыскания путей и форм их реализации является актуальной, ввиду проблем компетентностного обучения.

Одной из важнейших видов человеческой деятельности является учебная деятельность. Любая учебная деятельность направлена на усвоение некоторого содержания, что является необходимым условием формирования предметных и ключевых компетентностей учащихся. Усвоение – особый процесс, предусматривающий восприятие, мышление, память.

Психологи рассматривают восприятие как степень и форму познания человеком действительности, что обусловлено особенностями органов чувств. Образы восприятия человеком реальных предметов формируются в результате ее деятельности.

Мышление также считается человеческой деятельностью. Как и практическая деятельность, мышление есть набор действий, подчиненных осознанной цели, и осуществляется с помощью логических операций. Мыслительная деятельность имеет внутреннюю (теоретическую) и внешнюю (предметно-действующую) формы.

Память, подобно другим психическим процессам, является деятельностью. Запоминание, вспоминание, воспроизведение, опознания – любой из этих процессов является видом человеческой деятельности. Она требует усилий и мотивации, осуществляется в результате специфических операций (например, смысловая группировка материала, мнемонические приемы и т. д.).

Итак, восприятие, мышление, память-психические процессы, основаны на активности человека. По словам В. А. Крутецкого, усвоение – это организованная познавательная деятельность учеников.

Психологи обосновали стратегию активного обучения. Ведущим звеном процесса обучения исследователи считают собственную деятельность учащихся. Приобретения знаний школьниками происходит в результате и при условии выполнения ими познавательной деятельности.

Активизация познавательной деятельности учащихся – это переход к более высокому уровню активности и самостоятельности учащихся в процессе обучения, стимулируемый развитием познавательного интереса, который происходит благодаря усовершенствованию методов и приемов учебного процесса. Активизация познавательной деятельности учащихся при изучении математики является одной из проблем современного школьного образования. Это связано со снижением интереса молодежи к учебе в целом, а также с повышением роли математики в различных сферах общества.

Для активизации познавательной деятельности учащихся важен удачный выбор методов, приемов и средств обучения, при котором учитываются определенные психологические особенности учащихся.

Под методом обучения в дидактике понимают способы обучающей работы учителя и организации учебно-познавательной деятельности учащихся по решению различных дидактических задач, направленных на овладение выученным материалом. По характеру учебной познавательной деятельности учащихся выделяют следующие методы обучения: объяснительно-иллюстративный; репродуктивный; проблемный; частично поисковый; исследовательский.

Объяснительно-иллюстративным методом в обучении математики пользуются для введения понятий, изучение аксиом, теорем, решения задач. Реализовать этот метод помогают упражнения на выделение существенных признаков понятия и осознания несущественных свойств. Для этого удобно использовать упражнения по готовым рисункам на распознавание изучаемых объектов понятия.

Репродуктивный метод применяется для закрепления нового материала, проверки домашнего задания. Ученики воспроизводят решение задач, формулировку и доказательство теорем, определение математических понятий и т. д. Этот метод реализуется путем выполнения упражнений по образцу, по алгоритму. Во время выполнения таких упражнений у учащихся формируется фонд действенных знаний для продуктивной деятельности.

Одним из проблемных методов, который используется в обучении геометрии является метод целесообразных задач. Этот метод предложил в конце XIX в. С. И. Шохор-Троцкий. Суть метода заключается в том, что для лучшего понимания учебного материала учащимся предлагаются подготовительные задачи. Они готовят учеников к пониманию определения нового понятия, к «открытию» теоремы, пониманию ее доведения, к самостоятельному решению задачи. Иногда с помощью целесообразных задач излагается вся тема. Например, при введении понятия «ромб» ученикам предлагается упражнение: «Постройте параллелограмм, у которого две смежные стороны равны. Такой параллелограмм называется ромбом. Сформулируйте определение ромба».

Я. Й. Грудьонов определил психологические условия применения метода целесообразных задач следующим образом: для применения метода целесообразных задач желательно подбирать минимальное число подготовительных упражнений, к тому же одно и то же упражнение может рассматриваться несколько раз, помогая оттенить отдельные детали темы. Приведенный выше пример такого упражнения удовлетворяет это условие.

Частично поисковый метод еще иногда называют эвристической беседой. Эвристическая беседа заключается в том, что учитель заранее готовит систему вопросов, отвечая на которые учащиеся самостоятельно формулируют определение понятия, «открывают» доказательства теоремы, находят способ решения задачи.

Подготовительные задачи, на основе которых учащиеся самостоятельно «открывают» и формулируют новые теоремы, вызывают у них живой интерес. Во время ввода геометрических теорем полезно использовать упражнения на построение соответствующих фигур. Например, «начертите произвольный четырехугольник и измерьте транспортиром его углы. Чему равна их сумма?»

Очевидно, что метод целесообразных задач является разновидностью эвристического метода.

Для более эффективного применения метода эвристической беседы целесообразно упражнения, имеющие проблемный характер, которые нужно предлагать ученикам для домашней работы. В домашних условиях каждый ученик имеет возможность спокойно рассмотреть достаточное количество отдельных случаев, обратиться к литературе и самостоятельно «прийти к открытию». Решение таких задач не является обязательным для всех учащихся, и предлагается на высоком уровне системы геометрических упражнений.

Исследовательский метод предполагает самостоятельный поиск решения познавательных задач. Так, в 9 классе после изучения формул вычисления площадей прямоугольника, параллелограмма, треугольника для учащихся с высоким уровнем учебных достижений посильным является, например, задача вывести формулу для вычисления площади трапеции.

Правильный выбор методов обучения в соответствии целей и содержания обучения и возрастных особенностей учащихся способствует развитию познавательной активности и познавательной самостоятельности учащихся, а также повышает интерес учащихся к предмету, вырабатывает умения и навыки использовать полученные знания на практике, побуждает учащихся к самостоятельной деятельности, формирует мировоззрение.

В основе любой учебной деятельности учащихся лежит, в первую очередь, их активность. Процесс их активизации является процессом преобразования субъекта (в нашем случае ученика) в состояние активности. Понятие активности исследовалось в психолого-педагогической науке в различных аспектах. Термин «активность» происходит от латинского «actives», что означает деятельный, энергичный, инициативный [2, с.37].

Активность учащихся выражается через вопрос, стремление думать, познавательную самостоятельность в процессах восприятия, воспроизведения, понимания и творческого применения. Критериями сформированности активности личности выступают: инициативность, действенность, энергичность, интенсивность, добросовестность, интерес, самостоятельность, осознание действий, воля, настойчивость в достижении цели и творчество. Благодаря этим качествам есть возможность проследить повышение активности учащихся в процессе обучения.

Познавательная активность в учебном процессе является составляющей объективного закономерного обучения как активного процесса познания. Это выступает важным фактором необходимости активной деятельности учащихся в познании. Однако характер и степень активности учащихся в учебе могут быть разными. Какие же факторы влияют на это? Прежде всего, это познавательный интерес. Именно его потеря, как правило, является причиной снижения познавательной активности детей.

Стимулами познавательной активности в учебно-воспитательном процессе, кроме внутреннего стимула – познавательного интереса, также могут выступать такие педагогические приемы, как поощрение, раскрытие необходимости и значения учебного задания (мотивация), подчеркивания развития положительных черт личности в процессе обучения, своевременное признание успехов учащихся, активная позиция учителя, доверие ученикам и других, которые уже становятся внешними стимулами познавательной активности учащихся. Познавательная активность учащихся является показателем качества их учебно-познавательной деятельности, направленности ученика на эффективное освоение знаний и способов деятельности.

Одной из главных задач в педагогической деятельности учителя является увеличение активности учащихся до уровня самостоятельности. Самостоятельность – это способность с собственной точки зрения подойти к решению сложных учебных вопросов, умение выполнять работу без посторонней помощи. Она проявляется в их критической мысли, в умении выразить свои мысли независимо от чужого взгляда. Активность не всегда сочетается с самостоятельностью, но является ее необходимым условием. Основой для самостоятельности выступает система знаний, умений и навыков, которым обладает ученик, а также использование уже усвоенного материала приводит к овладению новыми знаниями, умениями и навыками. Так как самостоятельность всегда предполагает активность, то именно она отражает отношение учащихся к учебно-познавательной деятельности.

В учебном процессе полная самостоятельность учащихся не возможна. Поэтому главным признаком самостоятельности учащихся является достижение поставленной цели без посторонней помощи, но с участием учителя в этом процессе. Именно учитель чаще всего выполняет такие функции деятельности как постановка ее цели, формулировка задания и проверка полученных результатов. Под познавательной самостоятельностью понимают такое качество личности, характеризующееся ее стремлением и умением без посторонней помощи получать знания, овладеть способами деятельности и решать познавательные задачи.

Развитие познавательной самостоятельности учащихся в учебно-воспитательном процессе происходит благодаря системе приемов, методов, форм обучения, которые адекватны достигнутому уровню обученности учащихся. Их удачный подбор в методике обучения приводят к активизации учебного процесса.

Приведенные выше соображения дают возможность выделить такие критерии активизации познавательной деятельности учащихся:

– формирование познавательного интереса к объекту обучения;
– увеличение активности в процессе обучения;
– развитие познавательной самостоятельности.

Главное назначение методов и приемов обучения заключается в организации познавательной деятельности учащихся.

В современной школе классно-урочная форма организации обучения является основной. Несмотря на малую продолжительность, уроки имеют те структурные компоненты, которые характеризуют процесс обучения в целом, в том числе: целевой, стимуляционно-мотивационный, содержательный, операционно-деятельностный, контрольно-регулировочный и оценочно-результативный.

Поэтому от эффективности уроков зависит эффективность учебного процесса. Урок является сложным «отрезком учебного процесса. Как все сложные объекты, уроки могут быть разделены на типы по различным признакам. Эта проблема не решена окончательно ни в мировой, ни в отечественной дидактике.

Среди педагогов прошлого самую стройную классификацию уроков дал К. Д. Ушинский, он выделил следующие типы уроков:

1) уроки смешанные, целью которых является повторение изученного, объяснения и закрепления нового материала;
2) уроки устных упражнений;
3) уроки письменных упражнений;
4) уроки проверки и оценки знаний, которые проводятся после определенного периода обучения и в конце учебного года.

Современная дидактика в целом сохраняет разработанную К. Д. Ушинским классификацию уроков, но несколько уточняет ее:

1) уроки усвоения новых знаний, навыков и умений;
2) уроки применения знаний, навыков и умений;
3) уроки обобщения и систематизации знаний;
4) уроки проверки, оценки и коррекции знаний, навыков и умений;
5) комбинированные (смешанные) [2, с.23].

Вышеназванные типы уроков входят в систему, созданной на основе учебной цели занятий. Классификация уроков по основной дидактической целью является удобной для учителя. Структура каждого типа урока является внутренняя структура каждого этапа. Она определяется целесообразным подбором методов, приемов и средств обучения, необходимых для решения поставленных учебных задач. Например, этап восприятия и осознания учащимися учебного материала может происходить на основе лекции учителя, проблемного изложения, эвристической беседы, демонстрации наглядности, самостоятельной работы с учебником и тому подобное. Этап осмысления знаний с помощью широкой мыслительной деятельности учащихся: анализа изученных материалов или добытых фактов, сравнение, обобщение, раскрытие логически-следственных связей, формирование выводов, выполнение проблемных заданий и прочее.

Сегодня учитель свободно выбирает структуру урока. Не обязательно придерживаться формального сочетания и последовательности этапов урока. Однако, нельзя допускать нарушения закономерностей познавательной деятельности, не учитывать факторов ее эффективности.

2.2 Методика реализации критериев активизации учебной познавательной деятельности учащихся на уроках математики разных типов

Структура урока усвоения новых знаний, навыков и умений определяется логикой процесса усвоения и предусматривает привлечение школьников к активной познавательной деятельности с целью восприятия, осознания новых знаний через вынужденное и непринужденное запоминание, и воспроизведение, что существенно взаимосвязано с обучаемым материалом. С этой целью на уроках математики нами применяется метод дискуссии. Мы добиваемся на своих уроках, чтобы дети могли свободно высказывать свое мнение и внимательно слушать мнение выступающих (обычно это используется при доказательстве теорем, утверждений, геометрических построений).

Процесс восприятия тесно связан с мышлением. В процессе жизни у ребенка формируются три вида мышления: наглядно-действенное, наглядно-образное, абстрактно-теоретическое (понятийное). Но новый вид мышления, возникающий у ребенка, не вытесняет и не заменяет полностью предыдущие виды. Взаимодействуя, абстрактное и наглядное мышление она развиваются и совершенствуются в процессе обучения. Отвечая на вопрос про психологические функции наглядного материала, который включен к процессу обучения, А. М. Леонтьев указывал, что психологическая функция наглядного учебного материала проявляется в том, что наглядный материал служит как бы внешней опорой внутренних действий, которые выполняет ребенок под руководством учителя в процессе овладения знаниями [17, с.20].

Целесообразное использование средств наглядности зависит от того, насколько они способствуют деятельности, непосредственной целью которой является не усвоение этой наглядности, а овладение учеником знаниями, для чего и используются эти средства наглядности. Примером активизации познавательной деятельности учащихся на этапе усвоения новых знаний с привлечением наглядности является применение нами практических работ и анимаций с электронных обучающих средств на уроках геометрии. Так формирование понятия биссектрисы угла полезно начинать с практической работы, частью которой является построение биссектрисы угла, вырезанного из бумаги с помощью перегибания и совмещения сторон угла.

Учащиеся имеют возможность непосредственно убедиться в равенстве углов, образованных разделением данного угла его биссектрисой, путем наложения. Наглядно наблюдать этот процесс дает возможность анимация из электронного средства учебного назначения [4, с.52].

Для активного восприятия готовых доказательств ученики должны осознавать причину выбора именно такого пути. Тщательный анализ содержания теоремы раскрывает значение каждого звена доведения, объясняет ученикам происхождение идеи доказательства, дает возможность принять участие в поиске доказательства. Изучая доказательство теоремы о сумме углов треугольника, ученики знакомятся со способами дополнительных построений.

Дано: $\triangle ABC$.

Доказать: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Доказательство:

1. Проведем через вершину B треугольника прямую MN, параллельную AC. Образующиеся углы обозначим цифрами:

2. ∠ 1 и ∠ 2 (рисунок 1)

3. ∠ 1 = ∠ C, ∠ 2 = ∠ A как внутренние разносторонние при параллельных прямых MN и AC и касательных BC и AB соответственно.

4. Углы 1, 2, образуют развернутый угол, поэтому ∠ 1 + ∠ B + ∠ 2 = 180°.

5. Заменив в этом равенстве углы 1 и 2 равными им углами C и A, получим: ∠ A + ∠ B + ∠ C = 180°.

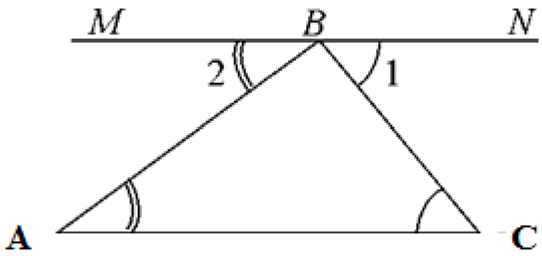


Рисунок 1 – Теорема о сумме углов треугольника

С целью осознания учащимися потребности в дополнительных построениях полезно применять практические работы. А именно:

1) на листе бумаги начертите любой треугольник и измерьте его углы;

2) вычислите сумму углов треугольника, сделайте вывод.

Или упражнения с анимациями из электронных средств учебного назначения такого содержания: «По результатам анимации сделайте вывод о сумме углов треугольника» (рисунок 2).

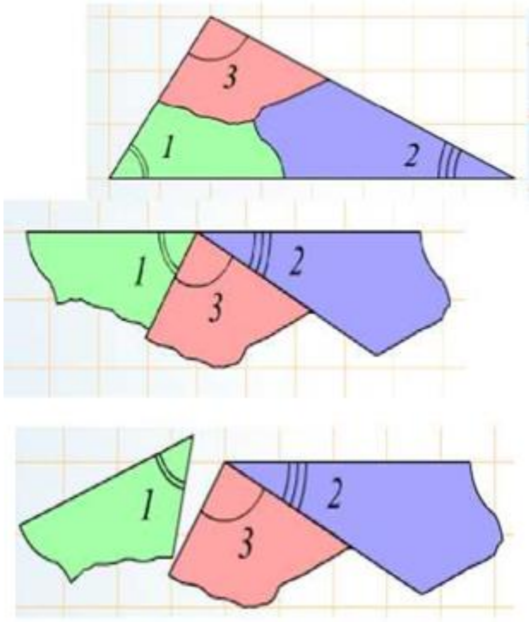


Рисунок 2 – Анимационное решение

Продолжая рассуждения, объясняем, что для доказательства теоремы нужно построить развернутый угол, который состоит из углов треугольника (или равных им углов). Равенство углов можно доказать с помощью известных ранее утверждений об углах, образующихся при пересечении параллельных прямых секущей. Поэтому и проводится прямая, параллельная одной из сторон треугольника. Понять ученикам целесообразность такого дополнительного построения помогает рассматриваемая анимация.

Среди приемов активизации учебной деятельности учащихся на этапе восприятия нового материала используем такие:

a) прием новизны (включение в содержание учебного материала интересных сведений, фактов, исторических данных;

b) прием семантизации (в основе лежит возбуждение интереса благодаря раскрытию смыслового значения слов (пример танго – дотикаюсь, тангенс – касательная (лат), пи – от слова периферия – круг (греч.));

c) прием значимости – создание установки на необходимость изучения материала в связи с его актуальностью в современном мире, эстетической ценностью).

Научиться применять приобретенные знания можно только в процессе активной познавательной деятельности. Активизация познавательной деятельности учащихся на уроках применения знаний, навыков и умений осуществляется средством системы упражнений. В частности, привлечением к системе практических задач, практических работ, устных упражнений по готовым рисункам и электронным динамическим моделям, математическим диктантам. Применение усвоенного математического понятия предполагает такие мыслительные действия, как подведение под понятие (распознавание) и обратная действие – отыскания последствий. Например: система упражнений на распознавание понятия «биссектриса угла» (7-й класс) должен побуждать учеников к таким действиям: вспомнить определение биссектрисы угла; убедиться, что существенные свойства в нем связаны союзом «и»; на основе проверки выполнения каждого из свойств можно сделать вывод о принадлежности (или непринадлежности) луча в понятие биссектрисы данного угла.

Например, "Какие линии на рисунке являются биссектрисами углов? Равные углы обозначены одинаковым количеством дуг (рисунок 3)».

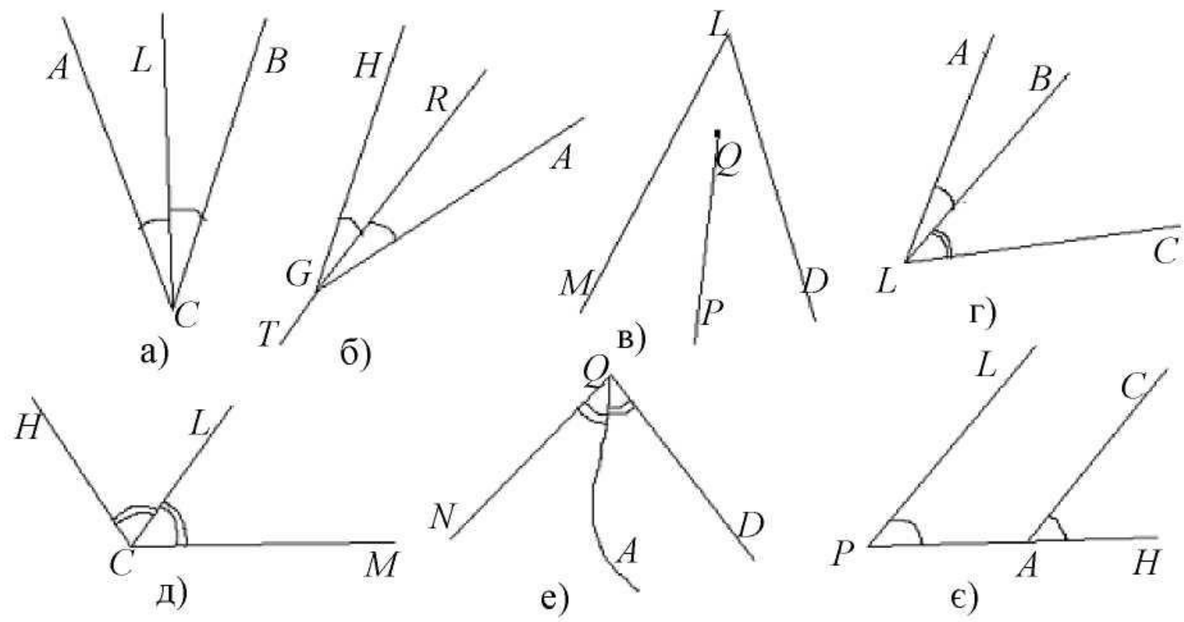


Рисунок 3 – Система упражнений на распознавание понятия «биссектриса угла»

Упражнении на применение понятия чаще всего предусматривают действие отыскания последствий – так, система упражнений на применение понятия равнобедренного треугольника должна предусматривать вывод таких следствий из данного понятия:

1) две стороны равнобедренного треугольника равны;
2) углы при основании равны;
3) биссектриса угла при вершине является высотой и медианой, проведенными к основанию;
4) прямая, содержащая упомянутую биссектрису угла при вершине, является осью симметрии этого треугольника.

Приведем пример таких упражнений:

1. Назовите основание и боковые стороны равнобедренного треугольника ABC, если a = 7 см, b = 5 см, c = 7 см.
2. Назовите основание равнобедренного треугольника KLM, если $\angle K = \angle L = 35°$.
3. В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, вдвое меньше данного основания. Вычислите углы треугольника.
4. В равнобедренном треугольнике с основанием AC проведена биссектриса BK. Найдите точку, симметричную точке A относительно прямой.

Для компетентностного обучения любого предмета важным является этап оценивания учебных достижений. Процесс измерения компетентностей учащихся, приобретенных во время обучения геометрии, невозможен без разработки соответствующих измерителей. В процессе исследования нами уточнен уровень сформированности математической компетентности учащихся основной школы средством геометрического материала.

Первый уровень (уровень воспроизведения) предусматривает прямое применение в знакомой ситуации стандартных приемов, известных алгоритмов и технических навыков, работа со стандартными, знакомыми выражениями и формулами, непосредственное применение свойств геометрических фигур.

Второй уровень (уровень установления связей) основывается на репродуктивной деятельности по решению задач, которые, хотя и не являются типичными, но все же знакомы учащимся или выходят немного за пределы известного. Третий уровень (уровень рассуждений) трактуется как развитие предыдущего уровня. Для решения задач этого уровня требуются определенная интуиция, размышления и творчество в выборе математического инструментария, самостоятельная разработка алгоритма действий.

Система задач для формирования предметных и ключевых компетентностей учащихся основной школы в процессе обучения геометрии. Определяющим критерием математической компетентности учащихся традиционно считается изменение решать задачи. Реализация целей обучения геометрии состоит в применении фактов и методов предмета в качестве средств решения задач. Именно через решение учениками учебных задач реализуются образовательные, воспитательные, развивающие и практические образовательные цели. Поэтому является актуальным поиск соответствующих технологий и методов обучения учащихся решений решать геометрические задачи. Необходимо также определить признаки знаниевой и компетентностной составляющих геометрической задачи для определения ее функций в системе учебных задач.

Поскольку компетентность как результативно-деятельностная характеристика образования, представлена готовностью к целеполаганию, оценке, действию и рефлексии, предполагает опыт самостоятельной деятельности на основе универсальных знаний, максимальная доля изучения нового геометрического материала прорабатывается в процессе решения компетентностных задач. Такие задачи должны быть практически значимыми для учащихся, такими, демонстрирующие межпредметные связи и требующих применения геометрических знаний и имеют практическое применение в собственной повседневной жизни учащихся. С помощью использования компетентностных задач перед учеником встает значимая для каждого из них проблемная ситуация, что, в свою очередь, инициирует активизацию их интеллектуальной самостоятельной деятельности.

Одним из типов задач является компетентностный прикладные геометрические задачи, построенные на определенных материальных объектах.

Отбор задач прикладного содержания должен соответствовать определенным дидактическим требованиям. А именно, поскольку решение задач практического склада является неизвестной составляющей процесса обучения геометрии, такие задачи должны быть во всех разделах курса. Место каждой практической задачи должна определяться тем, что ее решение подготовлено решением предыдущих задач и готовится к решению следующей задачи. Прикладные задачи могут реализовывать различные учебные цели: готовить к изучению или начинать изучение новой теми, способствовать углублению знаний в процессе изучения темы или завершать этот процесс, закреплять и повторять изученный материал. Следует помнить, что задачи прикладного содержания развиваются не только тогда, когда теоретический материал уже усвоен, но и на других этапах обучения.

Содержание нематематического материала в условии прикладной задачи должно быть доступным для учащихся соответствующего возраста. То есть техническая сторона задача должна соответствовать опыту учащихся, опираться на ранее известные понятия и не выходить за пределы учебной программы. Наряду с этим практические задачи должны знакомить учащихся с употребляемыми на практике способами измерения и построения. Нецелесообразно предлагать учащимся задачи, которые не имеют актуальности в современной жизни. Содержание практической задачи должно быть объектом изучения, а не носить иллюстративный характер.

С целью формирования у учащихся умения находить геометрические фигуры в окружающих объектах полезно предлагать им упражнения на анализ реальных объектов и их измерения с определенной точностью. Кроме этого, целесообразно подобрать упражнения, которые требуют распознавания пространственной геометрической фигуры с ее разверткой.

Систематический курс геометрии ставит целью, в частности, усвоение учащимися основ науки, формирование абстрактного мышления и пространственного воображения. Нецелесообразно требовать, чтобы на каждом уроке устанавливалась связь геометрии с жизнью. Поэтому заимствованный из практики заданий материал должен подаваться на уроках геометрии в строго ограниченном объеме, необходимом для углубления и совершенствования знаний, умений и навыков учащихся, формирования соответствующих практических компетенций. Чрезмерное увлечение задачами практического содержания при изучении систематического курса геометрии может сформировать ложное, примитивное отношение к математике.

Для того, чтобы ученики основной школы научились развивать прикладные задачи, нужно чтобы они умели развивать соответствующие абстрактные задачи. Например, в прикладной задаче «Тень от столба, высота которого 9 м, 5 м. Напишите в градусах высоту Солнца над горизонтом» соответствующей абстрактной задачей найти градусную часть угла прямоугольного треугольника, что лежит напротив катета длиной 9 м, если длина другого катета – 5 м. Однако такого умения недостаточно.

Результаты международного сравнительного исследования учебных достижений по математике TIMSS свидетельствуют о недостаточной сформированности умений учащихся основной школы решать практические ситуации средствами математики наряду с высокими результаты применения геометрических знаний и умений к решению абстрактных задач (исследовательская компетентность). Школьникам нужно уметь создавать геометрические модели соответствующих практических ситуаций и оценивать соответствие полученных результатов закономерностям реального мира. Так решения многих прикладных задач по теме «Решение треугольников» основывается на решении прямоугольных треугольников. Для выработки у учащихся умений строить геометрические модели мы предлагали учащимся рассмотреть решения нескольких прикладных задач по электронным средством учебного назначения. Благодаря анимациям школьники наблюдали превращение прикладного рисунка в абстрактный. Например, решение задачи «найдите высоту дерева», которая сопровождается трансформацией рисунка (рисунок 4):

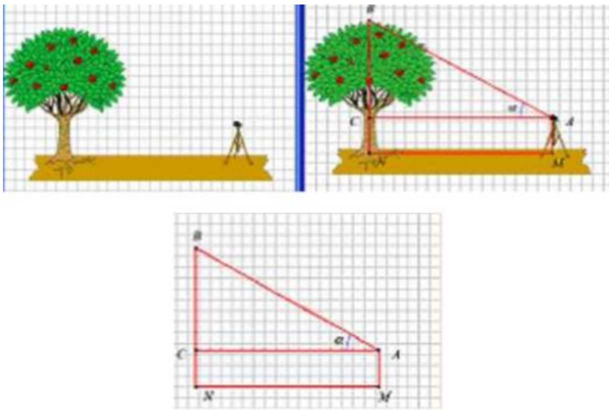


Рисунок 4 – Задача на нахождение высоты дерева

Мыслительные действия учащихся по переходу от прикладной к абстрактной задаче учитываются. В процессе исследования мы наблюдали значительно выше результаты формирования умений решать прикладные задачи по нашей методике. К системе упражнений мы включали такие практические задачи, условия которых помогают ученикам связывать изучение геометрии с окружающей средой и повседневной жизнью.

Например, к теме «Решение треугольников» предлагаются следующие прикладные задачи разного уровнях сложности:

1. С крыши дома, высота которого 12,8 м под углом наклона 32° видно крышу другого дома, высотой 10 м. Найдите ширину улицы, если дома размещены напротив по разные стороны улицы.

2. К вертикальному столбу прикреплены два троса так, как показано на рисунке 5. Найдите длину большего троса.

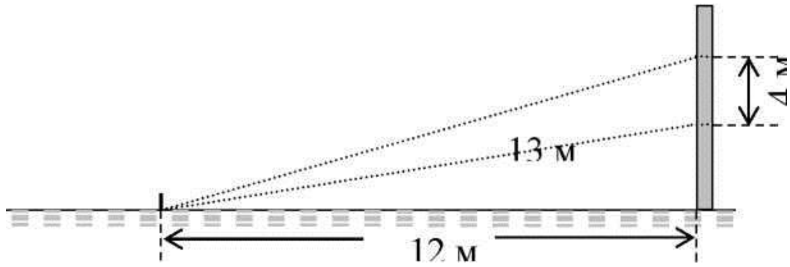


Рисунок 5 – Найдите длину большего троса

3. Найдите длину газопровода ABCDE, схема которого изображена на рисунке 6.

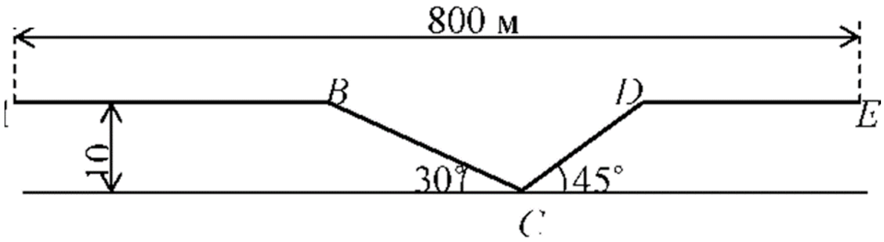


Рисунок 6 – Найдите длину газопровода ABCDE

4. Вычислите радиус меньшего круга в конструкции рамы окна, наружная часть которой имеет форму полукруга радиуса R (рисунок 7).

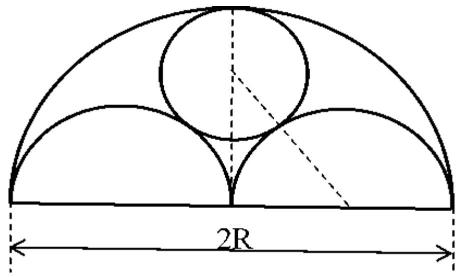


Рисунок 7 – Вычислите радиус меньшего круга в конструкции рамы окна

Для формирования у учащихся основной школы ключевых и предметных компетентностей полезно применять практические работы по геометрии. Такие работы связаны с измерениями и вычислениями, моделированием геометрических фигур, построением геометрических фигур в геометрических преобразованиях, определение расстояния до недоступной точки, расстояния между двумя недоступными точками и др. Практические работы обеспечивают формирование у учащихся конструктивных умений вследствие многократного выполнения практических действий с использованием чертежных инструментов, применение усвоенного теоретического материала на практике, углубление знаний, умений, которые активизируют познавательную деятельность. Выполняя практические работы, учащиеся убеждаются в справедливости геометрических фактов.

Например, после изучения формулы вычисления площади параллелограмма полезно предложить учащимся практическую работу с такой последовательностью действий:

1) вырежьте шаблон параллелограмма. Отметьте его основу и высоту;

2) разрежьте шаблон по линии, являющейся высотой;

3) из образованных фигур сложите прямоугольник (рисунок 8);

4) сравните площади параллелограмма и образованного прямоугольника, сделайте вывод;

5) запишите формулу для вычисления площади параллелограмма, используя формулу площади прямоугольника.

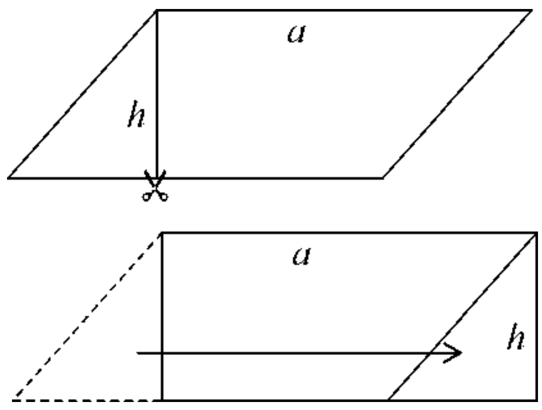


Рисунок 8 – Сложите прямоугольник

Уровень выполнения практических работ в значительной степени зависит от сформированности у учащихся умений выполнять основные построения, измерения, вычисления с приближенными данными. Имеется в виду прежде всего формирование практических умений, связанных с чертежными и измерительными инструментами. Педагогические исследования показывают, что формирование таких умений является успешным при условии правильного сочетание словесного объяснения с наглядными пособиями действий чертежными инструментами, что дает полную ориентировочную основу действий.

Практические работы по геометрии способствуют формированию у учащихся исследовательской компетентности. Например, при изучении первой формулы площади треугольника полезной будет коллективная практическая работа, во время которой ученики должны измерять стороны и высоты изготовленного из бумаги треугольника. Результаты записываются на доске без обозначений соответствующих отрезков:

Стороны: 24 см, 21 см, 29 см

Высоты: 16,5 см; 20,5 см; 23,5 см

Далее учитель предлагает вычислить площадь данного треугольника. Ученики не помнят соответствия сторон и высот. Возникает проблема, решаемая фактом однозначности площади треугольника. Ученики делают вывод о том, что наибольшая высота проведена до наименьшей стороны. Теперь площадь треугольника можно вычислить тремя способами. Далее встает вопрос о неточности измерений и приближенные вычисления. Таким образом задача на прямое применение формулы превращается в настоящую проблемную ситуацию и средство формирования компетентностей.

Современные цели и требования к результатам геометрического образования предусматривают воспитание у учащихся дивергентного мышления, направленного, в частности, на отыскание различных вариантов решения той самой задачи. В исследовании [7] установлено, что дивергентное мышление учащихся формируется в процессе их аналитико-синтетической деятельности такими приемами, как анализ через синтез, выполнение дополнительных построений, решения задач различными способами и тому подобное. Практическая реализация формирования у учащихся 7-9 классов таких приемов мыслительной деятельности осуществлялась с помощью геометрических упражнений на изображение и распознавание геометрических фигур, их пересечения и объединения, установление истинности геометрических утверждений (заполнение пропусков в формулировке определений и свойств геометрических фигур) и тому подобное. Важным механизмом формирования дивергентного мышления является интуиция. Современные психологические исследования свидетельствуют о наличии таких этапов действия интуиции у человека во время решения задачи (проблемы), как: накопление в памяти образов и абстракций понятий; их бессознательное преобразования и комбинирования с целью решения задачи; четкое осознание задачи; ее неожиданное решение [7, с.37]. Таким образом, интуиция у ребенка может сработать, если задача поставлена, а акцент с интеллектуальной перенесен на эмоциональную, чувственную сферу. Возможны следующие пути развития интуиции учащихся во время решения задачи: актуализация знаний, нужных для решения (постановка наводящих вопросов, переформулирования условия задачи); поиск связей между элементами знаний (выяснение родо-видовых отношений, выполнение дополнительных построений); поиск путей решения задачи; вариативность этапов решения; игнорирование избыточной информации. Учителю следует поощрять учеников к интуитивным соображениям, поскольку следующим образом школьники учатся строить гипотезы, прогнозировать результаты своей деятельности, принимать решения.

Для определения признаков знаниевой и компетентностной составляющих геометрической задачи обозначим понятия компетентностно-ориентированной геометрической задачи как задачи, решение которой предполагает применение полученных знаний в условиях определенной неопределенности, за пределами учебной ситуации, побуждает учащихся к мыслительной деятельности, а не воспроизведение информации или выполнения известных алгоритмов. Для этого рассмотрим типологии геометрических задач по характеру их компонентов.

По характеру условия различают следующие типы:

- с полным условием;
- с неполным условием (неопределенные задачи);
- с избыточным условием;
- с условием, что содержит противоречия.

Задачи с полным условием обычно являются тренировочными или обучающими. Другие типы задач по такой классификации следует отнести к компетентностно-ориентированным. Педагогические наблюдения свидетельствуют о том, что процесс решения задач упомянутого типа должен быть управляемым.

Рассмотрим следующие задачи:

1. Стороны параллелограмма имеют длину 3 см и 5 см, а высота – 4 см. Вычислите площадь параллелограмма.
2. Стороны параллелограмма имеют длину 4 см и 5 см, а высота – 3 см. Вычислите площадь параллелограмма.

Большинство учеников опускают факт отсутствия указания по размещению известной высоты параллелограмма. Полученное решение не проверяется ими по условию задачи. Это свидетельствует неполноте сформированности навыков решения геометрических задач, в частности, а также, геометрических и ключевых компетентностей в целом.

Задача «В треугольнике одна сторона имеет длину 10 см, а вторая 8 см Найдите длину третьей стороны» является неопределенной (с неполным условием). Для компетентностного подхода в обучении геометрии важно, чтобы ученики не ограничивались констатацией невозможности получения точного решения, но увидели возможность оценить его границы ($2 < a < 18$). Для этого на начальном этапе формирования соответствующих компетентностей желаемый результат решения таких задач нужно отображать в ее требовании («В каких числовых пределах находится длина третьей стороны?»).

Геометрические задачи с избыточным условием способствуют формированию умения анализировать условие, находить и отбрасывать лишние данные. При этом лишними могут быть разные данные для разных учеников. Например, в задаче «найти площадь прямоугольника по известным длинам стороны, диагонали и углу между диагоналями» отдельные учащиеся находят площадь, как половину произведения длин диагоналей на синус угла между ними (таким образом данная длина стороны является лишней), другие вычислят сторону прямоугольника по теореме Пифагора и пытаются найдут площадь как произведение сторон (данное значение угла лишнее). Возможен вариант решения, когда лишней станет длина диагонали. Использование различных способов решения задач является полезным для их сравнения, выработка у учащихся навыков самоконтроля, а главное, формирования у них соответствующих предметных и ключевых компетентностей.

Геометрическая задача, условие которой содержит противоречия, не имеет решения. Важно, чтобы у учащихся выработалась потребность анализировать условие задачи на предмет противоречия. Например, задача «Вычислите площадь треугольника, стороны которого равны 10 см, 19 см и 8 см» не имеет решения, поскольку не существует такого треугольника. Решение таких задач воспитывает у учащихся потребность анализировать условие задачи до начала ее решения, чтобы избежать лишней работы.

Следовательно, геометрические задачи каждого из этих типов выполняют определенные развивающие функции и способствуют формированию у учащихся предметных и ключевых компетентностей. Полезно варьировать условие задачи для изменения способа ее решения. Это способствует выработке у учащихся обобщенных умений, формированию самостоятельного мышления.

ГЛАВА 2 ПОВЫШЕНИЕ УРОВНЯ ПРЕДМЕТНОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ В СТАРШИХ КЛАССАХ

2.1 Основные требования к предметным знаниям обучающихся

В ФГОС одним из требований для школьников является умение применять теоремы при решении задач, создании и исследовании геометрических моделей. [40, с.12].

Базисный учебный план на изучение математики в основной школе по программе Т.А. Бурмистровой, отводит 3 учебных часа в неделю на изучение алгебры и 2 учебных часа в неделю на изучение геометрии. Всего 315 уроков по алгебре, и 210 уроков по геометрии в год.

Рассмотрим примерную образовательную программу основного общего образования по математике в 7-9 классах [34, с.85].

В требованиях к результатам освоения содержания курса математики по программе Т.А. Бурмистровой указаны следующие требования: личностные, метапредметные, предметные.

К личностным требованиям относится: критичность мышления; умение отличать гипотезу от факта, активность при решении геометрических задач; эмоциональное восприятие математических объектов, задач, решений, рассуждений.

Метапредметные требования включают в себя умения: строить логические рассуждения; применять альтернативные способы рассуждений, видеть различные стратегии решения задач.

Предметные требования связаны с умением: работать с математическим и геометрическим текстом, применять математическую терминологию; решать квадратные уравнения, применять полученные знания для решения задач из математики; проводить логические обоснования, доказательства математических утверждений.

В геометрии различают задачи трех типов: на доказательство, построение и вычисление. Такое разделение является условным, так как одну и ту же задачу можно отнести к разным типам, изменив формулировку вопроса (требования). Например: задача «Найдите периметр треугольника с вершинами в серединах сторон данного треугольника со сторонами a, b и c» – на вычисление. Изменив ее требование: «Докажите, что периметр треугольника с вершинами в серединах сторон данного треугольника со сторонами a, b, c равен $\frac{a+b+c}{2}$», получим задачу на доказательство.

Можно считать, что задачи на доказательство являются теоремами, не вошедшими в основной школьный курс геометрии.

Проведем небольшой анализ учебников геометрии на предмет наличия в них задач на доказательство. Результаты покажем в Таблице 1.

Таблица 1 – Анализ учебников по Геометрии в школьном курсе на наличие задач на доказательства

Учебник	Всего заданий в учебнике	Из них на доказательство	Процент от общего числа заданий
Атанасян Л.С. и др. «Геометрия 7-9»	1229	427	34,7%
Погорелов А.В. «Геометрия 7-9»	791	203	25,7%
Шарыгин И.Ф. «Геометрия 7-9»	1471	369	25%

Проанализируем изменение числа задач на доказательство в зависимости от класса (Таблица 2)

Таблица 2 – Динамика изменения процентного соотношения заданий на доказательство в учебниках геометрии

учебник класс	Атанасян Л.С. и др. «Геометрия 7-9»	Погорелов А.В. «Геометрия 7-9»	Шарыгин И.Ф. «Геометрия 7-9»	Средний процент
7	52%	36%	22,8%	37%
8	35,5%	25,5%	25,9%	29%
9	24%	17,5%	27,5%	22,9%

Результаты анализа показывают, что в учебниках Атанасяна Л.С. т Рлшлоедлва А.В. наблюдается значительное снижение числа задач на доказательство к 9 классу, а в учебнике Шарыгина И.Ф. эти задачи распределены более равномерно.

Как решить задачу на доказательство? Какие методы и приемы для этого использовать? Коротко на эти вопросы можно ответить так: задачи на доказательство нужно решать так, как доказываются теоремы школьного курса геометрии. Но такой ответ не поможет учащимся. Дело в том, что на уроках математики теоремы обычно доказывает учитель, а учащимся отводится пассивная роль зрителя, слушателя. От них требуется закончить это доказательство и заучить его. Надолго в памяти остаются лишь формулировки теорем, поскольку на последние приходится часто ссылаться.

Вот почему к решению задач на доказательство нужно серьезно подходить с самого начала изучения первых теорем геометрии и строить работу с учащимися, поэтапно формулируя у них следующие умения:

- умение «видеть» то, что изображено на чертеже (1-й этап);
- умение записывать условие и требование задачи (2-й этап);
- умение делать чертеж к задаче (3-й этап);
- умение решать задачу самостоятельно (4-й *; этап).

В дальнейшем следует уделить внимание формированию:

- умения выполнять дополнительные построения;
- умения выбирать метод решения.

Поясним на примерах, как учитель может организовать работу в каждом случае.

Развитие умения «видеть» то, что изображено на чертеже. Речь идет об умении находить на чертеже данные и искомые величины, устанавливать зависимость между ними и затем, используя ее и ранее полученные знания, приходить к требуемому выводу.

Приведем пример. Учитель вывешивает на доске заранее приготовленный плакат с чертежом (рисунок 9), а рядом с ним записывает в виде Таблицы 3 условия трех задач.

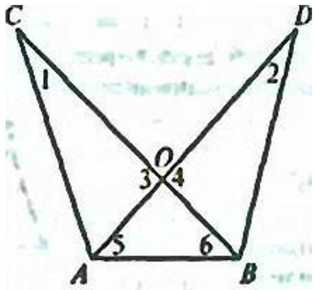


Рисунок 9 – Пример задачи

Таблица 3 – Условия задач к рисунку 9

Задача 1	Задача 2	Задача 3
Дано: AD = BC; ∠5 = ∠6. Доказать: AC = BD.	Дано: AC = BD; ∠CAB = ∠DBA. Доказать: AD = BC.	Дано: AD = BC; OA = OB. Доказать: ∠1 = ∠2.

Работа с учащимися проходит следующим образом. Задача 1 решается устно с привлечением наводящих вопросов учителя (в скобках приведены ответы учащихся).

1. В какие треугольники входят данные и искомые величины? (В треугольники ABD и BAC.)

2. Есть ли у этих треугольников общий элемент? Если есть, то какой? (Да, сторона AB.)

3. По какому признаку равны указанные треугольники? (По I признаку: AB = BC, ∠5 = ∠6, AB — общая сторона.)

4. Какие еще стороны равны у этих треугольников? (Стороны AC и BD.)

Затем один из учащихся записывает решение задачи на доске, а остальные – в тетрадях. Приведем запись решения.

Решение. AD = BC по условию, ∠5 = ∠6 по условию, AB =BA – общая сторона треугольников ABD и BAC. Тогда ΔABD = ΔBAC по I признаку. Из равенства треугольников следует, что AC= BD.

Задачи 2 и 3 ученикам предлагается решить самостоятельно. Полезно обсудить разные способы решения последней задачи.

Развитие умения записывать условие и требование задачи. Учащиеся знакомятся с текстом задачи (его читает учитель или они сами по учебнику), а чертеж к ней дает учитель. Затем дети самостоятельно записывают условие и требование задачи.

Задача 1. Докажите, что в равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, равны.

Ученикам дается чертеж (рисунок 10). Запись условия и требования задачи выглядят так:

Дано: ΔABC, $AB = BC$, AA_1 – медиана, CC_1 – медиана.

Доказать: $A A_1 = CC_1$.

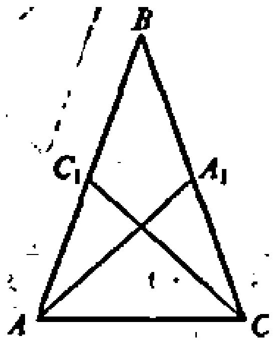


Рисунок 10 – ΔABC

Формирование умения делать чертеж к задаче. Учащимся дается текст задачи, а также краткая запись условия и требования и предлагается самостоятельно выполнить чертеж.

Задача 2. Докажите, что если две высоты треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

Дано: ΔABC, AA – высота, CC_1 – высота, $AA_1 = CC_1$.

Доказать: ΔABC – равнобедренный.

Учащиеся сами выполняют чертеж (рисунок 11).

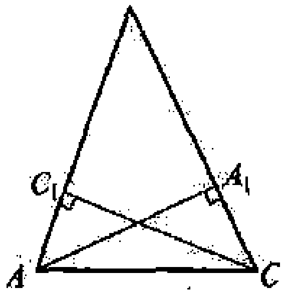


Рисунок 11 – ΔABC

Таким образом, к завершению третьего этапа начального обучения решению геометрических задач учащиеся уже понимают, что значит доказать то или иное положение, умеют выделять условия и требование задачи, знают, в чем состоит назначение чертежа.

Еще одним предметным результатом согласно ФГОС, является навыки самостоятельного решения задач.

Самостоятельное решение задач. Перед тем как давать учащимся задачи для самостоятельного решения, учителю необходимо разобрать в классе пример вместе с учениками.

Задача 3. Внутри треугольника ABC дана точка O. Докажите, что ΔBOC > ΔBAC.

Чертеж (рисунок 12), запись условия и требования выполняются на доске и в тетрадях под руководством учителя.

Дано: ΔABC, O – внутренняя точка.

Доказать: ΔBOC > ΔBAC.

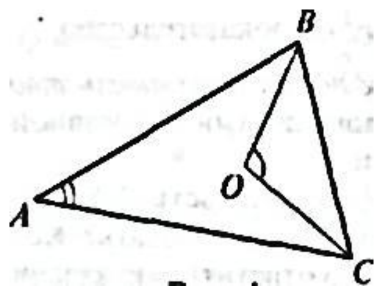


Рисунок 12 – ΔABC

Учитель дает указание: «Через точку O проведите отрезок AA_1 (A_1 є BC), введите в рассмотрение углы 1-6 (рисунок 13) и примените теорему о внешнем угле треугольника». Само доказательство выполняется учащимися. Вот их рассуждение.

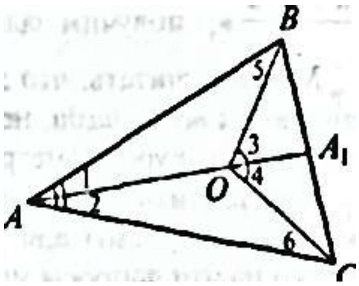


Рисунок 13 – ΔABC

По теореме о внешнем угле треугольника имеем: ∠3 = ∠l + ∠5, ∠4 = ∠2 + ∠6.

Сложив равенства, получим: ∠3 + ∠4 = (∠l + ∠2) + (∠5 + ∠6), откуда ∠3 + ∠4 > ∠l + ∠2, т.е. ΔBOC > ΔBAC.

Задачи на доказательство нужно решать на протяжении всего курса геометрии в VII классе. К сожалению, в стабильных учебниках, особенно в первых параграфах, почти нет легких (решающихся в 1-2 шага) задач на доказательство, поэтому приведем несколько их примеров (оформим их как задачи по готовым чертежам). Аналогичные задачи учитель может составить и сам.

1. Дано: AC = BD (рисунок 14).

Доказать: AB = CD.

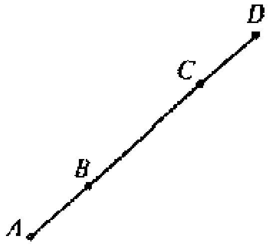


Рисунок 14 – Задача 1

2. Дано: OB ⊥ OД, OA ⊥ OC (Рисунок 15).

Доказать: ΔAOB = ΔCOD.

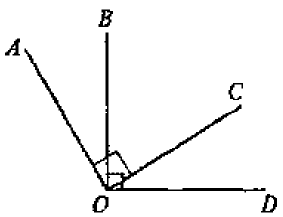


Рисунок 15 – Задача 2

3. Дано: OA ⊥ OB, OD ⊥ OC (Рисунок 16).

Доказать: ∠COB + ∠DOA = 180

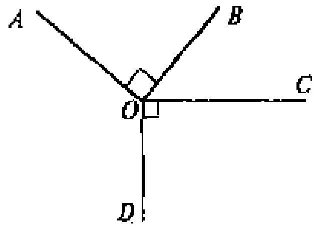


Рисунок 16 – Задача 3

4. Дано: ∠2 = ∠4, ∠2 = ∠3 (Рисунок 17).

Доказать: CD⊥AB.

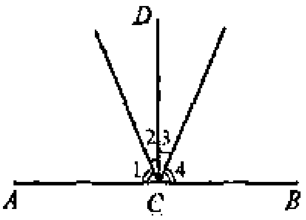


Рисунок 17 – Задача 4

5. Дано: ∠2 = ∠4 (Рисунок 18).

Доказать: ∠l = ∠5; ∠l = ∠4; ∠2 + ∠3 = 180°.

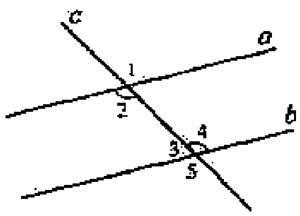


Рисунок 18 – Задача 5

6. Дано: BC = AD, ∠l = ∠2 (Рисунок 19).

Доказать: ΔACB = ΔCAD.

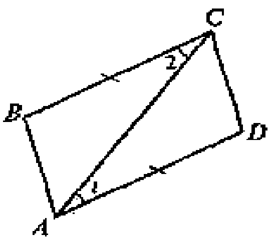


Рисунок 19 – Задача 6

6. Дано: AD – биссектриса угла BAC, AB = AC (Рисунок 20).

Доказать: DC = DB.

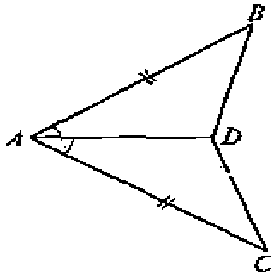


Рисунок 20 – Задача 7

7. Дано: AB = CD, BC = AD, O – общая точка прямых AC и BD (Рисунок 21).

   Доказать: AB || CD; BC || AD.

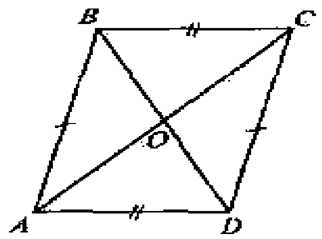


Рисунок 21 – Задача 8

9. Дано: ∠l = ∠2, ∠3 = ∠4 (Рисунок 22).

Доказать: ΔABC = ΔADC

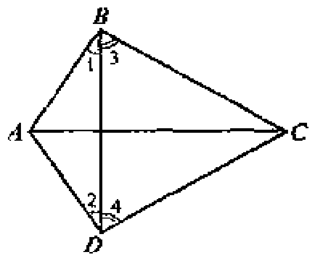


Рисунок 22 – Задача 9

10. Дано: AB || CD, MN – секущая, MK – биссектриса ∠BMN, NK – биссектриса ∠MND (Рисунок 23).

Доказать: MK⊥ NK.

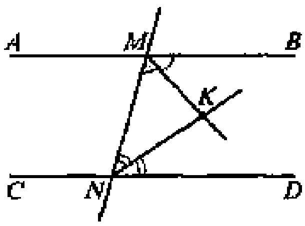


Рисунок 23 – Задача 10

Развитие умения выполнять дополнительные построения так же относится к предметным умениям по ФГОС.

Рассмотрим, например, задачу: «В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90$) проведена медиана CD. Докажите, что CD = DB».

В данном случае возможны два различных дополнительных построения, приводящие к двум способам решения задачи.

Во-первых, можно отложить на луче CD отрезок DE = DC и свести решение к доказательству равенства гипотенуз треугольников ACB и EBC (рисунок 14), откуда следует, что CD = BD.

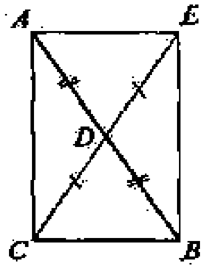


Рисунок 24 – Доказательство равенства гипотенуз треугольников ACB и EBC

Во-вторых, можно провести к катетам треугольника ABC отрезки DM $\perp$ BC и DN $\perp$ AC и, опираясь на равенство образовавшихся прямоугольных треугольников, показать, что треугольник CDB – равнобедренный (рисунок 15).

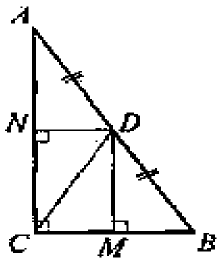


Рисунок 25 – Треугольник CDB – равнобедренный

Полезно не только обсудить, но и сравнить оба способа решения. Заметим, что к этой задаче стоит вернуться в VIII классе при изучении свойств прямоугольника. Для доказательства того, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна ее половине, достаточно достроить треугольник до прямоугольника и воспользоваться свойством диагоналей.

Умение выбирать метод решения. После решения каждой задачи следует остановиться на том, какие теоремы были в нем использованы. Также очень важно в начале изучения курса геометрии применять метод доказательства от противного.

Рассмотрим, как это можно сделать, например, при решении последней задачи. Предварительно учитель объясняет, в чем состоит метод доказательства от противного: сначала предполагается, что доказываемое утверждение неверно, затем в ходе рассуждений выясняется, что такое предположение само приводит к неверным умозаключениям.

Для отрезков CD и DB может выполняться одно из условий: CD = DB, CD < DB или CD > DB (рисунок 16). Учащиеся устанавливают, что ни одно, ни другое неравенство невозможно. Разобьем доказательство на две части.

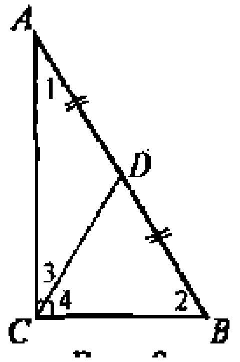


Рисунок 26 – Прямоугольный треугольник ABC

1. Докажем, что CD не может быть больше DB.

Допустим, что CD> DB, в таком случае ∠2 > ∠4 (из треугольника CDB). Учитывая, что AD=DB, получим ∠l > ∠3 (из треугольника ACD). Тогда ∠l + ∠2 > ∠3 + ∠4 или 90° > 90°, что неверно!

2. Доказательство того, что CD не может быть меньше DB, проводится аналогично.

Итак, возможен только один случай: CD = DB.

Перечислим некоторые утверждения и теоремы школьного курса геометрии, которые могут быть доказаны методом от противного.

1. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.
2. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона.
3. Если стороны одного треугольника соответственно параллельны сторонам другого треугольника, то соответствующие углы этих треугольников равны.
4. Произвольный треугольник нельзя разрезать на два остроугольных треугольника.
5. Внешний угол треугольника равен сумме его внутренних углов, с ним не смежных.

2.2 Методические рекомендации по обучению доказательству и применению теорем школьного курса геометрии основной школы как одному из основных средств формирования предметных результатов

В ходе исследования мы выявили основные проблемы, с которыми сталкиваются учащиеся при решении задач на доказательство, кроме того для формирования предметных умений мы разработали специальную программу, которая позволит одновременно решить несколько задач:

– формирование умений у учащихся по решению задач на доказательство (№25 ОГЭ);
– формирование предметных результатов при обучении решению задач на доказательство.

Планируемые предметные результаты:

- формирование навыков поиска математического метода, алгоритма и поиска решения задачи в структуре задач ОГЭ;
- формирование навыка решения определенных типов задач в структуре задач ОГЭ;
- уметь работать с таблицами, со схемами, с текстовыми данными; уметь преобразовывать знаки и символы в доказательствах и применяемых методах для решения образовательных задач;

- приводить в систему, сопоставлять, обобщать и анализировать информационные компоненты математического характера и уметь применять законы и правила для решения конкретных задач;
- выделять главную и избыточную информацию, производить смысловое сжатие математических фактов, совокупности методов и способов решения; уметь представлять в словесной форме, используя схемы и различные таблицы, графики и диаграммы, карты понятий и кластеры, основные идеи и план решения той или иной математической задачи.

Разработанная программа рассчитана на 10 часов. Предлагается для учащихся в классах с углубленным изучением математики, при необходимости его можно применять в общеобразовательных классах. Программа предусматривает формирование предметных умений, устойчивого интереса к предмету, появление и развитие математических способностей, выбор профиля дальнейшего обучения.

Цель данной программы: обучение методам и способам доказательств, совершенствование навыков решения задач на доказательство по темам: «Треугольник», «Четырёхугольник», «Окружность», «Подобие»

Задачи программы:

– научить проводить доказательственные рассуждения при решении задач, используя известные теоремы, обнаруживая возможности для их использования;

– научить использовать дополнительные построения, алгебраический аппарат, идеи симметрии при решении задач на доказательство;

– подготовить учащихся к решению заданий типа В25 ОГЭ по математике в 9 классе.

В Таблице 4 представлено учебно-тематическое планирование материала программы.

Таблица 4 – Учебно-тематическое планирование материала программы

№	Тема	Кол-во часов	Форма занятия
1.	Вводное занятие. Геометрические задачи на доказательство.	1	Урок-диалог
2.	Решение геометрических задач на доказательство по теме: «Треугольники».	2	Лекция Практикум
3.	Решение геометрических задач на доказательство по теме: «Четырёхугольники».	2	Лекция Практикум
4.	Решение геометрических задач на доказательство по теме: «Окружность».	2	Лекция Практикум
5.	Решение геометрических задач на доказательство по теме: «Подобие».	2	Лекция Практикум
6.	Итоговая проверочная работа.	1	Проверочная работа

Практические задачи.

Задача №25 Представляет собой планиметрическую задачу на доказательство, связанную со свойствами треугольников, четырехугольников, окружностей.

Типичные ошибки: Неправильно выполнен рисунок Использование данных, которых нет в условии Нет ссылок на используемые теоремы и свойства.

Для начала перечислим, что нужно помнить, при решении 25 задачи:

1) треугольники и их элементы: признаки равенства треугольников; признаки подобия треугольников; свойства сторон и углов треугольника; площадь; свойства медианы; биссектрисы и высоты треугольника; средняя линия и серединный перпендикуляр треугольника; равнобедренный, равносторонний и прямоугольный треугольники; окружность, описанная около треугольника и вписанная в треугольник;

2) окружности и их элементы: понятие окружности, круга и их элементов; взаимное расположение прямой и окружности; свойства хорд окружности; касательные и секущие к окружности; свойства углов в окружности; свойства вписанных углов; взаимное расположение двух окружностей; общие касательные двух окружностей;

3) четырехугольники и их элементы: виды четырехугольников и их свойства; вписанные и описанные четырехугольники; правильные многоугольники.

Треугольники и их элементы. Окружность и ее элементы. Задача №25. В окружности с центром O проведены две хорды AB и CD так, что центральные углы AOB и COD равны. На эти хорды опущены перпендикуляры OK и OL. Докажите, что OK и OL равны.

Начинаем решение с рисунка (рисунок 17)

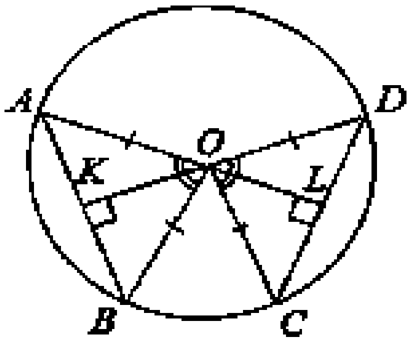


Рисунок 27 – Равенство OK и OL

Доказательство: Треугольники AOB и COD равны по двум сторонам и углу между ними (AO = BO = CO = DO как радиусы окружности, $\angle$AOB = $\angle$COD по условию). Следовательно, высоты OK и OL равны как соответственные элементы равных треугольников.

Четырехугольники и их элементы. Окружность и ее элементы. Задача №25 В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы ABD и ACD равны. Докажите, что углы DAC и DBC также равны.

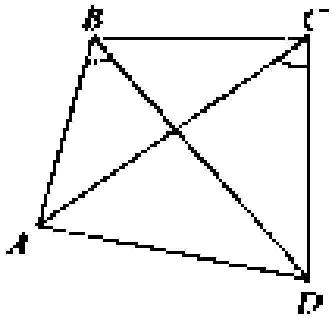


Рисунок 28 – Четырехугольник ABCD

Доказательство:

1) ∠ABD и ∠ACD опираются на отрезок AD и равны друг другу. Значит мы можем провести окружность через точки AD и вершины этих углов. Эти углы окажутся вписанными в окружность, опирающимися на одну дугу. Получится, что мы описали окружность вокруг четырехугольника.

2) Заметим, что углы DAC и DBC тоже являются вписанными и опирающимися на одну и ту же дугу, т.е., используя теорему о вписанном угле, получаем, что они равны друг другу . ч.т.д.

Окружность и ее элементы. Треугольники и их элементы. Четырехугольники и их элементы Задача №25 Четырёхугольник ABCD можно вписать в окружность, продолжения его сторон AD и BC пересекаются в точке K. Требуется доказать подобие треугольников KAB и KCD.

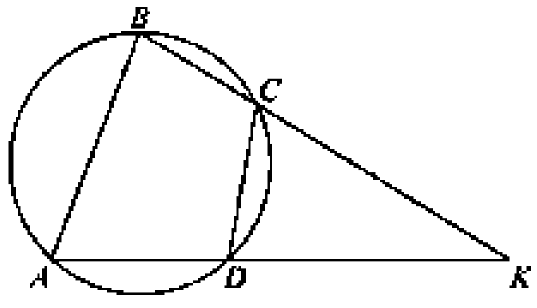


Рисунок 29 – Подобие треугольников KAB и KCD

Доказательство: Поскольку четырёхугольник ABCD вписанный, сумма углов ABC и ADC равна 180°, значит ∠ABC= 180° − ∠ADC и ∠KDC =180° − ∠ADC (так как смежные). Получаем, что в треугольниках KAB и

KCD углы ABK и CDK равны, угол K общий, следовательно, эти треугольники подобны.

Для подтверждения эффективности выдвинутой гипотезы нами был проведен контрольный срез предметных умений учащихся 9-х классов. Нами были выбраны 2 класса с примерно равными показателями среди учащихся: 9-А и 9-Б класс.

К системе школьных занятий 9-А класса была применена разработанная нами программа. А для 9-Б класса система занятий осталась стандартной. Всего в исследовании участвовало по 20 человек из каждого класса.

По окончании проведения исследования мы получили следующие показатели (Таблица 5).

Таблица 5 – Число учеников с высокими показателями предметных результатов

Предметные результаты	9-А	9-Б
Поиск математического метода, алгоритма и решения задачи в структуре задач ОГЭ	14	10
Решение определенных типов задач в структуре задач ОГЭ	15	11
Умение работать с таблицами, со схемами, с текстовыми данными; умение преобразовывать знаки и символы в доказательствах и применяемых методах для решения образовательных задач	17	9
Умение приводить в систему, сопоставлять, обобщать и анализировать информационные компоненты математического характера и уметь применять законы и правила для решения конкретных задач;	13	12
Умение выделять главную и избыточную информацию, производить смысловое сжатие математических фактов, совокупности методов и способов решения; уметь представлять в словесной форме, используя схемы и различные таблицы, графики и диаграммы, карты понятий и кластеры, основные идеи и план решения той или иной математической задачи.	16	8

Как показывают данные Таблицы 5, в классе, где применялась разработанная нами программа показатели сформированных предметных результатов выше по всем пунктам.

В заключении заметим, что успех в обучении учащихся доказательству теорем определяется не применением одного какого-нибудь приема или метода, а системой преподавания в целом. В значительной степени этот успех зависит от того, на каком уровне сформированы у учащихся такие интеллектуальные умения, как понимание предложенной задачи, умение сформулировать проблему, спланировать деятельность, выделить существенное в наблюдаемых явлениях, провести исследование, интерпретировать полученные данные, провести измерения в нестандартных ситуациях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа была посвящена методике формирования предметных результатов при обучении решению задач на доказательство и применение теорем школьного курса математики основной школы, основной целью которой было выявить методические основы обучения школьников решению задач на доказательство и применение теорем курса математики основной школы.

Формирование ключевых компетентностей происходит на основе отраслевых компетентностей и предметных. Среди отраслевых компетентностей важное значение имеют математические компетентности, поскольку математические понятия, аксиомы, теоремы и теории имеют своим источником реальность и, вместе с тем, предназначенные для исследования реальности с помощью математических моделей. Овладение математическим методом познания действительности составляет основу для формирования математической компетентности. В контексте компетентностного обучения меняются также подходы к оценке учебных достижений учащихся как составляющей учебного процесса. Как отмечается в общих критериях оценивания учебных достижений учеников в системе общего среднего образования, учебная деятельность в конечном итоге должна не просто дать человеку сумму знаний, умений и навыков, а сформировать его компетентность как общую способность, базирующаяся на знаниях, опыте, ценностях, способностях, приобретенных благодаря обучению.

Осуществление указанного перехода к компетентностной модели обучения в контексте школьного математического образования, прежде всего, предусматривает: принципиально новое целеполагание в педагогическом процессе;

обновление структуры и содержания обучения математике; определение и оценка результатов обучения через ключевые и математическую компетентности ученика (в отличие от традиционных знаний, умений и навыков).

1. Целеполагание в методической системе компетентностного обучения занимает особое место. Оно должно пронизывать весь процесс обучения и выполнять функции мотивации деятельности учащихся. Организация целеполагания включает деятельность школьника, деятельность учителя и их совместную деятельность, поскольку невозможно реализовать новые образовательные цели, если ученик пассивно усваивает учебный материал. Необходимо направлять его учебно-познавательную деятельность к самостоятельному поиску, в процессе которого приобретается опыт целеполагания, рефлексивной самоорганизации и самооценки, опыт коммуникативного взаимодействия.

2. Содержание образования – система научных знаний, навыков и умений, овладение которыми обеспечивает всестороннее развитие способностей учащихся, формирование их мировоззрения, обретение социального опыта, подготовку к общественной жизни и к профессиональной деятельности. В традиционной, ориентированной образовательной системе, которая характеризуется абсолютизацией знаний, заранее определенной однозначностью трактовок и выводов, которые учитель доносит до учеников, приоритетная акцентуация делается на первой части (знаниях, навыках и умениях) приведенного определения. В контексте компетентностного подхода, содержание образования предполагает опыт осуществления известных способов деятельности, воплощающийся вместе со знаниями, умениями и навыками в опыт творческой, поисковой деятельности по решению новых проблем, преобразованию ранее усвоенных знаний в новые способы деятельности. Компетентностный подход базируется на понимании динамичности (межпредметности) знаний, усилении самостоятельности и активности ученика, вовлечение в образовательный процесс его личностной сферы.

3. Компетентностный подход к обучению предполагает формирование мотивированной компетентной личности, способной быстро ориентироваться в информационном пространстве, принимать обоснованные решения и решать проблемы на основе полученных знаний, умений и навыков. Его реализация требует формирования и развития у учащихся способности практически действовать, применять индивидуальный опыт успешных действий в различных ситуациях, а следовательно — переориентации процесса обучения на его результат, выраженный в деятельностном измерении.

Однако, как свидетельствует анализ государственных требований к уровню математической подготовки учащихся, деятельностную составляющую результатов обучения не отражено в диапазоне всех ее составляющих. Вне поля зрения остаются мотивация, способы организации учебной деятельности, обучение учащихся рефлексии и оцениванию собственных достижений, креативные способности и тому подобное. Это означает, что требования к учебным достижениям учащихся, которые должны быть определены в новой программе с математики, должны ориентироваться не только на чисто предметное их нормирование (в современных условиях такой базовый контекст уже недостаточен), но и учитывать аксиологический, мотивационный, когнитивный, информационный, интеллектуальный, общекультурный, коммуникативный, мировоззренческий компоненты результата обучения математики. Все названные компоненты входят в состав математической и ключевых компетентностей, которые формируются образовательной областью «Математика».

Объективной проблемой внедрения компетентностного подхода к обучению математики является необходимость технологической адаптации учебно-воспитательного процесса в соответствии с новыми требованиями. Традиционными педагогическими технологиями, разработанными для знающего подхода, невозможно продуктивно формировать компетентности учащихся. Следовательно, встает задача обновления арсенала педагогических технологий, которыми владеют учителя математики, как процессуального условия реализации компетентностного подхода к обучению. Обеспечение готовности учителя к реализации новых задач в личностном и профессиональном измерении выступает обязательным условием внедрения компетентностного подхода к обучению.

В результате выполненной работы решены следующие задачи:

– проанализирован теоретический и задачный материал по теоремам, представленный в учебниках различных авторов;

– выявлены основные цели и задачи обучения теоремам;

– выделены основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме теоремы;

– разработаны методические рекомендации по обучению доказательству и применению теорем школьного курса математики основной школы.

В результате можно сделать такие выводы:

1. В основном изучение теорем начинается в 8 классе.

2. В курсе математики за 7-9 класс можно встретить следующие теоремы: теорема Виета, теорема Безу, теоремы Чевы и Менелая, Фалеса и Вариньона, теорема Пифагора, теорема Эйлера, формула Герона.

3. Самыми распространёнными теоремами являются теорема Пифагора и теорема Виета.

При обучении решению задач на доказательство следует учесть следующие рекомендации:

1. Обязательно знакомить учеников с историей возникновения теоремы. С целью развития познавательного интереса к предмету и способствованию мотивации к изучению теоремы и других интересных фактов связанных с геометрией.

2. Показать, что существуют различные способы доказательства теоремы;

3. Организовать деятельность учащихся по поиску других способов доказательства теоремы

4. Показать роль теоремы в решении различных задачах. А точнее где применяется эта теорема, какие задачи можно решить и т.п.

5. Выделить отличительные признаки теоремы. То есть показать ученикам в каком случае применяется теорема, какой вывод можно сделать из условия теоремы и т.п.

6. Разобрать систему задач, направленных на усвоение и закрепление теоремы.

7. Предложить детям самим придумать или найти задачи для решения которых нужно применить теорему.

Теоремы можно изучать и на элективных курсах, и устраивать неделю теорем, устраивать интерактивы.

Теоремы школьного курса математики – это значимый компонент в содержании школьного курса алгебры и геометрии. Однако на практике ему уделяется недостаточное внимание. В рамках магистерской диссертации будет разработано содержание математических проектов по каждой теореме и раскрыта методика организации проектной и исследовательской деятельности обучающихся

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атанасян Л. С. Геометрия: учебник для 7-9 классов общеобразовательных учреждений / Л.С. Атанасян [и др]. – 8-е изд. – Москва : Просвещение, 2005. – 335 с.

2. Атанасян Л. С. Геометрия: Доп. главы к шк. учеб. 8кл.: Учеб. пособие для учащихся шк. Классов с углубленным изучением математики / Л. С. Атанасян, В.Ф. Бутузова, СБ. Кадомцев [и др] – М.: Просвещение, 2015. –205 с.

3. Болгарский Б. В. Очерки по истории математики – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Выш. школа, 1979. – 368 с.

4. Бурмистрова Т. А. Алгебра. Сборник рабочих программ. 7-9 классы : пособие для учителей общеобразовательных организаций / Т.А. Бурмистрова. – 2-е изд., доп. – М.: Просвещение, 2014. – 96 с.

5. Бурмистрова Т. А. Геометрия. Сборник рабочих программ. 7-9 классы: пособие для учителей общеобразовательных организаций / Т.А. Бурмистрова. – М.: Просвещение, 2011. – 95 с.

6. Виленкин Н. Я. Алгебра. 8 класс: учебник для общеобразовательных учреждений и школ с углубленным изучением математики / Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, Г. С. Сурвилло [и др]. – М.: Просвещение, 2010. – 303 с.

7. Виленкин Н. Я. Алгебра. 9 класс. С углубленным изучением математики. Виленкин Н.Я., Сурвилло Г.С. [и др] 7-е изд. – М.: Просвещение, 2006. – 368 с.

8. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. – Изд. 27-е – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1986. – 320 с.

9. Глейзер Г. И. История математики в школе: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1982. – 376 с.

10. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика: Справ. материалы: Книга для учащихся. – М.: Просвещение, 1998. – 416 с.

11. Далингер В. А. Методика обучения учащихся доказательству математических предложений : книга для учителя / В. А. Далингер. – М. : Просвещение, 2006. – 256 с.

12. Зенина М. Н. Эта разноликая теорема Виета / М.Н. Зенина / Математика в школе. 1992 – №23 – 29-30 с.

13. Лященко Е. И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: учеб. пособие / Е. И. Лященко [и др.]; под ред. Е. И. Лященко. – Москва : Просвещение, 1988. – 223 с.

14. Макарычев Ю. Н. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / [Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С.Б. Суворова]; под ред. С.А. Теляковского. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 256 с.

15. Макарычев Ю. Н. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций с прил. на электрон. носителе / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 287 с.

16. Макарычев Ю. Н. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2017. – 287 с.

17. Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г. Алгебра : Дополнительные главы к школьному учебнику. 9 класс – Под ред. Г.В. Дорофеева. – М.: Просвещение, 1996. – 207 с.

18. Мордкович А. Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 17-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2013. – 175 с.

19. Мордкович А. Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 2.: Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 17-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 271 с.

20. Мордкович А. Г., Николаев, Н. П. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – М.: Мнемозина, 2009. – 191 с.

21. Мордкович А. Г., Николаев Н. П. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – М.: Мнемозина, 2009. – 207 с.

22. Мордкович А. Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1.: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 12-е изд., – М.: Мнемозина, 2010. – 215 с.

23. Мордкович А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2.: Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 12-е изд. – М.: Мнемозина, 2010. – 271 с.

24. Мордкович А. Г., Николаев, Н. П. Алгебра. 8 класс. В 2ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/ А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – 10-е изд. – М.: Мнемозина, 2013. – 256с.

25. Мордкович А. Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович [и др] ; под ред. А. Г. Мордковича. – 11-е изд. – М.: Мнемозина, 2013 с. – 344 с.

26. Мордкович А. Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1.: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 12-е изд. – М.: Мнемозина, 2010. – 224 с.

27. Мордкович А. Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2.: Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, Л. А. Александрова, Т. Н. Мишустина [и др]; под ред. А.Г. Мордковича. – 12-е изд. – М.: Мнемозина, 2010. – 223 с.

28. Мордкович А. Г., Николаев Н. П. Алгебра. 9 кл.: учеб. для учащихся общеобразовательных учреждений/ А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – 3-е изд.– М.: Мнемозина, 2018. – 255с.

29. Муравин Г. К. Алгебра 7 класс: учеб. для общеобразовательных учреждений / Г. К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина. – 9-е изд. – М.: Дрофа, 2013. – 285 с.

30. Муравин Г. К. Алгебра 8 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Г.К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина. – 9-е изд. – М.: Дрофа, 2013. – 254 с.

31. Муравин Г. К. Алгебра. 9кл.: учебник / Г. К. Муравин, О. В. Муравина. – 14-е изд.– М.: Дрофа, 2014. – 315 с.

32. Муравин Г.К. Алгебра. 9 класс: методические рекомендации к учебнику Г. К. Муравина, К. С. Муравина, О. В. Муравиной "Алгебра. 9 класс" – М.: Дрофа, 2009. – 186 с.

33. Погорелов А. В. Геометрия: учебник для 7-11 классов общеобразовательных учреждений / А. В. Погорелов. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 1995. – 383 с.

34. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. / Министерство образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2015. – 560 с. – URL: http://fgosreestr.ru/wp-content/uploads/2015/06.pdf (дата обращения 01.06.2020).

35. Рыбников К. А. История математики : учеб. пособие для вузов / К. А. Рыбников. – 2-е изд. – Москва : Издательство Московского университета, 1974. – 455 с.

36. Саранцев Г. И. Общая методика преподавания математики: учебное пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов и университетов / Г.И. Саранцев. –М.: Красный октябрь, 1999. – 454 с.

37. Смирнова И. М. Геометрия 7-9 классы : учебник / И. М. Смирнова, Смирнов. В.А. – М.: Мнемозина, 2007. – 382 с.

38. Старова О. А. Именные теоремы / О.А. Старова // Математика всё для учителя – 2017. №11(83) – 22-27 с. URL: http://www.e-osnova.ru/journal/3/83/19266/ (дата обращения 01.06.2020)

39. Ткачук В. В. Математика абитуриенту: учебное пособие/ Ткачук В. В.; МЦНМО. – Москва : МЦНМО, 2004 – 966 с.

40. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Министерства образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. – URL: http://минобр-науки.рф/документы/543 (дата обращения 03.06.2020)

41. Филатов В. Г. Из опыта применения теоремы Виета при решении квадратных уравнений / В.Г. Филатов // Математика в школе. 1981 – №6 – с. 19-21

42. Чистяков В. Д. Материалы по истории математики в Китае и Индии: Пособие для внеклассной работы. – М.: ГУПИ, 1960. – 168 с.

43. Шарыгин И. Ф. Геометрия 7-9 кл.: учебник / И. Ф. Шарыгин. – 3-е изд., – Москва : Дрофа, 2014. – 463 с.

44. Brown, S. Are indirect proofs less convincing? /Brown // The Journal of Mathematical –2016. – с.1-23 – URL: http://www.elsevier.com/locate/jmathb 9 (дата обращения 16.05.2020)

45. Chard D. Training Must Focus on Content and Pedagogy / D. Chard// Education Next – 2013. №13. – с. 4 – URL: http://educationnext.org/training-must-focus-on-content-and-pedagogy/ (дата обращения 31.05.2020)

46. Fauvel J. History in Mathematics Education / J.Fauvel, J. V. Maanen / – Kluwer Academic Publishers, 2002. – 456 с.

47. Hodgkin, L.A. History of Mathematics / Luke Hodgkin / – Oxford University Press, 2005. – 296 с

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Теорема Эйлера

Теорема Эйлера (о многогранниках) [37, с.110]. Если многоугольник разбит на конечное число многоугольников так, что любые два многоугольника разбиения или не имеют общих точек, или не имеют общие вершины, или имеют общие ребра, то имеет место равенство

$$В - Р + Г = 1,$$

где В – общее число вершин, Р – общее число ребер, Г – число многоугольник (граней).

Доказательство.

Допустим, что В – Р + Г = 1 не изменится, если в произвольном многоугольнике провести диагональ или кривую (рисунок 1.1). Видно, что после проведения диагонали в новом разбиение будет В вершин, Р + Г ребер и количество многоугольников увеличится на единицу, то есть получим В – (Р + 1) + (Г + 1) = В — Р + Г.

Теперь проведем диагонали, разбивающие входящие многоугольники на треугольники, покажем выполнимость соотношения В – Р + Г = 1. Для этого нужно последовательно убирать внешние ребра, уменьшая количество треугольников. При этом возможен случай, когда в треугольнике АВС потребуется снять два ребра АВ и В С, и когда для удаления треугольника MKN нужно снять одно ребро MN. В обоих случаях наше равенство не изменится.

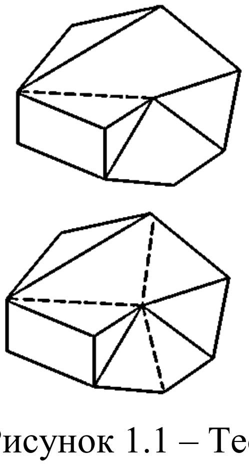


Рисунок 1.1 – Теорема Эйлера

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Самостоятельная работа для 8 класса по теме « Теорема Пифагора

Теорема Пифагора. 1 уровень сложности.

Задание 1. Дополните определение прямоугольного треугольника, исходя из рисунка 2.1.

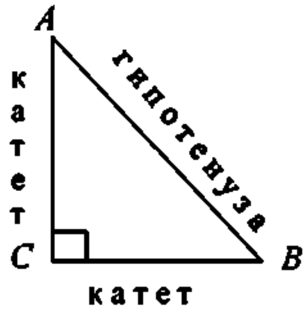


Рисунок 2.1 – ∆ABC

Определение 1. Прямоугольный треугольник – это треугольник, у которого один угол равен __________ градусов. Сторона противоположная прямому углу, называется _________ Стороны, прилежащие к прямому углу, называются __________________

Задание 2. На каких рисунках изображен прямоугольный треугольник. Какие стороны являются катетами треугольников, а какая – гипотенузой?

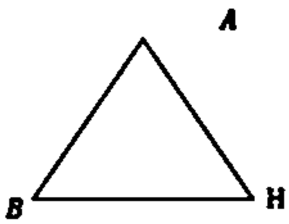


Рисунок 2.2 – ∆ABH

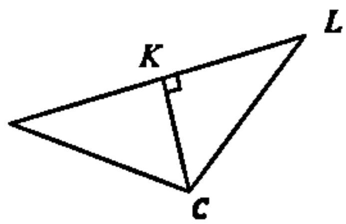


Рисунок 2.3 – ∆CKL

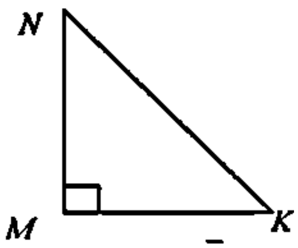


Рисунок 2.4 – ∆VNK

Рисунок 2.2: ____

Рисунок 2.3: ____

Рисунок 2.4: ____

Задание 3. Сформулируйте теорему исходя из рисунка 2.5 и формулы.

$$AB^2 = AC^2 + CB^2$$

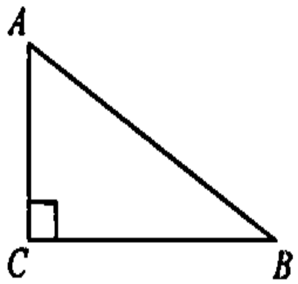


Рисунок 2.5 – ∆ABH

Теорема Пифагора. Квадрат_________ равен ______ квадратов __

Задание 4. Заполните пропуски в доказательстве теоремы Пифагора, основываясь на рисунок 2.6.

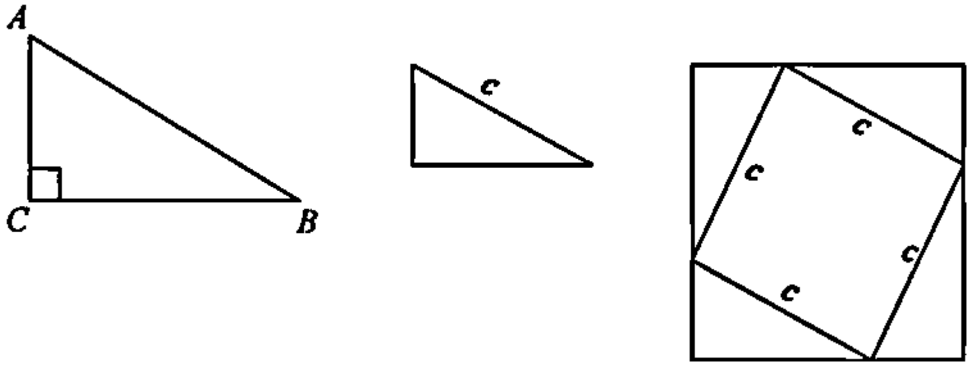


Рисунок 2.6 – Теорема Пифагора

Дано: ABC –___________ треугольник . C= ________

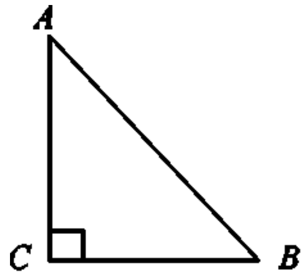
Доказать: AB = _____+ ____

Доказательство:

1. Пусть AB=_ , AC = ______, CB=____ .
2. Достроим треугольник до квадрата со сторонами a + ____
3. Тогда площадь этого квадрата S =
4. Так же квадрат состоит из 4 равных треугольников со сторонами __________________ и одного квадрата со сторонами ___________________________________
5. Тогда площадь квадрата S = 0.5ab + + _ + __ - c^2

6. $(a+b)^2 = 2ab + c^2 =)c^2 = \_^2 + \_^2$

Задание 5. Дополните решения задач, опираясь на рисунок 2.7



$$AB^2 = AC^2 + CB^2$$

Рисунок 2.7 – $\triangle$ABC – прямоугольный

а) $AC = 4, CB = 3;\ AB^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 =)\ AB = \sqrt{25} =$ _____см

б) $AC = 2, CB = 3;\ AB^2 = \_\_^2 + \_\_\_^2 = \_\_ + \_\_ = \_\_\ ;\ AC = \sqrt{\quad} =$ _____см

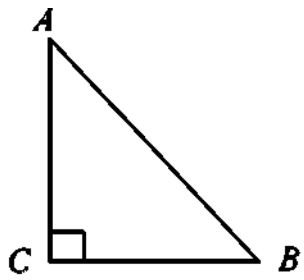
в) $AB = 5, AC = 4;\ AC^2 = \_\_\_ - \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_; AB = \sqrt{\_\_\_\_} =$ _____см

*Задание 6. В прямоугольном треугольнике катеты равны 4 и 5, найти гипотенузу.

*Задание 7. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 5, а один катет равен 4. Найти меньший катет.

Теорема Пифагора. 2 уровень сложности

Задание 1. Исходя из рисунка 2.8, сформулируй теорему Пифагора



$$AB^2 = AC^2 + CB^2$$

Рисунок 2.8 – $\triangle$ABC

Теорема Пифагора: ____

Задание 2. Заполните пропуски доказательства Теоремы Пифагора, опираясь на рисунок 2.9.

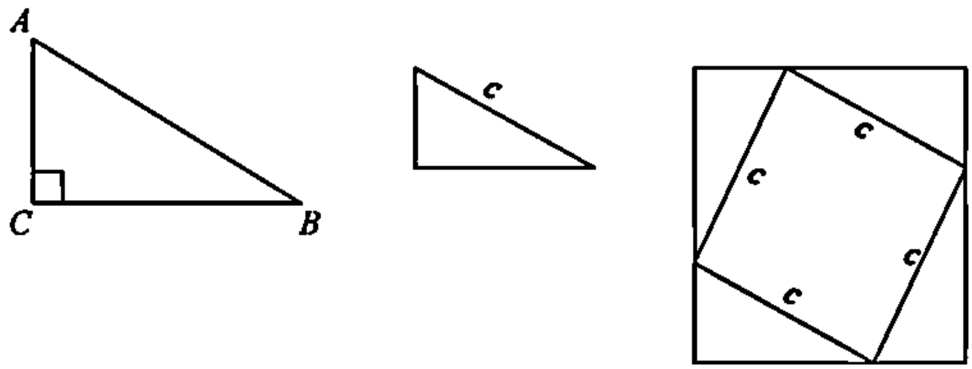


Рисунок 2.9 – Доказательство теоремы Пифагора

Дано: ABC – _________ треугольник . C=__________

Доказать: AB = ____ + ____

Доказательство: 1.

Задание 3. В прямоугольном треугольнике катеты равны 4 и 5, найти гипотенузу.

Задание 4. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 5, а один катет равен 4. Найти меньший катет.

Задание 5. Является ли треугольник прямым, если его стороны равны:

a) 5, 4,2;
b) 3, 8,5;
c) 4,9, 5.

Теорема Пифагора. 3 уровень сложности.

Задание 1. Дополни термины

Прямоугольный треугольник – это _________________________________

Теорема Пифагора – ____

Задание 2. Докажите теорему Пифагора.

Задание 3. Является ли треугольник прямым, если его стороны равны:

a) 5, 4,2;
b) 3, 8,5
c) 4,9, 5.

Задание 4. Найти площадь прямоугольного треугольника, если известно, что один из его катетов на 5 см больше другого, а гипотенуза равна 25 см.

Задание 5. (Старинная задача) Дан водоем со стороной 10 чи. В центре водоема расположен камыш, который выступает над водой на 1 чи. Если потянуть камыш к берегу, то он как раз коснется его. Спрашивается, какова глубина воды и длина камыша.