МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯРОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Логические задачи как средство формирования математического мышления обучающихся 5-6 классов

Выпускная квалификационная работа по направлению

44.03.01 Педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата

«Математика»

Форма обучения заочная

Проверка на объем заимствований:
62,37 % авторского текста
Работа рекомендована к защите
«2» июля 2021 г.
и. о. зав. кафедрой математики и МОМ
Шумакова Е.О.

Выполнила:
Студентка группы ЗФ-513-087-5-1
Григорьева Анна Дмитриевна

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры МиМОМ
Шарафутдинова Анна Михайловна

Челябинск
2021

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯРОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Логические задачи как средство формирования математического мышления обучающихся 5-6 классов

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.03.01 Педагогическое образование
Направленность программы бакалавриата
«Математика»
Форма обучения заочная

Проверка на объем заимствований:
62,37 % авторского текста
Работа рекомендована к защите
«___» ___________ 2021 г.
и. о. зав. кафедрой математики и МОМ
________________ Шумакова Е.О.

Выполнила:
Студентка группы ЗФ-513-087-5-1
Григорьева Анна Дмитриевна
Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры МиМОМ
Шарафутдинова Анна Михайловна

Челябинск
2021

Содержание

ВВЕДЕНИЕ 4

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ 7

1.1 Понятие и характерные особенности математического мышления в литературе 7

1.2 Логические задачи как средство формирования математического мышления 14

Выводы по главе 1 22

ГЛАВА 2. ОРГАНИЗАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ РАБОТЫ 25

2.1 Организация и методы исследования 25

2.2 Комплекс логических задач, направленных на формирование математического мышления учеников 5-6 классов 28

Выводы по главе 2 31

ГЛАВА 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ РАБОТЫ 33

3.1 Результаты констатирующего этапа экспериментальной работы ... 33

3.2 Результаты контрольного этапа экспериментальной работы 42

Выводы по главе 3 46

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 49

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 53

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 Психологический тест «Аналитические математические способности». 59

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 Диагностика сформированности действия планирования 64

ПРИЛОЖЕНИЕ 3 Комплекс логических задач по формированию математического мышления обучающихся 5-6 классов 70

ВВЕДЕНИЕ

В современной методической системе обучения наметился перенос акцентов с увеличения объема информации, предназначенной для усвоения учащимися на формирование у школьников общелогических мыслительных умений, т.к. интеллект человека в первую очередь определяется не суммой накопленных знаний, а высоким уровнем мышления. В этой связи перед учителем стоит задача: научить детей анализировать, сравнивать и обобщать информацию, полученную в результате взаимодействия с объектами и явлениями не только действительности, но и абстрактного мира.

Ничто так, как математика, не способствует развитию математического мышления. Потому, что предметом ее изучения являются отвлеченные понятия и закономерности, которыми в свою очередь, занимается математическая логика.

Каждый учитель должен формировать и развивать мышление учащихся. Об этом говорится в пояснительных записках к учебным программам, об этом пишут в методической литературе для учителей.

Роль математики в развитии мышления исключительно велика. В математике высокий уровень абстракции. При изучении математики одним из средств развития математического мышления является решение школьниками логических задач.

В. А. Сухомлинский, изучая развитие мышления детей, отмечал: «прежде всего, надо научить детей охватывать мысленным взором ряд предметов, явлений, событий, осмысливать связи между ними. Надо научить ребят мыслить абстрактными понятиями».

Теоретические и практические основы развития математического мышления школьника в учебной деятельности заложены выдающимися отечественными учеными: Р. А. Атахановым, В. А. Гусевым, А. И Голиковым, Н. Б. Истоминой, Ю. М. Колягиным, Л. К. Максимовым, Н. Ф. Талызиной и др.

Анализ программ и учебников показывает, что развитию математического мышления уделяется недостаточно внимания.

Все изложенное выше свидетельствует об актуальности исследования на тему: «Логические задачи как средство формирования математического мышления обучающихся 5-6 классов».

Объект исследования – процесс развития математического мышления.

Предмет исследования – логические задачи как средство формирования математического мышления обучающихся 5-6 классов.

Цель исследования – разработать комплекс логических задач, направленных на формирования математического мышления учеников 5-6 классов.

Гипотеза исследования заключается в том, что внедрение в процесс обучения разработанного комплекса логических задач может способствовать повышению уровня математического мышления обучающихся 5-6 классов.

Для достижения поставленной цели и проверки гипотезы нужно решить следующие задачи:

1. Проанализировать психолого-педагогическую и научно-методическую литературу по теме исследования.
2. Рассмотреть понятие и характерные особенности математического мышления в литературе.
3. Рассмотреть логические задачи как средство формирования математического мышления.
4. Провести диагностику уровня математического мышления у учащихся 5-6 классов.
5. Разработать комплекс логических задач, направленных на формирование математического мышления учеников 5-6 классов, и проверить его эффективность.

Методы исследования:

– анализ психолого-педагогической и научно-методической литературы по теме исследования;

– педагогический эксперимент;

– обработка и анализ полученных данных.

Исследование проводилось в условиях естественного учебного процесса на уроках математики и состояло из двух этапов.

На первом этапе с целью определения и конкретизации предмета исследования изучалась теория вопроса и практика обучения, для этого осуществлялся теоретический анализ психолого-педагогической и научно-методической литературы. Был организован констатирующий эксперимент. Обработка и анализ полученных результатов.

На втором этапе осуществлялся поиск эффективных логических задач, способствующих формированию математического мышления учащихся. Проверка их эффективности. Контрольный эксперимент.

Практическая значимость: состоит в том, что использование комплекса логических задач в процессе обучения поможет учителям повысить и развить уровень математического мышления обучающихся 5-6 классов.

База исследования: опытно-экспериментальная работа проводилась на базе 5-6 классов в МОУ СОШ № 32 г. Копейск.

Структура работы: работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованных источников, приложения.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ

1.1 Понятие и характерные особенности математического мышления в литературе

Мышление органически включено в любую осмысленную деятельность людей: оно возникает и развивается «внутри исторически складывающихся способов этой деятельности». Таким образом, мышление функционирует, имея в своей основе некоторое конкретное предметное содержание, соотносимое с той или иной сферой действительности: мышление «есть процесс непрерывного взаимодействия познающего, мыслящего субъекта с познаваемым объектом, с объективным содержанием решаемой задачи» [22].

Характер такого материала может быть принят в качестве критерия различения видов мышления. Так можно говорить о функционировании мышления на общественном, историческом, лингвистическом, математическом, экономическом материале и т.д., названных условно «общественно-политическим», «историческим», «математическим» мышлением.

Итак, математическое мышление является составной частью мышления вообще. Тем не менее, оно обладает некоторыми особенностями, прежде всего связанными со спецификой отражения математикой реальной действительности. Таким образом, первая характеристика, присущая математическому мышлению, – это особое предметное содержание, в нашем случае – математическое, представляющее собой абстрактные понятия и объекты, и наличие высоко формализованного языка для кодирования и записи информации: знаки, символы, графические объекты и т.д.

Формирование мышления человека, в том числе и математического, является составляющим его психического развития. Так, математическое мышление, которое должно быть сформировано в процессе обучения математике, Л. М. Фридман считает составной частью общей культуры мышления.

К сожалению, в психологической и педагогической литературе нет однозначного определения понятия «математическое мышление», и эта проблема еще остается малоизученной, хотя исследование математического мышления является, на наш взгляд, актуальной проблемой современной психологии, педагогики, дидактики и методики.

Ученых, занимающихся изучением данной проблемы, можно условно разделить на две группы: на тех, кто признает существование специфического содержания понятия «математическое мышление», и ученых, в трудах которых в разной степени выражается скептическое отношение к правомерности самого вопроса о математическом мышлении. Так, иногда данный термин не наделяется специфическим содержанием, и потому он не имеет силу понятия; наряду с этим, принимается его особое прикладное значение, выражающееся в некотором умении человека ориентироваться в математическом материале и творить в нем.

Наиболее явно эту мысль высказывает Л. С. Трегуб: «нет особых методов математического мышления» [20], а Г. Фрейнденталь с оттенком сомнения пишет, что пока невозможно дать убедительный ответ на то, в чем суть математического мышления [31].

С другой стороны следует отметить, что среди ученых, признающих наличие специфического содержания понятия «математическое мышление», единого мнения в определении данного термина нет.

Часть ученых видят специфику математического мышления не в методах, а в объектах, так как первые порождаются вторыми, а также «в своеобразии предметного содержания». Л. М. Фридман пишет: «Думается все же, что математическое мышление, особенно современное, имеет свою специфику, свои особенности, отличающие его от мышления в других науках.

Специфику математического мышления следует искать не в ее методах, которые действительно широко сейчас применяются в других науках и поэтому получают все больше и больше статус всеобщих методов познания, а в ее объектах» [21]. Исходя из этого, далее он дает следующее определение: «Математическое мышление – это предельно абстрактное, теоретическое мышление, объекты которого лишены всякой вещественности и могут интерпретироваться самым произвольным образом, лишь бы при этом сохранялись заданные между ними отношения» [25]. На наш взгляд, в данном определении остается не совсем ясной разница между математическим и теоретическим мышлением, поэтому использовать его в рамках нашего исследования довольно затруднительно.

Ученые, которые видят специфику математического мышления в методах познания, рассуждения зачастую отождествляют математическое и логическое мышление. Данный вид мышления формируется в процессе и в результате обучения учащихся оперированию понятиями, высказыванию суждений, доказательству математических предложений, использованию соответствующих символов, знаков и т.д.

Так, математик и философ Г. Вейль под математическим мышлением понимает, во-первых, особую форму рассуждений, посредством которых математика проникает в науки о внешнем мире, и, во-вторых, ту форму рассуждений, к которой прибегает в своей собственной области математик, будучи предоставленным самому себе [6].

Логичность суждений (доказательность) является одной их основных черт, характеризующих математическое мышление, поэтому тенденция отождествить понятия «математическое» и «логическое мышление» довольно часто встречается в психолого-педагогической литературе и имеет свои предпосылки, так как это наиболее близкие по содержанию понятия. Кроме того, во многих работах развитие математического мышления учащихся в процессе обучения непосредственно соотносится с формированием логического мышления, которое обуславливается, в свою очередь, усвоением математических понятий, закономерностей, основных логических форм и приемов мышления.

Не можем согласиться с таким суждением, поскольку в данном случае недостаточная содержательная роль отводится интуиции. Значение интуиции в математическом творчестве очевидно. Весь комплекс неосознанных ощущений напрямую связан с бессознательной частью работы над проблемой, в результате которой возможно озарение.

Важность интуиции в математическом суждении подчеркивают большинство исследователей феномена математического мышления и математического творчества, таких как М. Полани, Ж. Адамар, А. Пуанкаре, Д. Пойа. Так А. Пуанкаре в своем труде «Наука и метод» говорит о том, что главная цель обучения математике – это развить известные способности ума, а между этими способностями интуиция отнюдь не является наименее ценной. Благодаря ей, мир математических образов остается в соприкосновении с реальным миром; и если чистая математика может обойтись без нее, то она всегда необходима, чтобы заполнить пропасть, которая отделяет символы от реального мира; к нему будет постоянно обращаться практик, а ведь на одного чистого геометра приходится сто практиков.

Приведем описание интуиции, данное Б. М. Тепловым. Он пишет, что интуиция – это чрезвычайно быстрое, почти мгновенное понимание сложной ситуации и нахождение правильного решения, она возможна, однако, в результате длительной работы [10].

Интуиция – это особая способность мышления к неосознанным, как бы свернутым умозаключениям. Мы не можем ее алгоритмизировать, прежде всего, потому, что она полностью скрыта в подсознании, и мы осознаем только ее результаты. В настоящее время выяснено, что на этапе, предшествующем озарению, неосознаваемые образы могут трансформироваться в так называемое неявное знание. В результате озарения это неявное знание может быть вербализовано и затем преобразовано в явное теоретическое знание, выраженное непосредственно в символах и терминах.

«Непосредственное» интуитивное знание обычно опосредствовано опытом практической, духовной и интеллектуальной деятельности человека, что собственно и позволяет нам говорить об интуиции как необходимой составляющей математического творчества. В силу тесного вплетения интуиции в ткань мышления и ее личностного характера она является одним из важнейших звеньев формирования математического мышления [11].

Еще раз подчеркнем, что творчество, опирающееся на интуицию, является одной из главных составляющих математического мышления.

Сторонники самого распространенного подхода Ж. Адамар, А. Я. Хинчин, С. И. Шварцбурд, А. Пуанкаре и др. признают особенность как объектов, так и методов, и характеризуют математическое мышление как абстрактное, логическое, обладающее способностью к формализации, обобщению, пространственным представлениям и др., т.е. наряду с наличием специфики математических объектов признают также особенность методов в математике. С другой стороны, следует отметить, что при таком подходе данный тип мышления наделяют качествами, которые фактически определяют характеристику мышления, не только в математической, но и во многих других предметных областях.

В частности, Д. Ж. Икрамов определяет суть математического мышления следующим образом: «Под математическим мышлением, в основе которого лежат математические понятия и суждения, понимается совокупность взаимосвязанных логических операций; оперирование как свернутыми, так и развернутыми структурами; знаковыми системами математического языка, а также способность к пространственным представлениям, запоминанию и воображению» [12].

Специальное исследование математического мышления в русле учения В. В. Давыдова о типах мышления проведено Л. К. Максимовым. С его точки зрения «показателем развития математического мышления у школьников служит наличие у них возможности ориентироваться в его содержании путем анализа, опирающегося на рефлексию и внутренний план действия» [13]. Иными словами, «собственно математическое мышление предполагает такой тип ориентации, который характерен для теоретического мышления».

Таким образом, Р. Атаханов, В. В. Давыдов, Ле Тхи Кхань Кхо, Л. К. Максимов и др. считают, что математическое мышление является мышлением очень близким к теоретическому и имеет такую же последовательность становления от эмпирического к аналитическому, к планирующему, рефлексирующему.

Все вышесказанное еще раз подтверждает, что грани между различными видами мышления весьма условны, и четко отделить, к примеру, математическое мышление от логического, или, математическое от алгоритмического, не представляется возможным, хотя и повторим, что каждый из видов мышления имеет свои специфические черты и отождествить их друг с другом нельзя.

Таким образом, изучив и проанализировав психолого-методическую литературу по данной проблеме, можно сделать вывод, что сколько-нибудь приемлемое толкование термина «математическое мышление» пока не выработано, оно действительно часто служит рабочим инструментом, поясняющим некоторое многофакторное явление. С другой стороны следует отметить, что ближе всего нам третий подход к определению этого понятия, в котором выделяется специфика как объектов, так методов исследования.

Для разрешения полученного противоречия между существованием явления (феномена) «математическое мышление», имеющего свои особенности и характерные черты, и отсутствием точного, единого его определения в психолого-педагогической литературе, нами была предпринята попытка связать данное понятие с другими, описанными в психологии и педагогике.

Возвращаясь к основам, вспомним, что формами мышления являются: понятие, суждение, умозаключение. Так, в структуру математического мышления входят свои, особенные, специфичные понятия, суждения и умозаключения.

На основании выделенных характеристических черт математического мышления можно сделать следующий вывод: математическое мышление обладает чертами абстрактно-понятийного, дискурсивного и эвристического типов мышления.

Математическое мышление содержит в своей структуре предметно-содержательную реальность: объекты, понятия, абстракции и обобщения (отдаленные от практических приложений многочисленными ступенями абстрагирования), знаковая символика и высокоформализованный язык. Таким образом, предметное содержание математического мышления составляют объекты высокого уровня абстракции, следовательно, математическое мышление обладает чертами абстрактно-понятийного.

Мыслительная деятельность осуществляется посредством различных операционных процедур. Для математического мышления характерна логичность каждого умозаключения. Так, если в процессе мыследеятельности и присутствуют некоторые факты, положения, полученные интуитивно и неподтвержденные логическим путем, то в дальнейшем формулируется гипотеза, которая доказывается путем построения последовательного ряда логических звеньев, каждое из которых определяется предыдущим и обусловливает последующее звено. Таким образом, учитывая рассудочный характер построения умозаключений в процессе умственной деятельности, математическое мышление обладает свойствами дискурсивного.

Одной из важнейших составляющих феномена «математическое мышление» является творчество. Эта особенность наиболее явно проявляется в характере суждения в математической деятельности (учебной или научной). На наш взгляд термин «эвристическое мышление» наиболее точно описывает принцип построения математического рассуждения.

Одной из особенностей эвристического мышления является наличие интеллектуального компонента творчества, который, в частности, предполагает, что на один и тот же вопрос может быть множество одинаково правильных и равноправных ответов [14]. Компонент творчества в математическом мышлении мы определяем как способность мыслить в разных направлениях, где в качестве одного из основных показателей выступает оригинальность. В этом случае творчество является способностью обостренного восприятия недостатков, недостающих элементов, дисгармонии и т. д., что зачастую происходит на интуитивном уровне.

Из всего вышесказанного можно сделать следующий вывод: с одной стороны, математическое мышление обладает чертами абстрактно-понятийного, дискурсивного и эвристического мышления. С другой стороны, математическое мышление тесно связано с теоретическим мышлением, следовательно, развивая математическое мышление в процессе обучения, у учащихся формируется теоретическое мышление.

Исследования многих отечественных и зарубежных психологов показывают, что без целенаправленного развития математического мышления, являющегося одним из важнейших компонентов процесса познавательной деятельности, невозможно достичь эффективных результатов и обучении, систематизации знаний, умений и навыков [1].

1.2 Логические задачи как средство формирования математического мышления

Решение задач является основным видом математической деятельности учащихся в школе.

Решение задач – вовсе не привилегия математики. Все человеческое познание есть не что иное, как не прекращающийся процесс постановки и разрешения все новых и новых задач, вопросов, проблем.

Именно в ходе решения математических задач самым естественным способом можно формировать у школьников элементы математического мышления наряду с реализацией непосредственных целей обучения математике [45].

Традиционное обучение математике имеет дело лишь с задачами, формирующими у школьников определённые операционные навыки по данному образу-стандарту. Встречаясь же с логической задачей, учащиеся часто не знают, как её решать.

Под логическими задачами обычно понимают такие задачи, которые решаются с помощью одних лишь логических операций. Логические задачи могут решаться фактически и фактически решаются обычными рассуждениями. Иногда решение их требует длительных рассуждений, необходимое направление которых заранее нельзя предугадать. Эти трудности преодолеваются, если для решения этих задач использовать аппарат алгебры высказываний. Правда, в этом случае возникают другие трудности, связанные с переводом условий задач на язык алгебры высказываний и с использованием аппарата этой алгебры. Умение решать задачи средствами обычной алгебры (составление и решение уравнений) помогает им преодолевать эти трудности [36].

«Математическое мышление при решении задач проявляется в том, что ребёнок соотносит суждения о предметах, отвлекаясь от особенностей их наглядных образов, рассуждает, делает выводы. Умение мыслить логически, сопоставлять суждения по определённым правилам – необходимое условие усвоения учебного материала».

Таким образом, в широком смысле под логической задачей мы понимаем любую задачу, для решения которой не нужны особые (специальные) знания, а достаточно только логических рассуждений.

Решать логические задачи очень увлекательно. В них вроде бы нет никакой математики – нет ни чисел, ни функций, ни треугольников, ни векторов, а есть только лжецы и мудрецы, истина и ложь.

Известно несколько различных способов решения логических задач:

1. Метод рассуждений.
2. Метод таблиц.
3. Метод графов.
4. Метод блок-схем.
5. Метод кругов Эйлера.
6. Истинностные задачи.
7. Задачи, решаемые с конца.

Рассмотрим подробнее некоторые методы.

Метод рассуждений. Решение тактических и теоретико-множественных задач заключается в составлении плана действий, который приводит к правильному ответу. Сложность состоит в том, что выбор нужно сделать из очень большого числа вариантов, т.е. эти возможности не известны, их нужно придумать [16].

а) задачи на перемещение или правильное размещение фигур можно решать двумя способами: практическим (действия в перемещении фигур, подборе) и мысленном (обдумывание хода, предугадывание результата, предположение решения – метод рассуждений).

В методе рассуждений при решении помогают: схемы, чертежи, краткие записи, умение выбирать информацию, умение пользоваться правилом перебора.

Этим способом обычно решают несложные логические задачи.

Пример 1. В велогонке Дима, Саша, Андрей и Вася заняли со второго по пятое места. Саша обогнал Диму на 39 с., но отстал от Васи на 41 с. Андрей был впереди Васи на 12 с., но отстал от победителя на 13 с. В каком порядке финишировали мальчики и с каким отставанием от победителя?

Решение: В соревнованиях участвовали Дима, Саша, Андрей и Вася. Кроме них в задачи говорилось о «победителе». Отметим точками каждого из участников: Д С П В А

В задаче сказано, что «Саша обогнал Диму на 39 с». Это значит, что Дима отстал от Саши на 39 с. Саша отстал от Васи на 41 с. Андрей был впереди Васи 12 с., значит Вася отстал от Андрея на 12 с., и Андрей отстал от победителя на 13 с.

Видно, что первым финишировал Андрей, отстав от победителя на 13 с., за ним Вася – отстав от победителя на $(3\text{ с.} + 12\text{ с.}) = 25\text{ с.}$ Затем финишировал Саша с отставанием $25\text{ с.} + 41\text{ с.} = 66\text{ с.} = 1\text{ мин.}\,6\text{ с.}$ И последним был Дима, отставший от победителя на $1\text{ мин } 6\text{ с.} + 39\text{ с.} = 1\text{ мин } 45\text{ с.}$

Метод таблиц. Основной прием, который используется при решение текстовых логических задач, заключается в построение таблиц. Таблицы не только позволяют наглядно представить условие задачи или её ответ, но в значительной степени помогают делать правильные логические выводы в ходе решения задач.

Пример 2. Три клоуна Бим, Бам и Бом вышли на арену в красной, зеленой и синей рубашках. Их туфли были тех же цветов. У Бима цвета рубашки и туфель совпадали. У Бома ни туфли, ни рубашка не были красными. Бам был в зеленых туфлях, а в рубашке другого цвета. Как были одеты клоуны?

Решение. Составим таблицу (Таблица 1), в столбцах которой отметим возможные цвета рубашек и туфель клоунов (буквами К, З и С обозначены красный, зеленый и синий цвета). Будем заполнять таблицу, используя условия задачи. Туфли Бама зеленые, а рубашка не является зеленой. Ставим знак + в клетку 2-й строки и 5-го столбца, и знак – в клетку 2-й строки и 2-го столбца. Следовательно, у Бима и Бома туфли уже не могут быть зелеными, так же как не могут быть туфли Бама синими или красными.

Таблица 1 – краткая запись задачи

	Рубашки			Туфли		
Бим	+	-	-	+	-	-
Бам	-	-	+	-	+	-
Бом	-	+	-	-	-	+
	К	З	С	К	З	С

Далее, туфли и рубашка Бома не являются красными, отметим соответствующие ячейки таблицы знаком. Из таблицы, заполненной на этом этапе, видим, что красные туфли могут быть только у Бима, а, следовательно, туфли Бома – синие. Правая часть таблицы заполнена, мы установили цвета обуви клоунов. Цвет рубашки Бима совпадает с цветом его туфель и является красным. Теперь легко устанавливается владелец зеленой рубашки – Бом. Бам, в таком случае, одет в рубашку синего цвета

Ответ: Бим одет в красную рубашку и красные туфли, Бам в синей рубашке и зеленых туфлях, Бом в зеленой рубашке и туфлях синего цвета.

Метод графов. Метод графов уже требует определенных знаний и навыков. Прежде чем перейти к решению задачи ответим на простой вопрос: «А что такое граф?». Графом называется способ представления, при котором объекты изображаются точками, а связи между ними линиями или стрелками. Примером графа может служить схема метро. Точки называются вершинами графа, а линии – ребрами.

Решение задач этим методом заключается в построении графа по условию задачи: дело нелегкое, но интересное.

Пример 3. Три товарища – Иван, Дмитрий и Степан – преподают различные предметы (химию, биологию, физику) в школах Москвы, Ленинграда и Киева. Известно, что:

– Иван работает не в Москве, а Дмитрий не в Ленинграде;

– москвич преподает не физику;

– тот, кто работает в Ленинграде преподает химию;

– Дмитрий преподает не биологию.

Какой предмет и в каком городе преподает каждый из товарищей?

Решение.

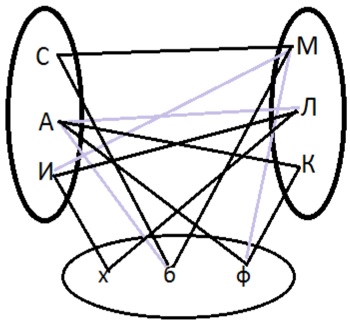

Рисунок 1 – Построение графов для решения задачи

На языке графов задача свелась к построению трех треугольников с черными ребрами и вершинами в точках разных множеств. Вершины этих треугольников дают ответ на вопрос задачи.

Ответ: Степан преподает биологию в Москве, Иван преподает химию в Ленинграде, Дмитрий преподает физику в Киеве.

Метод кругов Эйлера. Этот метод является еще одним наглядным и довольно интересным способом решения логических задач. В основе этого метода лежит построение знаменитых кругов Эйлера-Венна, задачи, в которых требуется найти некоторое пересечение множеств или их объединение, соблюдая условия задачи. Разберем пример применения данного метода.

Пример 4. Из 52 школьников 23 собирают значки, 35 собирают марки, а 16 – и значки, и марки. Остальные не увлекаются коллекционированием. Сколько школьников не увлекается коллекционированием? Представим пример решения задачи на рисунке 2.

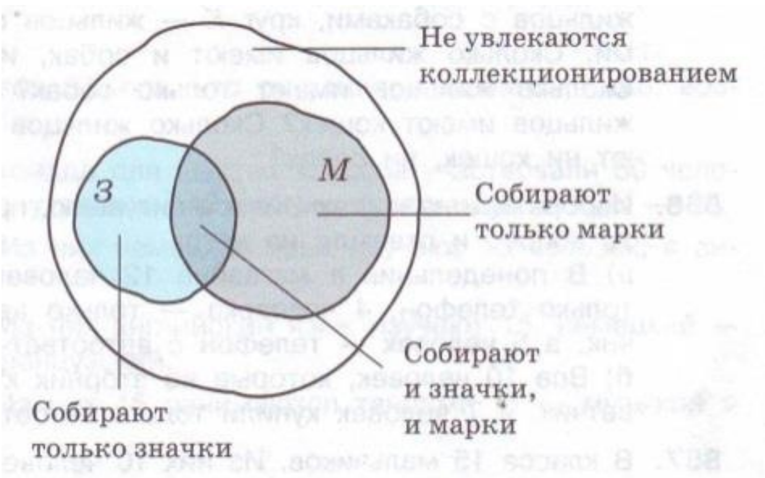

Рисунок 2 – Пример решения задачи

Решение. В условии этой задачи не так легко разобраться. Если сложить 23 и 35, то получится больше 52.

Это объясняется тем, что некоторых школьников мы здесь учли дважды, а именно тех, которые собирают и значки, и марки. Чтобы облегчить рассуждения, воспользуемся кругами Эйлера.

На рисунке большой круг обозначает 52 школьника, о которых идет речь; круг 3 изображает школьников, собирающих значки, а круг М – школьников, собирающих марки.

Большой круг разбивается кругами 3 и М на несколько областей. Пересечению кругов 3 и М соответствуют школьники, собирающие и значки, и марки (рисунок). Части круга 3, не принадлежащей кругу М, соответствуют школьники, собирающие только значки, а части круга М, не принадлежащей кругу 3, школьники, собирающие только марки. Свободная часть большого круга обозначает школьников, не увлекающихся коллекционированием.

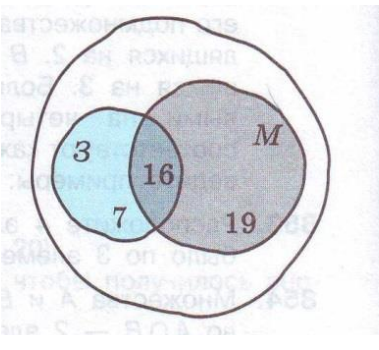

Рисунок 3 – Пример решения задачи с марками

Будем последовательно заполнять нашу схему, вписывая в каждую область соответствующее число. По условию и значки, и марки собирают 16 человек, поэтому в пересечение кругов З и М впишем число 16 (рисунок 3).

Так как значки собирают 23 школьника, а и значки, и марки – 16 школьников, то только значки собирают $23 - 16 = 7$ человек. Точно так же только марки собирают $35 - 16 = 19$ человек. Числа 7 и 19 впишем в соответствующие области схемы.

Из рисунка ясно, сколько всего человек занимается коллекционированием. Чтобы узнать это, надо сложить числа 7, 19 и 16. Получим 42 человека. Значит, не увлеченных коллекционированием остается $52 - 42 = 10$ школьников. Это и есть ответ задачи, его можно вписать в свободное поле большого круга.

Метод Эйлера является незаменимым при решении некоторых задач, а также значительно упрощает рассуждения.

Метод блок-схем. Пример 5. В школьной столовой на первое можно заказать борщ (Б), солянку (С), грибной суп (Г), на второе – мясо с макаронами (ММ), рыбу с картошкой (КР), курицу с рисом (РК). Сколько различных обедов можно составить из указанных блюд?

Решение. Оформим решение в виде блок схемы, представленной на рисунке 4:

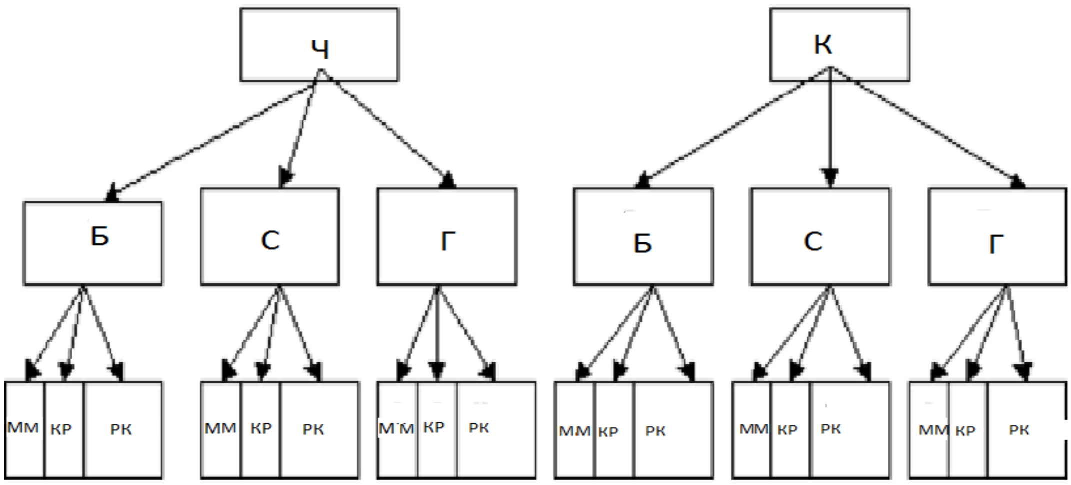

Рисунок 4 – Пример решения задачи методом блок-схем

Ответ: 18 вариантов.

Истинностные задач. Задачи, в которых требуется установить истинность или ложность высказываний назовем истинностными задачами.

Пример 6. Три друга Коля, Олег и Петя играли во дворе, и один из них случайно разбил мячом оконное стекло. Коля сказал: «Это не я разбил стекло». Олег сказал: «Это Петя разбил стекло». Позднее выяснилось, что одно из этих утверждений верное, а другое — нет. Кто из мальчиков разбил стекло?

Решение. Предположим, что Олег сказал правду, тогда и Коля сказал правду, а это противоречит условию задачи. Следовательно, Олег сказал неправду, а Коля — правду. Из их утверждений следует, что стекло разбил Олег.

Задачи, решаемые с конца. Есть такой вид логических задач, которые решаются с конца. Рассмотрим пример решения таких задач.

Пример 7. Вася задумал число, прибавил к нему 5, потом разделил сумму на 3, умножил на 4, отнял 6, разделил на 7 и получил число 2. Какое число задумал Вася?

Решение:

$2 \cdot 7 = 14;$

$14 + 6 = 20;$

$20 \div 4 = 5;$

$5 \cdot 3 = 15;$

$15 - 5 = 10.$

Ответ: Вася задумал число 10.

Таким образом, логические задачи являются прекрасным средством развития математического мышления. Они развивают умение логически рассуждать, выводить одно из другого, повышают активность мысли.

Выводы по главе 1

По результатам изучения теоретических аспектов по проблеме исследования, мы выделили ключевые понятия работы.

Рассмотрели несколько понятий математического мышления:

Математическое мышление – это особое предметное математическое содержание, представляющее собой абстрактные понятия и объекты, и наличие высоко формализованного языка для кодирования и записи

Математическое мышление – это особая форма рассуждений, посредством которых математика проникает в науки о внешнем мире, и, во-вторых, ту форму рассуждений, к которой прибегает в своей собственной области математик, будучи предоставленным самому себе.

Математическое мышление, в основе которого лежат математические понятия и суждения, это совокупность взаимосвязанных логических операций; оперирование как свернутыми, так и развернутыми структурами; знаковыми системами математического языка, а также способность к пространственным представлениям, запоминанию и воображению».

В нашем исследовании мы придерживаемся следующего понятия: «Математическое мышление – это предельно абстрактное, теоретическое мышление, объекты которого лишены всякой вещественности и могут интерпретироваться самым произвольным образом, лишь бы при этом сохранялись заданные между ними отношения».

Выделили характеристики математического мышления: абстрактное, логическое, обладающее способностью к формализации, обобщению, пространственным представлениям.

Определили, что математическое мышление содержит в своей структуре предметно-содержательную реальность: объекты, понятия, абстракции и обобщения (отдаленные от практических приложений многочисленными ступенями абстрагирования), знаковая символика и высокоформализованный язык.

Рассмотрели логические задачи как средство формирования математического мышления:

Логическая задача – это любая задача, для решения которой не нужны особые (специальные) знания, а достаточно только логических рассуждений.

Выявили способы решения логических задач и рассмотрели их:

1. Метод рассуждений.
2. Метод таблиц.
3. Метод графов.
4. Метод блок-схем.
5. Метод кругов Эйлера.
6. Истинностные задачи.
7. Задачи, решаемые с конца.

Таким образом, логические задачи – это задачи, в которых соотношения между данными и искомыми редко поддаются описанию с помощью известных моделей; специфика этих задач такова, что учащиеся испытывают значительные затруднения при краткой записи их условия, при создании алгоритмов решения и использовании.

ГЛАВА 2. ОРГАНИЗАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ РАБОТЫ

2.1 Организация и методы исследования

Практический этап работы проводился на базе МОУ СОШ № 32 г. Копейск.

В нем приняли участие 24 учащихся $5_а$ класса, и 25 учеников $6_а$ класса. Способ формирования выборки – формальная группа. $5_а$ – экспериментальная группа, $6_а$ – контрольная группа.

В экспериментальную группу внедрялся комплекс логических задач, направленных на формирование математического мышления учеников 5-6 классов, а в контрольную группу внедрялись элементы комплекса: логические задачи применялись раз в неделю на уроке математики.

Цель – проверить эффективность комплекса по развитию математического мышления учеников 5-6 классов, средствами логических задач.

На данном этапе решались следующие задачи:

1. Определить критерии развития математического мышления учащихся, подобрать диагностические методики.
2. Провести диагностическое исследование уровня развития математического мышления учащихся.
3. Составить комплекс задач, направленный на развитие компонентов математического мышления учащихся.
4. Проверить эффективность комплекса, путём проведения контрольного эксперимента.

Диагностическая работа строилась на основе теоретического анализа психолого-педагогической литературы, программ школьного образования и учебников математики.

В качестве статистических методов был использован метод ХИ-квадрат Пирсона.

На основе выделенных А. И. Голиковым уровней развития математического мышления были определены критерии его развития.

1. Развитие аналитического компонента математического мышления.

Для диагностики аналитического компонента математического мышления – психологический тест «Аналитические математические способности».

Психологический тест «Аналитические математические способности» (далее – АМС) (Приложение 1).

Цель: данный психологический тест предназначен для диагностики аналитических математических способностей (индивидуальная и групповая диагностика).

Аналитические математические способности относятся к академическим. То есть в первую очередь они позволяют человеку лучше усваивать учебный материал, в данном случае – математику.

Аналитические математические способности тесно коррелируют с показателем IQ, поэтому большинство тестов на IQ включают в себя субтесты на определение закономерностей в числовых рядах. Обладатели высоких показателей по аналитическим математическим способностям проявляют способности к анализу не только в области математики, но и в иных разнородных проблемах.

Обладатели низких показателей по данному качеству не проявляют ни способностей, ни склонностей к анализу, зачастую совершают неоправданно легкомысленные поступки. Стимульный материал теста состоит из двадцати числовых рядов. Каждый ряд включает в себя десять чисел, находящихся в определённой взаимосвязи между собой. Одно из десяти чисел пропущено (отмечено многоточием). В задачу испытуемого входит найти это пропущенное число.

Время прохождения теста: 15 минут. Запрещается пользоваться калькулятором и делать какие-то вспомогательные записи. Методика имеет четыре разные формы (А, Б, В и Г).

Обработка результатов. С помощью ключа посчитайте количество верных ответов. За каждый верный ответ начисляется один балл. Таким образом, максимальный балл составляет 20.

Низкий уровень – 0-4 баллов.

Средний уровень – 5-9 баллов.

Высокий уровень – 10-20 баллов.

2. Развитие действия планирования (внутреннего плана действий).

Для исследования действия планирования – диагностика сформированности действия планирования (Приложение 2).

Материал. Бланки двух заданий с вырезанными вариантами решения по типу заданий теста «Прогрессивные матрицы Равена». Образцы бланков приведены на рисунках 1 и 2. Линии выреза на рисунках показаны пунктирной линией.

Порядок работы. Методика состоит из двух заданий. Первое задание служит образцом, а второе является собственно диагностическим заданием.

Обработка полученных по методике данных.

На основе ответов детей можно диагностировать три типа планирования. Диагностика типа зависит от того, на какие условия задачи ориентируется ребенок при ее решении.

Обработка результатов:

Высокий уровень. Рефлексирующе-анализирующий тип. Дети этого типа, в целом, должны выделять те условия задачи, которые:

1) обязательно ограничивают круг возможных действий, отсекая при этом запрещенные действия, те, которые нельзя делать, решая задачу;

2) те условия, про которые в задаче напрямую открыто не говорится, но которым предлагаемый способ действий должен удовлетворять. Эти условия показывают, что же надо делать при решении задачи.

Средний уровень. Анализирующий тип. Дети этого типа, в основном, ориентированы лишь на поиск тех условий задачи, которые обязательно ограничивают круг возможных действий, т.е. выделяют запрещенные действия, те, которые нельзя делать, решая задачу.

Низкий уровень. Угадывающий тип. Дети этого типа вообще не ориентируются на условия задачи, часто вводя новые, не предусмотренные задачей, условия.

По результатам двух методик был определен общий уровень развития математического мышления.

2.2 Комплекс логических задач, направленных на формирование математического мышления учеников 5-6 классов

Цель комплекса – повышение уровня математического мышления.

Задачи:

1. Развивать логическое мышление.
2. Развивать познавательные способности.
3. Развивать умение анализировать.
4. Учить сравнивать.
5. Делать умозаключение.
6. Формировать действие планирования.

Составленный комплекс задач рассчитан на 4 месяца обучения и рекомендуется применять на уроках математики 4 раза в неделю в экспериментальной группе, и 1 раз в неделю в контрольной группе.

Комплекс логических задач состоит из 64 задач, которые представлены в Таблице 2 и в Приложении 3.

Таблица 2 – Комплекс логических задач

Раздел	№	Название	Пример задачи раздела
Обрати внимание	1	Банка с водой.	В детстве любят загадывать загадки. Вот одна из типичных детских загадок: можете ли Вы с трех раз разбить

Продолжение таблицы 2

	2	Маша + Федя =?	трехлитровую банку с водой об асфальт?
	3	Восхождение гусеницы.	
	4	Исправьте ошибку.	
	5	Стереометрическая задача.	
	6	Точки на прямой.	
	7	Слово.	
	8	В зоомагазине.	
	9	Сколько лет капитану?	
«Как?»	10	Как распилить цепочку?	Скажите, как путешественнику распилить цепочку, чтобы прожить в гостинице шесть дней и ежедневно расплачиваться с хозяином?
	11	Как поставить загадочный символ.	
	12	Сколько же все-таки стоила книга	
	13	Как путешественнику остаться в живых?	
	14	Как остаться в живых?	
	15	Как победить Кощея?	
	16	Как обжарить хлеб?	
	17	Как разделить добычу?	
	18	Как измерить диагональ кирпича?	
Числа	19	Странный отчет.	Директор школы в своем отчете указал, что в школе 3688 учащихся, причем мальчиков на 373 чело- века больше, чем девочек. Но умный инспектор РОНО сразу понял, что в отчете допущена ошибка. Как он догадался? Прав ли Федя? Федя утверждает, что может придумать пример на деление с остатком, чтобы делимое, делитель, неполное частное и остаток оканчивались на 9, 7, 3 и 1, а Маша говорит, что он не
	20	Расставьте целые числа не равные	
	21	Для чего нужны деньги?	
	22	Есть ли логика?	
	23	Старинная задача.	
	24	Без сложных вычислений.	
	25	Потерянная гиря.	
	26	Прямая.	
	27	Точки на прямой.	
	28	Квадратные плитки.	

Продолжение таблицы 2

	29	Случай в сберкассе.	прав. Кто же из них прав?
	30	Дорожная проблема.	
	31	Федя, ты не прав.	
Невероятные истории	32	Странный вопрос.	На крыльце дома сидят рядом мальчик и девочка. Саша говорит: я мальчик». Женя говорит: я девочка». Если, по крайней мере, один из детей врет, то кто из них мальчик, а кто девочка?
	33	Диалог в магазине хозяйственных товаров.	
	34	Было или не было?	
	35	Шифровка.	
	36	Проблемы с транспортом.	
	37	Проблемы с бензином.	
	38	Черепаший разговор.	
	39	Три бегуна	
	40	Когда родился Федя?	
Правда или ложь	41	На прогулке	Однажды, прогуливаясь по стране рыцарей и лжецов, я встретил человека, который сказал про себя: «Я – лжец». Кем был тот человек, которого я встретил?
	42	Можно ли успеть вовремя.	
	43	Из Виттенберга в Геттинген	
	44	В переплетной мастерской.	
	45	Интересный разговор.	
	46	На перепутье.	
	47	Проводник.	
	48	Судебный казус.	
	49	На заседании Государственной думы	
	50	За круглым столом	
	51	Необходима экспертиза.	
	52	Кто есть кто?	
Дроби	53	Спящий пассажир.	Когда пассажир проехал половину всего пути, то лег спать и спал до тех пор, пока не осталось ехать половину того пути, что он проехал спящим. Какую часть пути он
	54	Большая стирка.	
	55	Справедливый раздел.	
	56	Кофе с молоком.	

Продолжение таблицы 2

	57	Сколько стоит платье?	проехал спящим?
	58	Что можно купить на рубль?	
	59	Физическая проблема.	
Проценты	60	Сравните числа.	Известно, что 2% положительного числа A больше, чем 3% положительного числа B. Верно ли, что 5% числа A больше, чем 7% числа B? Петя купил две книги. Первая из них была на 50% дороже второй. На сколько процентов вторая книга дешевле первой?
	61	В двух бочках	
	62	Где дешевле?	
	63	Сушеные грибы	
	64	На конференции.	

Выводы по главе 2

Во второй главе нашего исследования мы описали организацию и методы исследования:

Практический этап работы проводился на базе МОУ СОШ № 32 г. Копейск.

В нем приняли участие 24 учащихся $5_{а}$ класса, и 25 учеников $6_{а}$ класса. Способ формирования выборки – формальная группа. $5_{а}$ – экспериментальная группа, $6_{а}$ – контрольная группа.

В экспериментальную группу внедрялся комплекс логических задач, направленных на формирование математического мышления учеников 5-6 классов, а в контрольную группу внедрялись элементы комплекса: логические задачи применялись раз в неделю на уроке математики.

Цель – проверить эффективность комплекса по развитию математического мышления учеников 5-6 классов, средствами логических задач.

В качестве статистических методов был использован метод ХИ-квадрат Пирсона.

Определили критерии развития математического мышления.

1. Развитие аналитического компонента математического мышления.

Для диагностики аналитического компонента математического мышления – психологический тест «Аналитические математические способности».

2. Развитие действия планирования (внутреннего плана действий).

Для исследования действия планирования – диагностика сформированности действия планирования.

По результатам двух методик был определен общий уровень развития математического мышления.

Далее нами был разработан комплекс логических задач, направленных на формирование математического мышления учеников 5-6 классов

Цель комплекса – повышение уровня математического мышления.

Задачи:

1. Развивать логическое мышление.

2. Развивать познавательные способности.

3. Развивать умение анализировать.

4. Учить сравнивать.

5. Делать умозаключение.

6. Формировать действие планирования.

Принципы комплекса:

1. Принцип учета возрастных особенностей.

2. Принцип систематичности.

3. Принцип сознательности и активности.

4. Принцип индивидуального подхода.

5. Принцип доступности.

Составленный комплекс задач рассчитан на 4 месяца обучения и рекомендуется применять на уроках математики 4 раза в неделю в экспериментальной группе, и 1 раз в неделю в контрольной группе.

Комплекс логических задач состоит из 64 задач.

ГЛАВА 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ РАБОТЫ

3.1 Результаты констатирующего этапа экспериментальной работы

На первом этапе экспериментальной работы нами проведена диагностика развития аналитического компонента математического мышления в экспериментальной и контрольной группах, полученные результаты представлены в Таблицах 3, 4, 5 и на рисунке 5.

Таблица 3 – Результаты диагностики развития аналитического компонента математического мышления в ЭГ.

№	Имя	Баллы	Уровень
1	Алина	1	Низкий
2	Анастасия	8	Средний
3	Анна	9	Средний
4	Антон	4	Низкий
5	Артем	5	Низкий
6	Вера	9	Средний
7	Вероника	2	Низкий
8	Владислав	6	Средний
9	Глеб	5	Низкий
10	Дмитрий	4	Низкий
11	Дмитрий	7	Средний
12	Ева	3	Низкий
13	Екатерина	4	Низкий
14	Макар	11	Высокий
15	Марк	5	Низкий
16	Матвей	8	Средний
17	Михаил	12	Высокий
18	Назар	4	Низкий
19	Ольга	7	Средний
20	Полина	4	Низкий

Продолжение таблицы 3

21	Полина	5	Низкий
22	Регина	7	Средний
23	Роман	6	Средний
24	Сергей	7	Средний

Ниже мы представили результаты диагностики контрольной группы.

Таблица 4 – Результаты диагностики развития аналитического компонента математического мышления в КГ.

№	Имя	Баллы	Уровень
1	Егор	13	Высокий
2	Ренат	16	Высокий
3	Алиса	3	Низкий
4	Анна	6	Низкий
5	Герман	9	Низкий
6	Константин	3	Низкий
7	Леонид	4	Низкий
8	Мария	4	Низкий
9	Полина	4	Низкий
10	Роман	5	Низкий
11	Софья	3	Низкий
12	Юлия	4	Низкий
13	Алексей	15	Средний
14	Ангелина	9	Средний
15	Анна	9	Средний
16	Артем	9	Средний
17	Варвара	9	Средний
18	Дамир	9	Средний
19	Дарья	9	Средний
20	Евгений	8	Средний

Продолжение таблицы 4

21	Макар	7	Средний
22	Михаил	9	Средний
23	София	7	Средний
24	Татьяна	9	Средний
25	Ульяна	15	Средний

Таким образом, по результатам диагностики мы сделали следующие выводы:

Низкий уровень развития аналитического компонента математического мышления диагностирован у 50 % респондентов (12 детей) в ЭГ и 40 % респондентов (10 детей) в КГ, такие дети осуществляют неполный анализ, устанавливают единичные связи между данными.

Средний уровень развития аналитического компонента математического мышления диагностирован у 42 % респондентов (10 детей) в ЭГ, 52 % респондентов (13 детей) в КГ, такие ученики выполняют многосторонний, но неполный анализ. Выделяют существенные данные и некоторые связи.

Высокий уровень развития аналитического компонента математического мышления диагностирован у 8 % респондентов (2 ребенка) в ЭГ, 8 % респондентов (2 детей) в КГ. Данные учащиеся выполняют полный и всесторонний анализ, вычленяют все исходные данные, устанавливают между ними отношения.

Приведем сравнительные данные диагностики развития аналитического компонента математического мышления в таблице 5 и на рисунке 5.

Таблица 5 – Результаты диагностики развития аналитического компонента математического мышления

Уровень	ЭГ		КГ	
	N	%	N	%
Низкий	12	50	10	40
Средний	10	42	13	52
Высокий	2	8	2	8

Для наглядности представим данные на рисунке 5.

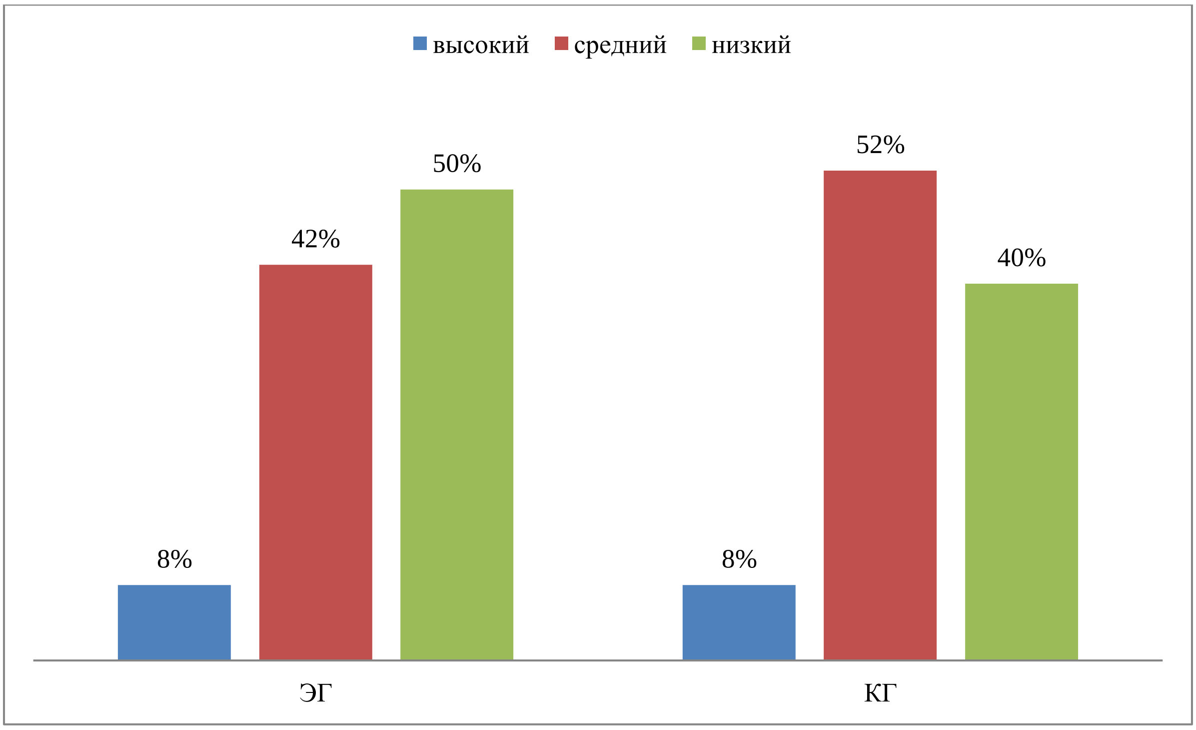

Рисунок 5 – Распределение по уровням развития аналитического компонента математического мышления

Далее нами проведена диагностика сформированности действия планирования, результаты которой представлены в Таблицах 6, 7, 8 и на рисунке 6.

Таблица 6 – Диагностика сформированности действия планирования в ЭГ

№	Имя	Тип планирования	Уровень
1	Алина	Угадывающий	Низкий
2	Анастасия	Анализирующий	Средний

Продолжение таблицы 6

3	Анна	Рефлексирующе-анализирующий	Высокий
4	Антон	Угадывающий	Низкий
5	Артем	Анализирующий	Средний
6	Вера	Анализирующий	Средний
7	Вероника	Угадывающий	Низкий
8	Владислав	Угадывающий	Низкий
9	Глеб	Угадывающий	Низкий
10	Дмитрий	Угадывающий	Низкий
11	Дмитрий	Угадывающий	Низкий
12	Ева	Угадывающий	Низкий
13	Екатерина	Угадывающий	Низкий
14	Макар	Рефлексирующе-анализирующий	Высокий
15	Марк	Угадывающий	Низкий
16	Матвей	Анализирующий	Средний
17	Михаил	Рефлексирующе-анализирующий	Высокий
18	Назар	Анализирующий	Средний
19	Ольга	Анализирующий	Средний
20	Полина	Угадывающий	Низкий
21	Полина	Анализирующий	Средний
22	Регина	Анализирующий	Средний
23	Роман	Анализирующий	Средний
24	Сергей	Анализирующий	Средний

Таблица 7 – Диагностика сформированности действия планирования в КГ

№	Имя	Тип планирования	Уровень
1.	Алексей	Анализирующий	Средний
2.	Алиса	Угадывающий	Низкий
3.	Ангелина	Анализирующий	Средний
4.	Анна	Угадывающий	Низкий

Продолжение таблицы 7

5.	Анна	Анализирующий	Средний
6.	Артем	Анализирующий	Средний
7.	Варвара	Угадывающий	Низкий
8.	Герман	Угадывающий	Низкий
9.	Дамир	Рефлексирующе-анализирующий	Высокий
10.	Дарья	Анализирующий	Средний
11.	Евгений	Угадывающий	Низкий
12.	Егор	Анализирующий	Средний
13.	Константин	Угадывающий	Низкий
14.	Леонид	Анализирующий	Средний
15.	Макар	Угадывающий	Низкий
16.	Мария	Анализирующий	Средний
17.	Михаил	Анализирующий	Средний
18.	Полина	Угадывающий	Низкий
19.	Ренат	Рефлексирующе-анализирующий	Высокий
20.	Роман	Анализирующий	Средний
21.	София	Угадывающий	Низкий
22.	Софья	Анализирующий	Средний
23.	Татьяна	Угадывающий	Низкий
24.	Ульяна	Анализирующий	Средний
25.	Юлия	Угадывающий	Низкий

Таким образом, по результатам диагностики мы сделали следующие выводы:

Низкий уровень сформированности действия планирования диагностирован у 46% респондентов (11 детей) в ЭГ, и у 46% респондентов (11 детей) в КГ. Данные учащиеся выполняют поиск решения методом проб и ошибок, без планирования.

Средний уровень сформированности действия планирования диагностирован у 42% респондентов (10 детей) в ЭГ, у 48% респондентов (12 детей) в КГ. Данные учащиеся выполняют планирование с трудом, используют лишь отдельные приемы.

Высокий уровень сформированности действия планирования диагностирован у 12% респондентов (3 детей) в ЭГ, у 8% респондентов (2 детей) в КГ. Данные учащиеся одновременно используют несколько приемов в процессе планирования решения задачи.

Представим сравнительные данные диагностики действия планирования в Таблице 8 и на рисунке 6.

Таблица 7 – Результаты диагностики сформированности действия планирования

Уровень	ЭГ		КГ	
	N	%	N	%
Низкий	11	46	11	44
Средний	10	42	12	48
Высокий	3	12	2	8

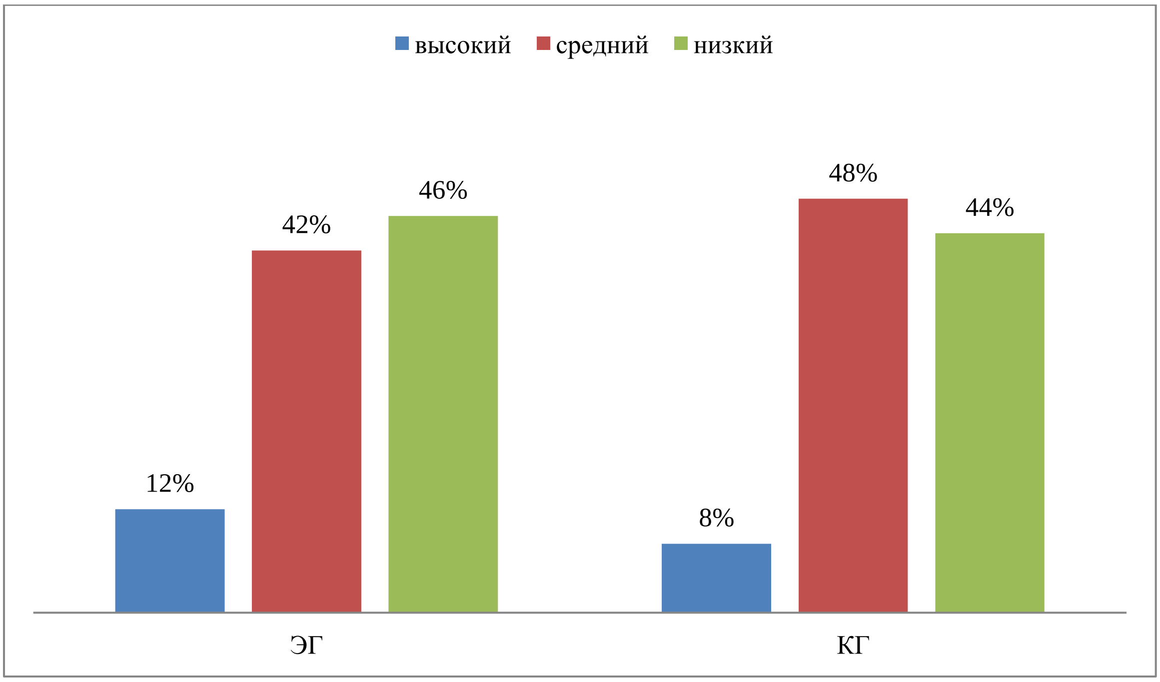

Рисунок 6 – Распределение испытуемых по уровням развития действия планирования

По итогам методик мы свели данные двух методик в одну таблицу, чтоб определить общий уровень развития математического мышления, результаты представили Таблицах 9, 10, 11.

Таблица 9 – Общий уровень развития математического мышления в ЭГ

№	Имя	Уровень развития аналитического компонента	Уровень развития планирования	Общий уровень
1.	Алина	Низкий	Низкий	Низкий
2.	Анастасия	Средний	Средний	Средний
3.	Анна	Средний	Высокий	Высокий
4.	Антон	Низкий	Низкий	Низкий
5.	Артем	Низкий	Средний	Средний
6.	Вера	Средний	Средний	Средний
7.	Вероника	Низкий	Низкий	Низкий
8.	Владислав	Средний	Низкий	Средний
9.	Глеб	Низкий	Низкий	Низкий
10.	Дмитрий	Низкий	Низкий	Низкий
11.	Дмитрий	Средний	Низкий	Средний
12.	Ева	Низкий	Низкий	Низкий
13.	Екатерина	Низкий	Низкий	Низкий
14.	Макар	Высокий	Высокий	Высокий
15.	Марк	Низкий	Низкий	Низкий
16.	Матвей	Средний	Средний	Средний
17.	Михаил	Высокий	Высокий	Высокий
18.	Назар	Низкий	Средний	Средний
19.	Ольга	Средний	Средний	Средний
20.	Полина	Низкий	Низкий	Низкий
21.	Полина	Низкий	Средний	Средний
22.	Регина	Средний	Средний	Средний
23.	Роман	Средний	Средний	Средний
24.	Сергей	Средний	Средний	Средний

Представим общий уровень развития математического мышления в контрольной группе в таблице 10.

Таблица 10 – Общий уровень развития математического мышления в КГ

№	Имя	Уровень развития аналитического компонента	Уровень развития планирования	Общий уровень
1.	Дамир	Средний	Высокий	Высокий
2.	Егор	Высокий	Средний	Высокий
3.	Ренат	Высокий	Высокий	Высокий
4.	Алиса	Низкий	Низкий	Низкий
5.	Анна	Низкий	Низкий	Низкий
6.	Герман	Низкий	Низкий	Низкий
7.	Константин	Низкий	Низкий	Низкий
8.	Полина	Низкий	Низкий	Низкий
9.	Юлия	Низкий	Низкий	Низкий
10.	Алексей	Средний	Средний	Средний
11.	Ангелина	Средний	Средний	Средний
12.	Анна	Средний	Средний	Средний
13.	Артем	Средний	Средний	Средний
14.	Варвара	Средний	Низкий	Средний
15.	Дарья	Средний	Средний	Средний
16.	Евгений	Средний	Низкий	Средний
17.	Леонид	Низкий	Средний	Средний
18.	Макар	Средний	Низкий	Средний
19.	Мария	Низкий	Средний	Средний
20.	Михаил	Средний	Средний	Средний
21.	Роман	Низкий	Средний	Средний
22.	София	Средний	Низкий	Средний
23.	Софья	Низкий	Средний	Средний
24.	Татьяна	Средний	Низкий	Средний
25.	Ульяна	Средний	Средний	Средний

Таблица 11 – Результаты диагностики сформированности математического мышления на констатирующем этапе

Уровень	ЭГ		КГ	
	N	%	N	%
Низкий	9	38	6	24
Средний	13	54	16	64
Высокий	2	8	3	12

Для проверки объективности нами была применена методика ХИ-квадрат Пирсона:

Число степеней свободы равно 2

Значение критерия χ2 составляет 4,809

Критическое значение χ2 при уровне значимости $p < 0{,}05$ составляет 5,991

Связь между факторным и результативным признаками статистически не значима, уровень значимости $\mathrm{p} > 0{,}05$.

Уровень значимости $p = 0{,}091$.

Таким образом, нет значимых различий между экспериментальной и контрольной группами.

Результаты диагностики развития математического мышления учеников 5 и 6 классов на начальном этапе экспериментальной работы показали недостаточный уровень развития всех его компонентов. Поэтому целесообразно разработать и внедрить комплекс логических задач, направленных на формирование математического мышления учеников 5-6 классов.

3.2 Результаты контрольного этапа экспериментальной работы

После внедрения комплекса логических задач, мы провели контрольный срез, с помощью тех же методик и получили следующие результаты (Таблица 12):

Таблица 12 – Результаты диагностики развития аналитического компонента математического мышления на контрольном этапе

Уровень	ЭГ				КГ			
	Констатирующий		Контрольный		Констатирующий		Контрольный	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Низкий	12	50	5	21	10	40	9	36
Средний	10	42	11	46	13	52	12	48
Высокий	2	8	8	33	2	8	4	16

Таким образом, мы наблюдаем положительную динамику в развитии аналитического компонента математического мышления в обеих группах:

Высокий уровень аналитического компонента математического мышления повысился на 25% и составил 33% испытуемых экспериментальной группы, и повысился на 8% и составил 16% испытуемых контрольной группы.

Средний уровень аналитического компонента математического мышления в экспериментальной группе повысился на 4% и составил 46% испытуемых, а в контрольной группе снизился на 4% и составил 48% испытуемых.

Низкий уровень аналитического компонента математического мышления снизился в обеих группах: на 29% в экспериментальной группе и составил 21%, и на 4% в контрольной группе – составил 36%.

Для наглядности представим данные на рисунке 6.

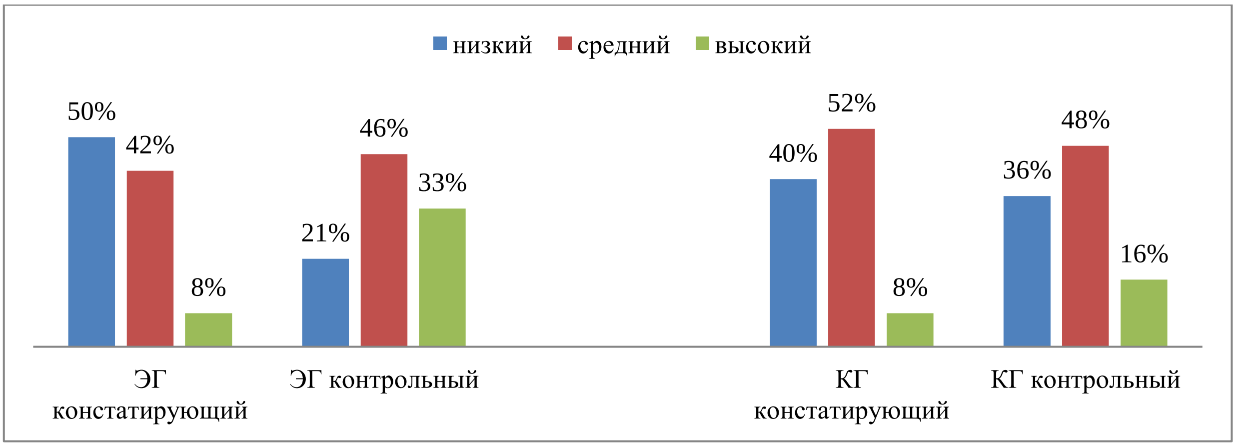

Рисунок 6 – Распределение по уровням развития аналитического компонента математического мышления на контрольном этапе

Далее мы провели повторное исследование сформированности действия планирования и получили следующие данные (Таблица 13):

Таблица 13 – Результаты диагностики сформированности действия планирования на контрольном этапе

Уровень	ЭГ				КГ			
	Констатирующий		Контрольный		Констатирующий		Контрольный	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Низкий	11	46	6	26	11	44	9	36
Средний	10	42	9	37	12	48	12	48
Высокий	3	12	9	37	2	8	4	16

Таким образом, мы наблюдаем положительную динамику в сформированности действия планирования в обеих группах (рисунок 7):

Высокий уровень сформированности действия планирования повысился на 25% и составил 37% испытуемых экспериментальной группы, и повысился на 8% и составил 16% испытуемых контрольной группы.

Средний уровень сформированности действия планирования в экспериментальной группе снизился на 5% и составил 37% испытуемых, а в контрольной группе остался таким же – 48% испытуемых.

Низкий уровень сформированности действия планирования снизился в обеих группах: на 20% в экспериментальной группе и составил 26%, и на 8% в контрольной группе – составил 36%.

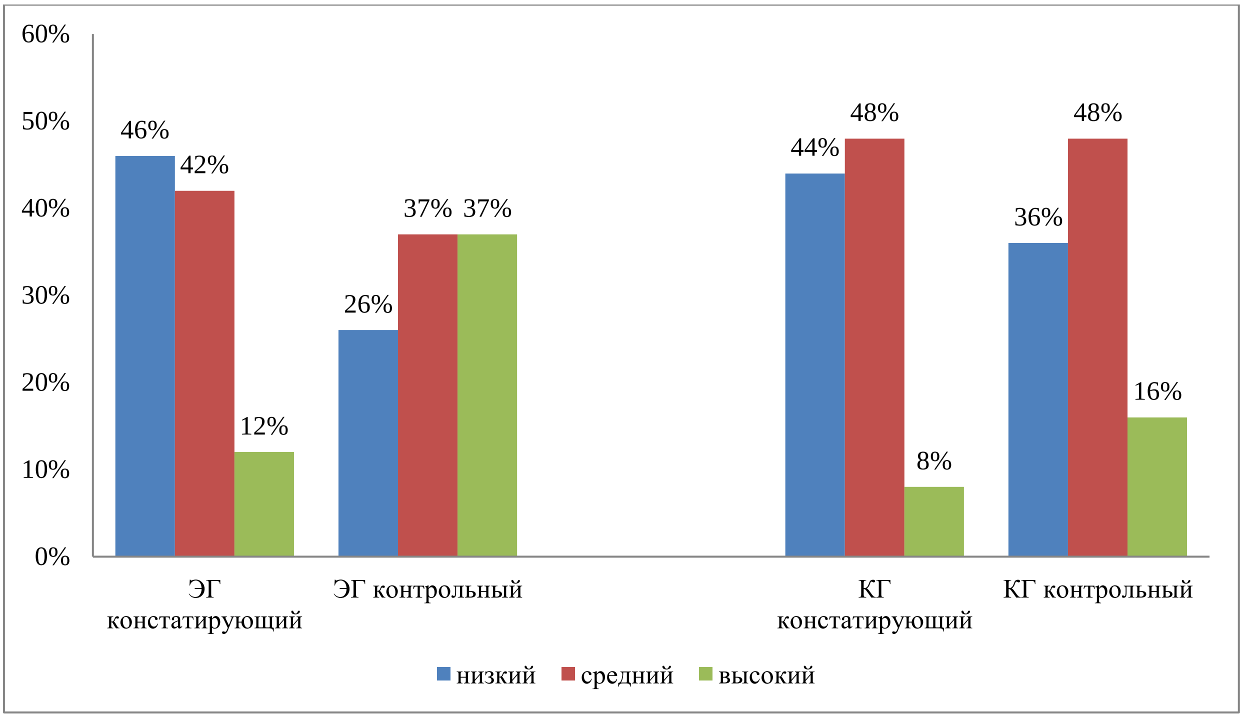

Рисунок 7 – Распределение испытуемых по уровням развития действия планирования на контрольном этапе

Далее, для проверки эффективности комплекса, мы определили уровень развития математического мышления на контрольном этапе, и представили его в Таблице 14.

Таблица 14 – Сводная таблица результатов констатирующего и контрольных экспериментов в ЭГ и КГ

Уровень	ЭГ				КГ			
	Констатирующий		Контрольный		Констатирующий		Контрольный	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Низкий	9	38	5	21	6	24	5	20
Средний	13	54	9	37	16	64	15	60
Высокий	2	8	10	42	3	12	5	20

Таким образом, мы видим положительную динамику развития математического мышления в обеих группах:

Высокий уровень повысился на 34% и составил 42% респондентов ЭГ, в КГ повысился 8% и составляет 20% респондентов.

Средний уровень понизился на 17% и составляет 37% респондентов ЭГ, в КГ понизился на 4% и составил 60% респондентов.

Низкий уровень понизился на 17% и составил 21% респондентов ЭГ, в КГ понизился на 4% и составил 20% респондентов.

Для проверки объективности нами была применена методика ХИ-квадрат Пирсона:

Число степеней свободы равно 2.

Значение критерия $\chi2$ составляет 13,284.

Критическое значение $\chi2$ при уровне значимости $p = 0{,}01$ составляет 9,21.

Связь между факторным и результативным признаками статистически значима при уровне значимости $\mathrm{p} < 0{,}01$.

Уровень значимости $p = 0{,}002$.

Таким образом, имеются существенные различия в развитии математического мышления, в экспериментальной и контрольной группах, что говорит об эффективности разработанного внедренного нами комплекса.

Выводы по главе 3

В третьей части нашего исследования мы описали результаты констатирующего и контрольных экспериментов.

Базой исследования была выбрана МОУ СОШ № 32 г. Копейска.

В исследовании приняли участие 24 учащихся $5_а$ класса, и 25 учеников $6_а$ класса. Способ формирования выборки – формальная группа. $5_а$ – экспериментальная группа, $6_а$ – контрольная группа.

На первом этапе экспериментальной работы нами проведена диагностика развития аналитического компонента математического мышления в экспериментальной и контрольной группах и полученны следующие результаты:

Низкий уровень развития аналитического компонента математического мышления диагностирован у 50% респондентов (12 детей) в ЭГ и 40% респондентов (10 детей) в КГ.

Средний уровень развития аналитического компонента математического мышления диагностирован у 42% респондентов (10 детей) в ЭГ, 52% респондентов (13 детей) в КГ.

Высокий уровень развития аналитического компонента математического мышления диагностирован у 8% респондентов (2 ребенка) в ЭГ, 8% респондентов (2 детей) в КГ.

Далее нами проведена диагностика сформированности действия планирования и получены следующие результаты:

Низкий уровень сформированности действия планирования диагностирован у 46% респондентов (11 детей) в ЭГ, и у 46% респондентов (11 детей) в КГ. Средний уровень сформированности действия планирования диагностирован у 42% респондентов (10 детей) в ЭГ, у 48% респондентов (12 детей) в КГ. Высокий уровень сформированности действия планирования диагностирован у 12% респондентов (3 детей) в ЭГ, у 8% респондентов (2 детей) в КГ.

По итогам методик мы определили общий уровень развития математического мышления и получили следующие данные:

Высокий уровень диагностирован у 8% ЭГ, 12% КГ.

Средний уровень диагностирован у 54% в ЭГ, 64% КГ.

Низкий уровень диагностирован у 38% ЭГ, 24% КГ.

Для проверки объективности нами была применена методика ХИ-квадрат Пирсона:

Значение критерия $\chi 2$ составляет 4,809. Критическое значение $\chi 2$ при уровне значимости $p < 0{,}05$ составляет 5,991. Уровень значимости $p = 0{,}091$.

Таким образом, нет значимых различий между экспериментальной и контрольной группами.

Результаты диагностики развития математического мышления учеников 5 и 6 классов на начальном этапе экспериментальной работы показали недостаточный уровень развития всех его компонентов. Для этого мы разработали и внедрили комплекс логических задач, направленных на формирование математического мышления учеников 5-6 классов.

И получили следующие результаты:

Высокий уровень повысился на 34% и составил 42% респондентов ЭГ, в КГ повысился 8% и составляет 20% респондентов.

Средний уровень понизился на 17% и составляет 37 % респондентов ЭГ, в КГ понизился на 4% и составил 60% респондентов.

Низкий уровень понизился на 17% и составил 21% респондентов ЭГ, в КГ понизился на 4% и составил 20% респондентов.

Для проверки объективности нами была применена методика ХИ-квадрат Пирсона:

Значение критерия $\chi 2$ составляет 13,284. Критическое значение $\chi 2$ при уровне значимости $p = 0{,}01$ составляет 9,21. Связь между факторным и результативным признаками статистически значима при уровне значимости $\mathrm{p} < 0{,}01$. Уровень значимости $p = 0{,}002$.

Таким образом, имеются существенные различия в развитии математического мышления, в экспериментальной и контрольной группах, что говорит об эффективности разработанного внедренного нами комплекса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математическое мышление – абстрактное теоретическое мышление, объекты которого лишены всякой вещественности и могут интерпретироваться самым произвольным образом, лишь бы при этом сохранялись заданные между ними отношения.

Среди многих проблем совершенствования обучения математике в средней школе большое значение имеет проблема формирования у учащихся математического мышления. В педагогике современной школы достаточно широко используются различные аспекты решения дидактических проблем, связанных с активизацией математического мышления. Однако, несмотря на то, что проблема развития математического мышления у школьников исследуется учеными на протяжении десятилетий, она и сегодня является одной из актуальных и сложнейших психолого-педагогических проблем

В исследовании рассмотрено развитие математического мышления средствами логических задач.

Логические задачи – это задачи, в которых соотношения между данными и искомыми редко поддаются описанию с помощью известных моделей; специфика этих задач такова, что учащиеся испытывают значительные затруднения при краткой записи их условия, при создании алгоритмов решения и использовании.

Практический этап работы проводился на базе МОУ СОШ № 32 г. Копейск. В нем приняли участие 24 учащихся $5_а$ класса, и 25 учеников $6_а$ класса. Способ формирования выборки – формальная группа. $5_а$ – экспериментальная группа, $6_а$ – контрольная группа.

В экспериментальную группу внедрялся комплекс логических задач, направленных на формирование математического мышления учеников 5-6 классов, а в контрольную группу внедрялись элементы комплекса: логические задачи применялись раз в неделю на уроке математики.

Цель – проверить эффективность комплекса по развитию математического мышления учеников 5-6 классов, средствами логических задач.

В качестве статистических методов был использован метод ХИ-квадрат Пирсона.

Методики исследования: для диагностики аналитического компонента математического мышления – психологический тест «Аналитические математические способности». Для исследования действия планирования – диагностика сформированности действия планирования. По результатам двух методик был определен общий уровень развития математического мышления.

На первом этапе экспериментальной работы нами проведена диагностика развития аналитического компонента математического мышления в экспериментальной и контрольной группах и получены следующие результаты:

Низкий уровень развития аналитического компонента математического мышления диагностирован у 50% респондентов (12 детей) в ЭГ и 40% респондентов (10 детей) в КГ. Средний уровень развития аналитического компонента математического мышления диагностирован у 42% респондентов (10 детей) в ЭГ, 52% респондентов (13 детей) в КГ. Высокий уровень развития аналитического компонента математического мышления диагностирован у 8 % респондентов (2 ребенка) в ЭГ, 8 % респондентов (2 детей) в КГ.

Далее нами проведена диагностика сформированности действия планирования и получены следующие результаты:

Низкий уровень сформированности действия планирования диагностирован у 46% респондентов (11 детей) в ЭГ, и у 46% респондентов (11 детей) в КГ. Средний уровень сформированности действия планирования диагностирован у 42% респондентов (10 детей) в ЭГ, у 48% респондентов (12 детей) в КГ. Высокий уровень сформированности действия планирования диагностирован у 12% респондентов (3 детей) в ЭГ, у 8% респондентов (2 детей) в КГ.

По итогам методик мы определили общий уровень развития математического мышления и получили следующие данные:

Высокий уровень диагностирован у 8% ЭГ, 1% КГ. Средний уровень диагностирован у 54% в ЭГ, 64% КГ. Низкий уровень диагностирован у 38% ЭГ, 24% КГ.

Нами было определено, что значимых различий между экспериментальной и контрольной группами нет.

Результаты диагностики развития математического мышления учеников 5 и 6 классов на начальном этапе экспериментальной работы показали недостаточный уровень развития всех его компонентов. Для этого мы разработали и внедрили комплекс логических задач, направленных на формирование математического мышления учеников 5-6 классов.

Цель комплекса – повышение уровня математического мышления.

Составленный комплекс задач рассчитан на 4 месяца обучения и рекомендуется применять на уроках математики 4 раза в неделю в экспериментальной группе, и 1 раз в неделю в контрольной группе. Комплекс логических задач состоит из 64 задач.

После внедрения комплекса, мы провели контрольный срез и получили следующие результаты:

Высокий уровень повысился на 34% и составил 42% респондентов ЭГ, в КГ повысился 8% и составляет 20% респондентов. Средний уровень понизился на 17% и составляет 37% респондентов ЭГ, в КГ понизился на 4% и составил 60% респондентов. Низкий уровень понизился на 17% и составил 21% респондентов ЭГ, в КГ понизился на 4% и составил 20% респондентов.

Для проверки объективности нами была применена методика ХИ-квадрат Пирсона:

Значение критерия $\chi 2$ составляет 13,284. Критическое значение $\chi 2$ при уровне значимости $p = 0{,}01$ составляет 9,21. Связь между факторным и результативным признаками статистически значима при уровне значимости $p < 0{,}01$. Уровень значимости $p = 0{,}002$.

Имеются существенные различия в развитии математического мышления, в экспериментальной и контрольной группах, что говорит об эффективности разработанного внедренного нами комплекса.

Таким образом, цель исследования достигнута, задачи выполнены, гипотеза исследования нашла свое подтверждение – если разработать и внедрить комплекс логических задач, то уровень математического мышления обучающихся 5-6 классов повысится.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Абрамова, О.М.** Обращение задач как средство развития гибкости мышления учащихся 5-6 классов в процессе обучения математике: автореф. канд. пед. наук / О. М. Абрамова. – Саранск: Изд-во Мордовского государственного педагогического университета, 2013. – 21 с.

2. **Голиков, А. И.** Развитие математического мышления средствами динамических интеллектуальных игр преследования / А. И. Голиков. – Новосибирск, 2002. – 124 с.

3. **Дышинский, Е. А.** Игротека математического кружка. Пособие для учителя / Е. А. Дышинский. – Москва: Просвещение, 1972. – 144 с.

4. **Епишева, О. Б.** Учить школьников учиться математике: Формирование приемов учебной деятельности / О. Б. Епишева, В. И. Крупич. – Москва: Просвещение, 1990. – 128 с.

5. **Кордемский, Б. А.** Математическая смекалка / Б. А. Кордемский. − Москва: ОНИКС, 2000. – 174 с.

6. **Крутецкий, В. А.** Психология математических способностей школьников / под ред. Н. И. Чуприковой. – Москва: Институт практической психологии, 1998. – 416 с.

7. **Максимов, Л. К.** Зависимость развития математического мышления школьников от характера обучения /Л. К. Максимов // Вопросы психологии. – 2002. – № 2. – С. 34 – 36.

8. Пойа, Д. Математическое открытие / Д. Пойа. – Москва: Наука, 1970. – 145 с.

9. **Слепкань, З. И.** Психолого-педагогические основы обучения математике: Методическое пособие / З. И. Слепкань. – Киев, 1983. – 123.

10. **Трегуб, Л. С.** Элементы современного введения в матанализ / Л. С. Трегуб. – Ташкент, 2003. – 178 с.

11. **Фридман, Л. М.** Теоретические основы методики обучения

математике в школе / Л. М. Фридман. – Москва, 2008. – 165 с.

12. **Бабаева, Ю. Д.** Психологический тренинг для выявления одаренности: методическое пособие / Ю. Д. Бабаева; под ред. В. И. Панова. – Москва: Молодая гвардия, 1997. – 278 с.

13. **Гусева, Е. П.** Некоторые психологические и психофизиологические черты математически одаренных подростков / Е. П. Гусева, И. А. Левочкина, В. М. Сапожников // Новые исследования в психологии и возрастной физиологии. – 1989. – № 2. – С. 23–27.

14. **Дружинин, В. Н.** Диагностика математических способностей / В. Н. Дружинин; под. ред. В.Н. Дружинина, Т. В. Галкиной. – Москва, 1993. – 316 с.

15. **Крутецкий, В. А.** Психология математических способностей школьников / В. А. Крутецкий. – Москва: Просвещение, 1968. – 432 с.

16. **Лейтес, Н. С.** Возрастной подход к феноменам детской одаренности / Н. С. Лейтес // Основные концепции творчества и одаренности. – Москва: Молодая гвардия, 1997. – С. 57–66.

17. **Атаханов, Р. А.** К диагностике развития математического мышления / Р. А. Атаханов // Вопросы психологии. – 1992. – № 1-2. – С. 60–67.

18. **Атаханов, Р. А.** Соотношение общих закономерностей мышления и математического мышления / Р. А. Атаханов // Вопросы психологии. – 1995. – № 5. – С. 41–51.

19. **Атаханов, Р. А.** Уровни развития математического мышления / Р. А. Атаханов / под ред. В. В. Давыдова. – Душанбе, 1993. – 174 с.

20. **Бабанский, Ю. К.** Проблема оптимизации процесса обучения математике / Ю. К. Бабанский, В. Ф. Харковская // Изучение возможностей школьников в усвоении математике. – Москва: Просвещение, 1977. – С. 3–28.

21. **Воронина, Л. В.** Развитие младших школьников в процессе формирования у них математической культуры / Л. В. Воронина // Начальная школа плюс до и после. – 2014. – № 1. – С. 51–57.

22. **Выготский, Л. С.** Педология подростка Л. С. Выготский // Собрание сочинений: в 6 т. / гл. ред. А. В. Запорожец. – Москва: Педагогика, 1984. – Т. 4. – 433 с.

23. **Голиков, А. И.** Теория и методика математического развития младших школьников в учебной деятельности: диссертации доктора пед. наук / А. И. Голиков. – Москва: МГУ, 2008. – 357 с.

24. **Гусев, В. А.** Теория и методика обучения математике: психолого-педагогические основы / В. А. Гусев. – Москва: БИНОМ, 2013. – 456 с.

25. **Давыдов, В. В.** Проблемы развивающего обучения: Опыт теоретического и экспериментального психологического исследования / В. В. Давыдов. – Москва: Педагогика, 1986. – 240 с.

26. **Давыдов, В. В.** Теория развивающего обучения / В. В. Давыдов. – Москва: ИНТОР, 2013. – 544 с.

27. **Демидова, Т. Е.** Формирование умений самоконтроля у младших школьников на уроках математики / Т. Е. Демидова, И. Н. Чижевская // Начальная школа плюс до и после. – 2013. – № 10. – С. 10–16.

28. **Дубровина, И. В.** Психология / И. В. Дубровина, Е. Е. Данилова, А. М. Прихожан / под ред. И. В. Дубровиной. – Москва: Академия, 2003. – 460 с.

29. **Зак, А. З.** Интеллектика. Систематический курс развития мыслительных способностей учащихся 1-4 классов: книга для учителя / А. З. Зак. – Москва: Интеллект-Центр, 2002. – 408 с.

30. **Зак, А. З.** К вопросу о развитии мышления у школьников / А. З. Зак // Психологические проблемы учебной деятельности школьника / Под ред. В. В. Давыдова. – Москва: Советская Россия, 2000. – С. 253–260.

31. **Зак, А. З.** Как определить уровень развития мышления школьника / А. З. Зак. – Москва: Знание, 1982. – 96 с.

32. **Занков, Л. В.** Дидактика и жизнь / А. В. Занков. – Москва: Просвещение, 1968. – 176 с.

33. **Исаев, Е. И.** Психологическая характеристика способов планирования у младших школьников / Е. И. Исаев // Вопросы психологии. – 1984. – № 2. – С. 52–60.

34. **Истомина, Н. Б.** Уроки математики: методические рекомендации / Н. Б. Истомина, З. Б. Редько, Е. С. Немкина, Н. Б. Тихонова. – Смоленск: Ассоциация XXI век, 2014. – 268 с.

35. **Козлова, С. А.** Универсальные учебные действия как основа для формирования предметных математических умений и производная от них / С. А. Козлова // Начальная школа плюс до и после. – 2013. – № 10. – С. 3–10.

36. **Колягин, Ю. М.** Задачи в обучении математике / Ю. М. Колягин. – Москва: Просвещение, 1977. – 144 с.

37. **Крутецкий, В. А.** Психология: учебник для вузов / В. А. Крутецкий. – Москва: Просвещение, 1980. – 352 с.

38. **Крутецкий, В. А.** Психология математических способностей школьников / В. А. Крутецкий. – Москва: Издательство «Институт практической психологии», 1998. – 416 с.

39. **Майер, Н.** Мышление человека / Н. Майер // Психология мышления. / под ред. А. М. Матюшина. – Москва: Прогресс, 1965. – С. 234–269.

40. **Маклаков, А. Г.** Общая психология: учебник для вузов / А. Г. Маклаков. – Санкт Петербург: Питер, 2008. – 583 с.

41. **Максимов, Л. К.** Зависимость развития математического мышления школьников от характера обучения / Л. К. Максимов // Вопросы психологии. – 1979. – № 2. – С. 57-65.

42. **Максимов, Л. К.** Формирование математического мышления у младших школьников: учебное пособие по спецкурсу / Л. К. Максимов. – Москва: Просвещение, 1987. – 96 с.

43. **Мендыгалиева, А. К.** Проблемные задания на уроках математики в начальной и основной школе / А. К. Мендыгалиева // Начальная школа плюс

до и после. – 2012. – № 9. – С. 13–17.

44. **Михайлова, Т. А.** Обучение анализу математического текста как средство повышения качества знаний и умений учащихся / Т. А. Михайлова // Начальная школа плюс до и после. – 2014. – № 6. – С. 18–24.

45. **Образцова, Т. Н.** Логические игры для детей / Т. Н. Образцова. – Москва Научная книга, 2005. – 160 с.

46. **Петухов, В. В.** Психология мышления: учебно-методическое пособие / В. В. Петухов. – Москва: Изд-во МГУ, 1987. – 89 с.

47. **Пиаже, Ж.** Речь и мышление ребенка / Ж. Пиаже. – Москва: Педагогика-пресс, 1994. – 528 с.

48. **Пиаже, Ж.** Структуры математические и операторные структуры мышления / Ж. Пиаже // Преподавание математики. – Москва: Учпедгиз, 1960. – С. 10–30.

49. **Розов, Н. Х.** Теория и практика инновационной деятельности в образовании . / Н. Х. Розов. – Москва: МАКС Пресс, 2007. – 80 с.

50. **Рубинштейн, С. Л.** Основы общей психологии / С. Л. Рубинштейн. – Санкт Петербург: Питер, 2002. – 720 с.

51. **Рудницкая, В. Н.** Математика: методика обучения / В. Н. Рудницкая. – Москва: Вентана-Граф, 2005. – 112 с.

52. **Ручкина, В. П.** Курс лекций по методике обучения математике в начальных классах: учеб. пособие / В. П. Ручкина, Г. П. Калинина, Г. В. Воробьева. – Екатеринбург: Издатель Калинина Г. П., 2009. – 190 с.

53. **Рыдзе, О. А.** Развитие самостоятельности ученика на уроке математики . / О. А. Рыдзе // Начальная школа. – 2016. – № 11. – С. 41–48.

54. **Селькина, Л. В.** Методический аспект реализации деятельностного подхода на уроке математики / Л. В. Селькина, М. А. Худякова // Начальная школа. – 2016. – № 6. – С. 20–29.

55. **Скаткин, М. Н.** Принципы обучения / М. Н. Скаткин // Дидактика средней школы / под ред. М. Н. Скаткина. – Москва: Просвещение, 1982. – С.

48–89.

56. **Слепкань, З. И.** Психолого-педагогические основы обучения математике / З. И. Слепкань. – Киев: Рад. школа, 1983. – 192 с.

57. **Талызина, Н. Ф.** Управление процессом усвоения знаний (психологические основы) / Н. Ф. Талызина. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 345 с.

58. **Талызина, Н. Ф.** Формирование познавательной деятельности младших школьников: кн. для учителя / Н. Ф. Талызина. – Москва: Просвещение, 1988. – 175 с.

59. **Эрдниев, П. М.** Обучение математике в школе. Укрупнение дидактических единиц: книга для учителя / П. М. Эрдниев, Б. П. Эрдниев. – Москва: Столетие, 1996. – 320 с.

60. **Якиманская, И. С.** Знания и мышление школьника / И. С. Якиманская. – Москва: Знание, 1985. – 80 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Психологический тест Аналитические математические способности.

Данный психологический тест предназначен для диагностики аналитических математических способностей. Аналитические математические способности относятся к академическим. То есть в первую очередь они позволяют человеку лучше усваивать учебный материал, в данном случае – математику. Аналитические математические способности тесно коррелируют с показателем IQ, и поэтому большинство тестов на IQ включают в себя субтесты на определение закономерностей в числовых рядах. Обладатели высоких показателей по аналитическим математическим способностям проявляют способности к анализу не только в области математики, но и в иных разнородных проблемах. Обладатели низких показателей по данному качеству не проявляют ни способностей, ни склонностей к анализу, зачастую совершают неоправданно легкомысленные поступки.

Стимульный материал теста состоит из двадцати числовых рядов. Каждый ряд включает в себя десять чисел, находящихся в определённой взаимосвязи между собой. Одно из десяти чисел пропущено (отмечено троеточием). В задачу испытуемого входит найти это пропущенное число.

Методику можно проводить и в индивидуальной работе с испытуемым, и в группе. Время прохождения теста: 15 минут. Запрещается пользоваться калькулятором и делать какие-то вспомогательные записи.

Методику можно применять и в школьной психологии при анализе математических способностей обучающихся, и в процессе профотбора на профессии, требующие хорошо развитых математических и аналитических способностей: разного рода аналитики, экономисты и др.

Методика имеет четыре разные формы (А, Б, В и Г). Данная форма – форма А.

Оцениваемые качества. Аналитические математические способности

Возрастная категория. 12+

Порядок проведения

Испытуемому выдаётся стимульный материал и бланк ответов. Время проведения методики – 15 мин.

Инструкция

Сейчас вы получите задания. Каждое задание представляет собой ряд чисел. Эти числа находятся в определённой закономерности. Найдите эту закономерность. Одно из десяти чисел в ряду пропущено. Используя найденную закономерность, определите что это за число. Запишите это число в бланк ответов и приступайте к следующему заданию. Если долго не получается решить одно задание, то переходите к другому. Время, которое у вас есть: 15 минут.

Задания:

1) $196\ 175\ 154\ 133\ 112\ 91 \ldots 49\ 28\ 7$;

2) $39\ 24\ 23\ 41\ 7\ 58\ -9\ 75\ -25 \ldots$;

3) $-31\ -30\ -55\ -1\ -79 \ldots -103\ 57\ -127\ 86$;

4) $23 \ldots 57\ 74\ 91\ 108\ 125\ 142\ 159\ 176$;

5) $155 \ldots 205\ 230\ 255\ 280\ 305\ 330\ 355\ 380$;

6) $5\ -4\ -13 \ldots -31\ -40\ -49\ -58\ -67\ -76$;

7) $-15\ -1\ 4\ -9\ 8\ 9 \ldots 17\ 14\ 3$;

8) $89 \ldots 73\ 83\ 57\ 70\ 41\ 57\ 25\ 44$;

9) $\ldots -28\ -16\ -12\ -8\ 4\ 0\ 20\ 8\ 36$;

10) $11\ 18\ 12 \ldots 9\ 7\ 21\ 0\ 2\ 26$;

11) $0\ -9\ -10\ -7\ -17\ -3 \ldots -25\ 4\ -21$;

12) $6\ -8\ 1\ 1\ -15\ 6 \ldots -22\ 11\ -9$;

13) $95\ 95\ 112\ 86\ 129 \ldots 146\ 68\ 163\ 59$;

14) $92\ 105\ 106\ 133\ 120\ 161 \ldots 189\ 148\ 217$;

15) $6\ -3\ -21\ 15\ -48\ 33 \dots 51\ -102\ 69$;

16) $120 \dots 62\ 33\ 4\ -25\ -54\ -83\ -112\ -141$;

17) $7\ 31\ 55\ 79\ 103\ 127\ 151\ 175 \dots 223$;

18) $-2\ -13\ -27\ -29 \dots -45\ -77\ -61\ -102\ -77$;

19) $-19\ 4\ 27\ 50\ 73\ 96\ 119\ 142 \dots 188$;

20) $38\ 28\ 18 \dots -2\ -12\ -22\ -32\ -42\ -52$.

Обработка результатов

С помощью ключа посчитайте количество верных ответов. За каждый верный ответ начисляется один балл. Таким образом, максимальный балл составляет 20.

Ниже приводится таблица ориентировочных нормативов для разных возрастов.

Возраст 12 - 13 лет

Низкий уровень – 0-4.

Средний уровень – 5-9.

Высокий уровень – 10-20.

КЛЮЧ

1) 70;

2) 92;

3) 28;

4) 40;

5) 180;

6) -22;

7) -3;

8) 96;

9) -24;

10) 16;

11) -14;

12) -4;

13) 77;

14) 134;

15) -75;

16) 91;

17) 199;

18) -52;

19) 165;

20) 8.

БЛАНК ОТВЕТОВ

Ф.И.О.: ______________________________________

Возраст (полных лет): ___________

1. _____

2. _____

3. _____

4. _____

5. _____

6. _____

7. _____

8. _____

9. _____

10. _____

11. _____

12. _____

13. _____

14. _____

15. _____

16. _____

17. _____

18. _____

19. _____

20. _____

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Диагностика сформированности действия планирования

Цель – установление текущей валидности методики диагностики действия планирования методом контрастных групп.

Материал. Бланки двух заданий с вырезанными вариантами решения по типу заданий теста «Прогрессивные матрицы Равена». Образцы бланков приведены на рисунках 2.1 и 2.2. Линии выреза на рисунках показаны пунктирной линией.

Порядок работы. Методика состоит из двух заданий. Первое задание служит образцом (рисунок 2.1), а второе является собственно диагностическим заданием (рисунок 2.2).

Инструкция: «Ты, конечно, знаешь, что такое зарядка и для чего ее делают (можно дождаться, чтобы ребенок сам ответил на этот вопрос). Ты прав, зарядка – это достаточно легкие физические упражнения, которые человек делает, чтобы взбодриться. Скажи, а если голова устала думать, можно ли взбодриться, можно ли заставить её быстрее соображать? Конечно, да. Только для этого надо сделать «гимнастику для мозгов». Я тебе предлагаю заняться такой зарядкой. Как и любая другая зарядка, она не трудная. Я верю, что ты с ней обязательно справишься. А если тебе все же что-то покажется трудным, я тут же тебе помогу. Ты только спроси меня, если тебе что-то надо».

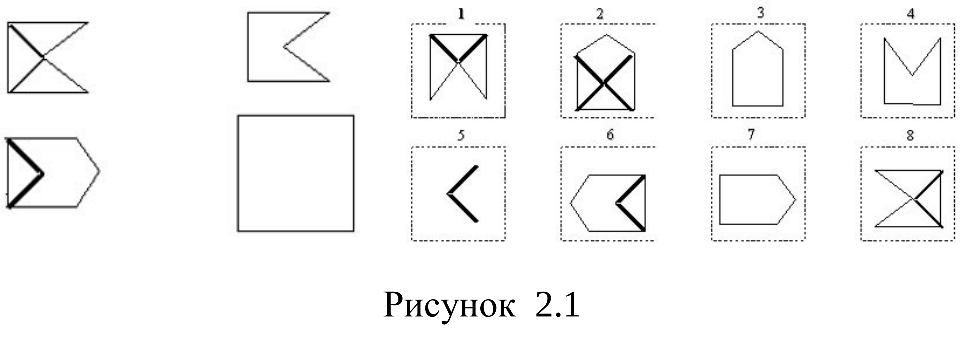

Рисунок 2.1

Далее ребенку предлагается бланк с заданием-образцом.

Инструкция: «Посмотри, вот такую задачу решал(а) твой(твоя) сверстник(сверстница). Сверстник(сверстница) – это мальчик(девочка) такого же возраста, как и ты. Попробуй и ты решить эту задачу». Внимание ребенка обращается на верхнюю часть бланка: «Вот видишь, здесь нарисованы разные фигурки. Фигурок было четыре, но одну вырезали и убрали. Тебе надо посмотреть на нижние фигурки и найти среди них ту, которую вырезали с рисунка, и положить, вернуть ее на место».

Далее ребенок самостоятельно решает задачу-образец. Психолог в это время ведет протокол, в котором фиксирует все действия и высказывания ребенка. Если ребенок решил задачу, то его необходимо похвалить и перейти ко второму заданию. Если же ребенок не может быстро решить задачу (за 4-5 минут), то тогда психолог говорит: «Ты молодец, что не испугался(-ась) и смело стал(а) решать эту задачу. На самом деле это было задание на смелость, я знал, что задача очень трудная. Но ты справился(-ась), показал(а) себя храбрым человеком, который не боится трудностей. А в случае трудностей я обещал прийти тебе на помощь. Сейчас я тебе помогу».

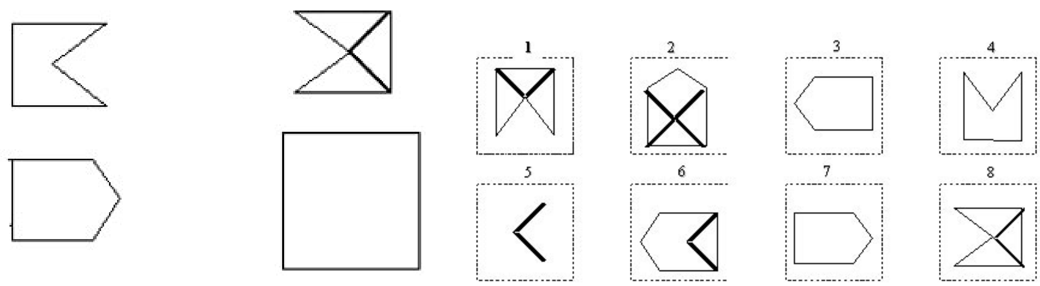

Рисунок 2.2

Психолог просто показывает, как решается задача, т.е. берет нужный квадрат и помещает его на рисунок без устных комментариев. Ребенку дается небольшое время, чтобы он понял принцип решения задачи. После показа решения задания-образца, переходят к основной задаче.

Ребенку дается бланк со второй задачей, но ни в коем случае нельзя давать ее решать, т.е. нельзя позволять ребенку манипулировать с квадратиками. Ребенок должен просто видеть задачу и решать ее «в уме».

Далее следует первый вопрос: «Ты знаешь, как решается эта задача?»

Ребенок должен устно рассказать способ решения. Если ребенок устно не точно рассказывает о решении задачи или вообще затрудняется с рассказом, но заявляет, что знает решение, то следует задать уточняющий вопрос: «Ты знаешь, какой квадратик надо положить, вернуть на место? Если знаешь, покажи его». Ответ ребенка может показать, какие именно условия задачи он выделяет в качестве ключевых для решения задачи. Но дети не всегда могут вербально выразить то, что они сделали «в уме», поэтому и задается уточняющий вопрос.

Если ребенок не знает, как решается вторая задача, или не может указать верный квадрат, то ему опять без комментариев показывается решение второй задачи, а затем задается второй вопрос.

«Твой(твоя) сверстник(сверстница) тоже решала эту задачу. Сначала она сделала вот так». Далее берется квадрат № 3. В этом варианте правильно указан контур, но нет линий внутри контура. У ребенка спрашивают: «Решил ли твой(твоя) сверстник(сверстница) задачу? Почему?» Все ответы ребенка должны тщательно фиксироваться.

Следующим перекладывается квадрат № 5. В этом варианте правильно проведены линии внутри контура, но сам контур отсутствует. У ребенка опять спрашивают, решил ли его сверстник задачу и почему.

«Твой сверстник сделал третью попытку решить задачу». После этого берется правильный вариант № 6, но в воздухе квадратик переворачивается на 90^0 по часовой или против часовой стрелки, так что оказывается, что хотя элемент выбран и правильно, но ориентировка его на схеме не правильна, как показано на рисунках 3*а* и 3*б*. У ребенка спрашивают: «Решил ли твой(твоя) сверстник(сверстница) задачу? Почему?»

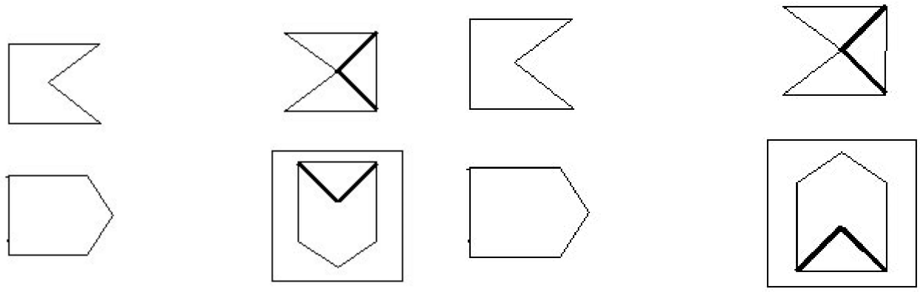

Рисунок 2.3

С помощью второго вопроса выясняют, определил ли ребенок для себя те условия задачи, которые ограничивают круг возможных действий. Т.е. этот вопрос позволяет узнать, понял ли ребенок запрещающие условия задачи.

Потом ребенка просят поставить отметку сверстнику за показанные им три варианта решения.

Затем следует задать третий вопрос. «Как видишь, при решении задачи может произойти и неудача, может быть ее сразу и не удастся решить. Но неудач не следует бояться. Ведь ты же смелый(-ая), я знаю, и никаких задач не боишься. А теперь скажи, что же надо делать твоему сверстнику(сверстнице), чтобы решить эту задачу?» Этот вопрос выясняет, выделяет ли ребенок те условия, про которые в задаче напрямую, открыто не говорится, но которым предлагаемый способ действий должен удовлетворять. Ребенок своим ответом показывает, на какие условия надо ориентироваться при решении задачи.

Все ответы ребенка должны быть внесены в протокол.

Четвертый вопрос: «Ты хорошо справляешься с гимнастикой для ума. А вот твой сверстник(сверстница) не смог(ла) справиться с этим упражнением. И пришлось учителю помогать ей решать задачу. Как бы ты помог(ла) ребенку 10 лет, если бы был(а) очень хорошим учителем? Что бы ты стал(а) делать как хороший учитель в этом случае?» Этот вопрос предполагает, что дети с более развитым планированием могут свободно оперировать выделенными условиями задачи и могут придумывать новые задачи с теми же самыми условиями, или, может быть, делая какие-либо из условий более «выпуклыми» в придуманных ими задачах. Дело в том, что некоторые условия задачи открыто в задании не оговариваются, но учитель про эти условия знает. Смысл этого вопроса состоит в том, что ребенок может поставить себя в позицию «знающего» относительно условий задачи.

Пятый вопрос: «А что бы ты сделал(а) на месте сверстника(сверстницы) сам(а)?» Если ребенок затрудняется с ответом, то ему следует задать наводящий вопрос: «Ты попытался(-ась) бы все-таки самостоятельно решить эту задачу, или попросил(а) бы учителя помочь тебе?» Вопрос предполагает, что дети с более развитым планированием предпочтут работать самостоятельно, поскольку могут поставить себя в позицию «знающего». Дети с менее развитым планированием призывают на помощь учителя для того, чтобы учитель более конкретно указал те условия задачи, на которые надо ориентироваться при ее решении.

Шестой вопрос: «Что бы ты сам(а) спросила у учителя, если бы оказался(-ась) на месте этого своего сверстника(сверстницы)?» Вопросы детей с более развитым планированием будут касаться или условий задачи, или общего способа действий. Дети с менее развитым планированием будут спрашивать у учителя показать правильный ответ, т.е. дети с менее развитым планированием акцент в своем вопросе делают на решении этой конкретной задачи.

После записи ответа следует еще раз спросить об отметке: «Какую отметку ты поставишь своему сверстнику(сверстнице), которая вот так решает задачу? Она не может решить задачу сама и тогда задает вопросы учителю, чтобы он помог с решением». Предполагается, что у детей с более развитым планированием выставляемая оценка более адекватна ходу решения задачи «сверстником» и к тому же эта оценка мало колеблется, поскольку оценка связана с тем, на какие условия задачи ориентируется условный «сверстник» при ее решении.

После этого ребенка благодарят за работу, высказывают убеждение, что теперь он будет справляться с любой задачей, и прощаются с ним.

Обработка полученных по методике данных.

На основе ответов детей можно диагностировать три типа планирования. Диагностика типа зависит от того, на какие условия задачи ориентируется ребенок при ее решении.

Рефлексирующе-анализирующий тип. Дети этого типа, в целом, должны выделять те условия задачи, которые

1) обязательно ограничивают круг возможных действий, отсекая при этом запрещенные действия, те, которые нельзя делать, решая задачу;

2) те условия, про которые в задаче напрямую открыто не говорится, но которым предлагаемый способ действий должен удовлетворять. Эти условия показывают, что же надо делать при решении задачи.

Анализирующий тип. Дети этого типа, в основном, ориентированы лишь на поиск тех условий задачи, которые обязательно ограничивают круг возможных действий, т.е. выделяют запрещенные действия, те, которые нельзя делать, решая задачу.

Угадывающий тип. Дети этого типа вообще не ориентируются на условия задачи, часто вводя новые, не предусмотренные задачей, условия.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Комплекс логических задач по формированию математического мышления обучающихся 5-6 классов

Обрати внимание

1. Банка с водой. В детстве любят загадывать загадки. Вот одна из типичных детских загадок: можете ли Вы с трех раз разбить трехлитровую банку с водой об асфальт?

Решение: Самая большая проблема – не разбить случайно банку с первого раза...

2. Сколько лет капитану?

Представьте себе, что Вы капитан парохода. Ранним августовским утром вы отправляетесь в рейс по маршруту Астрахань-Москва. В трюме парохода – 200 тонн арбузов, 33 центнера рыбы и 499 центнеров помидоров. Сколько лет капитану?

Решение:

Так как капитан теплохода – Вы, то...

3. В зоомагазине. «Ручаюсь, сказал продавец, что этот попугай будет повторять каждое услышанное им слово». Обрадованный покупатель приобрел чудо-птицу, но придя домой, обнаружил, что попугай «нем как рыба». Тем не менее, продавец не лгал. Как это могло быть?

Решение:

Продавец сказал правду, значит верно, то, что попугай повторяет каждое услышанное слово. Попугай «нем как рыба» - следовательно, он не слышал ни одного слова.

Вывод: либо при нем не было сказано ни одного слова, либо он просто «глух как тетерев».

4. Слово. Какое слово из одиннадцати букв все отличники пишут неправильно?

Решение:

Слово неправильно все отличники пишут: неправильно.

5. Точки на прямой. Если на прямой через равные промежутки поставить 10 точек, то они займут отрезок длины s, если же 100 точек, то отрезок длины S. Во сколько раз S больше s?

Решение:

Между десятью точками девять интервалов, а между ста точками - девяносто девять. Следовательно, S больше s в 11 раз.

6. Стереометрическая задача. Сколько граней у шестигранного карандаша?

Решение: 6

7. Исправьте ошибку. В неверном равенстве $101 = 10^2 - 1$ передвиньте одну цифру так, чтобы оно стало верным.

Решение:

Передвинем цифру 2 немного вниз: $101 = 102 - 1$.

8. Восхождение гусеницы. Высота столба 20 метров. Гусеница ползет по нему, при этом за день она поднимается на 5 метров, а за ночь опускается на 4 метра. За какое время она доползет до вершины столба?

Решение:

Обычный ответ: за 20 дней, но... Так как за сутки гусеница поднимается на 1 метр, следовательно, за 15 суток она поднимется на 15 метров, а за шестнадцатый день еще на 5 метров и достигнет вершины столба...

9. Маша + Федя = ? Для покупки порции мороженного Феде не хватало 7 копеек, а Маше всего лишь копейки. Тем не менее, когда они сложили все имевшиеся у них деньги, то их все равно не хватило на покупку даже одной порции мороженого. Сколько стоила порция мороженого?

Решение:

Если бы у Феди была хотя бы копейка, то им с Машей хватило бы на мороженое (Маше не хватало на мороженое всего копейки!). Следовательно, у Феди денег не было, а мороженое стоило 7 копеек.

10. Как распилить цепочку?

В гостиницу приехал путешественник. Денег у него не было, а была лишь золотая цепочка, состоящая из 6 звеньев. За каждый день пребывания в гостинице он должен расплачиваться одним звеном цепочки, но при этом хозяин гостиницы предупредил, что согласен взять не более одного распиленного звена. Подскажите, как путешественнику распилить цепочку, чтобы прожить в гостинице шесть дней и ежедневно расплачиваться с хозяином?

Решение: Путешественнику надо распилить третье кольцо, чтобы у него было три обрывка цепи длиной в 1, 2 и 3 звена. Тогда в первый день он отдаст одно звено, во второй два и одно получит обратно, и так далее.

11. Как измерить диагональ кирпича? В Вашем распоряжении имеется несколько одинаковых кирпичей и линейка.

Решение: Линейку надо приложить так, как показано на рисунке 3.1.

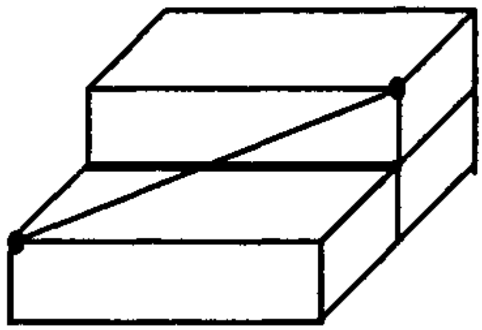

Рисунок 3.1

12. Как разделить добычу? Два разбойника делят добычу. Каждый из них уверен, что он мог бы поделить добычу на две равные части, но второй ему не доверяет. Как разбойникам разделить добычу, чтобы оба остались довольны?

Решение: один из них должен разделить добычу на две, по его мнению, равных части, а второй выбрать ту из них, которая, по его мнению, больше.

13. Как обжарить хлеб? На сковородке помещается два кусочка хлеба. На поджаривание одного кусочка с одной стороны требуется минута. Можно

ли поджарить три кусочка хлеба с обеих сторон быстрее, чем за 4 минуты?

Решение:

Да. Пусть у нас имеется три кусочка хлеба: aA, bB и cC (стороны кусочков). План «обжаривания, удобно представить в виде схемы: ab; Ac; BC. Быстрее поджарить три кусочка хлеба не удастся: у трех кусочков хлеба шесть Сторон, а за минуту обжаривается не более двух «сторон».

14. Как победить Кощея? В заповедном и дремучем, страшном Муромском лесу бьют из-под земли источники волшебной воды. Из первых девяти источников воду может взять каждый, но последний источник находится в пещере Кощея Бессмертного, и никто, кроме самого Кощея, не может набрать там воды. На вкус и цвет волшебная вода ничем не отличается от обыкновенной, однако, если человек выпьет из какого-нибудь источника, он умрет (волшебная вода смертельна даже для самого Кощея).

Спасти может только одно: если запить эту воду водой из волшебного источника, номер которого больше. Если же выпить воды из десятого источника, то уже ничего не поможет. Иван-царевич вызвал Кощея на поединок. Условия такие: каждый приносит с собой кружку с водой и дает ее выпить своему противнику. Кощей согласился. Он рассуждал так: Если я дам Ивану-царевичу воды из десятого источника, то он погибнет. Если же его яд я запью той же водой, я спасусь. Как Ивану-царевичу победить в поединке?

Решение: Иван-царевич должен перед поединком выпить волшебной воды (из любого источника), тогда Кощей, дав ему воды из десятого источника, спасет его от неминуемой смерти. Кощею же он должен дать выпить простой воды (не волшебной!). Кощей, выпив простой воды и запив ее водой из десятого источника, погибнет.

15. Сколько же все-таки стоила книга? За книгу заплатили один рубль, и осталось заплатить еще столько, сколько осталось бы заплатить, если бы за нее заплатили столько, сколько осталось заплатить. Сколько заплатили за книгу?

Решение: Из условия следует, что за книгу осталось заплатить 1 рубль, а книга стоит 2 рубля.

16. Загадочный символ. Между цифрами 4 и 5 поставьте известный Вам математический символ, чтобы в результате получилось число больше 4, но меньше 5.

Решение: Между цифрами нужно поставить запятую: $4 < 4{,}5 < 5$.

Числа.

17. Странный отчет. Директор школы в своем отчете указал, что в школе 3688 учащихся, причем мальчиков на 373 человека больше, чем девочек. Но умный инспектор РОНО сразу понял, что в отчете допущена ошибка. Как он догадался?

Решение: Да, более чем странный отчет. Если девочек в этой школе х, то всего учащихся $2x + 373$, что не равно 3688, так как нечетное число не может быть равно четному числу.

18. Прав ли Федя? Федя утверждает, что может придумать пример на деление с остатком, чтобы делимое, делитель, неполное частное и остаток оканчивались на 9, 7, 3 и 1, а Маша говорит, что он не прав. Кто же из них прав?

Решение:

Пусть *а* – делимое, *в* – делитель, *с* – частное, *d* – остаток.

Тогда $a=b\cdot c+d$. Так как а – число нечетное, а $b\cdot c+d$ – четное, то равенство невозможно.

19. Случай в сберкассе. Можно ли разменять 25 рублей при помощи десяти купюр достоинством 1, 3 и 5 рублей?

Решение: Нельзя. И вовсе не потому, что таких купюр не существует. Сумма четного количества нечетных слагаемых не может быть нечетным числом.

20. Дорожная проблема. Можно ли соединить 13 городов дорогами так, чтобы из каждого города выходило ровно 5 дорог?

Решение: Так как из каждого города выходит 5 дорог, то общее количество дорог – 65. Заметим, что при этом каждую дорогу АВ мы считаем дважды, как выходящую из городов А и В . Таким образом, общая сумма дорог должна быть четной. Получаем противоречие. Ответ: нельзя.

21. Федя, ты не прав. Федя написал на доске равенство: 1·2·3·4·5·6·7·8·9=20 (вместо · на доске в неизвестном порядке написаны знаки + и -). Докажите, что в равенстве допущена ошибка.

Решение: Так как выражение 1·2·3·4·5·6·7·8·9 содержит нечетное количество нечетных чисел, то результат должен быть нечетным числом, следовательно, это равенство неверно.

22. Квадратные плитки. Можно ли сложить замкнутую цепочку из 1997 квадратных плиток? Пример замкнутой цепочки:

Решение: Предположим, мы расположили цепочку из плиток на бесконечной «шахматной» доске, причем каждая плитка покрывает одну из клеток. Пронумеруем теперь плитки в порядке их следования числами от 1 до 1997. Заметим, что плитки с нечетными номерами должны находиться на полях одинакового цвета. Но это противоречит тому, что плитки с номерами 1 и 1997 должны быть расположены на соседних клетках (так как цепочка замкнутая!) и, следовательно, эти клетки должны быть окрашены в разные цвета. Поэтому замкнутую цепочку составить из 1997 плиток нельзя.

23. Точки на прямой. На прямой расположено несколько точек. Затем между двумя соседними точками поставили еще по точке. И так далее несколько раз, после чего все отмеченные точки подсчитали. Могло ли при этом получиться число 1998?

Решение: Заметим, что если в какой-либо момент времени на прямой n точек, то на следующем шаге число точек становится равно нечетному числу $2n$-1. Поэтому число точек на прямой всегда будет нечетным. Следовательно, число 1998 при подсчете получиться не могло.

24.Потерянная гиря. В наборе было 23 гири массой 1 кг, 2 кг, 3 кг, ... 23 кг. Можно ли их разложить на две равные по массе кучки, если гирю в 21 кг потеряли?

Решение: Заметим, что (1+23) + (2+22) + ... +(11+13)+12 – число четное. Следовательно (S – 21) на две равные по весу кучки не разложишь.

25. Без сложных вычислений. Числа a и b – целые. Известно, что $a+b=1998$. Может ли сумма $7a+3b$ равняться 6799?

Решение: Так как a и b имеют одинаковую четность, то 7a и 3b тоже имеют одинаковую четность, а значит их сумма должна быть четной. Так как 6799 нечетное число, то задача решений не имеет.

26. Прямая. Можно ли провести прямую линию так, чтобы она пересекла все стороны (но не вершины!) 2001-угольника?

Решение: Предположим, что это возможно, и прямая пересекла все стороны (но не вершины) некоторого 2001-угольника.

1 решение. Всякий многоугольник разбивает плоскость на две части. Будем двигаться вдоль прямой. В начале движения мы находимся вне многоугольника, когда мы пересечем первую сторону, мы окажемся внутри многоугольника, затем снова вне и так далее. Заметим, что пересекая сторону в четный раз, мы оказываемся вне многоугольника, нечетный раз - внутри. Следовательно, после встречи с 2001 стороной мы окажемся внутри 2001-угольника, и прямая пересечет, как минимум, еще одну сторону. Получается, что прямая должна пересечь одну из сторон 2001-угольника два раза, что невозможно, следовательно, наше предположение неверно, и провести прямую так, чтобы она пересекла все стороны 2001-угольника невозможно.

2 решение. Если бы это было возможно, то по разные стороны от этой прямой находилось бы одинаковое количество вершин, то есть у многоугольника должно быть четное количество вершин.

27. Покупка альбома. Для покупки альбома Маше не хватило 2 копеек, Коле 34 копеек, а Феде 35 копеек. Когда они сложили свои деньги, их все равно не хватило на покупку альбома. Сколько стоит альбом?

Решение: Так как у Коли на одну копейку больше, чем у Феди, то у него есть, как минимум, 1 копейка, и к Машиным деньгам 1 копейка добавляется. Но Маше на альбом не хватило, то есть ей дали меньше, чем 2 копейки, значит у Феди, вообще, нет денег, и ему не хватает полной стоимости альбома. Ответ: альбом стоит 35 копеек.

28. Есть ли логика? Найдите закономерность в построении последовательности: 111, 213, 141, 516, 171, 819, 202, 122,...

Решение: В последовательности 11, 12, 13, 14... просто иначе поставили запятые...

29. Для чего нужны деньги? Банкир шел по улице маленького провинциального городка, как вдруг увидел на мостовой банкноту в 5 долларов. Он поднял ее, запомнил номер и пошел домой завтракать. За завтраком жена сообщила ему, что мясник прислал счет на 5 долларов. Поскольку других денег у банкира при себе не было, он отдал жене найденную банкноту, чтобы оплатить счет. Мясник отдал эту банкноту фермеру, когда покупал теленка, тот торговцу, торговец, в свою очередь, дал ее прачке, а прачка, вспомнив, что задолжала банку 5 долларов, отнесла ее туда и погасила свой долг. Банкир узнал банкноту, которой к тому времени было оплачено долгов на 25 долларов. Через некоторое время выяснилось, что банкнота фальшивая. Кто и сколько потерял на всех этих операциях?

Решение: После того, как фермер продал теленка мяснику, все пять участников (банкир, мясник, фермер, торговец и прачка) оказались в одинаковом положении, а именно: каждый из них должен кому-либо 5 долларов, и ему должны точно такую же сумму, так что общий баланс равен нулю. Обращение по кругу фальшивой банкноты фактически эквивалентно тому, как если бы все пять участников собрались вместе и договорились считать долги взаимно погашенными. В этом случае ее действие ничем не отличается от действия настоящей банкноты.

30. Расставьте целые числа не равные О в клетках таблицы 4x4 так, чтобы сумма чисел, стоящих в углах каждого квадрата размером 2x2, 3x3, 4x4,

равнялась О.

Решение показано на рисунке 3.2

–1	–1	1	1
1	1	–1	–1
–1	–1	1	1
1	1	–1	–1

Рисунок 3.2

Невероятные истории

31. Правдивый Федя всегда говорит только правду, но однажды, когда ему задали два раза подряд один и тот же вопрос, он дал на него разные ответы. Могло ли такое быть?

Решение: Например, можно дважды спросить у него: «Сколько сейчас времени?»

32. Странный вопрос. Федя всегда говорит правду, а Саша всегда врет. Им задали один и тот же вопрос, а они дали на него одинаковые ответы. Могло ли такое быть?

Решение: Можно спросить: «Говорите ли Вы правду?» На этот вопрос и правдивый человек и лжец должны ответить «да!».

33. Диалог в магазине хозяйственных товаров. Сколько стоит один? - спросил посетитель.

– 1000 рублей – ответил продавец,

– А двенадцать? – 2000 рублей.

– Хорошо. Дайте мне пятьсот двенадцать.

– С Вас 3000 рублей.

– О каком товаре могла идти речь?

Решение: Например, цифры для номера дома. Тогда 1 – одна цифра – стоит 1000 рублей, 12 – две цифры – в два раза больше, а 512 – три цифры – в три раза больше.

34. Когда родился Федя? Федя как-то сказал: «Позавчера мне было 10 лет, а в следующем году мне исполнится 13 лет». Могло ли это быть правдой?

Решение: Это может быть, если Федя родился 31 декабря, а разговор происходил на следующий день, то есть 1 января.

35. Три бегуна соревновались в беге на 200 метров. По окончании сезона выяснилось, что в большинстве забегов .A опередил B, B в большинстве забегов опередил C, а C в большинстве забегов опередил .A . Могло ли такое быть?

Решение: Пусть, например, в трех забегах бегуны финишировали в следующей последовательности: ABC, BCA, CAB . Тогда в двух забегах их трех A опередил B в двух забегах из трех B опередил C, а в двух забегах из трех C опередил A.

36. На крыльце дома сидят рядом мальчик и девочка. Саша говорит: я мальчик». Женя говорит: я девочка». Если, по крайней мере, один из детей врет, то кто из них мальчик, а кто девочка?

Решение: Из того, что один из них врет, следует, что врет и второй. Следовательно, Саша – девочка, а Женя – мальчик.

36. Черепаший разговор. Три черепахи ползут по прямой друг за другом. Первая говорит: сзади меня ползут две черепахи. Вторая говорит: впереди меня ползёт одна черепаха и сзади одна. Третья говорит: впереди меня ползёт одна черепаха и сзади одна. Могло ли такое быть?

Решение:

– Да, если одна из черепах врет... Кстати, какая?

37. Проблемы с бензином. Можно ли разлить 50 литров бензина по трем бакам так, чтобы в первом баке было на 10 литров больше, чем во втором, а после переливания 26 литров из первого бака в третий, в третьем баке стало

столько же, сколько и во втором?

Решение: Заметим, что в первом и втором баках должно быть не менее 26 литров бензина. Поэтому так разлить 50 литров бензина невозможно.

38. Проблемы с транспортом. Федя участвует в двух математических кружках, которые расположены в противоположных концах Москвы. Ехать надо по одной и той же линии метро, но в противоположные стороны. Федя садится в первый приходящий поезд независимо от того, с ка- кой стороны тот пришел. К концу года он обнаружил, что в первом кружке бывал вдвое чаще, чем во втором. Как это могло произойти? Заметим, что школьник попадает в метро не всегда в одно и то же время: иногда немного позже, иногда немного раньше. Поезда проходят в каждом направлении через одинаковые интервалы времени.

Решение: Могло быть и хуже, например, если поезда в одном направлении отходят в 10.00; 10.10, а в обратном в 10.09; 10.19, то шансы школьника попасть в один из кружков больше аж в 9 раз.

39. Было или не было? Эту замечательную историю рассказывают про одного из крупнейших немецких философов И. Канта. Как-то вечером он обнаружил, что его настенные часы остановились. Чтобы узнать время, он отправился в гости к одному из своих друзей. Пробыв там некоторое время, он вернулся домой и поставил правильно стрелки часов. Как ему это удалось?

Решение: Вероятно дело происходило так: Кант завел свои настенные часы и пошел в гости. Узнав там точное время, он возвратился обратно (при этом не забыв учесть время, проведенное в гостях). Дома он по показаниям часов определил, сколько времени он был в пути. Разделил эти данные на два и прибавил к показаниям часов приятеля. Это и будет точное время.

Правда или ложь

41. На прогулке. Однажды, прогуливаясь по стране рыцарей и лжецов, я встретил человека, который сказал про себя:

– «Я – лжец».

Кем был тот человек, которого я встретил?

Решение:

Сказавший «Я – лжец» не мог быть лжецом, так как лжецы никогда не говорят правды. Не мог он быть и рыцарем, так как рыцари никогда не лгут. Он, вообще, не был уроженцем страны рыцарей и лжецов.

42. Кто есть кто? Перед нами два жителя страны рыцарей и лжецов .А и В. А говорит:

– «Я – лжец, а В – не лжец».

Кто из островитян .А и В – рыцарь и кто – лжец?

Решение: Высказывание А: «Я – лжец, а В – не лжец», верно только в том случае, если верны оба его составляющие. Высказывание «Я – лжец» верным быть не может. Следовательно, лжец, и для того чтобы все выражение было ложью, вторая часть высказывания должна быть ложью. Следовательно, В тоже лжец.

43. Необходима экспертиза. Перед нами три уроженца страны рыцарей и лжецов А, В и С .

А говорит:

– «Мы все лжецы».

В говорит:

– «Ровно один из нас лжец».

Кто С – рыцарь или лжец? Можно ли определить, кто В?

Решение: А – лжец, так как его высказывание «Мы все лжецы» – правдой быть не может. Из высказывания В «Ровно один из нас лжец», если оно истинно, следует, что В и С – оба рыцари. Если же оно ложно, то рыцарем является только С, так как высказывание А – ложно. Таким образом, А – лжец, С – рыцарь, а кто такой В – рыцарь или лжец – определить нельзя.

44. В правительстве страны рыцарей и лжецов 12 министров. Некоторые из них лжецы, а остальные рыцари. Однажды на заседании правительства были высказаны следующие мнения: первый из министров сказал: Здесь нет

ни одного честного человека, второй: Здесь не более одного честного человека, третий: Здесь не более двух честных людей, – и так далее до двенадцатого, который сказал:

Здесь не более одиннадцати честных людей, сколько честных людей?

Решение: Заметим, что количество верных высказываний должно совпадать с количеством честных людей в правительстве. Далее, если высказывание какого-либо из министров правдиво, то правдивы и высказывания каждого министра, выступившего за ним. При этом единственное высказывание, которое не вызовет противоречия будет: «здесь не более 6 честных людей», так как при этом верными окажутся ровно 6 высказываний. Следовательно, в правительстве ровно 6 лжецов.

45. За круглым столом сидят восемь человек, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. На вопрос, кто их соседи, каждый из них ответил: «Мои соседи – лжец и рыцарь». Сколько среди них было лжецов? Как изменился бы ответ, если бы за столом сидело девять человек?

Решение на рисунке 3.3:

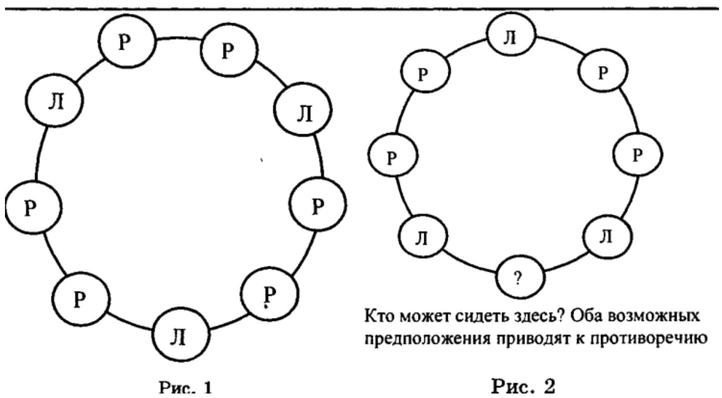

Рисунок 3.3

46. На заседании Государственной думы в стране рыцарей и лжецов часть присутствующих отстаивала точку зрения, что во фракции лжецов, как и во фракции рыцарей, нечетное число депутатов. Остальные, доказывали, что и в той и в другой фракции – четное число депутатов. Председательствующий, подводя итоги обсуждения, заметил, что всего депутатов 213 человек. Кто он, рыцарь или лжец?

Решение: Предположим, что среди депутатов есть хотя бы один рыцарь, следовательно, число депутатов Госдумы четно (кстати, почему?). Председательствующий сказал, что число депутатов Госдумы нечетно, значит, он лжец. Если рыцарей среди депутатов нет, то он тем более лжец!

47. Судебный казус. В стране рыцарей и лжецов было совершено преступление. К суду были привлечены три жителя страны: А, В и С. На вопрос судьи, А ответил неразборчиво. Когда судья переспросил двух оставшихся, то В сказал, что, А утверждает, что он рыцарь, а С сказал, что,иА назвал себя лжецом. Кем являются В и С?

Решение: Очевидно А сказал, что он рыцарь, так как А житель страны. Далее, исходя из условия задачи, видно, что В – рыцарь, а С – лжец.

48. Проводник. В страну рыцарей и лжецов приехал турист. Первый местный житель, которого он встретил, утверждал, что является рыцарем. Турист обрадовался и нанял его себе в проводники. Через некоторое время они встретили еще одного местного жителя. Турист отправил проводника спросить у него рыцарь он или лжец. Проводник вернулся и ответил, что абориген утверждает, что он рыцарь. Кем был проводник, рыцарем или лжецом?

Решение:

1. Предположим, что проводник - лжец, тогда:

а) если абориген рыцарь, проводник ответит, что он лжец;

б) если абориген лжец, то он все равно скажет, что он рыцарь, а проводник ответит, что он лжец.

2. Если проводник – рыцарь, тогда:

а) если абориген рыцарь, проводник ответит, что он рыцарь;

б) если абориген лжец, То проводник ответит, что он рыцарь. Следовательно, проводник – рыцарь.

49. На перепутье. Путешественник подошёл к развилке дороги и ему пришлось спросить у оказавшегося поблизости местного жителя, какая из двух

дорог ведёт в деревню. Путешественнику было неизвестно с кем он разговаривает – с рыцарем или лжецом. Тем не менее, задумавшись на минуту, он задал единственный вопрос, из ответа на который он точно узнал по какой дорогое идти. Какой вопрос был задан?

Решение: Вопрос мог быть, например, таким: «Если бы я вас спросил, ведет ли эта дорога в деревню, вы бы сказали «да»?» На этот вопрос и рыцарь, и лжец ответят одинаково: «да», если дорога ведет в деревню, и «нет» в противном случае.

50. Интересный разговор. Однажды между четырьмя жителями страны рыцарей и лжецов произошел интересный разговор.

A сказал: «По крайней мере, один из нас – лжец».

B сказал:

– «По крайней мере, двое из нас – лжецы».

C сказал:

– «По крайней мере, трое из нас - лжецы».

D сказал:

– «Среди нас нет лжецов».

Но среди них все же были лжецы. Кто?

Решение: Предположим, что D сказал правду, тогда получается, что лгут все кроме него – противоречие. Значит, он лжец. (Это следует и из условия задачи.) Если высказывание C истинно, то истинны и высказывания первых двух - противоречие. Следовательно, C тоже лжец, A и B сказали правду.

51. В переплетной мастерской. Из книги выпал кусок, первая страница которого имеет номер 328, а номер последней записывается теми же цифрами, но в другом порядке. Сколько страниц в выпавшем куске?

Решение: Поскольку последняя страница должна иметь больший номер другой четности нежели начальная, то ее номер 823. Ответ: выпало 496 страниц.

52. Из Виттенберга в Геттинген идут два студента. Первый из них

ежедневно проходил по 7 миль. Второй в первый день прошел 1 милю, во второй – 2, в третий – 3 и т. д., проходя каждый день на 1 милю больше, чем в предыдущий. Когда второй догонит первого?

Решение: В первый день второй студент прошел на 6 миль меньше, чем первый, во второй – на 5 и так далее. За седьмой день студенты пройдут одинаковое расстояние. Далее, в восьмой день, второй пройдет на 1 милю больше, в девятый – на 2 и так далее. Встретятся они в конце 13 дня.

53. Можно ли успеть вовремя. До отправления поезда остается 2 минуты. Путь до вокзала 2 км. Если первый километр бежать со скоростью 30 км/ч, то с какой скоростью нужно пробежать второй километр, чтобы успеть вовремя?

Решение: Если бежать со скоростью 30 км/ч, то первый километр будет пройден за 2 минуты...

Дроби

54. Спящий пассажир. Когда пассажир проехал половину всего пути, то лег спать и спал до тех пор, пока не осталось ехать половину того пути, что он проехал спящим. Какую часть пути он проехал спящим?

Решение: Пассажир проспал две трети от второй половины пути, то есть одну треть всего пути.

56. Римское право. Некто, умирая, завещал: Если у моей жены родится сын, то пусть ему будет дано ½ имения, а жене – остальная часть. Если же родится дочь, то ей ½ , а жене ½ ».

Родилась двойня – сын и дочь. Как разделить наследство?

Решение: Мудрое адвокатское решение таково: так как из завещания следует, что сын должен получить в два раза больше матери, а мать – в два раза больше дочери, то следовательно, сын должен получить 4/7, мать – 2/7, а дочь – 1/7 наследства.

57. Бочки меду. Три человека хотят поделить между собой семь полных бочек меду, семь бочек, заполненных медом наполовину, и семь пустых, но так, чтобы и мед, и тара были поделены поровну. Как произвести этот раздел,

не перекладывая мед из одной бочки в другую?

Первое решение: первый человек (как и второй) должен взять три полных бочки, одну полупустую и три пустых; третий – одну полную, пять полупустых, одну пустую.

Второе решение: первый человек (как и второй) – две полных бочки, три полупустых и две пустые; третий – три полных, одну полупустую и три пустых.

58. Что можно купить на рубль? Девять коробков спичек стоят 9 рублей с копейками, а десять таких же коробков – 11 рублей с копейками. Сколько стоит один коробок?

Решение: Заметим, что коробок спичек стоит больше 11/10 руб., но меньше 10/9 руб. То есть больше 1,10 рубля, но меньше 1,111 рубля.

Ответ: 1 руб. 11 коп.

60. Сколько стоит платье? Плата работнику в месяц, то есть за тридцать дней, - десять динаров и платье. Он работал три дня и заработал платье. Какова стоимость платья?

Решение: так как за 30 дней он получит 10 динаров и платье, то за 3 дня он получит динар и 1/10 платья, следовательно, платье стоит 1 и 1/9 динара. Можно рассуждать иначе: так как он за три дня заработал платье, то за 27 дней он должен был получить 10 динаров, а 3 дня соответственно 1 и 1/9 динара.

61. Кофе с молоком. Сначала отпили ¼ чашки черного кофе и долили ее молоком. Потом выпили ½ чашки и снова долили ее молоком. Потом выпили еще полчашки и опять долили ее молоком. Наконец, выпили полную чашку. Чего выпили больше: кофе или молока?

Решение: Кофе выпили одну чашку, а молока сначала долили 1/6 чашки, затем 1/3 чашки и, наконец, 1/2 чашки, то есть тоже одну чашку, а значит, кофе и молока выпили поровну.

62. Справедливый раздел. По завещанию умершего отца три сына должны были поделить между собой 7 лошадей так, чтобы старшему

досталась половина, среднему – четвертая часть, а младшему – восьмая. Завещание весьма смутило наследников – ведь для его реализации приходилось резать лошадей на части. Выход из положения подсказал старик сосед. Он присоединил к лошадям еще и своего коня. Далее все пошло просто: первый получил 4 лошади, что составило половину всех лошадей, второй – 2, то есть четвертую часть, а третий – 1, то есть восьмую часть. После чего сосед забрал своего коня обратно. Объясните, как рассуждал сосед, когда делил лошадей.

Решение: Обратите внимание на то что 1/2 + 1/4 + 1/8= 7/8 , а не 1. Если это завещание выполнить буквально, то старшему сыну достанется 3,5 лошади, среднему – 1,75 лошади, а младшему – 0,875 лошади. При этом 0,875 лошади не достанется никому и сосед, фактически, помог им их разделить. Он исходил из того, что старший сын должен получить в два раза больше среднего и в четыре раза больше младшего - именно так и написано в завещании.

63. Большая стирка. После семи часов стирки длина, ширина и высота куска мыла уменьшились вдвое. На сколько стирок хватит оставшегося мыла?

Решение: Так как длина, ширина и высота куска мыла уменьшилась вдвое, то его объем уменьшился в 8 раз, то есть за 7 часов, кусок мыла уменьшился на 7/8 своего объема (за один час на 1/8 объема). Таким образом, мыла хватит еще на один час большой стирки.

64. В гостиницу вновь приехал путешественник. В этот раз у него была цепочка из 7 звеньев. За каждый день пребывания в гостинице он должен расплатиться одним звеном цепочки, но при этом хозяин гостиницы предупредил, что согласен взять не более одного распиленного звена. Какие звенья надо распилить, чтобы прожить в гостинице 7 дней и ежедневно расплачиваться с хозяином?

Решение: Следует распилить третье звено. При этом цепочка распадется на куски, состоящие из одного, двух и четырех звеньев. В первый день он должен отдать одно звено, во второй – два звена, получив при этом в сдачу одно, в третий день вновь одно звено, в четвертый – четыре звена и получить в сдачу обрывки в одно и два звена и далее повторить операции первых трех дней.

Проценты

65. Сравните числа. Известно, что 2% положительного числа A больше, чем 3% положительного числа B. Верно ли, что 5% числа А больше, чем 7% числа B?

Решение:

Так как 2% числа A больше, чем 3% числа B, то 4% числа A больше чем 6% числа B, кроме того, 1% числа A больше, чем 1% числа B. Сложив два последних утверждения, получим, что 5% числа A больше, чем 7% числа B.

66. Петя купил две книги. Первая из них была на 50% дороже второй. На сколько процентов вторая книга дешевле первой?

Решение: Вторая книга на треть дешевле первой, то есть на 33 1/3% .

67. В двух бочках было воды поровну. Количество воды в первой бочке вначале уменьшилось на 10%, а затем увеличилось на 10%. Количество воды во второй бочке, наоборот, вначале увеличилось на 10%, а затем уменьшилось на 10%. В какой бочке стало больше воды?

Решение: Пусть вначале в каждой из бочек было по x литров воды, тогда в первой бочке после всех изменений, стало $x \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}1 = 0{,}99x$ литров воды, а во второй $x\ 1{,}1 \cdot 0{,}9$ – то есть тоже $0{,}99x$ литров воды.

Ответ: поровну.

68. Где дешевле? В одном магазине молоко подешевело на 40%, а в другом сначала на 20%, а затем еще на 25%. Где молоко стало стоить дешевле? Первоначальная цена на молоко в каждом из магазинов была одна и та же. Как изменилась покупательная способность населения? Товар подешевел на 20% . На сколько процентов больше можно купить товара за те же деньги?

Решение: Пусть вначале молоко стоило x руб. В первом магазине оно стало стоить на 40% дешевле, то есть $0{,}6x$ руб. Во втором магазине после первого понижения молоко стало стоить $0{,}8x$, а после второго $0{,}8x \cdot 0{,}75 = 0{,}6x$ руб. Таким образом, молоко в каждом из магазинов вновь стоит одинаково.

69. Сушеные грибы. Влажность свежих грибов – 99%, сушеных – 98%. Как изменился вес грибов после подсушивания?

Решение: Пусть вес свежих грибов $100x$ кг, тогда вес сухого вещества в них x кг. После подсушивания, вес сухого вещества не изменился и стал составлять 2% (одну пятидесятую) от веса грибов. Вес сухих грибов – $50x$ кг, а значит уменьшился в два раза.

70. На конференции. 85% делегатов конференции знают английский язык, а 75% – испанский. Какая часть делегатов знает оба языка?

Решение: Заметим, что 85% +75% = 160%, что на 60% превышает общее число делегатов конференции. За счет кого образовался излишек? За счет тех людей, которые знают оба языка – их мы посчитали дважды. Таким образом, оба языка знают не менее 60% делегатов конференции.

71. На туристском слете собрались все участники двух туристических походов (некоторые были в двух походах, некоторые только в одном). В первом походе было 60% мужчин, во втором – 75%. Докажите, что на встречу пришло мужчин не меньше, чем женщин.

Решение: Пусть в первый поход ходило a человек, а во второй b человек.

Тогда, в первый поход ходило $0{,}6a$ мужчин и $0{,}4a$ женщин, а во второй – $0{,}75b$ мужчин и $0{,}25b$ женщин.

При этом, количество женщин не превышает $0{,}4a + 0{,}25b$, а количество мужчин не меньше, чем наибольшее из чисел $0{,}6a$ и $0{,}75b$. Пусть $0{,}6a > 0{,}75b$.

Тогда:

$0{,}6a > 0{,}4a + 0{,}25b$ (так как $0{,}2a > 0{,}25b$). Случай, когда наибольшее – $0{,}75b$, разбирается аналогично.

72. Морская вода содержит 5% соли. Сколько килограммов пресной воды надо добавить к 40 кг морской воды, чтобы содержание соли составляло 2%?

Решение: В 40 кг морской воды содержится $40 \cdot 0,05 = 2$(кг) соли, что в новом растворе составляет 2%, следовательно, раствора должно быть $2:0,02 = 100$ (кг).

Ответ: следует добавить 60 кг пресной воды.