МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика обучения решению тригонометрических уравнений и неравенств в условиях профильной дифференциации

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.03.01 Педагогическое образование
Направленность программы бакалавриата
«Математика»
Форма обучения заочная

Проверка на объем заимствований:
60,25 % авторского текста
Работа рекомендована к защите
«2» июля 2021 г.
и. о. зав. кафедрой математики и МОМ
Шумакова Е. О.

Выполнила:
Студентка группы ЗФ-513-087-5-1
Бекленищева Дарья Олеговна
Научный руководитель:
доцент, к. ф.-м. н.,
доцент кафедры МиМОМ
Вагина Мария Юрьевна

Челябинск

2021

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

В 2002 году по запросу родителей, общественных организаций и работодателей была принята Концепция профильного обучения старшей ступени общего образования. Реализация концепции подразумевала гарантированное право каждого учащегося получить полноценное образование, соответствующее его способностям и индивидуальным склонностям.

Перед школой встала задача обеспечить преемственность между общим и профессиональным обучением и подготовить учащихся старших классов к усвоению программ высшего профессионального образования.

Тригонометрия занимает одно из центральных мест в курсе алгебры и начал математического анализа в старших классах. Тригонометрический материал широко представлен на Едином государственном экзамене, на математических олимпиадах в старших классах.

Однако преподаватели высших учебных заведений не удовлетворены знания вчерашних выпускников школ в области тригонометрии. Причина сложившейся ситуации – отожествление тригонометрии с огромным набором «страшных» формул, которые «необходимо вызубрить». Чаще всего именно на этом и делается основной упор учителями и авторами УМК в преподавании тригонометрии, несмотря на то, что главная цель образования, согласно ФГОС СОО, – развитие универсальных учебных действий, а не усвоение знаний, умений и навыков (ФГОС 1 поколения 2004 года). Возникает необходимость пересмотреть тригонометрические методические традиции.

Цель выпускной квалификационной работы: изучить методику обучения решению тригонометрических уравнений и неравенств в старших классах средней школы и разработать методическое сопровождение изучения темы «Тригонометрические уравнения и неравенства» в классе с углубленным изучением математики.

Задачи:

1) изучить отечественный опыт развития профильного обучения и состояние системы профильного обучения учащихся 10-11 классов в современной России;
2) изучить становление профильного обучения в условиях реализации ФГОС;
3) изучить психолого-педагогические и возрастные особенности детей старшего школьного возраста;
4) выполнить анализ методической литературы, направленной на формирование умений по решению тригонометрических уравнений и неравенств, с целью изучения различных концепций и выявления лучшего подхода к изучению данного материала;
5) представить классификацию тригонометрических уравнений и неравенств по способам их решения с примерами, подробным решениями и задачами для самостоятельной работы;
6) проанализировать материалы Единого государственного экзамена на предмет наличия заданий по теме «Тригонометрические уравнения и неравенства»;
7) рассмотрев методические особенности изучения темы «Тригонометрические уравнения и неравенства», представить технологическую карту урока алгебры для классов с углубленным изучением математики.

Объект исследования: процесс обучения математике в старших классах средней школы.

Предмет исследования: методика обучения решению тригонометрических уравнений и неравенств в курсе алгебры старшей школы.

Гипотеза исследования: использование качественного методического сопровождения темы «Тригонометрические уравнения и неравенства» будет способствовать эффективной подготовке обучающихся профильных классов средней школы.

Структура исследования: работа состоит из введения, теоретической части (глава 1), раскрывающей психолого-педагогические основы профильной дифференциации обучения и содержащей три параграфа: «Этапы развития профильного обучения», «Становление профильного обучения в условиях реализации ФГОС» и «Психолого-педагогические и возрастные особенности детей старшего школьного возраста», практической части (глава 2), которая раскрывает методические особенности изучения тригонометрических уравнений и неравенств и содержит анализ школьных учебников на предмет изложения темы «Тригонометрические уравнения и неравенства», разработанное методическое сопровождение изучения данной темы и анализ материалов ЕГЭ на предмет наличия заданий по данной теме, заключения и списка литературы.

ГЛАВА 1. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОФИЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ ОБУЧЕНИЯ

1.1. Этапы развития профильного обучения

Предлагаем обратиться к отечественному опыту дифференцированного обучения учащихся.

До начала XVIII века образование было одинаковым для всех учащихся и имело своей целью – формирование христианско-религиозного сознания. После упразднения патриаршества и создания синода Петром I положение Русской православной церкви изменилось коренным образом. Она стала подчинена светской власти и потеряла контроль над образованием [5, с. 128]. Допетровский единый тип образования разделился на два направления: церковное и светское. В рамках последнего подразумевалось наличие различных профессиональных школ: школа математических и навигационных наук, гарнизонные и адмиралтейские школы, горнозаводские, артиллерийско-инженерные, хирургические, пушкарские и другие. Петр I закрепил принцип связности общего образования с профессиональным, обеспечения практической направленности образования. Стремление императора возвысить дворянское сословие придало образованию еще одну характерную черту – преобладание сословности [11, с. 66].

Во время правления Екатерины II пришли в упадок цифирные школы, инженерные и артиллерийские училища, однако появились новые типы учебных заведений: мужские и женские гимназии, реальные, коммерческие и епархиальные училища, а также кадетские корпуса. Екатерина II закрепила сословный принцип образования.

«Устав гимназий и прогимназий» 1864 года гласил о разделении гимназий на два типа – классические и реальные, которые объявлялись внесословными учебными заведениями при раздельном обучении мальчиков и девочек. В классической гимназии предполагалось изучение древних языков (латинского и греческого); ее выпускники получали право поступления в университет. В реальной гимназии большая часть учебного времени отводилась на изучение предметов естественного цикла; цель ее создания – подготовка учащихся к дальнейшему поступлению в высшие технические и сельскохозяйственные учебные заведения. Однако новым «Уставом гимназий и прогимназий» 1871 года статус «Гимназия» закреплялся только за классическими гимназиями, а реальные гимназии были упразднены. Позже, в 1872 году, «Уставом реальных училищ» был сознан новый тип учебного заведения – реальное училище, дававшего общее и специальное образование. «Весь курс обучения был рассчитан на 7 лет. Класс был дополнительным и имел три отделения: механико-техническое, химико-техническое и общеобразовательное. В свою очередь, и классы также имели отделения – основное, т.е. общеобразовательное, и коммерческое. Такая структура обучения позволяла профессионально ориентировать учащихся, которые сразу после окончания училища могли приступать к практической деятельности» [5, с. 191].

На рубеже XVIII-XIX веков возникла необходимость в реформировании среднего образования. На тот момент в Российской империи существовали два основных типа учебных заведений среднего образования – классическая гимназия и реальное училище. Выпускник классической гимназии мог поступить в университет, но дорога в технический вуз для него была закрыта. Выпускник реального училища не имел доступа в университет, но мог продолжить обучение в техническом вузе. Кроме этого не осуществлялся переход из реального училища в гимназию и наоборот, так как учебные программы этих заведений сильно различались.

В последние годы существования монархии в нашем государстве неоднократно предпринимались попытки коренного реформирования системы среднего образования, однако ни один из разработанных законопроектов не был реализован. В системе образования происходили только частичные изменения, не меняющие принципиальной сути.

Большие надежды общества были возложены на реформу образования, разработанную в 1915-1916 годах министром просвещения П. Н. Игнатьевым. Реформа должна была решить проблему отсутствия преемственности между школами: низшей, средней и высшей. Школа планировалась семилетней, с двумя ступенями образования: первая ступень (3 года обучения) и вторая (четырехлетний вариативный курс обучения).

Вторая ступень имела три направления:

1) новогуманитарное – отделение с одним новым языком с преобладанием гуманитарных предметов;
2) гуманитарно-классическое – отделение с одним древним языком и одним новым языком, также с преобладанием гуманитарных предметов над математическими и естественнонаучными;
3) реальное – отделение с одним новым языком и преобладанием в одной ветви математических, а в другой естественнонаучных предметов.

Однако из-за сложившейся накаленной обстановки П. Н. Игнатьев вынужден был подать прошение об отставке, не успев реализовать законопроект [11, с. 78].

После революционных событий 1917 года в обществе возникло противостояние различных точек зрения на обновление школы. Российская общественность пришла к выводу о создании Единой трудовой школы, в которой производительный труд (человеческая деятельность, превращающая данные предметы в предметы, полезные для человечества, т. е. обладающие потребительской ценностью) имел основополагающее значение. Не практике реализовать проект Единой трудовой школы не удалось.

Среди учительского состава встал вопрос: нужно ли школу развивать в общеобразовательной направленности или необходимо перейти к профессионализации образования. Так на совещании наркомов просвещения союзных и автономных республик 1923 году была выявлена оптимальная структура системы образования РСФСР. Школа была разбита на три звена: первая ступень подразумевала 4 года обучения для детей в возрасте от 8 до 12 лет, первый концентр второй ступени – 3 года обучения для детей в возрасте от 12 до 15 лет (в совокупности с первой ступенью он составлял семилетнюю школу, которая являлась основным звеном), второй концентр второй ступени – 2 года обучения для детей в возрасте от 15 до 17 лет. Семилетняя школа имела различные варианты: школа крестьянской молодежи, школы фабрично-заводского ученичества и др. Особенностью школ данного периода являлось преобладание в учебном процессе «лабораторно-бригадного метода», сопровождавшийся организацией постоянных и обязательным бригад. Желающие получить высшее образование могли поступить в вуз через систему рабфаков или по окончанию второго концентра второй ступени. Первые имели преимущественное право на зачисление в вуз.

Однако в 30-е годы неудовлетворительный уровень образовательных знаний учащихся констатировался как основной недостаток сложившейся системы школьного образования. В связи с этим в 1934 году было принято решение о ликвидации всего многообразия школ, образованные в 20-е годы, и установлении единой системы общеобразовательных учреждений (постановление СНК СССР и ЦК ВКП(б) «О структуре начальной и средней школы в СССР»). Были установлены следующие типы общеобразовательных школ, общие для всего СССР: начальная школа (I-IV классы), неполная средняя (I-VII классы) и средняя школа (VIII-X классы) [11, с. 110].

Ярко выраженная общеобразовательная направленность школьного образования дала свои плоды: отсутствие преемственности между единой средней школой и глубоко специализированными высшими учебными заведениями. Мы потеряли то, к чему десятилетиями стремились представители российского общества и что соответствовало тенденциям, существовавшим в мировой системе образования. Мы лишились дифференциации обучения, его ориентации на способности детей и развития самостоятельности мышления и творчества у детей.

В связи с ощутимой нехваткой рабочей силы в 1958-1959 гг. был принят закон «Об укреплении связи школы с жизнью и о дальнейшем развитии системы народного образования в СССР», закрепляющий принцип профессионализации профессиональной школы, то есть обязывающий школы осуществлять профессиональную подготовку параллельно со средней общеобразовательной. В 1964 года, после отстранения Н. С. Хрущева, активно осуществлялся отказ от подобной практики, так как рабочие профессии, готовить к которым предприятиям и школам было комфортнее всего, оказались не востребованы в обществе. К тому же интересы и склонности учеников совершенно не учитывались.

В начале 1970-х гг. профилизация осуществлялась через факультативные занятия, специализированные классы и специализированные школы с углубленным изучением ряда предметов (главным образом математики, физики и вычислительной техники).

В конце 80-х – начале 90-х годов в России стали появляться лицеи и гимназии – учреждения, ориентированные на углубленное обучение школьников по избираемым ими образовательным областям с целью дальнейшего обучения в вузе.

После распада социалистического лагеря большинство стран предпочли вернуться к своим традиционным формам организации образования. В Российской Федерации были провозглашены следующие принципы развития системы образования: демократизация, гуманизация и гуманитаризация образования, его вариативность и альтернативность, национальный характер и др.

Таким образом, мы увидели богатый отечественный опыт в организации профильного обучения, критерии и направления которого постоянно пересматривались с целью удовлетворения запросов государства и общества. Такой социальный заказ появился и в начале XXI века. В связи с этим в 2002 году была принята Концепция профильного обучения старшей ступени общего образования.

1.2. Становление профильного обучения в условиях реализации ФГОС

Профильный принцип образования был закреплен новым ФГОС СОО, утвержденным 17 мая 2012 года приказом Министерства образования и науки РФ.

Система профильного обучения состоит из предпрофильной подготовки 8-9 классов и профильной подготовки 10-11 классов. Задачи первой – сформировать умение объективно оценивать свои способности к обучению по различным профилям и осуществлять выбор профиля, соответствующего способностям и интересам, а также сформировать высокий уровень учебной мотивации на обучение по избранному профилю.

В предпрофильном обучении основная нагрузка отводится на организацию специальных курсов по выбору, основная функция которых – профориентационная.

В профильном обучении основная нагрузка отводится на организацию углубленного изучения отдельных предметов программы полного общего образования и элективных курсов. Их основная функция – индивидуализация обучения. Образовательной организации необходимо обеспечить реализацию одного или нескольких профилей обучения. Задача школы – изучить предпочтения и намерения учащихся и их родителей посредством выписок решений родительских собраний, анкетирования учащихся, решения педагогического совета и др. и выбрать, какие именно профили обучения будут реализованы. Новыми ФГОС для 10-11 классов определены 5 профилей обучения. Перечень профилей представлен в Таблице 1.

Таблица 1

№	Название профиля обучения	Сферы деятельности по профилю	Предметы для углубленного изучения
1	Технологический	Производственная, инженерная и информационная	Математика. Информатика. Физика
2	Естественно-научный	Медицина, биотехнологии	Математика. Химия. Биология
3	Гуманитарный	Педагогика, психология, общественные отношения	Иностранный язык. История. Право
4	Социально-экономический	Социальная сфера, экономика, обработка информации, управление, предпринимательство, финансы	Математика. География. Экономика
5	Универсальный	–	–

ФГОС СОО диктует следующие требования к учебному плану СОО:

1) количество учебных занятий за 2 года на одного обучающегося – не менее 2170 часов и не более 2590 часов (не более 37 часов в неделю);
2) учебный план должен содержать 11 (12) учебных предметов;
3) учебный план должен предусматривать изучение не менее одного предмета из каждой предметной области, определенной ФГОС СОО;
4) общими для включения во все учебные планы являются 8 учебных предметов: Русский язык, литература, иностранный язык, математика, история (или Россия в мире), физическая культура, ОБЖ, астрономия.
5) в учебном плане должно быть предусмотрено выполнение обучающимися индивидуальных проектов;
6) учебный план профиля обучения (кроме универсального) должен содержать не менее 3 (4) учебных предметов на углубленном уровне изучения.
7) определены 5 профилей (представленные в таблице выше).

В системе профильного обучения важную роль играют элективные курсы, входящие в состав профиля обучения на старшей ступени школы. Они выбираются учащимися и являются обязательными для посещения. Элективные курсы выполняют две функции: поддерживают изучение основных профильных предметов на заданном профильном уровне и служат для внутрипрофильной специализации обучения и для построения индивидуальных образовательных траекторий.

Элективные курсы по своему назначению подразделяются на следующие типы: дополнение к профильному курсу, обеспечение межпредметных связей и подготовка к сдаче Единого государственного экзамена (далее – ЕГЭ) по предмету, изучаемому в данном профиле на базовом уровне.

1.3. Психолого-педагогические и возрастные особенности детей старшего школьного возраста

Старший школьный возраст или ранняя юность (15-18 лет) – это переходный этап от подросткового возраста к самостоятельной взрослой жизни. Этот возраст, по мнению большинства исследователей, является особо значимым для становления личности.

В старшем школьном возрасте продолжается функциональное развитие головного мозга и его высшего отдела – коры больших полушарий, однако физическое развитие подходит к завершению: заканчивается рост и окостенение скелета и увеличивается мышечная сила, завершается первый период полового созревания.

Каждому возрастному периоду свойственна своя ведущая деятельность, которая определяет формирование новообразований в познавательной и личностной сфере, а также задает ведущий тип отношений и форму отношений со взрослыми и сверстниками [17, с. 150]. Тип ведущей деятельности у старшего школьника с интимно-личностного общения переходит в учебно-профессиональную. Ребенок попадает в ситуацию необходимости выбора профессии, у него появляется множество новых социальных ролей [17, с. 216]. На этом этапе у него формируется мировоззрение и личностно-профессиональное самоопределение и самопознание.

Его отношения со взрослыми претерпевают изменения: они становятся более ровными, школьник начинает больше прислушиваться к мнению старших, выстраивает с ними отношения на основе равенства и взаимного уважения. Эти изменения Михаил Юрьевич Гамезо, доктор психологических наук, объясняет тем, что в ранней юности встают проблемы самосознания и самоопределения, решить которые школьнику самостоятельно бывает трудно, а жизненный опыт сверстников так же невелик. Тогда на помощь приходят родители и другие взрослые с богатым жизненным опытом [4, с. 181-182].

Требования школьников к себе и окружающим их сверстникам становятся выше, критичнее. Отношения со сверстниками являются важным условием личностного развития. Они разделяются на товарищеские и дружеские. Старшие школьники становятся более требовательными к дружбе, характерными особенностями которой теперь являются общность интересов и единство убеждений, поэтому круг общения часто сужается.

Можно выделить и особенности в познавательной деятельности. Систематизация знаний по различным предметам, установление межпредметных связей начинают преобладать в учебном процессе старших школьников. Они уверенно пользуются различными мыслительными операциями и осмысленно запоминают материал, используя рациональные приемы запоминания (конспектирование, подчеркивание, выделение главной мысли и др.). В этот период внимание характеризуется произвольностью и устойчивостью, восприятие – целенаправленностью.

Сформирована способность размышлять логически об абстрактных, отвлеченных проблемах, появляется потребность проверять правильность своих мыслей: разбираться в различных точках зрения и составлять свою собственную. Появляется так называемая «обратимость» мышления, т.е. способность менять направление мысли, возвращаясь к исходному состоянию того или иного объекта.

Мышление в старшем школьном возрасте обладает большей организованностью и последовательностью, логичностью; для него характерны глубина, основательность и критичность. Возникает интерес к причинному объяснению явлений. Старшеклассники любят исследовать благодаря своей способности к научному мышлению – способности осуществлять опережающее мышление, то есть выдвигать гипотезы и самостоятельно их проверять. Все вышесказанное говорит о высокой степени развития теоретического мышления.

И наоборот – несформированность мыслительной сферы, неумение осуществлять сравнение, устанавливать причинно-следственные связи, делать выводы затрудняют учение школьника, требуют огромного напряжения механической памяти, усидчивости, делают процесс учения неинтересным.

В юношеском возрасте отчетливо проявляются индивидуальные различия мышления, которые проявляются в предпочтениях определенных учебных предметов, результатах решения различных типов задач, в особенностях когнитивных целей.

На этом жизненном этапе учащемся важно правильно организовать свою деятельность, выбрать оптимальный режим дня и рационально использовать свое время. Все это является залогом успешной и продуктивной дальнейшей профессиональной деятельности и положительного отношения к труду [4, с. 190-191].

Выводы по главе 1

В первой главе мы изучили отечественный опыт профильного обучения и пришли к выводу, что наличие только общеобразовательной направленности в истории школьного образования приводило к отсутствию преемственности между общим и профессиональным обучением. Профильное обучение в России осуществляется со времен Петра I, а его критерии и направления постоянно пересматривались с целью удовлетворения запросов государства и общества. Такой социальный заказ появился и в начале XXI века, в связи с чем в 2002 году была принята Концепция профильного обучения старшей ступени общего образования, а ФГОС СОО определены пять профилей обучения, отвечающие запросам общества, государства и рынка. Знание психолого-педагогических и возрастных особенностей детей старшего школьного возраста, ведущей деятельностью которых является учебно-профессиональную деятельность, дает нам право утверждать, что профильное обучение позволяет обеспечить полноценное образование детей старшего школьного возраста в соответствии с их индивидуальными способностями и является хорошим инструментом для успешного овладения в будущем желаемой профессией.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

2.1. Анализ школьных учебников на предмет изложения темы «Тригонометрические уравнения и неравенства»

В этом параграфе мы проведем анализ школьных учебников по алгебре и началам анализа за курс 10-11 класса средней школы на предмет изложения темы «Тригонометрические уравнения и неравенства».

Мы будем использовать материал учебников, вошедших в федеральный перечень учебников на 2020-2021 учебный год: С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин «Алгебра и начала анализа 10 класс», Ш. А. Алимов «Алгебра и начала анализа 10-11 кл», А. Г. Мордкович "Алгебра и начала анализа 10-11».

Сначала мы определим, какие трудности в восприятии материала по тригонометрии существуют у школьников, какие в связи с эти найдены пути решения.

Самая главная проблема для школьников – выучить большое количество формул. Учителя и авторы УМК при изучении тригонометрического материала делают основной упор на отработку формул, поэтому тригонометрия у учащихся отождествляется с огромным набором страшных формул, которые «необходимо вызубрить», а решение тригонометрических уравнений и неравенств сводится к преобразованию тригонометрических выражений.

Решение этой проблемы нашел заслуженный деятель науки РФ, доктор педагогических наук А. Г. Мордкович.

Он выдвинул три основных тезиса, которых следует придерживаться при изучении тригонометрии:

1. Основное внимание в начале изучения курса следует уделить модели «числовая окружность на координатной плоскости», так как от учащихся фактически требуют «работать одновременно в

двух системах координат: «криволинейной», когда снимаем информацию о положении точки на числовой окружности, и декартовой, когда снимаем информацию об абсциссе и ординате точки».

2. Дать учащимся возможность «прочувствовать специфику собственно тригонометрических уравнений» – простейших уравнений типа $\sin t = \frac{1}{2}$, $tg\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$. Однако им приходится с самого начала искать нужные формулы для упрощения заданного сложного уравнения, то есть заниматься тригонометрическими преобразованиями.
3. Формулы тригонометрии следует изучать после того, как учащиеся овладеют первыми двумя «китами тригонометрии»: числовая окружность и простейшие тригонометрические уравнения.

Данная структура изложения материала связана с тем, что простейшие тригонометрические уравнения имеют свои специфику.

При изучении темы «Тригонометрические уравнения» учащиеся сталкиваются с рядом трудностей:

1) уравнение имеет бесконечное число корней;
2) сложная структура записи корней уравнения $x = (-1)^n \arcsin m + \pi n$, где каждый компонент требует осмысления и отработки;
3) отбор корней.

Дополнительное обилие формул тригонометрии способно усложнить в разы восприятие данного материала.

Именно на эти моменты мы уделим внимание при анализе школьных учебников на предмет изложения темы «Тригонометрические уравнения и неравенства».

С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин «Алгебра и начала математического анализа. 10 класс»

На изучение темы «Тригонометрические уравнения и неравенства» отводится 12 часов (углубленный уровень).

Рассмотрим содержание учебного материала.

Простейшие тригонометрические уравнения (2 часа). Уравнения, сводящиеся к простейшим заменой неизвестного (2 часа), Применение основных тригонометрических формул для решения уравнений (2 час), Однородные уравнения (1 час). Простейшие неравенства для синуса и косинуса. Простейшие неравенства для тангенса и котангенса. Неравенства, сводящиеся к простейшим заменой неизвестного. Введение вспомогательного угла (4 часа).

На первый взгляд, складывается впечатление, что С. Н. Никольский явно умалил важность обучения школьников решению тригонометрических уравнений и неравенств, в частности простейших, сократив отведенное на данную тему количество часов до минимума. Однако, если проанализировать содержание всей главы «Тригонометрические формулы. Тригонометрические функции», мы убедимся в обратном. Фактически, учащиеся при изучении предыдущего тригонометрического материала уже обучались решать уравнения и неравенства, но вопрос ставился иначе. Так, при изучении параграфа «Синус и косинус угла» учащиеся выполняют задания, которые практически готовят их к решению простейших тригонометрических уравнений для «табличных» углов (Отметьте точки единичной окружности, соответствующие углам α, для каждого из которых выполняется равенство, и задайте эти углы формулами). Также авторами учебника большое внимание уделяется понятиям арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс. В пунктах «Примеры использования арксинуса и арккосинуса» и «Примеры использования арктангенса и арккотангенса» рассмотрено применение арксинуса и арккосинуса, арктангенса и арккотангенса для нахождения всех углов, для каждого из которых справедливо неравенство $\sin\alpha > a\ (\sin\alpha < a)$; $\cos\alpha > a\ (\cos\alpha < a)$; $\operatorname{tg}\alpha > a\ (\operatorname{tg}\alpha < a)$; $\operatorname{ctg}\alpha > a\ (\operatorname{ctg}\alpha < a)$. Тем самым подготовлена база для изучения решения простейших тригонометрических неравенств. Ясно, что данную задачу можно переформулировать: для данного числа a решите неравенство $\sin\alpha > a$ $(\sin\alpha < a)$; $\cos\alpha > a$ $(\cos\alpha < a)$; $\operatorname{tg}\alpha > a\ (\operatorname{tg}\alpha < a)$; $\operatorname{ctg}\alpha > a\ (\operatorname{ctg}\alpha < a)$, где угол α - неизвестное.

В учебнике С. М. Никольского есть свои особенности изложения материала. Учащиеся сначала знакомятся с тригонометрическими функциями угла. Изучение функций происходит с опорой на геометрические иллюстрации и факты. Свойства функций доказываются на углах, а также решаются задачи на нахождение всех углов, удовлетворяющих некоторым равенствам и неравенствам. Затем изучаются тригонометрические функции числового аргумента и решаются собственно уравнения и неравенства, в которых аргументом является число, а не угол [12, с. 98].

Материал в учебнике соответствует обязательному минимуму обучения, однако некоторые пункты учебника трудно доступны для учащихся 10 класса: автор учебника часто дает формальные определения, в которых используется сразу несколько предикатов. Система упражнений в учебнике помогает учащимся избежать вопросов о количестве корней тригонометрического уравнения и ликвидирует трудность в восприятии учащимися таких элементов, как $\arcsin a + \cdots$, $\pi - \arcsin a + \cdots$ и $\pm\arccos a + \cdots$. Однако у ученика 10 класса так и остаются невыясненными вопросы, связанные с появлением множителя $(-1)^n$, а также с отбором корней в связи с отсутствием заданий данного типа.

Таким образом, мы сталкиваемся со схемой изложения материала «функция углового аргумента – преобразования – функция числового аргумента – уравнения». В данном учебнике уделяется достаточно внимания простейшим тригонометрическим уравнениям и неравенствам, но учебники имеет свои минусы, в частности с доступностью изложения.

Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин «Алгебра и начала математического анализа. 10-11 класс»

В данном учебнике структура изложения материала по тригонометрии следующая: тригонометрическая форма записи действительного числа и ее свойства, рассмотрение преобразований тригонометрических выражений (включая решение уравнений) по алгебраическим и тригонометрическим формулам и тригонометрические функции (прямые и обратные).

На изучение темы «Тригонометрические уравнения» отводится 18 часов (углубленный уровень): уравнение $\cos x = a$ (3 часа), уравнение $\sin x = a$ (3 часа), уравнение $tg\, x = a$ (2 часа), решение тригонометрических уравнений (5 часов), примеры решения простейших тригонометрических неравенств (2 часа).

Изучение темы начинается с рассмотрения конкретных простейших уравнений. Их решения проиллюстрированы на единичной окружности, к чему ранее были хорошо подготовлены учащиеся материалом главы «Тригонометрические формулы». В учебнике рассмотрение простейших уравнений начинается с уравнения $\cos x = a$, так как, по мнению авторов учебника, формула его корней значительно проще, чем формула корней уравнения $\sin x = a$, где используется указатель знака $(-1)^n$, сложный для восприятия учащимися.

Понятия арксинуса, арккосинуса, арктангенса вводятся до знакомства с обратными тригонометрическими функциями (тригонометрические функции изучаются в 11 классе) и иллюстрируются также на единичной окружности.

Задания больше нацелены на формальное применение формул корней, поэтому при решении уравнений полезно иллюстрировать нахождение корней на единичной окружности: это позволит осознанно применять формулы корней.

В учебнике рассмотрены три типа тригонометрических уравнений:

1) уравнения, сводящиеся к квадратным (решение основано на алгебраических преобразованиях);
2) линейные уравнения относительно $\sin x$ и $\cos x$ (способ решения – введение вспомогательного угла);
3) уравнения, решаемые разложением на множители (решение основано на алгебраических преобразованиях).

В конце главы рассматриваются простейшие тригонометрические неравенства. Они решаются с помощью единичной окружности установлением множества точек, координаты которых определяются данным неравенством. Например, неравенству $\cos x \leq \frac{1}{2}$ удовлетворяют точки окружности, заключенные в отрезках $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

Материал в учебнике соответствует обязательному минимуму обучения, весьма доступен для учащихся 10 класса. Отработка некоторых типов упражнений на подготовительном этапе помогает учащимся избежать вопросов о количестве корней тригонометрического уравнения и частично ликвидирует трудность в восприятии учащимися таких элементов, как $(-1)^n \arcsin a + \cdots$ и $\pm \arccos a + \cdots$. Однако у ученика 10 класса так и остаются невыясненными вопросы, связанные с понятием арксинуса, арккосинуса и арктангенса, с появлением периода в записи ответа к тригонометрическому уравнению, с появлением множителя $(-1)^n$. Сохраняется проблема с отбором корней в связи с очень ограниченным числом заданий данного типа.

Таким образом, мы снова сталкиваемся с известной схемой изложения материала «функция – преобразования – уравнения», то есть снова формулы и связанные с ними алгебраические и тригонометрические преобразования ставятся на первое место, а простейшим тригонометрическим уравнениям и неравенствам уделяется недостаточно внимания.

А. Г. Мордкович, П. В. Семенов «Алгебра и начала математического анализа. 10 класс»

В данном учебнике структура изложения материала по тригонометрии следующая: тригонометрические функции, тригонометрические уравнения и преобразование тригонометрических выражений.

На изучение темы «Тригонометрические уравнения» отводится 10 часов (углубленный уровень), на изучение темы «Преобразование тригонометрических выражений» – 21 часов.

Рассмотрим содержание учебного материала.

Глава «Тригонометрические уравнения». Параграф «Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства» включает пункты: «Первые представления о простейших тригонометрических уравнениях»; «Решение уравнения $\cos t = a$»; «Решение уравнения $\sin t = a$»; «Решение уравнений $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$»; «Простейшие тригонометрические уравнения». Параграф «Методы решения тригонометрических уравнений» состоит из пунктов: «Метод замены переменной»; «Метод разложения на множители»; «Однородные тригонометрические уравнения».

Глава «Преобразование тригонометрических выражений» разбита на пункты: «Синус и косинус суммы и разности аргументов»; «Тангенс суммы и разности аргументов»; «Формулы приведения»; «Формулы двойного аргумента. Формулы понижения степени»; «Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения»; «Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы»; «Преобразование выражения $A \sin x + B \cos x$ к виду $C \sin(x + t)$»; «Методы решения тригонометрических уравнений».

Порядок изложения материала может вызвать на первый взгляд недоумение у многих учителей. Однако свое решение А. Г. Мордкович объясняет тем, что данная последовательность позволяет реализовать основной дидактический принцип «от простого к сложному». При изложении тригонометрического материала автор предлагает сначала разобраться с «элементарными моделями», то есть с простейшими тригонометрическими уравнениями и уравнениями, которые сводятся к простейшим с помощью алгебраических приемов, а затем переходить к «сложным», то есть уравнениям, которые требуют многократного использования аппарата формул [10, с. 37].

При решении уравнений учащиеся встречают немало новых дидактических компонентов.

1. Бесконечное множество корней уравнения.
2. Наличие параметра и периода в записи корней уравнения.
3. Формулы корней обратных тригонометрических функций.
4. Запись $(-1)^n$ в записи корней уравнения $\sin t = a$ по готовой формуле.
5. Решение простейших тригонометрических уравнений со сложным аргументом: $\sin 2t = a, \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) = a.$
6. Отбор корней тригонометрических уравнений, который требует осознания структуры формул корней и понимания роли параметра в формуле корней.

Данный учебник содержит определенную систему упражнений, в которой на отработку каждого вышеперечисленного дидактического компонента уделено достаточно внимания и времени:

1) вычисление значений обратных тригонометрических функций;
2) решение простейших уравнений с помощью числовой окружности;
3) решение простейших уравнений по готовым формулам;
4) решение уравнений вида $\sin(kx + m) = a, \cos(kx + m) = a,$ $\mathrm{tg}(kx + m) = a;$
5) отбор корней в простейших уравнениях;
6) решение уравнений, сводящихся к рациональным уравнениям.

Такой подход позволяет в дальнейшем преодолеть ряд трудностей при решении более сложных уравнений и неравенств.

Материал в учебнике соответствует обязательному минимуму обучения. Язык изложения хорошо доступен для учащихся 10 класса благодаря разумному сочетанию литературного и предметного языков и подробному изложению материала.

Таким образом, мы впервые столкнулись со схемой изложения материала «функция – уравнения – преобразования» и убедились в том, что данная схема помогает решить целый ряд проблем, связанных с усвоением тригонометрического материала.

Мы пришли к выводу, что УМК А. Г. Мордковича и П. В. Семенова в достаточной мере решает основные трудности, возникающие при изучении темы «Тригонометрические уравнения», поэтому на основе методических особенностей изучения заданной темы в данном УМК мы разработали совмещенную с конспектом технологическую карту одного из уроков алгебры для класса с углубленным изучением математики (Приложение А).

2.2. Методическое сопровождение изучения темы «Тригонометрические уравнения и неравенства»

2.2.1. Классификация тригонометрических уравнений и способы их решения

Четкой классификации тригонометрических уравнений не существует. Мы предлагаем условно разбить их на группы по методам решения. Любой метод решения тригонометрических уравнений предполагает приведение их к простейшим уравнениям, то есть уравнениям вида $\sin\alpha = a$;

$\cos\alpha = a$; $\operatorname{tg}\alpha = a$; $\operatorname{ctg}\alpha = a$.

1. *Сведение к алгебраическому (квадратному) уравнению путем введения новой переменной.* Решение алгебраического

уравнения заключается в том, что все тригонометрические функции, которые входят в уравнение, выражают через какую-нибудь одну тригонометрическую функцию, зависящую от одного и того же аргумента.

Пример 1. Решить уравнение $2\sin^2(\pi + x) - 5\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 = 0$.

Решение.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + (\pi + x)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\pi + x)\right) = \sin(\pi + x).$$

Перейдем к уравнению

$$2\sin^2(\pi + x) - 5\sin(\pi + x) + 2 = 0.$$

Введем новую переменную: $t = \sin(\pi + x)$ $(|t| \le 1)$. Тогда уравнение примет вид: $2t^2 - 5t + 2 = 0$, откуда находим: $t_1 = 2$ (не удовлетворяет условию $|t| \le 1$), $t_2 = \frac{1}{2}$.

Значит,

$$\sin(\pi + x) = \frac{1}{2}, \pi + x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi(n - 1)\ (n \in Z).$$

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi(n - 1)\ (n \in Z)$.

Пример 2. Решить уравнение $\cos 2x + 3\sin x = 1$.

Решение.

Воспользуемся формулой двойного угла: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

Перейдем к уравнению

$$2\sin^2 x - 3\sin x = 0.$$

Введем новую переменную: $t = \sin x$ $(|t| \le 1)$. Тогда уравнение примет вид: $2t^2 - 3t = 0$, откуда находим: $t_1 = 0,\ t_2 = \frac{3}{2}$ (не удовлетворяет условию $|t| \le 1$).

Значит, $\sin x = 0, x = \pi n\ (n \in N)$.

Ответ: $x = \pi n \ (n \in Z)$.

Пример 3. Решить уравнение $8\sin^2 2x + \cos 2x + 1 = 0$.

Решение.

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x.$$

Перейдем к уравнению

$$8\cos^2 2x - \cos 2x - 9 = 0.$$

Введем новую переменную: $t = \cos 2x \quad (|t| \leq 1)$. Тогда уравнение примет вид: $8t^2 - t - 9 = 0$, откуда находим: $t_1 = \frac{9}{8}$ (не удовлетворяет условию $|\mathrm{t}| \leq 1$), $\mathrm{t}_2 = -1$.

Значит, $\cos 2x = -1, 2x = \pi + 2\pi n, x = \frac{\pi}{2} + \pi n \ (n \in Z)$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n \ (n \in Z)$.

Задания для самостоятельной работы:

1. $4\sin^2 x + 11\sin x - 3 = 0$.
2. $3\sin^2 2x + 10\sin 2x + 3 = 0$.
3. $2\cos^2 3x - 5\cos 3x - 3 = 0$.
4. $6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$.
5. $5\cos^2 x + 6\sin x - 6 = 0$.
6. $3\,\mathrm{tg}^2 x + 2\,\mathrm{tg} x - 1 = 0$.
7. $\mathrm{ctg}^2 2x - 6\,\mathrm{ct}g\ 2x + 5 = 0$.
8. $\mathrm{tg}\, x - 2\mathrm{ctg}\, x + 1 = 0$.
9. $\frac{\mathrm{tg}\, x + 5}{2} = \frac{1}{\cos^2 x}$.
10. $4\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 3 = 0$.
11. $4\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$.

12. $2\cos^2 x + 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 4 = 0.$

Ответы: 1. $(-1)^n \arcsin\frac{1}{4} + \pi n$. 2. $(-1)^{n+1}\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2}$. **3.** $\pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$.

4. $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n$. 5. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ (-1)^n \arcsin\frac{1}{5} + \pi n$.

6. $-\frac{\pi}{4} + \pi n; \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n$. 7. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \frac{1}{2}\operatorname{arcctg} 5 + \frac{\pi n}{2}$. 8. $\frac{\pi}{4} + \pi n; -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$.

9. $-\frac{\pi}{4} + \pi n; \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi n$. 10. $\frac{\pi}{3} + \pi n;\ \pi n$. 11. $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2};\ -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$.

12. $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$.

2. *Разложение на множители.* Этот метод применим, если данное уравнение удается представить в таком виде, что в левой части стоит произведение двух или нескольких множителей, а в правой части — нуль. Произведение двух или нескольких множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю. Задача сводится к решению совокупности более простых уравнений.

Пример 1. Решить уравнение $2\cos^2\frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} = 0$.

Решение.

Вынесем общий множитель за скобки: $\cos\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2} + \sqrt{3}\right) = 0$.

Задача сводится к решению совокупности уравнений:

$$\cos\frac{x}{2} = 0, \qquad 2\cos\frac{x}{2} + \sqrt{3} = 0.$$

Из этих уравнений находим соответственно:

$$x = \pi + 2\pi n, \qquad x = \pm\frac{5\pi}{3} + 4\pi n \ \ (n \in Z).$$

Ответ: $x = \pi + 2\pi n,\ x = \pm\frac{5\pi}{3} + 4\pi n\ \ (n \in Z)$.

Пример 2. Решить уравнение $\sin 3x \cos x = \sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}$.

Решение.

Преобразуем произведения тригонометрических функций в обеих частях уравнения в суммы:

$$\frac{\sin 4x + \sin 2x}{2} = \frac{\sin 4x + \sin x}{2},$$

$$\sin 2x = \sin x.$$

Воспользуемся формулой двойного угла и вынесем за скобки общий множитель: $\sin x\,(2\cos x - 1) = 0$. Задача сводится к решению совокупности уравнений:

$$\sin x = 0, \cos x = \frac{1}{2}.$$

Из этих уравнений находим соответственно:

$$x = \pi n, \qquad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \ \ (n \in Z).$$

Ответ: $x = \pi n,\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \ \ (n \in Z)$.

Задания для самостоятельной работы:

1. $\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$
2. $(1 + \cos x)\left(\sqrt{2}\sin x - 1\right) = 0.$
3. $2\sin\frac{x}{2}\cos 5x - \cos 5x = 0.$
4. $2\,\mathrm{tg}^2 2x + 3\,\mathrm{tg}(\pi + 2x) = 0.$
5. $\mathrm{tg}^2 3x - 6\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 0.$
6. $\sin^2 x + \cos^2 2x + \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) + 2\cos x\,\mathrm{tg}\,x = 1.$
7. $2\cos^2 x - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$
8. $\mathrm{tg}\,x\,(\sin x - 1) = 0.$
9. $\sin 4x\cos x\,\mathrm{tg}\,2x = 0.$

В задании 8 возможно появление постороннего корня, поэтому стоит научить учащихся отслеживать область допустимых значений решаемого уравнения.

Ответы: 1. $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. 2. $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi$. 3. $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5};\ (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$. 4. $\frac{\pi n}{2}$; $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \frac{\pi n}{2}$. 5. $\frac{\pi n}{3}; \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 6 + \frac{\pi n}{3}$. 6. πn. 7. $\pi + 2\pi n;\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$. 8. πn. 9. $\frac{\pi n}{2}, \frac{\pi n}{4}, \frac{\pi}{2} + \pi n$.

3. *Введение вспомогательного аргумента.* Этот метод применяется для уравнений вида $a \sin x + b \cos x = c$.

«Рассмотрим выражение $A \sin x + B \cos x$; пусть для определенности A и B – положительные числа.

Введем обозначение: $C = \sqrt{A^2 + B^2}$. Заметим, что $\left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2 = 1$.

Это значит, что пара чисел $\frac{A}{C}, \frac{B}{C}$ удовлетворяет уравнению

$x^2 + y^2 = 1$, то есть точка с координатами $\left(\frac{A}{C}; \frac{B}{C}\right)$ лежит на числовой (единичной) окружности. Но тогда $\frac{A}{C}$ есть косинус, а $\frac{B}{C}$ – синус некоторого аргумента t, то есть $\frac{A}{C} = \cos t, \frac{B}{C} = \sin t$.

$$A \sin x + B \cos x = C\left(\frac{A}{C}\sin x + \frac{B}{C}\cos x\right) = C(\cos t \sin x + \sin t \cos x) =$$

$$= C \sin\ (x + t).$$

Итак,

$$A \sin x + B \cos x = C \sin(x + t)\text{, где } C = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Аналогично можно выражение $A \sin x - B \cos x$, где $A > 0, B > 0$, преобразовать к виду $C \sin\ (x - t)$.

Обычно аргумент t называют вспомогательным (дополнительным) аргументом» [4, с. 148-149].

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$.

Решение.

Преобразуем левую часть уравнения:

$$A = \sqrt{3}, B = 1, C = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2,$$

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right).$$

Введем вспомогательный аргумент t, удовлетворяющий соотношениям:

$$\begin{cases} \cos t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin t = \dfrac{1}{2}, \end{cases} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}.$$

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right).$$

Вернемся к уравнению:

$$2\sin\left(\tfrac{\pi}{6} + x\right) = 1, \sin\left(\tfrac{\pi}{6} + x\right) = \tfrac{1}{2}.$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{\pi}{6} + x &= \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ \frac{\pi}{6} + x &= \frac{5\pi}{6} + 2\pi n. \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} x &= 2\pi n, \\ x &= \frac{2\pi}{3} + 2\pi n. \end{aligned}\right.$$

Ответ: $x = 2\pi n, x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \ \ (n \in Z)$.

Пример 2. Решить уравнение $\sin 5x - \cos 5x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Решение.

Преобразуем левую часть уравнения:

$$A = 1, B = -1, C = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x\right).$$

Введем вспомогательный аргумент t, удовлетворяющий соотношениям:

$$\begin{cases} \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}.$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin 5x - \sin\frac{\pi}{4}\cos 5x\right) =$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Вернемся к уравнению:

$$\sqrt{2}\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\left[\begin{aligned} 5x - \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ 5x - \frac{\pi}{4} &= \frac{2\pi}{3} + 2\pi n. \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} x &= \frac{7\pi}{60} + \frac{2\pi n}{5}, \\ x &= \frac{11\pi}{60} + \frac{2\pi n}{5}. \end{aligned}\right.$$

Ответ: $x = \frac{7\pi}{60} + \frac{2\pi n}{5}, x = \frac{11\pi}{60} + \frac{2\pi n}{5}$ $(n \in Z)$.

«С равным успехом мы могли считать, что $\frac{A}{C} = \sin t, \frac{B}{C} = \cos t$. Тогда

$$A\sin x + B\cos x = C\left(\frac{A}{C}\sin x + \frac{B}{C}\cos x\right) = C(\sin t \sin x + \cos t \cos x) =$$

$= C\cos(x - t)$» [4, с. 150].

Пример 3. Решить уравнение $3\sin 2x + 4\cos 2x = 2{,}5$.

Решение.

Преобразуем левую часть уравнения:

$$A = 3, B = 4, C = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$3\sin 2x + 4\cos 2x = 5\left(\frac{3}{5}\sin 2x + \frac{4}{5}\cos 2x\right).$$

Введем вспомогательный аргумент t, удовлетворяющий соотношениям:

$$\begin{cases} \cos t = \frac{3}{5}, \\ \sin t = \frac{4}{5}, \end{cases} \Rightarrow t = \arccos\frac{3}{5}.$$

$$5\left(\frac{3}{5}\sin 2x + \frac{4}{5}\cos 2x\right) = 5(\cos t \sin 2x + \sin t \cos 2x) = 5\sin(t + 2x).$$

Вернемся к уравнению:

$$5\sin(t + 2x) = \frac{5}{2}, \sin(t + 2x) = \frac{1}{2}.$$

$$\left[\begin{aligned} t + 2x &= \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ t + 2x &= \frac{5\pi}{6} + 2\pi n. \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{12} - \frac{t}{2} + \pi n, \\ x &= \frac{5\pi}{12} - \frac{t}{2} + \pi n. \end{aligned}\right.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{12} - \frac{t}{2} + \pi n, x = \frac{5\pi}{12} - \frac{t}{2} + \pi n,$ где $t = \arcsin\frac{4}{5}$ $(n \in Z)$.

Задания для самостоятельной работы:

1. $\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3}$.
2. $\sin x - \cos x = 1$.
3. $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{2}$.
4. $\cos\frac{x}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{x}{2} + 1 = 0$.
5. $\sin\frac{x}{3} - \cos\frac{x}{3} = 1$.
6. $4\sin x - 3\cos x = 5$.
7. $5\cos\frac{x}{2} - 12\sin\frac{x}{2} = 6{,}5$.
8. $2\sin 17x + \sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x = 0$.
9. $\sqrt{3}\sin x + \cos x + 2 = \frac{12}{\pi}x$.
10. $\sqrt{2}(\cos x - \sin x) = 2x - \frac{\pi}{2}$.

Ответы: 1. $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n$. 2. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. 3. $(-1)^n\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{12} + \pi n$.

4. $\frac{2\pi}{3} + 4\pi n; -2\pi + 4\pi n$. 5. $6\pi n; \frac{3\pi}{2} + 6\pi n$. 6. $\frac{\pi}{2} + \arccos\frac{4}{5} + 2\pi n$.

7. $\pm\frac{2\pi}{3}-2\arccos\frac{5}{13}+4\pi n$. 8. $-\frac{\pi}{66}+\frac{\pi n}{11};\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{6}$. 9. $\frac{\pi}{3}$. 10. $\frac{\pi}{4}$.

4. *Использование универсальной тригонометрической подстановки.* Этот метод предполагает использование формул, которые позволяют выразить синус и косинус через одну и ту же функцию — тангенс половинного угла:

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

«Единственная неприятность, о которой не надо забывать: правые части этих формул не определены при $x=\pi+2\pi n\ \ (n\in Z)$. Поэтому если применение универсальной подстановки приводит к сужению области допустимых значений (далее – ОДЗ), то данную серию нужно проверить непосредственно» [16, с. 6].

Пример 1. Решить уравнение $\cos x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1$.

Решение.

ОДЗ: $\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi n\ \Rightarrow x\neq\pi+2\pi n\ (n\in Z)$.

Применим универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1.$$

Сделаем замену $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}+t^2=1.$$

Преобразуем данное уравнение:

$$t^3-2t^2+t=0,\quad t(t-1)^2=0,$$

$$t_1=0;\ \ t_{2,3}=1.$$

Приходим к двум уравнениям:

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0,\\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=1.\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\pi n,\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n.\end{array}\right.$$

Ответ: $x = 2\pi n,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k\ (n \in Z)$.

Пример 2. Решить уравнение $6 + 6\cos x + 5\sin x \cos x = 0$.

Решение.

В данном уравнении при использовании универсальных подстановок сужается ОДЗ. Поэтому сначала непосредственно подставим $x = \pi + 2\pi n$ в уравнение и убедимся, что это — решение.

Сделаем замену $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и применим универсальные

тригонометрические подстановки:

$$6 + 6\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{10t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = 0.$$

Преобразуем данное уравнение:

$$5t^3 - 6t^2 - 5t - 6 = 0, \quad (t-2)(5t^2 + 4t + 3) = 0,$$

$$t = 2.$$

Следовательно, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2\ \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n\ \ (n \in Z)$.

Ответ: $x = \pi + 2\pi n, x = 2\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n\ \ (n \in Z)$.

Задания для самостоятельной работы:

1. $3\sin x + 4\cos x = 5$.
2. $3\sin 2x + \cos 2x + 1 = 0$.
3. $7\cos 3x - 3\cos x = 0$.
4. $6 + 6\cos x + 5\sin x \cos x = 0$.
5. $2\sin x - 3\cos x = 3$.
6. $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$.
7. $3\sin 2x + \cos 2x = 2$.
8. $\cos 4x + 2\sin 4x = 1$.

Ответы: 1. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n$. 2. $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n$. 3. $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pm\arccos\frac{6}{7} + \pi n$. 4. $\pi + 2\pi n$; $2\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n$. 5. $\pi + 2\pi n$; $\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + 2\pi n$. 6. $\frac{\pi}{4} + \pi n$. 7. $\operatorname{arctg}\frac{3\pm\sqrt{6}}{3} + \pi n$. 8. $\frac{\pi n}{2}$; $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi n}{2}$.

5. *Сведение к однородному уравнению.* Однородное уравнение – уравнение, в котором у всех слагаемых сумма степеней входящих в него сомножителей одинакова. Решение однородных уравнений и уравнений, приводимых к ним, сводится к решению алгебраических относительно $\operatorname{tg} x$ путём деления обеих частей уравнения на $\cos x \neq 0$ (для однородных уравнений первого порядка) и $\cos^2 x \neq 0$ (для однородных уравнений второго порядка).

Пример 1. Решить уравнение $\sin 2x = \cos 2x$.

Решение.

Разделим обе части уравнения почленно на $\cos 2x$ и получим:

$$\operatorname{tg} 2x = 1, \qquad 2x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \qquad x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \ (n \in Z).$$

Здесь стоит обратить внимание на то, что делить обе части уравнения на одно и то же выражение можно только в том случае, когда это выражение не обращается в нуль (помним: на нуль делить нельзя). Проанализируем. Предположим, что $\cos 2x = 0$. Тогда однородное уравнение $\sin 2x - \cos 2x = 0$ принимает вид $\sin 2x = 0$. Получили, что и $\cos 2x = 0$, и $\sin 2x = 0$. Однако это невозможно, так как $\cos 2x$ и $\sin 2x$ обращаются в нуль в различных точках.

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ $(n \in Z)$.

Пример 2. Решить уравнение $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$.

Решение.

Разделим обе части уравнения почленно на $\cos^2 x$ и получим:

$$\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0.$$

Введем новую переменную $z = \operatorname{tg} x$ и получим:

$$z^2 + 2z - 3 = 0,$$

$$z_1 = -3, z_2 = 1.$$

Приходим к двум уравнениям:

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = -3, \\ \operatorname{tg} x = 1.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -arctg\, 3 + \pi n, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n.\end{array}\right.$$

Ответ: $x = -arctg\, 3 + \pi n, x = \frac{\pi}{4} + \pi n\ (n \in Z)$.

«Неоднородное уравнение второго порядка, т.е. уравнение вида $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$ приводится к однородному второго порядка, если d представить в виде $d = d \cdot 1 = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$. Некоторые уравнения высшего порядка можно также свести к однородному, используя равенство $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$» [16, с. 8].

Пример 3. Решить уравнение $3 \sin^2 2x - 2 = \sin 2x \cos 2x$.

Решение.

$$3 \sin^2 2x - 2(\sin^2 2x + \cos^2 2x) = \sin 2x \cos 2x,$$

$$\sin^2 2x - \sin 2x \cos 2x - 2 \cos^2 2x = 0.$$

Получили однородное уравнение. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 2x$ и получим: $\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{tg} 2x - 2 = 0$. Введем новую переменную $z = \operatorname{tg} 2x$ и перейдем к квадратному уравнению относительно z:

$$z^2 - z - 2 = 0,$$

$$z_1 = 2, z_2 = -1.$$

Приходим к двум уравнениям:

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} 2x = 2, \\ \operatorname{tg} 2x = -1.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \dfrac{\pi n}{2}, \\ x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi n}{2},\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\ (n \in Z)$.

Задания для самостоятельной работы:

1. $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$.
2. $\sin x + \cos x = 0$.
3. $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$.
4. $\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.

5. $\sqrt{3}\sin 3x = \cos 3x$.

6. $3\sin^2 3x + 10\sin 3x\cos 3x + 3\cos^2 3x = 0$.

7. $4\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 3$.

8. $2\cos^2 x - \sin x\cos x + 5\sin^2 x = 3$.

9. $2\sin^2 4x - 4 = 3\sin 4x\cos 4x - 4\cos^2 4x$.

10. $3\sin^2\frac{x}{3} + 4\cos^2\frac{x}{3} = 3 + \sqrt{3}\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}$.

11. $4\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\sin(\pi + x) + 3\cos^2(\pi + x) = 3$.

12. $\sin^2 x + \cos^2 2x + \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) + 2\cos x\,\mathrm{tg}\,x = 1$.

Ответы: 1. $-\frac{\pi}{3} + \pi n$. 2. $-\frac{\pi}{4} + \pi n$. 3. πn; $-\frac{\pi}{4} + \pi n$. 4. $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $-\frac{\pi}{6} + \pi n$. 5. $\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$. 6. $-\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\,3 + \frac{\pi n}{3}$; $-\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{3}$. 7. $-\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\mathrm{arctg}\,3 + \pi n$. 8. $\frac{\pi}{4} + \pi n$; $-\mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$. 9. $\frac{\pi n}{4}$; $-\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\,1{,}5 + \frac{\pi n}{4}$. 10. $\frac{3\pi}{2} + 3\pi n$; $\frac{\pi}{2} + 3\pi n$. 11. πn; $-\frac{\pi}{3} + \pi n$. 12. πn.

2.2.2. Способы решения тригонометрических неравенств

Следует отметить, что четкой классификации тригонометрических неравенств и способов их решения не существует. Часто одно тригонометрическое неравенство можно решить несколькими способами.

При решении сложных тригонометрических неравенств удобно использовать следующую схему: обращение к конкретному тригонометрическому неравенству → обращение к соответствующему тригонометрическому уравнению → поиск приема решения → перенос приема на другие неравенства этого же вида.

Рассмотрим основные способы решения тригонометрических неравенств.

1. Сведение к простейшему тригонометрическому неравенству. Довольно часто решение тригонометрических неравенств сводится к решению простейших тригонометрических неравенств. Простейшие тригонометрические неравенства решаются с помощью единичной тригонометрической окружности или графически. Здесь применимы метод разложения на множители, замены переменного и многие другие.

Пример 1. Решить неравенство $2\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\le -1$.

Решение.

Преобразуем данное неравенство: $\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\le -\frac{1}{2}$.

Введем новую переменную $t=2x+\frac{2\pi}{3}$. Тогда заданное неравенство примет вид $\cos t\le -\frac{1}{2}$, откуда получаем: $\frac{2\pi}{3}+2\pi n\le t\le\frac{4\pi}{3}+2\pi n$.

Вернемся к переменной x:

$$\frac{2\pi}{3}+2\pi n\le 2x+\frac{2\pi}{3}\le\frac{4\pi}{3}+2\pi n,$$

$$2\pi n\le 2x\le\frac{2\pi}{3}+2\pi n,$$

$$\pi n\le x\le\frac{\pi}{3}+\pi n.$$

Ответ: $x\in\left[\pi n;\ \frac{\pi}{3}+\pi n\right], n\in Z$.

Пример 2. Решить неравенство $\frac{\operatorname{tg} 3x-1}{\operatorname{tg} 3x+1}\ge\sqrt{3}$.

Решение.

Представим единицу как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$ и получим в левой части неравенства:

$$\frac{\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg} 3x\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+1}.$$

Применим формулу тангенса разности аргументов и получим следующее неравенство:

$$tg\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\ge\sqrt{3},$$

$$\frac{\pi}{3}+\pi n\le 3x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+\pi n,$$

$$\frac{7\pi}{12} + \pi n \le 3x < \frac{3\pi}{4} + \pi n,$$

$$\frac{7\pi}{36} + \frac{\pi n}{3} \le x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3}.$$

Ответ: $x \in \left[\frac{7\pi}{36} + \frac{\pi n}{3};\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3}\right), n \in Z.$

Пример 3. Решить неравенство $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Решение.

Воспользуемся формулами понижения степени: $\frac{1+\cos x}{2} - \frac{1-\cos x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}.$ Преобразуем это неравенство и получим:

$$\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi n.$$

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in Z.$

Пример 4. Решить неравенство $12\sin x - 16\cos x \ge\ 10.$

Решение.

Будем использовать метод вспомогательного (дополнительного) аргумента. Преобразуем левую часть неравенства:

$$A = 12, B = -16, C = \sqrt{12^2 + (-16)^2} = 20,$$

$$12\sin x - 16\cos x = 20\left(\frac{3}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x\right).$$

Введем вспомогательный аргумент t, удовлетворяющий соотношениям:

$$\begin{cases} \cos t = \frac{3}{5}, \\ \sin t = \frac{4}{5}, \end{cases} \Rightarrow t = \arcsin\frac{4}{5}.$$

$$20\left(\frac{3}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x\right) = 20(\cos t \sin x - \sin t \cos x) = 20\sin(x - t).$$

Вернемся к неравенству:

$$20\sin(x-t) \geq \ 10,\ \sin(x-t) \geq \ \frac{1}{2}.$$

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x - t \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,$$

$$\frac{\pi}{6} + \mathrm{t} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + \mathrm{t} + 2\pi n \text{, где } t = \arcsin\frac{4}{5}.$$

Ответ: $x \in \left[\frac{\pi}{6} + \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi n\right], n \in Z.$

Задания для самостоятельной работы:

1. $5\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) - 8\cos(2\pi - t) \geq 1.$
2. $\sin(2\pi + t) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \sin(\pi - t) \leq 1.$
3. $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}.$
4. $\sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x > \frac{1}{2}.$
5. $\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{2} < \frac{1}{3}.$
6. $\cos 2x \cos 5x - \sin 2x \sin 5x < -\frac{1}{3}.$
7. $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x > \sqrt{2}.$
8. $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\operatorname{tg} x} < 1.$
9. $\cos^2\frac{x}{3} - \sin^2\frac{x}{3} > \frac{\sqrt{2}}{2}.$
10. $2\cos^2 x \leq \frac{3}{2}.$
11. $12\sin x - 16\cos x \geq \ 10.$

Ответы: 1. $\left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right],\ n \in Z$. 2. $(-\infty;\ +\infty)$.

3. $\left(-\frac{19\pi}{6} + 4\pi n;\ -\frac{\pi}{6} + 4\pi n\right)$. 4. $\left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}; \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}\right)$.

5. $\left(\frac{1}{7}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2\pi n}{7}; \frac{2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)}{7} + \frac{2\pi n}{7}\right)$.

6. $\left(-4\arcsin\frac{1}{3} + 8\pi n; 4\pi + 4\arcsin\frac{1}{3} + 8\pi n\right)$. 7. $\left(-\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}\right)$.

8. $\left(-\frac{\pi}{20}+2\pi n; \frac{17\pi}{10}+2\pi n\right)$. 9. $\left(-\frac{3\pi}{8}+3\pi n;\ \frac{3\pi}{8}+3\pi n\right)$. 10. $\left[\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+\pi n\right]$.
11. $\left[\frac{\pi}{6}+\arcsin\frac{4}{5}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+\arcsin\frac{4}{5}+2\pi n\right]$.

2. Графический метод. Суть метода в рассмотрении правой и левой части неравенства как двух отдельных функций и точное построение их графиков.

Пример 1. Решить неравенство $\sin x \geq x-\pi$.

Решение.

Построим в одной системе координат графики функций $y=\sin x$ и $y=x-\pi$ (см. рисунок 1).

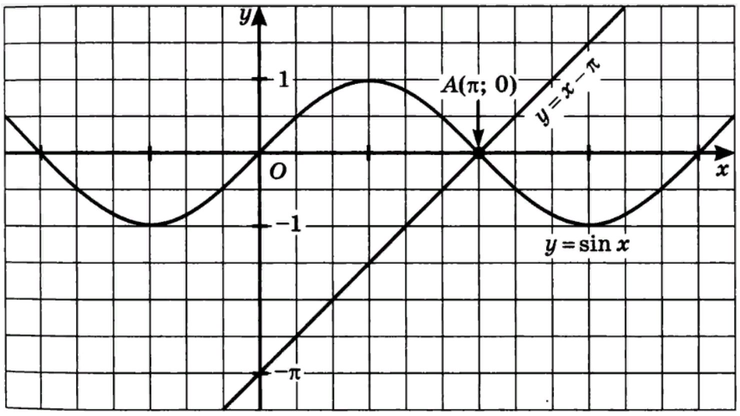

Рисунок 1

Построенные графики пересекаются в точке A $(\pi; 0)$. На промежутке $(-\infty; \pi]$ точки графика функции $y=\sin x$ выше точек графика функции $y=x-\pi$, поэтому $\sin x \geq x-\pi$ при $-\infty < x \leq \pi$.

Ответ: $x \in (-\infty;\ \pi)$.

Задания для самостоятельной работы:

1. $\operatorname{tg} x \geq \cos^2 x - 0{,}8$.
2. $2x^2 < \cos x$.
3. $2^{x^2} < \cos x$.
4. $x \leq \cos x$.
5. $0{,}5\, x^2 - x + 2{,}625 < \cos \pi x$.
6. $\sin x \leq \cos^2 x + 2$.

Ответы: 1. $\left(0{,}17+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$. 2. $(-0{,}635;0{,}635)$. 3. Нет решений.

4. $(-\infty;0{,}739)$. 5. $(-\infty;\ -3{,}5)\cup(1{,}5;\ +\infty)$. 6. $(-\infty;\ +\infty)$.

3. Алгебраический метод. Суть метода в сведении исходного тригонометрического неравенства к алгебраическому. Данный метод предполагает использование преобразований неравенства, введение подстановки или замену переменной.

Пример 1. Решить неравенство $6\cos^2 t+\sin t\le 4$.

Решение.

Представим $\cos^2 t$ как $1-\sin^2 t$ и получим:

$$-6\sin^2 t+\sin t+2\le 0,$$

$$6\sin^2 t-\sin t-2\ge 0.$$

Обозначим $\sin t$ через z, придем к следующему квадратному неравенству:

$$6z^2-z-2\ge 0.$$

Это неравенство удовлетворяется при $z\le-\frac{1}{2}$ и $z\ge\frac{2}{3}$. Вернемся к замене:

$$\left[\begin{array}{l}\sin t\le-\dfrac{1}{2},\\ \sin t\ge\dfrac{2}{3}.\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n\le t\le-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\\ \arcsin\dfrac{2}{3}+2\pi n\le t\le\pi-\arcsin\dfrac{2}{3}+2\pi n.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left[-\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{6}+2\pi n\right]\cup\left[\arcsin\frac{2}{3}+2\pi n;\ \pi-\arcsin\frac{2}{3}+2\pi n\right]$.

Пример 2. Решить неравенство $\sin x\sin 3x\ge\sin 5x\sin 7x$.

Решение.

Преобразуем произведения тригонометрических функций в обеих частях неравенства в разности:

$$\frac{\cos 2x-\cos 4x}{2}\ge\frac{\cos 2x-\cos 12x}{2},$$

$$\cos 4x-\cos 12x\le 0.$$

Воспользуемся формулой тройного угла: $\cos 4x - \cos^3 4x \leq 0$.

Обозначим $\cos 4x$ через z, придем к следующему алгебраическому неравенству: $z - z^3 \leq 0$.

Это неравенство удовлетворяется при $-1 \leq z \leq 0$ и $z \geq 1$. Вернемся к замене:

$$-1 \leq \cos 4x \leq 0, \qquad \cos 4x \geq 1.$$

Из этих неравенств находим соответственно:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \qquad x = \frac{\pi n}{2} \quad (n \in Z).$$

Ответ: $x \in \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right] \cup \left\{\frac{\pi n}{2}\right\}, n \in Z$.

Пример 3. Решить неравенство $\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right)^2 + 1 \leq 4\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Решение.

Используя метод введения вспомогательного угла, преобразуем выражение $\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right)^2$ к виду $4\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Получим неравенство:

$$4\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 4\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 \leq 0.$$

Обозначим $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ через z, придем к следующему квадратному неравенству:

$$4z^2 - 4z + 1 \leq 0.$$

Это неравенство удовлетворяется в единственной точке $z = \frac{1}{2}$. Вернемся к замене:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = 2\pi n. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 2\pi n, x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Задания для самостоятельной работы:

1. $5\sin^2 t > 11\sin t + 12$.
2. $5\sin^2 t \leq 11\sin t + 12$
3. $6\cos^2 t + \sin t > 4$.
4. $2\sin^2(\pi + x) - 5\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) > -2$.
5. $\cos 2x + 3\sin x \leq 1$.
6. $8\sin^2 2x + \cos 2x > -1$.
7. $\sin x \sin 3x \geq \sin 5x \sin 7x$.
8. $\cos x + \mathrm{tg}\frac{x}{2} = 1$.
9. $\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)^2 - 5 < \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

Ответы: 1. $\left(-\pi + \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi n;\ -\arcsin\frac{4}{5} + 2\pi n\right)$.

2. $\left[-\arcsin\frac{4}{5} + 2\pi n;\ \pi + \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi n\right]$. 3. $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n\right) \cup \left(\pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right)$. 4. $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; 2\pi n\right]$. 5. $\left[2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$. 6. Нет решений. 7. $\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2};\ \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right] \cup \left\{\frac{\pi n}{2}\right\}$. 8. $(\pi + 2\pi n;\ \pi + \pi n)$.

9. $\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right)$ или $x \neq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$.

Однако не всегда быстро удается свести исходное тригонометрическое неравенство в алгебраическое, тогда целесообразно применить метод интервалов непосредственно к исходному неравенству – обобщенный метод интервалов.

4. Обобщенный метод интервалов. Метод интервалов особенно эффективен при решении неравенств, содержащих тригонометрические функции. Решение тригонометрических неравенств заданным методом имеет ряд особенностей: числовая прямая заменяется числовой окружностью, интервалы на числовой прямой – дугами, на которые окружность разбивается корнями соответствующих уравнений. Полученные дуги являются промежутками знакопостоянства, то есть на них тригонометрическое выражение, соответствующее заданному неравенству не меняет знаки.

Использовать числовую окружность непосредственно для решения исходного тригонометрического неравенства методом интервалов можно, если все функции, через которые записано неравенство, имеют наименьший положительный период 2π или $\frac{2\pi}{m}$, где $m \in N^0$. В противном случае необходимо осуществить замену переменной, свести исходное неравенство к новому неравенству, записанному через функции, имеющие период 2π или $\frac{2\pi}{m}$, и затем использовать числовую окружность или изначально использовать числовую прямую.

В случае, если неравенство, кроме тригонометрических функций, содержит другие функции, необходимо при решении заданного неравенства методом интервалов использовать числовую прямую.

Рассмотрим этапы обобщенного метода интервалов:

1. С помощью тригонометрических формул разложить функцию на множители.

2. Найти точки разрыва и нули функции, поставить их на окружность.

3. Взять любую точку К (но не найденную ранее) и выяснить знак произведения. Если произведение положительно, то поставить точку за единичной окружностью на луче, соответствующему углу. Иначе точку поставить внутри окружности.

4. Если точка встречается четное число раз, назовем ее точкой четной кратности, если нечетное число раз – точкой нечетной кратности.

5. Провести дуги следующим образом: начать с точки К, если следующая точка нечетной кратности, то дуга пересекает окружность в этой точке, если же точка четной кратности, то не пересекает. Дуги за окружностью – положительные промежутки, внутри окружности – отрицательные промежутки.

Пример 1. Решить неравенство $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 3\cos^2 x \le 1$.

Решение.

Сведем заданное неравенство к однородному:

$$2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 3\cos^2 x \le \sin^2 x + \cos^2 x,$$

$$\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x \le 0.$$

Для того чтобы разложить левую часть неравенства на множители, найдем, при каких значениях неизвестного левая часть равна нулю, то есть решим однородное уравнение:

$$\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0.$$

Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$ и получим: $\mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\, x + 2 = 0$. Введем новую переменную $z = \mathrm{tg}\, x$ и перейдем к квадратному уравнению относительно z:

$$z^2 - 3z + 2 = 0,$$

$$z_1 = 2, z_2 = 1.$$

$$(z-2)(z-1) = 0 \Rightarrow (\mathrm{tg}\, x - 2)(\mathrm{tg}\, x - 1) = 0 \Rightarrow (\mathrm{tg}\, x - 2)(\mathrm{tg}\, x - 1) \le 0.$$

1. Находим нули функции:

$$\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}\, x = 2,\\ \mathrm{tg}\, x = 1.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c}x = \mathrm{arctg}\, 2 + \pi n \;\; (n \in Z),\\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n \; (n \in Z).\end{array}\right.$$

Точки первой серии: $\mathrm{arctg}\, 2;\ \mathrm{arctg}\, 2 + \pi n$.

Точки второй серии: $\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}$.

Отмечаем полученные точки на окружности (см. рисунок 2).

2. Возьмем точку К $=\frac{\pi}{6}$.

3. Все точки нечетной кратности.

$$\left(\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6}-2\right)\left(\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6}-1\right)=\frac{7}{3}-\sqrt{3},\quad \frac{7}{3}-\sqrt{3}\geq 0.$$

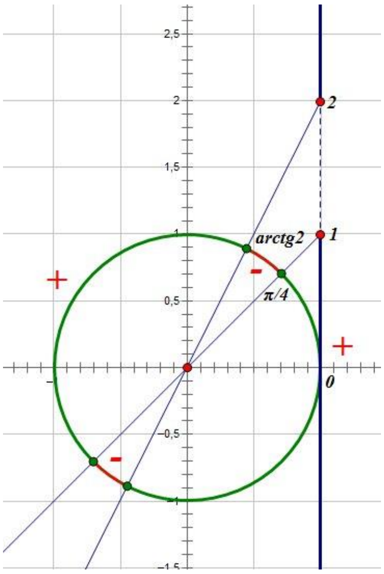

Рисунок 2

Ответ: $x\in\left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \mathrm{arctg}\,2+\pi n\right], n\in Z$.

Пример 2. Решите неравенство: $\frac{\sin x\sin 2x}{\cos 3x}\leq 0$.

Решение.

1. Находим точки разрыва и нули функции:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin 2x=0,\\ \cos 3x\neq 0.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{r}x=\pi n,\\ x=\frac{\pi n}{2},\\ x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}.\end{array}\right.$$

Точки первой серии: $0;\ \pi$.

Точки второй серии: $0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2}$.

Точки третьей серии: $\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6};\frac{3\pi}{2};\frac{11\pi}{6}$.

Отмечаем полученные точки на окружности (см. рисунок 3).

2. Возьмем точку К $=\frac{\pi}{4}$.

3. Точки четной кратности: $0,\ \pi,\ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

$$\frac{\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{3\pi}{4}} = -1, \quad -1 < 0.$$

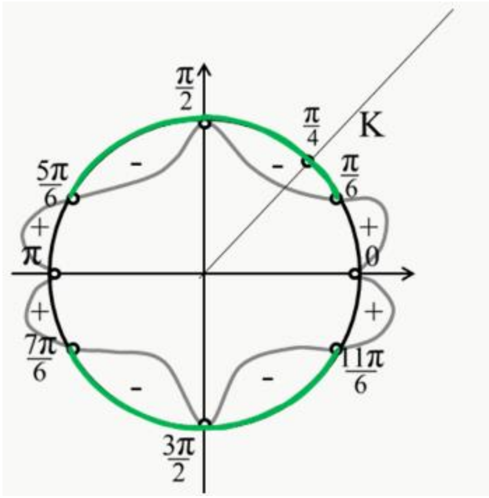

Рисунок 3

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{5\pi}{6} + \pi n\right), n \in Z$.

Задания для самостоятельной работы:

1. $\cos 2x \cos x > 0$.
2. $\sin 2x \sin x \cos x > 0$.
3. $\cos 2x - \cos 8x > 0$.
4. $\sin 2x - \sin 3x > 0$.
5. $tg\frac{x}{2} - tg\frac{x}{3} > 0$.
6. $\cos 3x - \cos 2x \leq 0$.
7. $\sin 2x + \cos 4x \geq 0$.
8. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x > 0$.
9. $-2\sin^2 x - 6\sin x \cos x + 2\cos^2 x > -3. \sin x \sin 3x \geq \sin 5x \sin 7x$.

Восьмое неравенство после группировки слагаемых и преобразования суммы тригонометрических функций в произведение можно решить методом интервалов. При решении десятого неравенства предполагается преобразование произведений синусов в разности косинусов, после приведения подобных – преобразование разности косинусов в произведение синусов и далее – использование метода интервалов.

Ответы: 1. $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup$

$\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right), n\in Z$. 2. $\left(\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{2}(1+n)\right), n\in Z$.

3. $\left(-\frac{2\pi}{5}+\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+\pi n\right)\cup\left(-\frac{\pi}{5}+\pi n;\ \pi n\right)\cup\left(\pi n;\ \frac{\pi}{5}+\pi n\right)\cup$

$\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{2\pi}{5}+\pi n\right), n\in Z$. 4. $\left(\frac{\pi}{5}+2\pi n;\frac{3\pi}{5}+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n;\frac{7\pi}{5}+2\pi n\right)\cup$
$\left(\frac{9\pi}{5}+2\pi n;2\pi+2\pi n\right), n\in Z$. 5. $(6\pi n;\ \pi+6\pi n)\cup\left(\frac{3\pi}{2}+6\pi n;3\pi+\ 6\pi n\right)\cup$
$\left(\frac{9\pi}{2}+6\pi n;5\pi+6\pi n\right), n\in Z$. 6. $\left[-\frac{2\pi}{5}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{5}+2\pi n\right]\cup$

$\left[\frac{4\pi}{5}+2\pi n;\frac{6\pi}{5}+2\pi n\right], n\in Z$. 7. $\left[\pi n;\ \frac{\pi}{3}+\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+\pi n\right], n\in Z$.

8. $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$.

9. $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ -\mathrm{arctg}\frac{1}{5}+\pi n\right]$. 10. $\left[\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2};\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right]\cup\left\{\frac{\pi n}{2}\right\}$.

2.3. Анализ материалов ЕГЭ на предмет наличия заданий по теме «Тригонометрические уравнения и неравенства»

ЕГЭ – это форма государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования. ЕГЭ по математике предполагает два уровня: базовый (для выпускников, планирующих выбрать специализацию, не связанную с математикой) и профильный (для выпускников, которым математика потребуется в ВУЗе). Экзаменационная работа профильного уровня состоит из двух частей: первая часть содержит 8 заданий с кратким ответом и проверяет базовые знания, вторая часть содержит 4 задания повышенного уровня с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровня сложности с развернутым ответом.

Рассмотрим, какие типы заданий по тригонометрии встречаются в вариантах, размещенных на сайтах fipi.ru (открытый банк заданий ЕГЭ) и sdamgia.ru (образовательный портал Д. Д. Гущина для подготовки к экзаменам).

В задании 5 ЕГЭ требуется решить простейшее уравнение, в частности тригонометрическое.

Пример 1. Найдите корни уравнения: $\cos\frac{\pi(x-7)}{3}=\frac{1}{2}$. В ответ запишите наибольший отрицательный корень.

Пример 2. Решите уравнение $\mathrm{tg}\frac{\pi x}{4}=-1$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

Пример 3. Решите уравнение $\sin\frac{\pi x}{3}=0{,}5$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

В задании 9 ЕГЭ требуется выполнить вычисления и преобразования, в частности вычислить значение тригонометрического выражения или выполнить преобразования числовых или буквенных тригонометрических выражений.

Пример 4. Найдите $\frac{10\sin 6\alpha}{3\cos 3\alpha}$, если $\sin 3\alpha=0{,}6$.

Пример 5. Найдите $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$ и $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$.

Пример 6. Найдите значение выражения $\frac{12\sin 11^\circ\cos 11^\circ}{\sin 22^\circ}$.

Пример 7. Найдите значение выражения $\frac{2\sin(\alpha+7\pi)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\alpha+\pi)}$.

В задании 10 ЕГЭ предлагаются задачи с прикладным содержанием, в частности задачи, в которых требуется составить и решить тригонометрическое уравнение или неравенство.

Пример 8. Груз массой 0,08 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v=v_0\cos\frac{2\pi t}{T}$, где t – время с момента начала колебаний, $T=2\ c$ – период колебаний, $v_0=0{,}5$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E=\frac{mv^2}{2}$, где m –

масса груза в килограммах, v – скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 1 секунду после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

В задании 13 ЕГЭ предлагается решить сложное уравнение, в частности тригонометрическое.

Пример 9. Дано уравнение $2\cos^2 x + 2\sin 2x = 3$:

а) решите данное уравнение;

б) укажите корни данного уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Знание тригонометрического материала необходимо и в задании 12 (исследование функции, нахождение ее наибольшего и наименьшего значений), и в задании 18 (задача с параметром), а также в заданиях по геометрии: 3, 6, 14 и 16.

Задания по тригонометрии в большом объеме включены в ЕГЭ. Непосредственно решить тригонометрическое уравнение и найти корни, принадлежащие заданному промежутку необходимо в задании 13, которое оценивается в два первичных балла. С целью обобщения и систематизации знаний по тригонометрии, а также подготовки к ЕГЭ нами было разработано внеклассное мероприятие по математике для учащихся 10-11 классов на тему: «Тригонометрия в ЕГЭ» (форма проведения: тренинг). Конспект мероприятия приложен (Приложение Б).

Выводы по главе 2

Во второй главе мы провели анализ школьных учебников из федерального перечня и пришли к выводу: из всех представленных учебников учебник А. Г. Мордковича и П. В. Семенова в достаточной мере решает основные трудности, возникающие при изучении темы «Тригонометрические уравнения». На основе методических особенностей вышеуказанного УМК разработали технологическую карту одного из уроков алгебры для класса с углубленным изучением математики.

Схема изложения «функция – уравнения – преобразования» помогает решить целый ряд проблем, связанных с усвоением материала, так как она позволяет реализовать основной дидактический принцип – «от простого к сложному».

Мы разработали методическое сопровождение изучения темы «Тригонометрические уравнения и неравенства». Каждый ее пункт содержит теоретический материал, примеры с подробным решением, а также задания для самостоятельной работа, комментарии к заданиям повышенной сложности и ответы.

Анализ материалов ЕГЭ на наличие заданий на тему «Тригонометрические уравнение и неравенства» показал, что тригонометрические уравнение и неравенства различной сложности включены в экзамен. Мною был разработано внеклассное мероприятие: тренинг на тему «Тригонометрия в ЕГЭ» для учащихся 10-11 классов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель данной работы была направлена на изучение методики обучения решению тригонометрических уравнений и неравенств в старших классах средней школы и разработку методического сопровождения изучения темы «Тригонометрические уравнения и неравенства» в классе с углубленным изучением математики.

Изучив отечественный опыт профильного обучения, мы пришли к выводу, что наличие только общеобразовательной направленности школьного образования приводило к отсутствию преемственности между общим и профессиональным обучением. Профильное обучение позволяет обеспечить полноценное образование детей старшего школьного возраста в соответствии с их индивидуальными способностями и является хорошим инструментом для успешного овладения в будущем желаемой профессией.

На основании изученной психолого-педагогической, методической литературы, анализа школьной учебной литературы по теме «Тригонометрические уравнения и неравенства» была выявлена наиболее удачная концепция изложения теоретического материала – концепция, представленная учебнике А. Г. Мордковича «Алгебра и начала анализа 10 класс». Она предполагает обучение решению тригонометрических уравнений и неравенств путем последовательного перехода от изучения «простых моделей» (основных элементарных функций) к изучению «сложных моделей» (сложных выражений, которые надо упрощать, используя формульный аппарат). Иначе говоря, изучение темы следует начинать с простейших тригонометрических уравнений и уравнений, которые сводятся к простейшим с помощью алгебраических приемов, а после этого переходить к уравнениям, которые требуют использования рутинного аппарата формул. Мы пришли к выводу, что при изложении материала по тригонометрии следует придерживаться схемы: «функция – уравнения – преобразования», что значительно облегчает усвоение учащимися тригонометрического материала без механического запоминания большого числа формул. На основе методических особенностей данного УМК мы создали совмещенную с конспектом технологическую карту одного из уроков алгебры для класса с углубленным изучением математики.

На основании изученного материала нами было разработано методическое сопровождение изучения темы «Тригонометрические уравнения и неравенства», способствующее эффективной подготовке обучающихся профильных классов средней школы.

Анализ материалов ЕГЭ на предмет наличия заданий по заданной теме показал, что задания по тригонометрии в большом объеме включены в ЕГЭ, непосредственно решить тригонометрическое уравнение и отобрать корни на заданном промежутке требуется в 13 задании ЕГЭ профильного уровня. С целью обобщения и систематизации знаний учащихся по тригонометрии, а также подготовки к ЕГЭ нами было разработано внеклассное мероприятие по математике для учащихся 10-11 классов на тему: «Тригонометрия в ЕГЭ».

Подводя итоги, можем сказать, что поставленные перед нами задачи решены и цель выпускной квалификационной работы достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учебник для общеобразовательных учреждений : базовый и профильный уровни / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. – 8-е изд. – Москва : Просвещение, 2009. – 430 с.: ил. – ISBN 978-5-09-0211322-1.
2. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учебник для общеобразовательных учреждений : базовый и профильный уровни / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, М. И. Шабунин, А. Б. Жижченко. – 4-е изд. – Москва : Просвещение, 2011. – 368 с. : ил. – ISBN 978-5-09-025401-0.
3. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : учебник для общеобразовательных учреждений : базовый уровень / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева [и др]. – 18-е изд. – Москва : Просвещение, 2012. – 464 с. : ил. – ISBN 978-5-09-026651-2.
4. **Гамезо, М. В.** Возрастная и педагогическая психология : учебное пособие для студентов всех специальностей педагогических вузов / М. В. Гамезо, Е. А. Петрова, Л. М. Орлова. – Москва : Педагогическое общество России, 2003. – 512 с. – ISBN 5-93134-195 -1.
5. История педагогики и образования. От зарождения воспитания в первобытном обществе до конца XX в. : учебное пособие для педагогических учебных заведений / А. И. Пискунов, Р. Б. Вендровская, В. М. Кларин [и др]. – 2-е изд., испр. и допол. – Москва : ТЦ «Сфера», 2001. – 512 с. – ISBN 5-89144-142-X.
6. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. Учебник для общеобразовательных организаций (базовый уровень). В 2 ч. Ч. 2 / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. О. Денищева [и др]. – 9-е изд.,

стер. – Москва : Мнемозина, 2020. – 271 с.: ил. – ISBN 978-5-346-04510-6.

7. **Мордкович, А. Г.** Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 10 класс. Методическое пособие для учителя / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2020. – 95 с. : ил. – ISBN 978-5-346-01398-3.
8. **Мордкович, А. Г.** Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. Учебник для общеобразовательных организаций (базовый уровень). В 2 ч. Ч. 1 / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 9-е изд., стер. – Москва : Мнемозина, 2020. – 448 с. : ил. – ISBN 978-5-346-04510-6.
9. **Мордкович, А. Г.** Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе / А. Г. Мордкович // Математика в школе. – 2002. – № 6. – С. 32–38.
10. **Мордкович, А. Г.** О некоторых проблемах школьного математического образования / А. Г. Мордкович // Математика в школе. – 2012. – № 10. – С. 35–43.
11. **Поздняков, А. Н.** История педагогики и образования за рубежом и в России : учебное пособие / А. И. Поздняков. – Саратов : Издательский центр «Наука», 2009. – 143 с. – ISBN 978-5-91272-911 -9.
12. **Потапов, М. К.** Алгебра и начала математического анализа. Методические рекомендации. 10 класс. Учебное пособие для общеобразовательных организаций / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. – 2-е изд. – Москва : Просвещение, 2017. – 191 с. : ил. – ISBN 978-5-09-043086-9.
13. **Федорова, Н. Е.** Алгебра и начала математического анализа. Методические рекомендации. 10 класс: пособие для учителей

общеобразовательных организаций / Н. Е. Федорова, М. В. Ткачева. – Москва : Просвещение, 2015. – 224 с. : ил. – ISBN 978-5-09-028110 -2.

14. **Федорова, Н. Е.** Алгебра и начала математического анализа. Методические рекомендации. 10-11 классы: учебное пособие для общеобразовательных организаций / Н. Е. Федорова, М. В. Ткачева. – 3-е изд., перераб. – Москва : Просвещение, 2017. – 172 с. : ил. – ISBN 978-5-09-044439-2.
15. **Галанов, Ю. И.** Тригонометрические уравнения: электронное пособие для абитуриентов / Ю. И. Галанов, Е. Н. Некряч, В. И. Рожкова. – Томск : Издательство Томского политехническогоуниверситета, 2011. – URL: http://ens.tpu.ru/kursy2/pdf/fun1.pdf (дата обращения: 02.02.2021).
16. ЕГЭ-Студия / Электронный ресурс. – URL: https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/trigonometricheskie-uravneniya/ (дата обращения: 15.11.2020).
17. **Карабанова, О. А.** Возрастная психология : конспекты лекций / О. А. Карабанова. – Москва : Айрис-пресс, 2005. – URL: https://www.klex.ru/af7 (дата обращения: 23.05.2021).
18. Сдам ГИА: Решу ВПР, ОГЭ, ЕГЭ, ГВЭ и ЦЕ : образовательный портал для подготовки к экзаменам. – URL: https://sdamgia.ru (дата обращения: 23.05.2021).
19. ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений» : официальный сайт. – Москва. – URL: https://fipi.ru (дата обращения: 23.05.2021).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Технологическая карта урока
ФИО: Бекленищева Дарья Олеговна
Предмет: алгебра и начала математического анализа
Класс: 10
Тип урока: комбинированный

Основные сведения об уроке представлены в Таблице А.1.

Таблица А.1

Тема	Синус и косинус суммы и разности аргументов
Цель	Научить применять формулы синуса и косинуса суммы и разности аргументов при решении тригонометрических уравнений и неравенств
Планируемые результаты	Личностные: заинтересованность в расширении и углублении получаемых знаний, свободно применять их при решении задач, быть целеустремленным, настойчивым в достижении цели, доводить начатое дело до конца
	Предметные: знание формул синуса и косинуса суммы и разности аргументов; умение находить значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования; умение решать тригонометрические уравнения и неравенства.
УУД	Регулятивные УУД: организация своей учебной деятельности: контроль и коррекция; предвидение возможности получения конкретного результата при решении задач; составление плана и последовательности действий; осознание качества и уровня усвоения материала. Коммуникативные УУД: целеполагание как постановка учебной задачи на основе соотнесения того, что уже известно и усвоено учащимся, и того, что еще неизвестно; организация учебного сотрудничества и совместной деятельности с учителем; построение логически стройной речи. Познавательные УУД: структурирование собственных знаний; понимание и использование математических средств наглядности (рисунки, чертежи, схемы и др.) для иллюстрации и аргументации; умение строить логическую цепочку рассуждений; понимание сущность алгоритмических предписаний и умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом; соотнесение учебных задач с результатом деятельности на уроке.
Межпредметные связи	Русский язык, геометрия, физика
Ресурсы	Учебники: Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч.Ч. 1: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 424 с.: ил. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч.Ч. 2: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / [А. Г. Мордкович и др.] под ред. А. Г. Мордковича. – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 343 с.: ил.
Формы организации	Фронтальная, индивидуальная
Технология	Обучение в сотрудничестве, здоровьесберегающая технология

Конспект урока представлен в Таблице А.2.

Таблица А.2

№	Этап урока	Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Планируемые результаты	
				Предметные	УУД
1	Орг. момент (1 мин)	Приветствие учащихся, проверка подготовленности к уроку.	Приветствие учителя		Регулятивные: организация своей учебной деятельности.
2	Проверка знаний и умений учащихся по пройденному материалу (6 мин.)	Чем мы с вами занимались на прошлых уроках? Давайте проверим, как вы усвоили формулы синуса и косинуса суммы и разности аргументов. (Учитель вызывает двоих учащихся к доске) Вам необходимо, используя ранее изученные формулы, доказать верность следующих равенств: а) $\sin(\pi + x) = -\sin x$; в) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$; б) $\cos(\pi + x) = -\cos x$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$. Ребята, как называются доказанные равенства (мы их уже встречали)?	На прошлых уроках мы изучили формулы синуса и косинуса суммы и разности аргументов, рассмотрели их доказательства, а также занимались тригонометрическими преобразованиями для отработки изученных формул. а) $\sin(\pi + x) = \sin\pi\cos x + \cos\pi\sin x = -\sin x$; б) $\cos(\pi + x) = \cos\pi\cos x + \sin\pi\sin x = -\cos x$; в) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\sin x = \cos x$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x = \sin x$. Доказанные равенства называются формулами приведения.	Знание формул синуса и косинуса суммы и разности аргументов, формул приведения; умение находить значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования	Регулятивные: контроль и коррекция. Познавательные: структурирование собственных знаний.
3	Ознакомление с темой урока и постановка целей урока (2 мин.)	Тема сегодняшнего урока остается прежней: «Синус и косинус суммы и разности аргументов». Однако цель нашего урока будет другой. Как вы думаете, какова цель? Кто готов ее озвучить?	Цель сегодняшнего урока: научиться применять данные формулы для решения тригонометрических уравнений и неравенств.		Коммуникативные: целеполагание как постановка учебной задачи на основе соотнесения того, что уже известно и усвоено учащимся, и того, что еще неизвестно.

Продолжение таблицы А.2

4	Ознакомление с новым материалом (5 мин.)	Предлагаю разобрать решение следующего уравнения: $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1.$ (Учитель вызывает учащегося к доске). Как мы можем преобразовать левую часть уравнения? Как мы можем теперь переписать заданное уравнение? Мы умеем решать такие уравнения? Как называется такой вид уравнений?	Учащиеся оформляют решения в тетради. $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1.$ $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x\right) = = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right).$ $2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 1.$ Да. Умеем. Такое уравнение называется простейшим (со сложным аргументом). $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{1}{2};$ $\frac{\pi}{6} + x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n;$ $\frac{\pi}{6} + x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;$ $x = -\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$ Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$	Умение находить значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования; умение решать тригонометрические уравнения.	Коммуникативные: организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем; логически стройная речь. Познавательные: развитие умения структурировать знания.
5	Первичное закрепление изученного материала (12 мин.)	Сейчас выполним № 24.21(а). Для ребят, опережающих нас, - план урока на доске! № 24.21(а) Найдите наименьший (в градусах) положительный корень уравнения: а) $\sin x\cos 45° + \cos x\sin 45° = \cos 17°\cos 13° - \sin 17°\sin 13°.$ № 24.22 (а). Решите уравнение: а) $\cos 6x\cos 5x + \sin 6x\sin 5x = -1.$ № 24.23 (а). а) $\sin 0{,}2x\cos 0{,}8x + \cos 0{,}2x\sin 0{,}8x = = \cos 3x\cos 2x + \sin 3x\sin 2x, x \in [0; 3\pi].$	Учащиеся выходят по порядку к доске решать уравнения. № 24.21(а). $\sin x\cos 45° + \cos x\sin 45° = = \cos 17°\cos 13° - \sin 17°\sin 13°;$ $\sin(x + 45°) = \cos(17° + 13°);$ $\sin(x + 45°) = 60°; \sin(x + 45°) = \frac{\sqrt{3}}{2};$ $x + 45° = \frac{\pi}{3} = 60°;\ x = 15°.$ Ответ: $x = 15°.$ № 24.22 (а). $\cos 6x\cos 5x + \sin 6x\sin 5x = -1;$ $\cos(6x - 5x) = -1; \cos x = -1;$ $x = \pi + 2\pi k.$ Ответ: $x = \pi + 2\pi k.$	Умение решать тригонометрические уравнения; выполнять отбор корней уравнений в соответствии с дополнительными и условиями и ограничениями.	Регулятивные: предвидеть возможности получения конкретного результата при решении задач. Коммуникативные: логически стройная речь. Познавательные: понимать и использовать математические средства наглядности (рисунки, чертежи, схемы и др.) для иллюстрации и аргументации;

Продолжение таблицы А.2

			№ 24.23 (а). $\sin 0{,}2x \cos 0{,}8x + \cos 0{,}2x \sin 0{,}8x =$ $= \cos 3x \cos 2x + \sin 3x \sin 2x$; $\sin(0{,}2x + 0{,}8x) = \cos(3x - 2x)$; $\sin x = \cos x$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k.$ Промежутку $[0; 3\pi]$ принадлежат корни: $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}, x = \frac{9\pi}{4}.$ Ответ: $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}, x = \frac{9\pi}{4}.$		умение строить логическую цепочку рассуждений.
6	Физ. минутка (1 мин.)	Чтобы у нас появилась энергия продолжить урок, давайте встанем и проведем физминутку!	Выполняют физминутку.		
7	Ознакомление с новым материалом (5 мин.)	Предлагаю разобрать решение следующего уравнения: $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sqrt{3}.$ (Учитель вызывает учащегося к доске). Как мы можем преобразовать левую часть уравнения? Какой формулой мы можем воспользоваться в данном случае? Как мы можем теперь переписать заданное уравнение? Как называется такой вид уравнений?	$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x\right) +$ $+ \left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x - \frac{1}{2}\cdot\sin x +$ $+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \sqrt{3}\cos x$; $\sqrt{3}\cos x = \sqrt{3}$; $\cos x = 1.$ Такое уравнение называется простейшим. $x = 2\pi n.$ Ответ: $x = 2\pi n.$	Умение находить значения числовых и буквенных выражений, осуществлять необходимые подстановки и преобразования; умение решать тригонометрические уравнения.	Коммуникативные: организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем; логически стройная речь. Познавательные: развитие умения структурировать знания.
8	Первичное закрепление изученного материала (11 мин.)	Сейчас решим выполним № 24.24. Решите уравнение: а) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos x = 0{,}5$; б) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$	№ 24.24 (а). $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos x = 0{,}5$; $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right) - \cos x = 0{,}5$; $\cos x + \sin x - \cos x = \frac{1}{2}$; $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k.$	Умение находить значения числовых и буквенных выражений, осуществлять необходимые преобразования;	Регулятивные: предвидеть возможности получения конкретного результата при решении задач, составлять план и последовательность действий. Коммуникативные: логически стройная речь.

Продолжение таблицы А.2

		Ребята, предлагаю перейти к уравнению из № 24.36 (в): $$\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{2}<\frac{1}{3}.$$ Нам уже известна схема работы со сложным тригонометрическим уравнением. Давайте ее вспомним. Кто может озвучить ее этапы? Мы умеем решать соответствующее тригонометрическое уравнение? К какому неравенству мы можем придти? Отлично приступаем к решению. (Учитель вызывает учащегося к доске для оформления решения неравенства).	Ответ: $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k.$ № 24.24 (б). $$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$ $$\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$ $$\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$ $$\frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ x=\pm\frac{\pi}{3}+4\pi k.$$ Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{3}+4\pi k.$ Обращение к конкретному тригонометрическому неравенству $\rightarrow$ обращение к соответствующему тригонометрическому уравнению $\rightarrow$ поиск приема решения $\rightarrow$ перенос приема на другие неравенства этого же вида. К простейшему неравенству (со сложным аргументом). 24.36 (в). $$\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{2}=\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{x}{2}\right)=-\sin\frac{x}{4};$$ $$-\sin\frac{x}{4}<\frac{1}{3};\ \sin\frac{x}{4}>-\frac{1}{3};$$ $$\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)+2\pi k<\frac{x}{4}<\pi+\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k;$$	умение решать тригонометрические уравнения и неравенства.	Познавательные: понимать сущность алгоритмических предписаний и уметь действовать в соответствии с предложенным алгоритмом.

Продолжение таблицы А.2

			$-4\arcsin\frac{1}{3}+8\pi k<x<4\pi+4\arcsin\frac{1}{3}+8\pi k.$ Ответ: $x\in\left(-4\arcsin\frac{1}{3}+8\pi k;\ 4\pi+4\arcsin\frac{1}{3}+8\pi k\right).$		
9	Подведение итогов урока (рефлексия и постановка д/з) (2 мин.)	Ребята, был ли вам полезен наш сегодняшний урок? Что нового вы узнали? Запишем домашнее задание: 24.22 (б), 24.26 (б), 24.37 (б, г).	Оценивают собственную деятельность на уроке.		Регулятивные: осознают качество и уровень усвоения материала. Коммуникативные: логически стройная речь. Познавательные: соотносят учебные задачи с результатом деятельности на уроке.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Внеклассное мероприятие по математике для учащихся 10-11 классов на тему «Тригонометрия в ЕГЭ»

Цели:

Образовательные:

повторить методы решения тригонометрических уравнений.

обобщить и систематизировать знания, закрепить умения и навыки учащихся при решении тригонометрических уравнений.

Развивающие:

развивать навыки самоконтроля и самооценки, применения знаний в новой ситуации; умение анализировать задание, обобщать, выделять главное, выбирать способы решения.

Воспитательные:

содействовать воспитанию интереса к математике, активности, мобильности.

Оборудование: проектор, компьютер, презентация.

Форма проведения: тренинг (обобщение и систематизация знаний).

Целевая аудитория: учащиеся 10-11 классов.

Время проведения: 45 минут.

Ход мероприятия

1 этап. Приветствие и организационный момент. Здравствуйте, ребята! Я понимаю, что вы больше всего сейчас озабочены подготовкой к ЕГЭ, поэтому наш сегодняшний тренинг будет направлен именно на это. Сегодня мы вспомним, обобщим и систематизируем наши знания по тригонометрии.

– Для работы я предлагаю вам разбиться на группы по 4 человека. Задания вы будете выполнять группой.

2 этап. Разминка «Верю – не верю». Я выдаю вам листы с утверждениями, представленными в Таблице Б.1. Если вы считаете их верными, пишите напротив утверждения «да». Если не согласны – «нет».

Таблица Б.1

№	Утверждение	Ответ
1	$y = \sin x -$ четная функция	Нет
2	$\cos(-x) = -\cos x$	Нет
3	$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	Да
4	$\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$	Да
5	$\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos x$	Да
6	$\operatorname{arctg}\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{3}$	Нет
7	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	Да
8	$\cos^2 x - \sin^2 x = \sin 2x$	Нет
9	$\sin x = a \ \Rightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$	Да
10	$\cos x = a \ \Rightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi n$	Да

Теперь сравните ваши ответы с ответами на слайде. За каждый правильный ответ поставьте 1 балл и суммируете их.

3 этап. Сейчас предлагаю вспомнить типы тригонометрических уравнений и способы их решения.

Мы помним, что четкой классификации тригонометрических уравнений не существует. Можно условно разбить тригонометрические уравнения на группы по методам решения. Любой метод решения тригонометрических уравнений предполагает приведение их к простейшим уравнениям, то есть уравнениям вида $\sin \alpha = a$; $\cos \alpha = a$; $\operatorname{tg} \alpha = a$; $\operatorname{ctg} \alpha = a$.

На экране демонстрируются типы тригонометрических уравнений и примеры с решениями.

1. Сведение к алгебраическому (квадратному) уравнению путем введения новой переменной. Решение алгебраического уравнения заключается в том, что все тригонометрические функции, которые входят в уравнение, выражают через какую-нибудь одну тригонометрическую функцию, зависящую от одного и того же аргумента.

Пример. Решить уравнение $8\sin^2 2x + \cos 2x + 1 = 0$.

Решение.

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x.$$

Перейдем к уравнению

$$8\,cos^2 2x - \cos 2x - 9 = 0.$$

Введем новую переменную: $\mathrm{t} = \cos 2x \quad (|\mathrm{t}| \le 1)$. Тогда уравнение примет вид: $8\mathrm{t}^2 - \mathrm{t} - 9 = 0$, откуда находим: $t_1 = \frac{9}{8}$(не удовлетворяет условию $|t| \le 1$), $t_2 = -1$.

Значит, $\cos 2x = -1, 2\mathrm{x} = \pi + 2\pi n, x = \frac{\pi}{2} + \pi n \;\; (n \in Z)$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n \;\; (n \in Z)$.

2. Разложение на множители. Этот метод применим, если заданное уравнение удается представить в виде произведения двух или нескольких множителей и добиться нуля в его правой части. Произведение двух или нескольких множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю. Задача сводится к решению совокупности более простых уравнений.

Пример. Решить уравнение $2\cos^2\frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} = 0$.

Решение.

Вынесем общий множитель за скобки: $\cos\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2} + \sqrt{3}\right) = 0$.

Задача сводится к решению совокупности уравнений

$$\cos\frac{x}{2} = 0, \qquad 2\cos\frac{x}{2} + \sqrt{3} = 0.$$

Из этих уравнений находим соответственно:

$$x = \pi + 2\pi n, \qquad x = \pm\frac{5\pi}{3} + 4\pi n \;\; (n \in Z).$$

Ответ: $x = \pi + 2\pi n,\ x = \pm\frac{5\pi}{3} + 4\pi n\ \ (n \in Z)$.

3. Введение вспомогательного аргумента. Этот метод применяется для уравнений вида $a\sin x + b\cos x = c$.

$$A\sin x + B\cos x = C\,\mathrm{si\,n}(x+t)\,,\text{где } C = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Аналогично можно выражение $A\sin x - B\cos x$, где $A > 0, B > 0$, преобразовать к виду $C\sin\ (x - t)$.

Обычно аргумент t называют вспомогательным (дополнительным) аргументом».

Пример. Решить уравнение $\sin 5x - \cos 5x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Решение.

Преобразуем левую часть уравнения:

$$A = 1, B = -1, C = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x\right).$$

Введем вспомогательный аргумент t, удовлетворяющий соотношениям:

$$\begin{cases}\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}.$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin 5x - \sin\frac{\pi}{4}\cos 5x\right) =$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Вернемся к уравнению:

$$\sqrt{2}\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2},\quad \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\left[\begin{array}{l}5x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+2\pi n,\\5x-\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{3}+2\pi n.\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{7\pi}{60}+\frac{2\pi n}{5},\\x=\frac{11\pi}{60}+\frac{2\pi n}{5}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\frac{7\pi}{60}+\frac{2\pi n}{5}, x=\frac{11\pi}{60}+\frac{2\pi n}{5}$ $(n\in Z)$.

С равным успехом мы могли считать, что $\frac{A}{C}=\sin t, \frac{B}{C}=\cos t$. Тогда

$$A\sin x+B\cos x=C\left(\frac{A}{C}\sin x+\frac{B}{C}\cos x\right)=C(\sin t\sin x+\cos t\cos x)=$$

$$=C\cos(x-t).$$

4. Использование универсальной тригонометрической подстановки. Этот метод предполагает использование формул, которые позволяют выразить синус и косинус через одну и ту же функцию — тангенс половинного угла:

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Единственная неприятность, о которой не надо забывать: правые части этих формул не определены при $x=\pi+2\pi n$ $(n\in Z)$. Поэтому если применение универсальной подстановки приводит к сужению ОДЗ, то данную серию нужно проверить непосредственно.

Пример. Решить уравнение $6+6\cos x+5\sin x\cos x=0$.

Решение.

В данном уравнении при использовании универсальных подстановок сужается ОДЗ. Поэтому сначала непосредственно подставим $\mathrm{x}=\pi+2\pi\mathrm{n}$ в уравнение и убедимся, что это — решение.

Сделаем замену $\mathrm{t}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и применим универсальные тригонометрические подстановки:

$$6+6\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{10t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}=0.$$

Преобразуем данное уравнение:

$$5t^3 - 6t^2 - 5t - 6 = 0, \quad (t-2)(5t^2 + 4t + 3) = 0,$$

$$t = 2.$$

Следовательно, $\mathrm{tg}\frac{\mathrm{x}}{2} = 2 \Rightarrow \mathrm{x} = 2\,\mathrm{arctg}\,2 + 2\pi\mathrm{n}\ \ (\mathrm{n} \in Z)$.

Ответ: $x = \pi + 2\pi n$, $x = 2\,\mathrm{arctg}\,2 + 2\pi n\ \ (n \in Z)$.

5. Сведение к однородному уравнению. Решение однородных уравнений и уравнений, приводимых к ним, сводится к решению алгебраических относительно $\mathrm{tg}\,x$ путём деления обеих частей уравнения на $\cos x \neq 0$ (для однородных уравнений первого порядка) и $\cos^2 x \neq 0$ (для однородных уравнений второго порядка).

Пример. Решить уравнение $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$.

Решение.

Разделим обе части уравнения почленно на $\cos^2 x$ и получим:

$$\mathrm{tg}^2\,x + 2\,\mathrm{tg}\,x - 3 = 0.$$

Введем новую переменную $z = \mathrm{tg}\,x$ и получим:

$$z^2 + 2z - 3 = 0,$$

$$z_1 = -3, z_2 = 1.$$

Приходим к двум уравнениям:

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\,x = -3, \\ \mathrm{tg}\,x = 1. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -arctg\,3 + \pi n, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = -arctg\,3 + \pi n, x = \frac{\pi}{4} + \pi n\ (n \in Z)$.

Неоднородное уравнение второго порядка, т.е. уравнение вида $a\sin^2 x + b\sin x \cos x + c\cos^2 x = d$ приводится к однородному второго порядка, если d представить в виде $d = d \cdot 1 = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

Отлично, переходим к следующему заданию.

4 этап. Определение способа решения тригонометрического уравнения. Необходимо определить способ решения каждого тригонометрического уравнения, представленного в Таблице Б.2.

Поставьте «+» против каждого уравнения в том столбце, который соответствует способу его решения.

Предложите способ решения тригонометрических уравнений:

1) сведение к алгебраическому (квадратному) уравнению;
2) разложение на множители;
3) введение вспомогательного аргумента;
4) сведение к однородному уравнению.

Таблица Б.2

№	Уравнение	Способ решения			
		1	2	3	4
1	$6\sin^2 x + 5\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 = 0$	+			
2	$\sin 2x + \sqrt{3}\sin x = 0$		+		
3	$2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$		+		
4	$\sin^2 x - 9\sin x\cos x + 3\cos^2 x = -1$				+
5	$\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$	+			
6	$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$			+	

Теперь сравните ваши ответы с ответами на слайде. За каждый правильный ответ поставьте 1 балл и суммируете их.

Сейчас попрошу каждую команду прокомментировать решение одного из представленных уравнений по порядку. За правильный ответ команда получит дополнительно 2 балла.

5 этап. Отбор корней тригонометрического уравнения. Мы помним, что в задании № 13 из ЕГЭ по математике профильного уровня требуется не только решить уравнение, но и выбрать корни, принадлежащие некоторому промежутку.

– Ребята, какие способы отбора корней существуют? (Способ оценки, способ перебора корней и использование единичной окружности). Молодцы! Однако самым надежным способом отбора корней является способ оценки, который подразумевает составление двойного неравенства. Предлагаю обратиться к слайду и рассмотреть следующий пример.

Найдите корни уравнения $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ на промежутке $(\pi; 3\pi)$.

Решение.

Составим формулу решений:

$$x = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi n \Rightarrow \ x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

Найдем корни, принадлежащие отрезку $(\pi; 3\pi)$. Для этого составим двойное неравенство и выразим из него n:

$$\pi < \frac{\pi}{6} + \pi n < 3\pi, \qquad \frac{5\pi}{6} \leq \pi n \leq \frac{17\pi}{6},$$

$$\frac{5}{6} \leq n \leq \frac{17}{6} \ \Rightarrow n = \{1; 2\}.$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}, \qquad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}.$$

Ответ: $\frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$.

Отлично, перейдем к заданию. Даны следующие простейшие тригонометрические уравнения, необходимо их решить и отобрать корни, принадлежащие заданным промежуткам. Напротив каждого уравнения впишите корни из заданного промежутка.

Теперь сравните ваши ответы с ответами на слайде, которые представлены в Таблице Б.3. За каждый правильный ответ поставьте 1 балл и суммируете их.

Таблица Б.3

№	Уравнение, промежуток	Корни из промежутка
1	$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad x \in [-2\pi; \pi].$	$-\frac{11\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}.$
2	$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad x \in [-\pi; 2\pi].$	$-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}.$
3	$\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right).$	$-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}.$

6 этап. Решение тригонометрического неравенства. Сейчас я предлагаю попробовать использовать ваши знания в нестандартной ситуации – при решении тригонометрического неравенства.

Решить неравенство $6\cos^2 t + \sin t \leq 4$.

– Ребята, у кого-нибудь есть предположения, как решать это неравенство? Предлагаю обратиться к уравнению $6\cos^2 t + \sin t = 4$. Каким способом решается данное тригонометрическое уравнение? (Оно сводится к решению алгебраического (квадратного) уравнения). Верно, и мы так же можем наше тригонометрическое неравенство привести к алгебраическому (квадратному) неравенству, решить которое не составит для нас труда.

– Давайте обратимся к решению (на слайде подробное решение тригонометрического уравнения)

Решение.

Представим $\cos^2 t$ как $1 - \sin^2 t$ и получим:

$$-6\sin^2 t + \sin t + 2 \leq 0,$$

$$6\sin^2 t - \sin t - 2 \geq 0.$$

Обозначим $\sin t$ через z, придем к следующему квадратному неравенству:

$$6z^2 - z - 2 \geq 0.$$

Это неравенство удовлетворяется при $z \leq -\frac{1}{2}$ и $z \geq \frac{2}{3}$. Вернемся к замене:

$$\left[\begin{array}{l} \sin t \leq -\frac{1}{2}, \\ \sin t \geq \frac{2}{3}. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq t \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n \leq t \leq \pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right] \cup \left[\arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n;\ \pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n\right]$.

– Ребята, мы увидели, что при решении тригонометрических неравенств стоит использовать следующий алгоритм: обращение к конкретному тригонометрическому неравенству $\rightarrow$ обращение к соответствующему тригонометрическому уравнению $\rightarrow$ поиск приема решения $\rightarrow$ перенос приема на другие неравенства этого же вида.

Тригонометрические неравенства, не являющиеся простейшими, крайне редко встречаются на ЕГЭ, однако даже с этой задачей мы сегодня справились!

7 этап. Подведение итогов. Я предлагаю сейчас каждой команде подсчитать количество баллов.

– Если вы набрали 20 и более баллов, я смело могу назвать вас магистрами в области тригонометрии, если 15-19 баллов – бакалаврами в области тригонометрии. Если балов оказалось меньше, то советую усиленно взяться за тригонометрию (пока еще есть время).

– Дорогое ребята! Спасибо вам за активное участие. Наш тренинг окончен. До свидания!