МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика обучения решению задач с использованием арифметической и геометрической прогрессии

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»
Форма обучения: очная

Проверка на объем заимствований:
62,73% авторского текста

Работа рекомендована к защите
«25» мая 2020г.

и.о.зав. кафедрой математики и методики обучения математике
_____________ Шумакова Е.О.

Выполнил (а):
Студент (ка) группы ОФ-513/086-5-1
Бирюкова Анастасия Витальевна

Научный руководитель:
канд. пед. наук, доцент
Эрентраут Елена Николаевна

Челябинск
2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Что же такое прогрессии? Термин «прогрессия» известен так давно, что нельзя точно сказать кто его открыл. По некоторым данным он был введен римлянином Боэцием (VI в.). Слово происходит от латинского (progression, что означает «движение вперед»). Данным термином именовали в математике всякую последовательность чисел, которую можно неограниченно продолжать в одном направлении. А названия «арифметическая» и «геометрическая» были заимствованы из теории непрерывных пропорций, которыми занимались древние греки. Еще в древности люди пользовались последовательностями для удовлетворения своих хозяйственных распределение продуктов, деление наследства и др. Некоторые формулы, прогрессий были известны китайским и индийским ученым [12].

В настоящее время прогрессии изучаются в курсе алгебры 9 класса. Всего на тему «Арифметическая и геометрическая прогрессии» отводится 14 часов из 30 часов в третьей четверти. Мы видим, что теме «Прогрессии» уделяется не так много внимания, а также она является несколько изолированной. Но эта тема способствует формированию понятий о правильном употребление буквенной символики, составлении буквенных выражений и формул, осуществления в формулах числовых подстановок, выполнении соответствующих вычислений.

Данная тема также позволяет определить основные понятия математического анализа. Например, такие, как бесконечность, предел и непрерывность. Теория рядов полностью базируется на последовательностях. Прогрессии изучается в учебниках алгебры учащимися таким образом: сначала изучают понятие числовой последовательности, затем -й член последовательности, порядковый номер ее члена, конечную и бесконечную последовательности, а в заключении и способы задания последовательностей [16].

В реальной жизни мы часто встречаемся с различного вида последовательностями. Например, В «Справочнике по целочисленным последовательностям» собрано и упорядочено 2300 целочисленных последовательности, а значит и область их применения очень широка. В настоящее время весь мир борется с короновирусной инфекцией. Нам известно, что она развивается в геометрической прогрессии. А также заражения многими другими болезнями происходят по законам прогрессий. В жизни мы ежедневно встречается с различными последовательностями в жизни, это, например, последовательность домов, этажей, банковского счета, а также прогрессии лежат в основе всех финансовых платежей и многое другое. Еще хочется отметить, что прогрессии изучают не только российские школьники, а также, например, учащиеся в Беларуси и Украине. Но там на изучение этой темы отводится куда меньше часов. Примерно около 12 часов в третьей четверти.

Задачи по теме «Прогрессии» включены в основной государственный экзамен: в первой части модуля «Алгебра». Поэтому крайне важно дать полное описание этого курса, чтобы учащийся мог повторить уже известный ему из школьного курса материал, и даже почерпнуть много нового и интересного. Это и есть актуальность данной выпускной квалификационной работы.

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей обучения, учащихся теме «Прогрессии» в курсе алгебры основной школы.

Цель исследования заключается в выявлении методических особенностей обучения, учащихся теме «Прогрессии» в курсе алгебры основной школы и разработки системы упражнений по теме исследования для подготовки обучающихся к ОГЭ.

Перед нами стоит необходимость выполнения следующих задач:

1.Рассмотреть теоретические основы темы исследования, а также историю возникновения прогрессий

2.Провести анализ школьных учебников по теме «Прогрессии» для изучения

3.Научить учащихся решать задачи на прогрессии разного уровня сложности

4.Предоставить учащимся различные задания по уровню сложности для закрепления и обобщения знаний.

<u>Объект исследования:</u> процесс обучения математике в основной школе.

<u>Предмет исследования:</u> процесс изложения темы «Прогрессии» в школьном курсе математики.

<u>Гипотеза:</u> процесс изучения темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии» будет более успешным, если уделить особое внимание изучению этой темы на факультативных занятиях по математике.

Для выполнения работы были использованы эти методы:

1. Изучение теоретического материала по выбранной теме
2. Проанализировать школьные учебники и материалы ОГЭ по теме исследования
3. Составление сборника задач по теме исследования
4. Разработка факультативного курса

В процессе выполнения выпускной квалификационной работы была определена её структура: ведение, теоретическая и практическая часть, заключение, список литературы и приложение. Введение включает в себя обоснование актуальности темы исследования, постановку целей и задач работы, а также методы их решения. В главе 1 изложена теория по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии», историческая справка и анализ учебной литературы.

Вторая глава содержит практическую область исследования по теме. А именно, проведен анализ контрольно-измерительных материалов ОГЭ по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии», разработан сборник задач по типу ОГЭ с его частичным решением, проведена апробация факультативных занятий, а также разработаны методические рекомендации по обучению учащихся решению задач по выбранной теме.

В заключении приводятся итоги проделанной работы. Апробация факультативных занятий проводилась в период педагогической практики на базе МАОУ СОШ № 153 г. Челябинска в 9 классе.

Глава 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

1.1 История возникновения прогрессий

Математические прогрессии известны очень давно, и нельзя точно сказать кто их открыл. Прогрессией называют последовательность чисел, где каждый последующий член каким-либо образом зависит от предыдущего.

Первые упоминания о прогрессиях встречаются еще у древних народов, относящихся ко II тысячелетию до н.э. Они были замечены на клинописных вавилонских табличках и египетских папирусах [12].

Например, в написанной в XIII в. «Книге об абаке» Леонардо Пизанского (Фибоначчи) есть задача, в которой фигурируют 7 старух, которые идут в Рим (см. задачу 1 типа 4 п. 2.2 данной работы) [10].

Очевидно, что суть задачи аналогичная. Решение: Из условия задачи ясно, что всего 7 людей, следовательно, количество кошек равно $7^2 = 49$. Кошки, в свою очередь съедают $7^3 = 343$ мыши, которые съедают $7^4 = 2401$ колосьев. Из колосьев вырастет $7^5 = 16807$ мер ячменя. Таким образом, получаем конечную числовую последовательность: $7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5$. Или: $7, 49, 343, 2401, 16807$. То есть, сумма данного ряда равна: $7 + 49 + 343 + 2401 + 16807 = 19607$.

Древних авторов подобных задач не особо интересовало, о каких конкретно предметах идет речь, главную роль играет их количество. Похожие задачи также решались на Руси. Примерно в XIX веке в различных деревнях детям загадывали задачи по типу: «Шли 7 старцев. У каждого по 7 костылей. На каждом костыле по 7 сучьев. На каждом сучке по 7 кошелей. В каждом кошеле по 7 пирогов. Сколько всего пирогов?» [10].

Также числовые последовательности и их свойства были отражены на картине «Устный счет. В народной школе С. А. Рачинского» великого русского художника Николая Петровича Богданова-Бельского в 1895 году.

1.2. Арифметическая прогрессия

Последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом, называется арифметической [1]. Каждая арифметическая прогрессия имеет вид:

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$$

Таким образом, разность между последующим и предыдущим членами данной арифметической прогрессии всегда постоянна:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_{n+1} - a_{n-1} = d$$

Число d называют разностью арифметической прогрессии.

Чтобы задать арифметическую прогрессию, достаточно указать её первый член и разность.

Например, если $a_1 = 3, d = 4$ то первые пять членов последовательности находим следующим образом:

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = a_1 + d = 3 + 4 = 7$$

$$a_3 = a_2 + d = 7 + 4 = 11$$

$$a_4 = a_3 + d = 11 + 4 = 15$$

Для арифметической прогрессии с первым членом a_1 и разностью d её -й член может быть найден по формуле:

$$a_n = a_1(n - 1)d$$

Например, найдём тридцатый член арифметической прогрессии

1, 4, 7, 10, . . .

Имеем, $a_1 = 1$, $d = 3$, $a_{30} = a_1(30 - 1)d = 1 + 29 \cdot 3 = 88$

Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предшествующего и последующего членов.

Обратное утверждение также верно, и имеет место следующее утверждение: числа a, b и c являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии тогда и только тогда, когда одно из них равно среднему арифметическому двух других.

Например, докажем, что последовательность, которая задаётся формулой $\mathrm{a}_n = 2n - 7$, является арифметической прогрессией.

Воспользуемся приведённым выше утверждением. Имеем:

$$a_n = 2n - 7$$

$$a_{n-1} = 2(n - 1) - 7 = 2n - 9$$

$$a_{n+1} = 2(n + 1) - 7 = 2n - 5$$

Следовательно,

$$\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} = \frac{2n - 5 + 2n - 9}{2} = 2n - 7 = a_n$$

что и доказывает нужное утверждение.

Отметим, что -ый член арифметической прогрессии можно найти не толь через a_1, но и любой предыдущий a_k, для чего достаточно воспользоваться формулой

$$a_n = a_k + (n - k)d$$

Например, для a_5 можно записать

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$$a_5 = a_2 + 3d$$

$$a_5 = a_3 + 2d$$

$$a_5 = a_4 + d$$

Кроме того, для любой арифметической прогрессии справедливо равенство:

$$a_m + a_n = a_k + a_l$$

если

$$m + n = k + l$$

Например, в арифметической прогрессии 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, . . .

$$a_{10} = 28 = \frac{25 + 31}{2} = \frac{a_9 + a_{11}}{2}$$

$$28 = a_{10} = a_3 + 7d = 7 + 7 * 3 = 7 + 21 = 28$$

$$a_{10} = 28 = \frac{19 + 37}{2} = \frac{a_7 + a_{13}}{2}$$

$$a_2 + a_{12} = a_5 + a_9$$

так как

$$a_2 + a_{12} = 4 + 34 = 38$$

$a_5 + a_9 = 13 + 25 = 38$[2].

Сумма $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ первых n членов арифметической прогрессии равна произведению полусуммы крайних слагаемых на число слагаемых:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

Для удобства использования её можно записать так:

$$S_n = \frac{2 \cdot a_1 + d \cdot (n - 1)}{2} \cdot n$$

Арифметическая прогрессия является монотонной последовательностью. При этом:

- если $d > 0$, то она возрастающая;
- если $d < 0$, то она убывающая;
- если $d = 0$, то она стационарной.

1.3 Геометрическая прогрессия

Если отношение каждого последующего члена последовательности к рядом стоящему предыдущему члену есть величина постоянная, то такая последовательность является геометрической. Это число называется знаменателем геометрической прогрессии и обычно обозначается буквой q. Для того чтобы задать геометрическую прогрессию, достаточно знать ее первый член b_1 знаменатель q[1].

Последовательность является возрастающей (убывающей), если каждый последующий член последовательности больше (меньше) предыдущего.

Таким образом, если $q > 0$, то прогрессия является монотонной последовательностью. Однако, если $q = 1$, то все члены прогрессии равны между собой. В этом случае прогрессия является постоянной последовательностью.

У каждой геометрической прогрессии имеются определенные характеристические свойства. Последовательность (b_n) является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, начиная со второго, есть среднее геометрическое соседних с ним членов. Пользуясь этим свойством можно находить любой член геометрической прогрессии, если известны два рядом стоящие.

Иначе,

$$b_1,\ b_2,\ b_3, \dots,\ b_n, \dots$$

является геометрической прогрессией, если для любого натурального числа n выполняется условие:

$b_1 + 1 = b_n \cdot q,$

где $q \neq 0$ — некоторое число.

Например, если $b_1 = 1$, $q = -3$, то первые пять членов последовательности находим следующим образом:

$$b_1 = 1,$$

$$b_2 = b_1 \cdot q = 1 \cdot (-3) = -3,$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = -3 \cdot (-3) = 9,$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = 9 \cdot (-3) = -27,$$

$$b_5 = b_4 \cdot q = -27 \cdot (-3) = 81.$$

Для геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем q её -й член может быть найден по формуле:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Например, найдём седьмой член геометрической прогрессии 1, 2, 4, . . .

Имеем,

$$b_1 = 1, q = 2$$

$$b_7 = b_1 \cdot q^6 = 64.$$

Так как

$$b_{n-1} = b_1 \cdot q^{n-2},$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1},$$

$$b_{n+1} = b_1 \cdot q^n,$$

то, очевидно, $(b_n)^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, то есть, каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен среднему геометрическому (пропорциональному) предшествующего и последующего членов [1].

Так как верно и обратное утверждение, то имеет место следующее утверждение: числа a, b и c являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии тогда и только тогда, когда квадрат одного из них равен произведению двух других, то есть одно из чисел является средним геометрическим двух других.

Отметим, что -ый член геометрической прогрессии можно найти не только через b_1, но и любой предыдущий член b_k, для чего достаточно воспользоваться формулой $b_т = b_k \cdot q^{n-k}$.

Например, для b_5 можно записать

$$b_5 = b_1 \cdot q^4,$$

$$b_5 = b_2 \cdot q^3,$$

$$b_5 = b_3 \cdot q^2,$$

$$b_5 = b_4 \cdot q.$$

Кроме того, для любой геометрической прогрессии справедливо равенство:

$$b_m \cdot b_n = b_k \cdot b_l,$$

если $m + n = k + l$.

Например, в геометрической прогрессии 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, . . .

$${b_6}^2 = 32^2 = 1024 = 16 \cdot 64 = b_5 \cdot b_7;$$

$$1024 = b_{11} = b_6 \cdot q^5 = 32 \cdot 25 = 1024;$$

$${b_6}^2 = 32^2 = 1024 = 8 \cdot 128 = b_4 \cdot b_8;$$

$$b_2 \cdot b_7 = b_4 \cdot b_5,$$

так как

$$b_2 \cdot b_7 = 2 \cdot 64 = 128,$$

$$b_4 \cdot b_5 = 8 \cdot 16 = 128.$$

Сумма $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$ первых -членов геометрической прогрессии со знаменателем $q \neq 0$ вычисляется по формуле:

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

А при $q = 1$ по формуле:

$$S_n = n \cdot b_1$$

Заметим, что если нужно просуммировать члены

$$b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n,$$

то используется формула:

$$S_n - S_k = b_k + b_{k+1} + \cdots + b_n = b_k \frac{1 - q^{n-k+1}}{1 - q}$$

Например, в геометрической прогрессии 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, . . .

$$S_{10} = 1 + 2 + \ldots + 512 = 1 \cdot \frac{1-2^{10}}{1-2} = 1023;$$

$$64 + 128 + 256 + 512 = S_{10} - S_6 =$$

$$64 \cdot \frac{1-2^{10-7+1}}{1-2} = 960$$

Если дана геометрическая прогрессия, то величины b_1, b_n, q, n и S_n связаны двумя формулами:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Поэтому, если значения каких-либо трёх из этих величин даны, то соответствующие им значения двух остальных величин определяются из этих формул, объединённых в систему двух уравнений с двумя неизвестными.

Для геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем q имеют место следующие свойства монотонности:

- прогрессия является возрастающей, если выполнено одно из следующих условий:

$b_1 > 0$ и $q > 1$

$b_1 < 0$ и $0 < q < 1$.

- прогрессия является убывающей, если выполнено одно из следующих условий:

$b_1 > 0$ и $0 < q < 1$

$b_1 < 0$ и $q > 1$.

Если $q < 0$, то геометрическая прогрессия является знакопеременной: её члены с нечётными номерами имеют тот же знак, что и её первый член, а члены с чётными номерами — противоположный ему знак. Понятно, что если геометрическая прогрессия является знакопеременной, то она не является монотонной [14].

1.4 Анализ учебной литературы

В изложении темы «Прогрессии» выделяют различные содержательно-методические линии, то есть системы примеров, задач, которые опираются на соответствующие им понятия и методы решения. Рассматривая ряд учебников из курса алгебры основной школы по теме «Прогрессии», можно заметить, что данная тема изучается, как правило, в конце учебного года в 9 классе. Далее будет представлен анализ следующих учебников алгебры 9 класса: Ш.А. Алимова, Ю. Н. Макарычева, Мордковича А. Г., Муравина Г. К., Дорофеева Г. В. Данная тема изучается во всех учебниках в четвертой главе. А вот содержание и построение изучения самого материала о прогрессиях немного различаются.

Первый параграф во всех указанных выше учебниках называется «Числовые последовательности», а по содержанию А. Г. Макарычева - «Арифметическая прогрессия» [3]. Тем не менее, во всех этих учебниках тема «Прогрессии» начинается с определения числовой последовательности, а далее начинаются расхождения.

Кроме того, само определение числовой последовательности в рассматриваемых учебниках задается по-разному. Сравнительный анализ представлен ниже:

Таблица 1 – Сравнительный анализ определения «числовая последовательность»

Авторы	Понятие числовой последовательности
1	2
Ш.А Алимов, Ю.М. Колягин и др.	определение даётся на основе примера о лицевом счете в сберегательном банке. «Пусть на счете №1 лежит вклад a_1 рублей, на счете №2 лежит вкладa_2 рублей и тд. Получается a_1, a_2 числовая последовательность $a_1, a_2, a_3 \dots a_N$,где N число всех счетов. Здесь каждому натуральному числу n от 1 до N поставлено в соответствие число a_n» [4].

Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова и др.	вводит определение, используя задачу Леонардо Фибоначчи: «начиная с двухмесячного возраста пара кроликов, каждый месяц производит новую пару. Сколько всего пар кроликов будет в декабре, если первая пара новорожденных кроликов появилась в январе (при условии, что все кролики останутся живы)?», получая при решении числа Фибоначчи, которые являются примером числовых последовательностей [2].
Г. К Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина	определение же вводится сразу, при последовательном выписывании чисел, получая последовательность натуральных и четных чисел соответственно [18].
Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова	определение же вводится сразу, при последовательном выписывании чисел, получая последовательность натуральных и четных чисел соответственно [3].
А. Г. Мордкович, П. В. Семенов	определение числовой последовательности как функции: «Функцию вида $y = (x)$, где $x \in N$, называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают $y = f(n)$ или$y_1, y_2, y_3 \dots y_n \dots$» [22].

Подробнее остановимся на изложении темы «Прогрессии» в учебнике алгебры для 9-го класса Мордковича А. Г [18]. Подробнее прогрессии изучаются в последующих двух параграфах. Монотонные последовательности (возрастающие и убывающие) это последнее опорное определение четвертой главы параграфа «Числовые последовательности» данного учебника.

В следующем параграфе уже вводится определение арифметической прогрессии и разности, приводятся примеры арифметической прогрессии и выводится «формула -го члена арифметической прогрессии.

Два последних пункта данного параграфа – «формула суммы членов конечной арифметической прогрессии» и «характеристическое свойство арифметической прогрессии». Изучение геометрической прогрессии строится точно так же, как в параграфе об арифметической прогрессии.

Но, кроме всего, в параграфе «Геометрические прогрессии» добавляется пункт «прогрессии и банковские расчеты». А после изучения главы 4 выводятся основные результаты работы учащихся:

знакомство с новой математической моделью-числовая последовательность, изучение новых терминов математического языка, введение новых обозначений, обсуждаются три способа задания числовой последовательности, формулирование и обоснование свойств прогрессий.

Рассмотрим учебник Ш.А. Алимова [4]. Тема «Прогрессии» в данном учебнике рассматривается в главе IV. Данная глава открывается вводной беседой, подготавливающей появление новых основных понятий, и заключительной беседой, которая включает в себя сведения, полезные для учащихся.

Алимов Ш.А. в каждом параграфе темы «Прогрессии» большое внимание уделяет теории и примерам, а упражнения для закрепления материала и самостоятельной работы даны мало; задачи расположены с нарастанием трудности решения и еще имеются задачи для устных вычислений.

В учебнике алгебры для 9-го класса Г. В. Дорофеева [2] три способа задания числовой последовательности подробно не обсуждаются. Сначала идет речь о рекуррентной формуле и формуле -го члена последовательности. После этого, в следующем пункте, при рассмотрении следующей задачи: «На турбазе можно взять напрокат лодку. Стоимость проката определяется так: за первые сутки надо заплатить 100 рублей, а за каждые следующие (полные или неполные) – 50 рублей. Сколько денег надо заплатить за лодку, взятую на один день, на два дня, на три дня и т. д.?» вводится определение арифметической прогрессии [2].

После решения такой задачи мы подходим к изучению понятий разности, последовательностей возрастающей и убывающей, выводится «формула -го члена арифметической прогрессии» и рассматривается ряд задач для закрепления материала. Основные определения, связанные с темой «Геометрическая прогрессия», вводятся с помощью привычных примеров обычному человеку из жизни. Формула -го члена геометрической прогрессии выводится аналогично. В данном учебнике структура построения учебного материала о прогрессиях не такая, как в предыдущем. Данный подход к изучению темы позволит учащимся глубже изучить материал и мыслить шире.

Уже упоминалось ранее, что изучение темы «Прогрессии» в учебнике алгебры 9 класса Макарычева Ю. Н. начинается параграфом «Арифметическая прогрессия», и также сначала вводятся ключевые понятия – «последовательность», «бесконечная последовательность», «конечная последовательность» и т.д. [3]. После задач на данные понятия дается определение арифметической прогрессии, её разности и «формула -го члена арифметической прогрессии». Затем, после решения задач отмечают 4 свойства арифметической прогрессии. Далее отдельным пунктом идет изучение формулы суммы первых $n-$ членов арифметической прогрессии.

Рассмотрим учебник Г. К. Муравина «Алгебра 9-го класса» [23]. Здесь используется описательный способ задания последовательности. Рассматриваются возрастающие и убывающие последовательности с примерами, а также рекуррентные последовательности. Материал об арифметической и геометрической прогрессиях изложен в одном параграфе. В пункте «Определение прогрессий» дается определение прогрессий, знаменателя и разности с примерами. Формулы -го члена прогрессий, и определения прогрессий, выводятся в общем пункте «Формулы n-го члена прогрессии» при решении задачи: «Максим задумал сделать садовую лестницу с так, чтобы каждая нижняя ступенька имела длину 50 см, а каждая из следующих 12 ступенек была на 2 см короче предыдущей. Какая длина должна быть у нижней ступеньки?» [23]. Последний изучаемый материал в этой главе - сумма членов прогрессий. В отличии от других учебников авторов Г. В. Дорофеева [2], Ю. Н.

Макарычева [3], А. Г. Мордковича [20] в этом, арифметическая и геометрическая прогрессии рассматриваются вместе.

Итак, были рассмотрены пять учебников различных авторов базового уровня по алгебре за 9 класс. Далее будут рассмотрены материалы по теме «Прогрессии» в учебниках для углубленного (профильного) изучения алгебры. В первую очередь хотелось бы остановиться на учебнике А. Г. Мордковича профильного уровня. Как и в учебнике базового уровня, данная тема изучается в главе 4 «Прогрессии», но содержит в себе 5 параграфов. То есть, дополнительными параграфами являются: §22 «Свойства числовых последовательностей» и §25 «Метод математической индукции». Дело в том, что в учебнике для углубленного изучения алгебры монотонные последовательности рассматриваются более широко, в отличие от базового уровня подготовки. В параграфе рассматриваются такие понятия, «последовательность ограничена сверху; верхняя граница последовательности; последовательность, ограниченная снизу; нижняя граница последовательности; ограничена последовательность; монотонные последовательности» [22].

В параграфе «Геометрическая прогрессия» последние рассматриваемые пункты не похожи, в отличии от параграфа «Арифметическая прогрессия». В базовом уровне это «Прогрессии и банковские расчеты», а в профильном - «Разные задачи на прогрессии». Параграф «Метод математической индукции» содержится только в учебнике профильного уровня данного автора.

У А. Г. Мордковича [22] в учебнике профильного уровня по теме «Прогрессии» основной материал изложен так же как в учебнике базового уровня. Однако при углубленном изучении темы «Прогрессии» по данному учебнику намного шире рассматриваются свойства числовых последовательностей. А также изучается такое важно понятие как метод математической индукции.

В заключении проведем сравнительный анализ учебников Ю. Н. Макарычева [3, 18] базового и углубленного уровней. Как и во всех рассмотренных выше учебниках, здесь тема «Прогрессии» изучается в 4 главе. По содержанию изложенного материала учебники довольно сильно отличаются. Во-первых, учебник углубленного уровня содержит такие дополнительные параграфы как «Свойства последовательностей» и «Сходящиеся последовательности». В учебнике базового уровня их нет вовсе. Далее, при углубленном изучении темы определение «числовая последовательность» дается непосредственно перед изучением свойств последовательностей. При базовом изучении – перед введением определения арифметической прогрессии. Соответственно, в учебнике базового уровня свойства числовых последовательностей не рассматриваются вообще.

Подводя итог, мы видим, что при изучении темы «Прогрессии» по учебникам базового уровня вне зависимости от его автора, совсем не рассматривается довольно большой объем материала. Это связано с тем, что при стандартном обучении отводится гораздо меньше часов на изучение темы «Прогрессии, поэтому учитель не может достаточно полно преподнести такой большой пласт материала. При углубленном же изучении на ту же тему отводится в среднем 27 часов [2]. Очевидно, что при данных временных ресурсах учащиеся могут усвоить намного больше объема информации. Из анализа учебников алгебры 9-ого класса делаем следующие выводы:

1. Понятия арифметической и геометрической прогрессий основываются на понятии числовой последовательности.

2. Характеристическое свойство арифметической (геометрической) прогрессии отражает связь между тремя последовательными членами арифметической (геометрической) прогрессии.

3. В теоретическом материале практически всех учебников четко выделяются два блока: 1) арифметическая прогрессия, 2) геометрическая прогрессия.

4. Выводя понятия и теоремы прослеживается аналогия между арифметической и геометрической прогрессиями.

Поэтому при изучении темы можно рассмотреть арифметическую и геометрическую прогрессии на одном уроке параллельно. Учителю рекомендуется наглядно систематизировать теоретические сведения темы «Прогрессии» для учащихся. Для наглядности результаты данного сравнительного анализа представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Анализ содержания учебного материала

Авторы	Содержание учебного материала
1	2
Ш.А Алимов, Ю.М. Колягин и др.	«Числовые последовательности. Арифметическая прогрессия. Сумма первых n членов арифметической прогрессии. Геометрическая прогрессия. Сумма первых n членов геометрической прогрессии» [4].
Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова и др.	«Числовые последовательности. Арифметическая прогрессия. Сумма первых n членов арифметической прогрессии. Геометрическая прогрессия. Сумма первых n членов геометрической прогрессии. Простые и сложные проценты. Сумма квадратов первых n натуральных чисел. Треугольник Паскаля» [2].
Г. К Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина	«Числовые последовательности. Последовательности и функции. Рекуррентные последовательности. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Определение прогрессий. Формула -го члена прогрессий. Сумма членов прогрессий. Сумма первых n членов прогрессии. Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $\|q\| < 1$» [23].
Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова	«Последовательности. Определение арифметической прогрессии. Формула -го члена арифметической прогрессии. Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии. Определение геометрической прогрессии. Формула -го члена геометрической прогрессии. Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии. Метод математической индукции» [3].
Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, И. Е. Феоктистов (углубленный уровень)	«Числовые последовательности. Способы задания последовательностей. Возрастающие и убывающие последовательности. Ограниченные и неограниченные последовательности. Метод математической индукции». «Арифметическая прогрессия. Формула -го члена арифметической прогрессии. Сумма первых n членов арифметической прогрессии. Геометрическая прогрессия. Формула -го члена геометрической прогрессии. Сумма первых n

	членов геометрической прогрессии. Предел последовательности. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии» [18].
А. Г. Мордкович, П. В. Семенов	«Определение числовой последовательности. Аналитическое задание последовательности. Словесное задание последовательности. Рекуррентное задание последовательности. Монотонные последовательности. Определение арифметической прогрессии. Формула -го члена арифметической прогрессии. Формула суммы членов конечной арифметической прогрессии. Характеристическое свойство арифметической прогрессии. Определение геометрической прогрессии. Формула -го члена геометрической прогрессии. Формула суммы членов конечной геометрической прогрессии. Характеристическое свойство геометрической прогрессии. Прогрессии и банковские расчеты» [20].
А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев (углубленный уровень)	«Определение числовой последовательности. Аналитическое задание последовательности. Словесное задание последовательности. Рекуррентное задание последовательности. Свойства числовых последовательностей. Определение арифметической прогрессии. Формула -го члена арифметической прогрессии. Формула суммы членов конечной арифметической прогрессии. Характеристическое свойство арифметической прогрессии. Определение геометрической прогрессии. Формула -го члена геометрической прогрессии. Формула суммы членов конечной геометрической прогрессии. Характеристическое свойство геометрической прогрессии. Разные задачи на прогрессии. Дедукция и индукция. Полная и неполная индукция. Метод математической индукции» [22].

Выводы по главе 1

После рассмотрения теоретического материала по изучению прогрессий было установлено следующее:

1.Изучены история возникновения понятий арифметической и геометрической прогрессий. Установлено, что математические прогрессии известны так давно, что нельзя точно сказать, кто их открыл. Но задачи на нахождение суммы членов последовательности или на нахождение некоторых членов последовательности были широко распространены в древности и встречались в разных уголках мира.

2. Определено, что изучение числовых последовательностей играет важную роль не только в школьном курсе алгебры, но и в

дальнейшем обучении математике в высших учебных заведениях, а также в обычной жизни.

3. Выполнен анализ содержания теоретического материала по теме «Прогрессии» в учебниках базового и углубленного уровней алгебры основной школы. Определено, что данный материал изучается непосредственно в 9-ом классе. Понятия арифметической и геометрической прогрессий основываются на понятии числовой последовательности. При введении понятий и теорем данной темы прослеживается аналогия между арифметической и геометрической прогрессиями.

Глава 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

2.1 Анализ ОГЭ

Каждый учащийся должен справится со сдачей ОГЭ по математике в 9 классе. Известно, что подготовка к ОГЭ начинается с 5 класса и продолжается до конца 9 класса. Задачи по теме «Прогрессии» также, как и многие другие темы из курса алгебры основной школы, входит в блок заданий ОГЭ модуля «Алгебра». Поэтому, каждому ученику, ставящему перед собой цель хорошо подготовиться и успешно сдать основной государственный экзамен, а также проявить себя на математических конкурсах и олимпиадах различного уровня необходимо серьезно отнестись к изучению этой темы. Однако перечисленные задачи являются наиболее трудными, так как они требуют развития логической культуры, которой не хватает большинству школьников.

Для того чтобы обучающийся усвоил определенные действия, необходимо их выполнить несколько раз. На основе анализа открытого банка заданий ОГЭ http://www.fipi.ru [29] нами составлен набор заданий по теме «Числовые последовательности», в котором задачи распределены по типам. Приведем примеры и решение заданий каждого типа:

Тип 1:

Задача 1. Выписаны первые три члена арифметической прогрессии:

$$20;\ 13;\ 6;\ \ldots$$

Чему равен 7-й член этой прогрессии.

Решение: необходимо воспользоваться формулой -го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n-1)d$ для этого найдем разность d.

$$d = a_{n+1} - a_n = 13 - 20 = -7$$

Теперь воспользуемся формулой, подставив нужные значения:

$$a_7 = 20 + (7-1) \cdot (-7) = -22$$

Ответ:$a_7 = -22$

Задача 2. Выписаны первые три члена арифметической прогрессии:

$$-4;\ 2;\ 8;\ \dots$$

Найдите 8-й член этой прогрессии.

Решение: аналогично с задачей 1.

$$d = a_{n+1} - a_n = 8 - 2 = 6$$

Теперь воспользуемся формулой, подставив нужные значения:

$$a_8 = -4 + (8-1) \cdot 6 = 38$$

Ответ: $a_8 = 38$

Задача 3. Выписаны первые три члена арифметической прогрессии:

$$-17;\ -14;\ -11;\ \dots$$

Найдите 5-й член этой прогрессии.

Решение: аналогично с задачей 1.

$$d = a_{n+1} - a_n = -14 - (-17) = 3$$

Теперь воспользуемся формулой, подставив нужные значения:

$$a_5 = -17 + (5-1) \cdot 3 = -5$$

Ответ:$a_5 = -5$

Тип 2:

Задача 4. Выписаны первые три члена арифметической прогрессии:

6; 10; 14; …

Чему равна сумма первых пяти её членов?

Решение: Здесь необходимо пользоваться формулой суммы арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{2 \cdot a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n$$

Найдем разность $d.$

$$d = a_{n+1} - a_n = 14 - 10 = 4$$

Подставим необходимые значения в формулу и найдём сумму пяти членов:

$$S_5 = \frac{2 \cdot 6 + 4 \cdot (5-1)}{2} \cdot 5 = 70$$

Ответ: $S_5 = 70$

Задача 5. Выписаны первые три члена арифметической прогрессии:

– 3; 1; 5; …

Укажите сумму первых 6 её членов.

Решение: аналогично $d = 5 - 1 = 4$

$$S_6 = \frac{2 \cdot (-3) + 4 \cdot (6-1)}{2} \cdot 6 = 42$$

Ответ:$S_6 = 42$

Задача 6. Выписаны первыетри члена арифметической прогрессии:

1; 3; 5; …

Чему равна сумма первых восьми её членов?

Решение: аналогично $d = 5 - 3 = 2$

$$S_6 = \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot (8-1)}{2} \cdot 8 = 64$$

Ответ:$S_6 = 64$

Тип 3:

Задача 7. Выписаны первые три члена геометрической прогрессии:

125; 100; 80; …

Найдите её пятый член.

Решение: необходимо воспользоваться формулой -го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ для этого найдем q.

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{80}{100} = 0{,}8$$

Теперь воспользуемся формулой, подставив нужные значения:

$$b_5 = 125 \cdot 0{,}8^{5-1} = 51{,}2$$

Ответ: $b_5 = 51{,}2$

Задача 8. Выписаны первые три члена геометрической прогрессии:

− 25; − 20; − 16; …

Найдите её четвёртый член.

Решение: аналогично $q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{-16}{-20} = 0{,}8$

$$b_4 = -25 \cdot 0{,}8^{4-1} = -12{,}8$$

Ответ: $b_4 = -12{,}8$

Задача 9. Выписаны первые три члена геометрической прогрессии:

7; 14; 28; …

Найдите её пятый член.

аналогично $q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{14}{7} = 2$

$$b_5 = 7 \cdot 2^{5-1} = 112$$

Ответ: $b_5 = 112$

Тип 4:

Задача 10. Выписаны первые три члена геометрической прогрессии:

− 1024; − 256; − 64; …

Чему равна сумма первых пяти её членов?

*Решение :*Воспользуемся формулой суммы членов геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Опять же, необходимо найти q

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{-64}{-256} = 0{,}25$$

Подставим данные в формулу:

$$S_5 = \frac{-1024 \cdot (0{,}25^5 - 1)}{0{,}25 - 1} = -1364$$

Ответ:$S_5 = -1364$

Задача 11. Выписаны первые три члена геометрической прогрессии:

2; 6; 18; …

Чему равна сумма первых шести её членов?

Решение: аналогично $q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{6}{2} = 3$

$$S_6 = \frac{2 \cdot (3^6 - 1)}{3 - 1} = 728$$

Ответ:$S_6 = 728$

Задача 12. Выписаны первые три члена геометрической прогрессии:

− 0,4; -2; − 10; …

Укажите сумму первых пяти её членов.

Решение: аналогично $q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{-10}{-2} = 5$

$$S_5 = \frac{-0{,}4 \cdot (5^5 - 1)}{5 - 1} = -312{,}4$$

Ответ:$S_5 = -312{,}4$

Тип 5:

*Задача 13.*Дана арифметическая прогрессия (a_n), разность которой равна − 8,5 и $a_1 = -6{,}8$. Найдите a_5.

Решение: необходимо воспользоваться формулой -го члена арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Получим:

$$a_5 = -6{,}8 + (5-1) \cdot (-8{,}5) = -40{,}8$$

Ответ: $a_5 = -40{,}8$

Задача 14. Дана арифметическая прогрессия (a_n), разность которой равна − 5,3

и $a_1 = -7{,}7$. Найдите a_7.

Решение: аналогично

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Получим:

$$a_7 = -7{,}7 + (7-1) \cdot (-5{,}3) = -39{,}5$$

Ответ: $a_7 = -39{,}5$

Тип 6:

*Задача 15.*Дана арифметическая прогрессия (a_n), разность которой равна 1,1

и $a_1 = -7$. Какова сумма первых восьми её членов.

Решение: для решения этой задачи необходимо воспользоваться формулой суммы арифметической прогрессии. Все необходимые данные у нас имеются.

$$S_n = \frac{2 \cdot a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n$$

Получим:

$$S_8 = \frac{2 \cdot (-7) + 1{,}1 \cdot (8-1)}{2} \cdot 8 = -25{,}2$$

Ответ:$S_8 = -25{,}2$

*Задача 16.*Дана арифметическая прогрессия (a_n), разность которой равна − 1,9

и $a_1 = 2{,}3$. Какова сумма первых пяти её членов.

Решение :аналогично с задачей 1.

$$S_n = \frac{2 \cdot a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n$$

Получим:

$$S_5 = \frac{2 \cdot 2{,}3 + (-1{,}9) \cdot (5-1)}{2} \cdot 5 = -7{,}5$$

Ответ:$S_5 = -7{,}5$

Тип 7:

Задача 17. Последовательность (c_n) задана условиями:

$c_1 = 5$, $c_{n+1} = c_n - 4$.

Найдите c_6.

Решение: будем пользоваться формулой: $\mathrm{c}_n = \mathrm{c}_1 + (n-1)d$ для этого найдем разность d.

$d = c_{n+1} - c_n = -4$ (по условию)

Подставляем в формулу $\mathrm{c}_6 = 5 + (6-1) \cdot (-4) = -15$

Ответ:$\mathrm{c}_6 = -15$

Задача 18. Последовательность (c_n) задана условиями:

$c_1 = -8$, $c_{n+1} = c_n - 2$.

Найдите c_5.

Решение: будем пользоваться формулой: $\mathrm{c}_n = \mathrm{c}_1 + (n-1)d$ для этого найдем разность d.

$d = c_{n+1} - c_n = -2$ (по условию)

Подставляем в формулу $\mathrm{c}_5 = -8 + (5-1) \cdot (-2) = -16$

Ответ:$\mathrm{c}_5 = -16$

Тип 8:

Задача 19. Арифметическая прогрессия (a_n) задана условиями:

$a_1 = -15$, $a_{n+1} = a_n - 10$.

Укажите сумму первых восьми её членов.

Решение: Здесь необходимо пользоваться формулой суммы арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{2 \cdot a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n$$

Найдем разность d.

$$d = a_{n+1} - a_n = -10$$

Подставим необходимые значения в формулу и найдём сумму пяти членов:

$$S_8 = \frac{2 \cdot (-15) + (-10) \cdot (8-1)}{2} \cdot 8 = -400$$

Ответ: $S_8 = -400$

Задача 20. Арифметическая прогрессия (a_n) задана условиями:

$a_1 = 43, a_{n+1} = a_n + 5.$

Какова сумма первых семи её членов?

Решение: аналогично

$$d = a_{n+1} - a_n = 5$$

Подставляем значения в формулу:

$$S_7 = \frac{2 \cdot 43 + 5 \cdot (7-1)}{2} \cdot 7 = 406$$

Ответ: $S_7 = 406$

Тип 9:

Задача 21. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями:

$b_1 = -6, b_{n+1} = 2b_n.$

Найдите b_6.

Решение: необходимо воспользоваться формулой -го члена геометрической прогрессии

$b_n = d_1 \cdot q^{n-1}$ для этого найдем q.

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = 2$$

Теперь воспользуемся формулой, подставив нужные значения:

$$b_6 = -6 \cdot 2^{6-1} = -192$$

Ответ: $b_6 = -192$

Задача 22. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями:

$b_1 = -113,\ b_{n+1} = -3b_n$.

Найдите b_7.

Решение: аналогично

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = -3$$

Теперь воспользуемся формулой, подставив нужные значения:

$$b_7 = -113 \cdot (-3)^{7-1} = -82377$$

Ответ: $b_7 = -82377$

Тип 10:

Задача 23. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями:

$b_1 = -7,\ b_{n+1} = 3b_n$.

Укажите сумму первых пяти её членов.

Решение: Воспользуемся формулой суммы членов геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Опять же, необходимо найти q

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = 3$$

Подставим данные в формулу:

$$S_5 = \frac{-7 \cdot (3^5 - 1)}{3 - 1} = -847$$

Ответ: $S_5 = -847$

Задача 24. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями:

$b_1 = -3,\ b_{n+1} = -4b_n$. Какова сумма первых пяти её членов.

Решение: Аналогично находим q

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = -4$$

Подставляем значения:

$$S_5 = \frac{-3 \cdot ((-4)^5 - 1)}{-4 - 1} = -615$$

Ответ: $S_5 = -615$

Тип 11:

Задача 25. Известны несколько последовательных членов арифметической прогрессии:

…; − 9; x; − 13; − 15; …

Найдите x.

Решение: найдем разность данной прогрессии $d = -15 - (-13) = -2$. По определению арифметической прогрессии получаем: $x = -9 + (-2) = -11$.

Ответ: $x = -11$

Задача 26. Известны несколько последовательных членов арифметической прогрессии:

…; 11; x; 19; 23; …

Найдите x.

Решение: $d = 23 - 19 = 4$

$$x = 11 + 4 = 15$$

Ответ: $x = 15$

Тип 12:

Задача 27. Известны несколько последовательных членов геометрической прогрессии:

…; − 1; x; − 49; − 343; …

Найдите x.

Решение: знаменатель данной прогрессии равен $q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{-343}{-49} = 7$

По определению геометрической прогрессии $x = -1 \cdot 7 = -7$

Ответ: $x = -7$

Задача 28. Даны несколько последовательных членов геометрической прогрессии:

…; − 3; x; − 27; − 81; …

Найдите x.

Решение: знаменатель данной прогрессии равен $q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{-81}{-27} = 3$

По определению геометрической прогрессии $x = -3 \cdot 3 = -9$

Ответ:$x = -9$

Тип 13:

Задача 29. Последовательность (b_n) задана условиями:

$b_1 = -4, b_{n+1} =- 2 \cdot \frac{1}{bn.}$

Найдите b_5.

Решение: исходя из условий мы можем найти второй член геометрической прогрессии $b_2 = -2 \cdot (-0{,}25) = 0{,}25$

Теперь можем найти знаменатель $q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{0{,}25}{-4} = -0{,}0625$

Далее воспользуемся формулой -го члена геометрической прогрессии

$$b_n = d_1 \cdot q^{n-1}$$

Получим

$$b_5 = -4 \cdot (-0{,}0625)^{5-1} = -0{,}000061$$

Ответ:$b_5 = -0{,}000061$

Тип 14:

Задача 30. Дана арифметическая прогрессия (a_n), в которой

$a_3 = 6{,}9, a_{16} = 26{,}4.$

Найдите разность прогрессии.

Решение: воспользуемся формулой -го члена и составим систему:

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d \\ a_{16} = a_1 + 15d \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6{,}9 = a_1 + 2d \\ 26{,}4 = a_1 + 15d \end{cases}$$

Воспользуемся методом сложения и получим $-19{,}5 = -13d \Rightarrow d = 1{,}5$

Ответ:$d = 1{,}5$

Задача 31. Дана арифметическая прогрессия (a_n), в которой

$a_6 = -7{,}8$, $a_{19} = -10{,}4$.

Найдите разность прогрессии.

Решение: воспользуемся формулой -го члена и составим систему:

$$\begin{cases} a_6 = a_1 + 5d \\ a_{19} = a_1 + 18d \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7{,}8 = a_1 + 5d \\ -10{,}4 = a_1 + 18d \end{cases}$$

Воспользуемся методом сложения и получим $2{,}6 = -13d \Rightarrow d = -0{,}2$

Ответ:$d = -0{,}2$

Проанализировав задачи ОГЭ по теме «Числовые последовательности» можно сделать вывод, что данные задачи бывают различного уровня сложности и многие из них нельзя решить без специальной подготовки. Поэтому на уроках стоит уделять особое внимание заданиям по прогрессиям, а для решения заданий необходимо знать формулы прогрессий наизусть и уметь отличать арифметическую прогрессию от геометрической. Знать свойства. На основе исследования нами были выделены основные типы задач по теме «Прогрессии» из КИМов ОГЭ и определено, что 14 часов для изучения темы «Прогрессии» в школьном курсе математике недостаточно для качественного изучения данной темы. Поэтому ученикам необходимы дополнительные занятия за счет часов внеурочной деятельности.

2.2 Факультатив по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии»

Внеурочная деятельность может проводиться различными способами. Одним из таких способов являются факультативные занятия. Факультативы по теме моего исследования должны быть не только полезными, но и интересными для учащихся. Чтобы сформировать устойчивый интерес к предмету рекомендовано использовать естественную любознательность школьников.

Предлагаемый факультатив предназначен для тех, кто подготавливает учащихся к школьным выпускным экзаменам и к олимпиадам по математике. Как показал анализ школьной литературы и материалов ОГЭ - теме «Прогрессии» недостаточно уделять внимание только на уроках, необходима дополнительная подготовка на дополнительных занятиях.

Данный факультатив направлен на изучение и расширение математических знаний ученика, учитывая уровень его подготовки. Программа факультативного занятия по математике составлена так, что прогрессии изучаются синхронно с основным курсом алгебры в основной общеобразовательной школе.

Курс по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия» рассчитан на 9 часов для учеников 9 класса, однако, его программа может корректироваться. Принимая во внимание особенности школы, класса, уровня подготовки учащихся учитель может изменять последовательность изучения материала, уровень сложности, самостоятельно распределять часы и выбирать различные формы проверки знаний.

Цель курса: изучение и углубление знаний учащихся по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии», подготовка к ОГЭ по данной теме. Содержание курса представлено в таблице 3.

Задачи:

1. Изучить теоретический материал по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии»

2. Сформировать представления о методах и способах решения заданий, содержащих арифметические и геометрические прогрессии

3. Сформировать навыки решения практических задач по теме «Прогрессии».

Важное место для учащихся занимают практические и самостоятельные работы. Если у учащихся уже имеются знания по данной теме, то для повторения можно дать им решить входной тест из ПРИЛОЖЕНИЯ 1. Контроль знаний можно осуществлять разными способами: устно, письменно и т.д. Итоговый контроль – контрольная работа (см. ПРИЛОЖЕНИЕ 2). По окончанию факультативного курса учащийся должен:

Знать:

- Основные свойства, формулы и понятия арифметической и геометрической прогрессий
- Методы и способы решения заданий, содержащих прогрессии.

Уметь:

- Применять определения и свойства прогрессий
- Применять методы и способы решения заданий, содержащих арифметические и геометрические прогрессии на практике.

Владеть:

- Основной теорией по теме «Прогрессии»
- Методикой и способами решения заданий, содержащих арифметические и геометрические прогрессии на практике.

Таблица 3 - Содержание программы факультативного курса

	Тема занятия	Количество часов
	2	3
	Сравнение арифметической и геометрической	1

	прогрессий.	
	Формула суммы n-первых членов арифметической прогрессии. Вычисление конечных сумм. Решение задач с использованием этих формул.	2
	Формула суммы n-первых членов геометрической прогрессии. Вычисление конечных сумм. Решение задач с использованием этих формул.	2
	Решение задач с практическим содержанием на прогрессии. Решение нестандартных задач на прогрессии.	2
	Контрольная работа	2

Примеры задач:

Тип 1: вводные задачи

1. Необходимо сравнить последовательности по общим свойствам и разделить их на группы

1) 3, 5, 7, 9, 11, …

2) 4, 8, 16, 32, …

3) -1, 2, - 4, 8, -16, …

4) 10, 9, 8, 7…

5) 6, 2,-2 …

6) 2, 5, 8, 11, …

7) 4, - 2, 1, ...

2. Необходимо сравнить между собой приведенные ниже последовательности и найти среди них такие, которые образованы с помощью общего свойства. Что это за свойство?
1)2,4,6,8,10,...;
2)2,4,8,16,32,...,
3)1,2,3,4,5,...;
4)2, 5, 8, 11, 14, ...

3. Запишите последовательность, составленную по такому правилу: начинать последовательность следует с любого двухзначного числа, а каждое следующее число должно быть на 7 меньше предыдущего. Сколько чисел тебе удалось записать? Сравни

свою последовательность чисел с последовательностью чисел соседа по парте. Это разные или одинаковые последовательности чисел?

Решение: например, начнём с числа 32, получим следующую последовательность: 32, 25, 18, 11, 4…Она является арифметической и будет иметь бесконечное число членов.

Далее стоит дать определения арифметической и геометрической прогрессий. Объяснить, что такое разность и знаменатель. И дать некоторые задания для закрепления.

4. Является ли последовательность 4, 6, 8, 10… арифметической прогрессией?

5. Является ли последовательность 10, 20, 30, 40…геометрической прогрессией?

6. Для геометрической прогрессии $8, -4, 2\dots$ найти знаменатель q.

Решение:$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2}{-4} = -0{,}5$

Тип 2: задачи на нахождение n-го члена последовательности

1. Выписаны четыре члена арифметической прогрессии: $\dots;\ 12;\ x;\ 6;\ 3;\ \dots$ Найдите x.

2. Даны четыре последовательных члена геометрической прогрессии: $1{,}75;\ x; 28;\ -112$. Найдите x.

3. В арифметической прогрессии $a_2 = -1$, $a_5 = 8$. Найти a_{10}.

4. Дана формула -го члена арифметической прогрессии: $a_n = 3{,}8\ -\ 5{,}7n$. Найдите её шестой член.

5. Выписаны три первые члена арифметической прогрессии: $1, 3, 5, \dots$ Найдите её одиннадцатый член.

6. Даны разность и первый член арифметической прогрессии (a_n): $d = -\ 1{,}7, a_{\ 1} =\ 7{,}6.$ Найдите девятый член.

7. n-ый член геометрической прогрессии зада формулой: $b_n = 64{,}5\ \cdot\ (-\ 2)n$. Найдите b_6.

8. Дан первый член геометрической прогрессии: $b_1 = -6$, а её -ый член задается формулой: $b_{n+1} = 2b_n$. Найдите шестой член.

Решение: исходя из формулы мы видим, что каждый следующий член больше предыдущего в 2 раза, поэтому:

$b_1 = -6, \quad b_2 = -12, b_3 = -24,\ b_4 = -48, b_5 = -96, b_6 = -192$

9. Даны первые три члена геометрической прогрессии: $18;\ -54;\ 162$. Найдите её пятый член.

10. Знаменатель геометрической прогрессии (b_n) равен 2, её первый член равен 16. Найдите четвертый член данной прогрессии.

11. Сумма убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

12. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 13, а сумма квадратов тех же чисел равна 91. Найти эти числа.

13. Сумма 75-ти первых членов арифметической прогрессии равна 450. Найти 38-й член прогрессии.

Решение: Воспользуемся формулой суммы арифметической прогрессии и найдем a_{38}

$$S_n = \frac{2 \cdot a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n$$

$$S_{75} = \frac{2 \cdot a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot 75 = \frac{2 \cdot (a_1 + 37d)}{2} \cdot 75 = (a_1 + 37d)75 = 450$$

$$a_1 + 37d = a_{38} = \frac{450}{75} = 6$$

14. Дана геометрическая прогрессия (b_n). Сумма первого и второго членов этой прогрессии 40, а сумма второго и третьего членов 120. Найдите первые три члена этой прогрессии.

Тип 3: задачи на нахождение суммы последовательности

1. n-ый член арифметической прогрессии задается формулой: $a_{n+1} = a_n + 1{,}1$, а её первый член равен 0,9, найдите сумму первых 11 членов

2. Выписаны первые три члена арифметической прогрессии: $6;\ 10;\ 14$. Найдите сумму первых пятидесяти её членов

Решение:

$$S_n = \frac{2 \cdot a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n$$

Найдем разность d.

$$d = a_{n+1} - a_n = 14 - 10 = 4$$

Подставим необходимые значения в формулу и найдём сумму пяти членов:

$$S_5 = \frac{2 \cdot 6 + 4 \cdot (5-1)}{2} \cdot 5 = 70$$

3. n-ый член арифметической прогрессии задается условием: $a_n = 1{,}9 - 0{,}3n$. Найдите сумму первых 15 её членов

4. Даны первые три члена геометрической прогрессии: − 1024; − 256; − 64. Чему равна сумма первых пяти её членов?

5. В геометрической прогрессии (b_n) знаменатель равен 4, а первый член равен -16. Необходимо найти сумму первых шести её членов.

Решение: Воспользуемся формулой суммы членов геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Подставим данные в формулу:

$$S_6 = \frac{-16 \cdot (4^6 - 1)}{4 - 1} = -21840$$

6. Сумма первого и пятого члена арифметической прогрессии равна $\frac{5}{3}$, а произведение третьего и четвертого ее членов равно $\frac{65}{72}$. Найдите сумму семнадцати первых членов данной прогрессии.

Тип 4: задачи с практическим содержанием

1. Задача о семи старухах. Старухи идут в Рим, у каждой имеется 7 мулов, каждый мул тащит 7 мешков, в каждом мешке 7 хлебов, у каждого хлеба лежит 7 ножей, каждый нож нарежет 7 кусков хлеба. Какому числу равно всё перечисленное?

2. Работники нанялись вырыть колодезь с таким условием, чтобы за первый аршин глубины им заплатили 40 копеек, а за каждый следующий 15-ю копейками больше, чем за предыдущий. Сколько аршин вырыли они, если за всю работу получили 16 р. 90 к.?

3. В кинотеатре в первом ряду 21 кресло, в каждом следующем ряду на 2 кресла больше, чем в предыдущем. Сколько кресел в 40 ряду?

Решение: количество кресел составляет арифметическую прогрессию.

$$a_1 = 21, b = 2, \text{найти } a_{40}$$

Воспользуемся формулой $a_n = a_1 + (n-1)d$

Подставим значения: $a_{40} = 21 + (40-1)2 = 99$

4. Фирма должна платить за просроченный платеж в размере 3 млн. р. пеню 5% ежемесячно от суммы платежа. Найдите выплату за трехмесячную задержку.

5. Требуется четыре разных почтовых марок для отправки четырёх бандеролей на общую сумму 120 рублей. Цены марок составляют арифметическую прогрессию. Укажите стоимость самой дорогой марки, если она в три раза дороже самой дешевой?

6. Три числа, сумма которых равна $\frac{15}{2}$составляют арифметическую прогрессию. Если к третьему числу прибавить первое, то числа составят геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

7. Показать, что если треугольник имеет угол в 120 и стороны его образуют арифметическую прогрессию, то эти стороны пропорциональны числам: 3,5,7.

8. Длины сторон четырехугольника образуют арифметическую прогрессию. Можно ли в него вписать окружность?

9. Рабочим надо проложить асфальт в 5000 метров, ежедневно увеличивая норму прокладки на одно и то же число метров. В первый день рабочие проложили 30 метров. Сколько метров асфальта проложили рабочие в последний день, если за 8 дней вся работа была выполнена.

Решение: За первый день рабочие выложили $a_1 = 30$ м , во второй — a_2, … , в последний — a_8 метров асфальта. Их работа происходила в течении 8 дней т.е.$n = 8$. Длина всего асфальта:

$$S_n = 5000 \text{ м}, \;\; a_8 = ?$$

По формуле суммы первых n членов последовательности получим:

$$5000 = \frac{30 + \; a_8}{2} 8$$

$$3 + \; a_8 = 125$$

$$a_8 = 122 \text{ м}$$

Получили, что в последний день проложили 122 метров асфальта.

10. Для прохождения компьютерной игры необходимо пройти определенное количество уровней. За прохождение каждого уровня игрок получает 50 баллов. А также начисляются и премиальные баллы согласно следующей схеме: 10 баллов за второй уровень и за каждый следующий уровень на 10 баллов больше, чем за предыдущий. Сколько уровней надо пройти, чтобы набрать 1100 баллов?

2.3 Апробация факультативных занятий

Педагогический эксперимент по применению разработанного факультативного курса проводился в период педагогической практики в МАОУ СОШ № 153 г. Челябинска в 9 классе. Также апробация была проведена в форме написания статьи в сборнике материалов Всероссийской научно-практической конференции, посвященной 85-летию физико-математического факультета ЮУрГГПУ «ДИАГНОСТИКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ В УСЛОВИЯХ РЕАЛИЗАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНЫХ ГОСУДАРСТВЕННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ СТАНДАРТОВ» и тезисов для конференции в Пермском государственном гуманитарно-педагогическом университете в сборнике «ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ, ЕЕ ИСТОРИИ И МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ В УЧЕБНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТАХ» [5,6].

На практике в школе мне удалось провести занятие по теме «Решение задач с практическим содержанием на прогрессии». Ребята активно работали на уроке, и некоторые из них получили оценки. На уроке присутствовали 20 человек из 23. Оценку «отлично» получили трое учеников.

Задачи, рассмотренные на занятии:

1.В кинотеатре в первом ряду 21 кресло, в каждом следующем ряду на 2 кресла больше, чем в предыдущем. Сколько кресел в 40 ряду?

2.Рабочим надо проложить асфальт в 500 метров, ежедневно увеличивая норм прокладки на одно и то же число метров. В первый день рабочие проложили 3 метра. Сколько метров асфальта проложили рабочие в последний день, если за 8 дней вся работа была выполнена.

3.Бактерия, к концу 20-й минуты, попадая в живой организм, делится на две бактерии, каждая из них к концу следующих 20 минут делится опять на две и т. д. Каково число бактерий, образующихся из одной бактерии к концу суток.

4.Гусеница в первую минуту проползла 39 см, а за каждую следующую минуту на 2 см меньше, чем в предыдущую. Через сколько минут она проползёт 4 м?

5. Для прохождения компьютерной игры необходимо пройти определенное количество уровней. За прохождение каждого уровня игрок получает 50 баллов. А также начисляются и премиальные баллы согласно следующей схеме: 10 баллов за второй уровень и за каждый следующий уровень на 10 баллов больше, чем за предыдущий. Сколько уровней надо пройти, чтобы набрать 1100 баллов?

Я считаю, что урок прошёл продуктивно. Об этом свидетельствуют высокий уровень самостоятельности учащихся на занятии. Наблюдались навыки выполнения работы через организацию коллективной деятельности, отмечалось дружелюбие в отношении друг к другу, взаимопомощь, поддержка. Ученики продемонстрировали умение применять полученные теоретические знания на практике.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что подобранные учебные материалы для преподавания темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии», а также разработанные нами задания для указанной темы эффективны для обучения школьников, потому что после проведения дополнительных занятий по данной теме ученики стали лучше решать задания такого типа из КИМ ОГЭ [5].

2.4 Методические рекомендации для обучения учащихся решению задач по теме «Прогрессии»

Основная цель темы «Прогрессии» - дать определение арифметической и геометрической прогрессиям как числовым последовательностям особого вида. Исходя из анализа, делаем вывод, что учебник А. Г. Мордковича по алгебре за 9 класс наиболее полно представляет тему «Прогрессии», в отличие от подобных ему учебников [20].

Тема «Прогрессии» в некотором смысле является обособленной или тупиковой, так как она не имеет связи с другим материалом курса алгебры, но, тем не менее, тема «Прогрессии» является обязательной к изучению в основной школе [27].

Ученики должны изучить обязательный минимум при изучении темы «Прогрессии», который включает в себя: «правильное употребление буквенной символики; составление несложных буквенных выражений и формул; умение осуществлять в формулах числовые подстановки и выполнять соответствующие вычисления. В результате изучения материала по программе дает возможность ученикам познакомиться с арифметической и геометрической прогрессиями, применять формулы -го члена и суммы n первых членов для решения задач» [26].

Функциональная линия является основной в 9 классе, поэтому понятие последовательности у А. Г. Мордковича [20] рассматривается как функция, точнее, как функция натурального аргумента.

Учителю в соответствии с данными целями изучения темы «Прогрессии» следует тщательно подбирать материал для обучения учащихся. Необходимо использовать не только базовый учебник, но и другую литературу [25]. Например, можно использовать некоторые задания и сведения из учебников углубленного уровня, различных учебников, содержавших нестандартные и практические задачи. Думаю, что решение практических задач будет полезно учащимся. Возможно кто-то будет использовать полученные навыки в повседневной жизни.

Сначала следует изучить понятия: «последовательность», «n-й член последовательности», научиться использовать индексные обозначения. Тут же уместно показать различные способы задания последовательности, используя задания типа №560, 565, 568, 569 учебника «Алгебра, 9» Ю.Н. Макарычева [3].

«№560. Необходимо найти последовательность первых натуральных чисел, кратных 3. Укажите ее первый, пятый, десятый члены» [14, С. 146]. Формула -го члена заданной последовательности имеет вид: $a_n = 3n$, где n – натуральные числа. Т.о., первый, пятый и десятый члены равны: $a_1 = 3$, $a_5 = 15$, $a_{10} = 30$. Ответ: $3, 15, 30$.

Закрепление определения арифметической прогрессии осуществляется при выводе и использовании формулы -го члена для решения как прямых, так и обратных задач [7].

Тед Сундстром почетный профессор математики государственного университета Гранд-Вэлли в своей работе «Mathematical Reasoning: Writing and Proof» [32], описал метод, который заключается в выяснении идей решений или доказательств через вопросы. Именно его и можно использовать при выводе формул и доказательств.

«№ 591 (а). Содержит ли арифметическая прогрессия 2; 9; ... число: а)156?» [14].

В первую очередь, при обсуждении способов решения задачи необходимо выяснить у учащихся идею решения, которая позволит составить план ответа на вопрос задачи. В этом случае можно использовать «Сократовский метод», задавая учащимся такие вопросы:

- Как объяснить математически, что последовательность содержит (или не содержит) какое-то число?

- Чем определяется место члена последовательности?

- Если мы установим номер числа 156 в арифметической прогрессии, то какой получим ответ?

- Что мы знаем об арифметической прогрессии и достаточно ли этих данных для ответа на вопрос?

- Что поможет нам найти номер члена прогрессии?

Далее составляется план решения и выписывается решение:

1. Найдем для данной арифметической прогрессии разность d по формуле

$$a_2 - a_1 = d, \text{то есть } d = 9 - 2 = 7.$$

2. Известно, что формула -го члена арифметической прогрессии записывается так: $a_n = a_1 + d(n-1)$.

3. Подставим в данную формулу вместо a_1 и d известные значения, а вместо a_n данное число 156. Тогда получим следующее уравнение:

$$156 = 2 + 7(n-1).$$

4. Решим полученное уравнение:

$156 = 2 + 7n - 7 \;=>\; 7n = 161 \;=>\; n = 23.$

5. Так как $n = 23$, то отсюда следует, что данная арифметическая прогрессия содержит число 156, оно будет 23-м членом этой прогрессии.

Ответ: Да, содержит.

Остановимся на выводе формулы любого члена прогрессии. Вывести формулы ученики могут сами, если преподнести этот материал в виде самостоятельной работы по вариантам.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ и $b_n = d_1 \cdot q^{n-1}$[1].

На этом же уроке учитель ознакомляет последовательно с характеристическими свойствами прогрессий [19].

Что касается вывода формулы суммы первых $n-$ членов арифметической прогрессии в учебнике «Алгебра 9 класс» Ю. Н. Макарычева, то у учащихся не должно возникнуть затруднений. Но не не маловажным фактором остается их заинтересованность. Для увеличения интереса у школьников, можно рассказать им историю «о маленьком Карле Гауссе, которого сейчас принято считать королем математики, уже в 10 лет мог очень быстро решить задачу о нахождении суммы первых ста натуральных чисел» [3]. Затем можно поставить перед учениками проблему: «Как десятилетний мальчик смог найти сумму ста натуральных чисел?» [3].

Далее следует отметить, что с помощью рассуждений, аналогичных проведенным при решении выше указанной задачи, можно найти сумму 32 первых членов любой арифметической прогрессии. После этого необходимо приступить к непосредственному выводу формулы суммы первых $n-$ членов арифметической прогрессии.

Учитель может предоставить учащимся подборку нестандартных задач из коллекции нестандартных задач, содержащие прогрессии, Н. А. Петровской в том случае если ученики уверенно владеют основными теоретическими знаниями по данной теме для закрепления и углубления изученного материала.

Также можно подготовить лабораторные и практические работы, согласно некоторым требованиям. К примеру, за основу при разработке таких работ можно взять методическое пособие Н. В. Кузяевой, Е. И. Лященко или Г. И. Саранцева [16,17].

Затем необходимо подходить к изучению основных определений согласно теме, содержанию учебника алгебры Ю. Н. Макарычева или другого учебника, который является ведущем в отдельной школе, и календарному плану [19].

Выводы по главе 2

В результате анализа задач ОГЭ по данной теме было выявлено, что задачи по «Прогрессиям» включены в основной государственный экзамен: в первой части модуля «Алгебра». Для того чтобы ученик усвоил определенные задания, - необходимо их решать в определенной системе. На основе анализа открытого банка заданий http://www.fipi.ru [29] была разработана методическая система и методические рекомендации по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии».

Программа разработанного факультативного курса была составлена исходя из анализа основных тем, анализа учебников и структуры предлагаемых заданий в ОГЭ, а также возможностей обучающихся.

Проведенный педагогический эксперимент показал, что благодаря предлагаемой разработке у учащихся улучшились такие показатели как успеваемость и качество знаний, и возрос интерес к проведению исследовательской деятельности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

«Последовательности» - одна из важных тем школьного курса математики. Многие ученики испытывают трудности, когда изучают материал, содержащего арифметическую и геометрическую прогрессии, но им необходимо качественно усвоить данную тему, так как задачи, связанные с прогрессиями, встречаются в ОГЭ, олимпиадах, конкурсах, а также ЕГЭ. Дальнейшее изучение математики в вузе также тесно связано с прогрессиями. Связанно это, прежде всего, с тем, что в школьной программе недостаточно времени уделяется изучению темы.

В данной работе рассмотрены теоретические основы прогрессий: даны определения основных понятий, рассмотрены свойства прогрессий, выполнен анализ теоретического и практического материала по теме «Прогрессии» в учебниках базового и углубленного уровней алгебры основной школы. Определено, что данный материал изучается непосредственно в 9-ом классе в третьей четверти.

Разработаны методические рекомендации по обучению учащихся решению задач по теме «Прогрессии» в курсе математики.

После проведения анализа КИМ ОГЭ по теме «Прогрессии», было выяснено, что задачи по теме «Прогрессии» содержатся в первой части модуля «Алгебра» в ОГЭ. Для того чтобы обучающийся усвоил определенные действия, - необходимо их выполнять в определенной системе. После анализа открытого банка заданий http://www.fipi.ru [29] был составлен сборник задач по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия», в котором присутствуют задания различных типов. Также дано частичное решение этих задач. Решив составленную систему задач, ученик будет подготовлен к выполнению заданий такого типа при сдаче ОГЭ.

Проделанная работа дает основание считать, что задачи исследования полностью решены, а также подтверждена гипотеза. Таким образом, процесс изучения темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии» будет более успешным, если уделить особое внимание изучению этой темы на факультативных занятиях по математике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Азиев, Н. И Арифметическая и геометрическая прогрессии / Н. И Азиев. –: Еженедельное учебно-методическое приложение к газете Первое сентября № 23, 2004. – 14-17 с.

2. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / [Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др.] – 3-е изд. – М. : Просвещение, 2016. – 336 с.

3. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова; под ред. С. А. Теляковского. – М.: Просвещение. 2014. – 271 с.

4. Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений. Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – 17-е изд., доп. – М: Просвещение, 2012. – 287 с.

5. Бирюкова А.В. Методика обучения решению задач с использованием арифметической и геометрической прогрессии [Текст] // Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: матер. всероссийской. науч.-практ. конф. студентов матем. фак-тов ПГГПУ, Пермь., 2020. – с. 27

6. Бирюкова А.В. Решение задач ЕГЭ с использованием арифметической и геометрической прогрессий [Текст] //Сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции, посвященной 85-летию физико-математического факультета ЮУрГГПУ. Челябинск., 2019. – С. 37-40.

7. Блох, А.Я. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика [Текст]: учебное пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат.спец. / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; составитель В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.

8. Бурмистрова, Т.А. Алгебра. Сборник рабочих программ. 7 – 9 классы [Текст]: пособие для учителей общеобразовательных организаций/ Т.А. Бурмистрова. – 2-е изд., доп. – М.: Просвещение, 2014. – 96 с.

9. Виноградова, Л. В. Методика преподавания математики в средней школе [Текст]: учеб. пособие / Л.В. Виноградова. - Ростов н/Д.: Феникс, 2005. – 252 с.

10. Глейзер, Г.И. История математики в школе 9-10 классов: пособие для учителей / Г.И. Глейзер. - М.: Просвещение, 1853. - 351 с.

11. ГОСТ Р 52653-2006 Национальный стандарт Российской Федерации. Информационно - коммуникационные технологии в образовании. Термины и определения. [Электронный ресурс]: Электронный фонд правовой и нормативно-технической документации - Режим доступа: открытый http://docs.cntd.ru.

12. Депман, И. Я. История арифметики. Пособие для учителей. / И. Я. Депман. - М.: Просвещение, 1966. – 415 с.

13. Епифанова, Н.М. Методика обучения алгебре основной школы [Текст]: учебно-методическое пособие/ Н.М. Епифанова, О.П. Шарова. – Ярославль: изд-во ЯГПУ имени К.Д. Ушинского, 2006. – 83 с.

14. Звавич, Л. И. Алгебра. 9 класс: задачник для учащихся общеобразоват. учреждений / Л. И Звавич, А. Р. Рязановский, П. В. Семенов. - 3-е изд., перераб. - М.: Мнемозина, 2008. - 336 с.

15. Кириченко Т.Ф. и др. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики. Учебное пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов. — под ред. Е.И. Лященко. - М.: Просвещение, 1988. – 223 с.

16. Кузяева, Н. В. Методическое пособие: изучение арифметической и геометрической прогрессий [Электронный

ресурс]. / Н. В. Кузяева. П. Уренгой, 2006 - Режим доступа: открытый http://textarchive.ru/c-2854268.html.

17. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [Текст]: учебное пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов/ Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т. Ф. Кириченко и др. - М : Просвещение, 1988.-223 с.

18. Макарычев, Ю. Н. Алгебра. 9 класс: учеб. Пособие для общеобразоват. Организаций: углубл. уровень [Текст] / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, И. Е. Феоктистов. - М.: Просвещение, 208. – 400 с.

19. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. факультетов пед. вузов/Ю.М. Колягин и др. – М.: Просвещение, 1995. – 462 с.

20. Мордкович, А. Г. Алгебра 9 класс. В двух частях. Часть 1. Учебник. /А. Г. Мордкович, П. В. Семенов– 12-е изд., стер. - М.: Мнемозина, 2010. – 224 с.

21. Мордкович, А. Г. Алгебра 9 класс. В двух частях. Часть 2. Задачник. А. Г. Мордкович, Л. А. Александрова - 12-е изд., испр. - М.: Мнемозина, 2010. – 223 с.

22. Мордкович, А. Г. Алгебра. 9 кл.: учеб. Для учащихся общеобразоват. Учреждений [Текст]. / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. - 3-е изд. перераб. - М.: Мнемозина, 2008. - 255с.

23. Муравин Г. К. Учебник по алгебре за 9 класс. Г. К. Муравин - изд. 14-е., стер. - М.: Дрофа, 2014. – 319 с.

24. Покровский, В.П. Методика обучения математике: функциональная содержательно-методическая линия [Текст]: учеб.-метод. пособие/ В.П. Покровский – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2014. - 143 с.

25. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию / М-во образования и

науки РФ. - М.: Просвещение, 2015. - 560 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://fgosreestr.ru/wp-content/uploads/2015/06.pdf.

26. Сумбурова, Е. И. Русская дореволюционная школа глазами Н. П. Богданова-Бельского [Электронный ресурс]. / Е. И. Сумбурова. Историко-педагогический журнал, №3, 2012, с. 64-71. - Режим доступа: открытый https://cyberleninka.ru/article/v/russkaya-dorevolyutsionnaya-shkola-glazami-n-pbogdanova-belskogo.

27. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/938.

28. Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» (редакция от 27.12.2019) – Доступ из СПС «КонсультантПлюс». – Текст: электронный.

29. Федеральный институт педагогических измерений [Электронный ресурс]. Открытый банк заданий ОГЭ ФИПИ - Режим доступа: http://www.fipi.ru

30. Шапошников Н. А., Вальцов Н. К. Сборник алгебраических задач. Ч. 2. М.: Государственное учебно-педагогическое издание, 1935. – 132 с.

31. Шибасов, Л. П. От единицы до бесконечности/ Л. П. Шибасов - М.: Дрофа, 2004. - 208с.

32. Sundstrom, Ted Mathematical Reasoning: Writing and Proof / Ted Sundstrom. – USA: CreateSpace Независимая Издательская Платформа, 2014. – 598 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Входной тест

1. Является ли последовательность 4, 6, 8, 10, … арифметической прогрессией?

а) да

б) нет

в) затрудняюсь ответить.

2. Является ли последовательность 10, 20, 30, 40, …геометрической прогрессией?

а) да,

б) нет,

в) затрудняюсь ответить.

3. Для арифметической прогрессии с первым членом $a_1 = 5$, заданной формулой $a_{n+1} = a_n - 8$ указать три последующих члена.

а) 3, 11, 19;

б) -3, -11, -19;

в) -3, -11, -18.

4. Для геометрической прогрессии 8, -4, 2, … найти знаменатель q.

а) $q = 1/2$,

б) $q = -2$,

в) $q = -1/2$.

5. Найти сумму шести первых членов арифметической прогрессии $-4 + 1 + 6 + \dots$.

а) 51,

б) 54,

в) -75.

Ключ ответов: 1-а, 2-б, 3-б,4-в,5-а

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Контрольная работа

1.Дана разность арифметической прогрессии (a_n) $d = -5{,}8$ и её первый член $a_1 = 1{,}8$. Чему равна сумма первых 8 её членов.

Ответ:-148

2. n-ый член арифметической прогрессии задается условием: $a_n = -0{,}6 + 8{,}6n$. Какова сумма первых 10 её членов?

Ответ:467

3.Дан первый член геометрической прогрессии: $b_1 = -6$, а её -ый член задается формулой: $b_{n+1} = 2b_n$. Найдите шестой член.

Ответ:-192

4.Дан пятый и восьмой члены геометрической прогрессии (b_n): $b_5 = -15, b_8 = -405$. Найдите знаменатель данной прогрессии.

Ответ:3

5. Бактерия в благоприятной среде через каждые полчаса делится на две. Сколько бактерий может образоваться из одной бактерии за 10 часов?

Ответ:1048576