Южно-Уральский государственный
гуманитарно-педагогический университет

Кипнис М.М.

Тексты для курса
«Актуальные проблемы математических наук»

Челябинск 2020

Введение

Настоящее издание содержит тексты для изучения курса «Актуальные проблемы математических наук» для магистерской программы в ЮУрГГПУ. Тексты являются переводами фрагментов двух книг:

1. Элайди С. Введение в разностные уравнения. Шпрингер. 2005.
2. Гримальди Р. Дискретная и комбинаторная математика. Введение и приложение. 2010.

Издано в учебных целях для магистрантов ЮУрГГПУ.

***

САБЕР ЭЛАЙДИ

Введение
в разностные уравнения

Третье издание

Springer

SABER ELAYDI

Introduction
To Difference Equations

Third edition

Springer

1

Динамика разностных уравнений первого порядка

1.1 Введение

Разностные уравнения, как правило, описывают эволюцию некоторых явлений в течение времени. Например, если некоторая популяция имеет дискретные поколения, то численность $(n+1)$-го поколения $x(n+1)$ является функцией численности n-го поколения $x(n)$. Это соотношение выражается в *разностном уравнении*

$$x(n+1) = f\big(x(n)\big). \qquad (1.1.1)$$

Мы можем взглянуть на эту проблему с другой точки зрения. Начиная с точки x_0, можно генерировать последовательность

$x_0,\ f(x_0),\ f\big(f(x_0)\big),\ \ f(f\big(f(x_0)\big)), \ldots$

Для удобства мы принимаем обозначения

$f^2(x_0) = f(f(x_0)), \quad f^3(x_0) = f\Big(f\big(f(x_0)\big)\Big)$ и т. д.

$f(x_0)$ называется первой итерацией x_0 под f; $f^2(x_0)$ называется второй итерацией x_0 под f; в более общем плане, $f^n(x_0)$ это n-я итерация x_0 под f. Множество всех (положительных) итераций $\{f^n(x_0): n > 0\}$, где $f^0(x_0) = x_0$ по определению, назовем положительной орбитой x_0 и обозначим через $O(x_0)$. Эта итеративная процедура является примером *дискретной динамической системы*. Полагая$x(n) = f^n(x_0)$, мы получаем

$$x(n+1) = f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0)) = f\big(x(n)\big),$$

и, следовательно, возвращаемся к (1.1.1). Заметим, что $x(0) = f^0(x_0) = x_0$. Например, пусть $f(x) = x^2$ и $x_0 = 0.6$. Чтобы найти последовательность итераций $\{f^n(x_0)\}$, мы вводим 0.6 в калькулятор, а затем несколько раз нажимаем кнопку x^2. Получаем числа $0.6, 0.36, 0.1296, 0.01679616 \ldots$

Еще несколько нажатий клавиш калькулятора будет достаточно, чтобы убедить читателя, что итерации $f^n(0.6)$ стремятся к 0. Читателю предлагается проверить, что для всех $x_0 \in (0,1)$, $f^n(x_0)$ стремится к 0 при n, стремящемся к ∞, и что $f^n(x_0)$ стремится к ∞, если $x_0 \notin [-1;1]$. Очевидно, что $f^n(0) = 0$, $f^n(1) = 1$ для всех положительных целых n, и $f^n(-1) = 1$ при $n = 1, 2, 3 \ldots$.

После данного обсуждения можно сделать вывод, что разностные уравнения и дискретные динамические системы представляют собой две стороны одной медали. Например, когда математики говорят о разностных уравнениях, они обычно обращаются к аналитической теории субъекта, а когда они говорят о дискретных динамических системах, они в целом имеют в виду их геометрические и топологические аспекты.

Если функция f в (1.1.1) заменяется функцией g двух переменных, то есть $g: \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{Z}^+$ есть множество неотрицательных целых чисел, а $\mathbb{R}$ является множеством действительных чисел, то мы имеем

$$x(n+1) = g\big(n, x(n)\big). \qquad (1.1.2)$$

Уравнение (1.1.2) называется *неавтономным* или временным вариантом, в то время как (1.1.1) называется *автономным* или стационарным. Изучение (1.1.2) является гораздо более сложным и не поддается дискретной динамической теории систем уравнений первого порядка. Если начальное условие $x(n_0) = x_0$ задано, то для $n > n_0$ существует *единственное решение* $x(n) = x(n, n_0, x_0)$ уравнения (1.1.2), такое что $x(n_0, n_0, x_0) = x_0$. Это может быть легко показано при помощи итераций. Теперь,

$$\begin{cases} x(n_0+1, n_0, x_0) = g\big(n_0, x(n_0)\big) = g(n_0, x_0), \\ x(n_0+2, n_0, x_0) = g\big(n_0+1, x(n_0+1)\big) = \\ g\big(n_0+1, g(n_0, x_0)\big), \\ x(n_0+3, n_0, x_0) = g\big(n_0+2, x(n_0+2)\big) = \\ g\big[n_0+2, g\big(n_0+1, g(n_0, x_0)\big)\big]. \end{cases}$$

И, по индукции, мы получаем $x(n, n_0, x_0) = g[n-1, x(n-1, n_0, x_0)]$.

1.2.Линейные разностные уравнения первого порядка

В этом параграфе мы изучим простейшие частные случаи (1.1.1) и (1.1.2), а именно, линейные уравнения. Типичным линейным *однородным* уравнением первого порядка является уравнение

$$x(n+1) = a(n)x(n), \ \ x(n_0) = x_0, \ \ n \geq n_0 \geq 0. \qquad (1.2.1)$$

Связанное с ним *неоднородное* уравнение таково:

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \ \ y(n_0) = y_0, \\ n \geq n_0 \geq 0. \qquad (1.2.2)$$

В обоих уравнениях предполагается, что $a(n) \neq 0$, и $a(n)$ и $g(n)$ являются вещественными функциями, определенными при $n \geq n_0 \geq 0$.

Можно получить решение (1.2.1) с помощью простой итерации:

$$\begin{cases} x(n_0+1) = a(n_0)x(n_0) = a(n_0)x_0, \\ x(n_0+2) = a(n_0+1)x(n_0+1) = a(n_0+1)a(n_0)x_0, \\ x(n_0+3) = a(n_0+2)x(n_0+2) = \\ a(n_0+2)a(n_0+1)a(n_0)x_0. \end{cases}$$

И, по индукции, легко заметить, что

$$x(n) = x(n_0 + n - n_0) = a(n-1)a(n-2)\dots a(n_0)x_0,$$

$$x(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0. \qquad (1.2.3)$$

Единственное решение *неоднородного* уравнения (1.2.2) можно найти следующим образом:

$$
\begin{cases}
y(n_0+1) = a(n_0)y_0 + g(n_0), \\
y(n_0+2) = a(n_0+1)y(n_0+1) + g(n_0+1) = \\
a(n_0+1)a(n_0)y_0 + a(n_0+1)g(n_0) + g(n_0+1).
\end{cases}
$$

Теперь мы используем метод математической индукции, чтобы показать, что для всех $n \in \mathbb{Z}^+$

$$
y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r). \qquad (1.2.4)
$$

Для того, чтобы установить это, предположим, что формула (1.2.4) имеет место при $n = k$. Тогда ввиду (1.2.2), имеем $y(k+1) = a(k)y(k) + g(k)$, что благодаря формуле (1.2.4) дает

$$
\begin{gathered}
y(k+1) = a(k)\left[\prod_{i=n_0}^{k-1} a(i)\right] y_0 + \\
\sum_{r=n_0}^{k-1} \left[a(k) \prod_{i=r+1}^{k-1} a(i)\right] g(r) + g(k) = \\
\left[\prod_{i=n_0}^{k} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1} \left[\prod_{i=r+1}^{k} a(i)\right] g(r) \\
+ \left[\prod_{i=k+1}^{k} a(i)\right] g(k) \ (\text{см. сноску } 1^1) \\
\left[\prod_{i=n_0}^{k} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r).
\end{gathered}
$$

Следовательно, формула (1.2.4) справедлива для всех$n \in \mathbb{Z}^+$.

1.2.1 Важные особые случаи

Есть два особых случая (1.2.2), которые важны во многих приложениях. Первое уравнение это

$$
y(n+1) = ay(n) + g(n), \ \ y(0) = y_0. \qquad (1.2.5)
$$

Используя формулу (1.2.4), можно установить, что

$$
y(n) = a^n y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} g(k). \qquad (1.2.6)
$$

Второе уравнение задается формулой

$$
y(n+1) = ay(n) + b, \ \ y(0) = y_0. \qquad (1.2.7)
$$

[1] Заметим, что мы применяем правило $\sum_{i=k+1}^{k} a(i) = 0$ и $\prod_{i=k+1}^{k} a(i) = 1$.

Используя формулу (1.2.6), получаем

$$y(n) = \begin{cases} a^n y_0 + b\,\dfrac{a^n - 1}{a - 1}, & \text{если } a \neq 1, \\ y_0 + bn, & \text{если } a = 1. \end{cases} \qquad (1.2.8)$$

Заметим, что решением дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = ax(t), \;\; x(0) = x_0$$

является функция

$$x(t) = e^{at}x_0,$$

а решением неоднородного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dt} = ay(t) + g(t), \;\; y(0) = y_0$$

является функция

$$y(t) = e^{at}y_0 + \int\limits_0^t e^{a(t-s)}g(s)ds.$$

Таким образом, экспонента e^{at} в дифференциальных уравнениях соответствует экспоненте a^n, а интеграл $\int_0^t e^{a(t-s)}g(s)ds$ соответствует суммированию $\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}\,g(k)$.

Приведем несколько практических примеров использования вышеуказанных формул.

Пример 1.1. Решить уравнение

$$y(n+1) = (n+1)y(n) + 2^n(n+1)!\,, \;\; y(0) = 1, \;\; n > 0.$$

Решение

$$y(n) = \prod_{i=0}^{n-1}(i+1) + \sum_{k=0}^{n-1}\left[\prod_{i=k+1}^{n-1}(i+1)\right]2^k(k+1)! = n! + \sum_{k=0}^{n-1} n!\,2^k = 2^n n!$$

(см. Таблицу 1.1).

Таблица 1.1. Некоторые суммы

Номер	Суммирование	Сумма
1	$\sum\limits_{k=1}^{n} k$	$\dfrac{n(n+1)}{2}$

2	$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3	$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
4	$\sum_{k=1}^{n} k^4$	$\frac{n(6n^4+15n^3+10n^2-1)}{30}$
5	$\sum_{k=0}^{n-1} a^k$	$\begin{cases} \frac{a^n-1}{a-1}, & If\ a \neq 1 \\ n, & If\ a = 1 \end{cases}$
6	$\sum_{k=1}^{n-1} a^k$	$\begin{cases} \frac{a^n-a}{a-1}, & If\ a \neq 1 \\ n-1, & If\ a = 1 \end{cases}$
7	$\sum_{k=1}^{n} ka^k, a \neq 1$	$\frac{(a-1)(n+1)a^{n+1}-a^{n+2}+a}{(a-1)^2}$

Пример 1.2. Решить уравнение

$$x(n+1) = 2x(n) + 3^n, \quad x(1) = 0.5.$$

Решение

Из формулы (1.2.6) выводим

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)2^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{n-k-1}\,3^k$$

$$= 2^{n-2} + 2^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^k = 2^{n-2} + 2^{n-1}\frac{3}{2}\left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right)$$

$$= 3^n - 5 \cdot 2^{n-2}.$$

Пример 1.3.

Препарат вводят один раз каждые четыре часа. Пусть $D(n)$ количество лекарственного средства в системе крови на n-м интервале. Тело устраняет некоторую долю p препарата в течение каждого временного интервала. Если количество вводимого вещества D_0, найти $D(n)$ и $\lim_{n\to\infty} D(n)$.

Решение

Сначала необходимо составить уравнение. Так как количество лекарственного средства в теле пациента в момент времени $(n+1)$ равно количеству в момент времени n минус доля p, которая была устранена из организма, плюс новая доза, то мы приходим к следующему уравнению:

$$D(n+1) = (1-p)D(n) + D_0.$$

Используя (1.2.8), решаем уравнение:

$$D(n) = \left[D_0 - \frac{D_0}{p}\right](1-p)^n + \frac{D_0}{p}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} D(n) = \frac{D_0}{p}. \qquad (1.2.9)$$

Примем $D_0 = 2$ кубическим сантиметрам (см^3), $p = 0.25$.
Тогда наше первоначальное уравнение выглядит так:

$$D(n+1) = 0.75D(n) + 2, \qquad D(0) = 2.$$

В таблице 1.2 представлены $D(n)$ для $0 < n \leq 10$.

Из формулы (1.2.9) следует, что $\lim_{n\to\infty} D(n) = 8$. Поэтому $D^* = 8$ см^3 есть равновесное количество лекарственного средства в организме.

Таблица 1.2. Значения $D(n)$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$D(n)$	2	3.5	4.62	5.47	6.1	6.58	6.93	7.2	7.4	7.55	7.66

В следующем примере переходим в сферу финансов.

Пример 1.4. Амортизация

Амортизация представляет собой процесс, посредством которого кредит погашается последовательностью периодических платежей, каждый из которых является частично выплатой процентов и частично оплатой непогашенной суммы.

Пусть $p(n)$ представляет собой сумму долга после n-й оплаты $g(n)$. Предположим, что процентные платежи начисляются по ставке r за период оплаты.

Формулировка нашей модели здесь основана на том факте, что сумма долга $p(n+1)$ после $(n+1)$-го платежа равна непогашенной сумме $p(n)$ после n-го платежа плюс проценты $rp(n)$, начисленные в течение $(n+1)$-го периода минус n-й платеж $g(n)$. Следовательно,

$$p(n+1) = p(n) + rp(n) - g(n),$$

или
$$p(n+1) = (1+r)p(n) - g(n), \qquad p(0) = p_0, \tag{1.2.10}$$
где p_0 есть начальный долг. В силу (1.2.6) мы имеем
$$p(n) = (1+r)^n p_0 - \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{n-k-1} g(k). \tag{1.2.11}$$
На практике оплата $g(n)$ постоянна и, скажем, равна T. В этом случае
$$p(n) = (1+r)^n p_0 - ((1+r)^n - 1)\left(\frac{T}{r}\right). \tag{1.2.12}$$

Если мы хотим, погасить кредит за n платежей, каким должен быть ежемесячный платеж? Заметим сначала, что $p(n) = 0$. Следовательно, из (1.2.12) имеем

$$T = p_0 \left[\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}\right].$$

Упражнения 1.1 и 1.2

1. Найти решения разностных уравнений:
(a)$x(n+1)-(n+1)x(n)=0, \quad x(0)=c.$
(b) $x(n+1)-nx(n)=0, \quad x(0)=c.$
(c) $x(n+1)-3^{n}x(n)=0, \quad x(0)=c.$
(d)$x(n+1)-\frac{n}{n+1}x(n)=0, \ n\geq 1, \quad x(1)=c.$
2. Найти общие решения разностных уравнений:
(a)$y(n+1)-\frac{1}{2}y(n)=2, \quad y(0)=c.$
(b) $y(n+1)-\frac{n}{n+1}y(n)=4, \quad y(1)=c.$
3. Найти общие решения разностных уравнений:
(a)$y(n+1)-(n+1)y(n)=2^{n}(n+1)!\,, \quad y(0)=c.$
(b) $y(n+1)=y(n)+e^{n}, \quad y(0)=c.$
4.(a) Написать уравнение, которое описывает количество областей, созданных n прямыми на плоскости, если известно, что прямые попарно пересекаются и в каждой точке пересекаются не более двух прямых.
(b) Найти количество этих областей, решив уравнение (a).
5. Гамма-функция определяется так: $\Gamma(x)=\int_{0}^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt, x>0.$
(a) Показать, что $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x), \Gamma(1)=1.$
(b) Показать, что $\Gamma(n+1)=n!$ при любом положительном целом n.
(c) Показать, что $x^{(n)}=x(x-1)\dots(x-n+1)=\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n+1)}.$
6. Пространство (трехмерное) разделено nнепараллельными плоскостями, такими, что никакие четыре плоскости не имеют общих точек.
(a) Написать разностное уравнение, которое описывает количество образованных плоскостями областей.
(b) Найти количество таких областей.
7. Доказать (1.2.6).
8. Доказать (1.2.8).
9. Долг \$12000 должен быть выплачен равными платежами по \$380 в последний день каждого месяца, плюс финальный платеж после того, как будут выплачены последние \$380. Если банковский процент равен 12% годовых, начисляемых ежемесячно, построить расписание платежей.
10. Пусть долг \$80000 должен быть выплачен равными ежемесячными платежами. Если банковский процент равен 10% годовых, начисляемых ежемесячно, найти величину ежемесячного платежа для полной выплаты долга в течение 30 лет.
11. Пусть постоянная сумма T кладется на счет в банке в конце каждого расчетного периода, и банк платитдолю r за каждый период. Пусть $A(n)$есть сумма, накопленная после n периодов.
(a) Написать разностное уравнение для$A(n)$.
(b) Решить разностное уравнение, полученное в (a), при $A(0)=0, T=$ \$200, $r=0.008$.

12. Пусть температура некоторого физического тела равна 110^0 F (по Фаренгейту). Температура помещения постоянна и равна 70^0 F. Примем, что температура изменяется за каждые два часа на величину, равную разности между предыдущей температурой и температурой помещения, умноженной на (-0.3).
(a) Написать разностное уравнение, которое описывает температуру $T(n)$ в конце n-го периода.
(b) Найти $T(n)$.
13. Предположим, вы можете получить ипотеку под 8% годовых. Какова величина ипотечного кредита, который вы позволите себе взять, если вы можете себе позволить ежемесячный взнос $1000.
14. Количество радия уменьшается на 0.04% за год. Каков его период полураспада? (Периодом полураспада радиоактивного материала называется время, в течение которого распадается половина его массы).

15. (Радиоуглеродное датирование) Замечено, что пропорция карбона-14 в останках растений и животных такова, какова она была в атмосфере во время жизни этих животных или растений. Когда растение или животное умирает, содержание карбона-14 в его тканях начинает уменьшаться со скоростью r.
(a) Если период полураспада карбона-14 равен 5700 лет, найти r.
(b) Если количество карбона-14 в костях животного равно 70% от начального количества, то сколько лет костям?

1.3 Точки равновесия

Понятие точек равновесия занимает центральное место в изучении динамики любой физической системы. В биологии, экономике, физике, машиностроении и так далее желательно, чтобы все состояния (решения) данной системы стремились к равновесной точке. Это предмет исследования теории устойчивости, важной для ученых и инженеров. Дадим формальное определение точки равновесия.

Определение 1.5 Точка x^* в области определения функции f называется *точкой равновесия* итерационного процесса (1.1.1), если она является неподвижной точкой f, то есть $f(x^*) = x^*$.

Другими словами, точка равновесия x^* является постоянным решением уравнения (1.1.1): если $x(0) = x^*$ является начальной точкой, то $x(1) = f(x^*) = x^*$ и $x(2) = f\big(x(1)\big) = f(x^*) = x^*$, и так далее.

Графически точка равновесия является абсциссой точки, в которой график f пересекает диагональную линию $y = x$ (Рисунок 1.1 и 1.2). Например, существуют три точки равновесия для уравнения

$$x(n+1) = x^3(n),$$

где $f(x) = x^3$. Чтобы найти эти точки равновесия, предположим, что $f(x^*) = x^*$, то есть $x^3 = x$, и решим уравнение относительно x. Следовательно, существуют три точки равновесия, $(-1), 0, 1$ (Рисунок 1.1). Рисунок 1.2 иллюстрирует другой пример, где $f(x) = x^2 - x + 1$ и разностное уравнение задается формулой

$$x(n+1) = x^2(n) - x(n) + 1.$$

Полагая $x^2 - x + 1 = x$, мы найдем, что 1 является единственной точкой равновесия.

Существует явление, которое является уникальным для разностных уравнений и не может возникнуть в дифференциальных уравнениях.

В разностных уравнениях бывают случаи, что решение не является точкой равновесия, но оно становится точкой равновесия после конечного числа итераций. Другими словами, неравновесное состояние может перейти в равновесное состояние в конечное время. Это приводит к следующему определению.

Определение 1.6 Пусть x точка в области определения f. Если существует натуральное число r и точка равновесия x^* (1.1.1) такие, что $f^r(x) = x^*$, $f^{r-1}(x) \neq x^*$, то x является *периодической точкой* отображения f.

При $r = 1$ периодическая точка отображения f является неподвижной точкой.

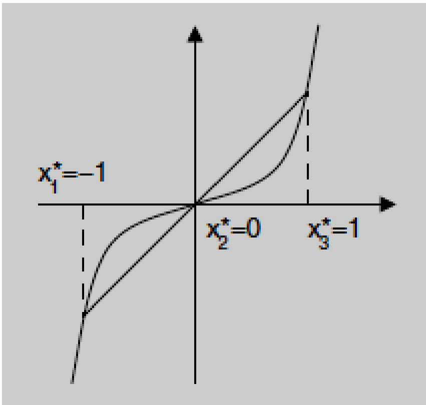


Рисунок 1.1. Неподвижные точки для $f(x) = x^3$

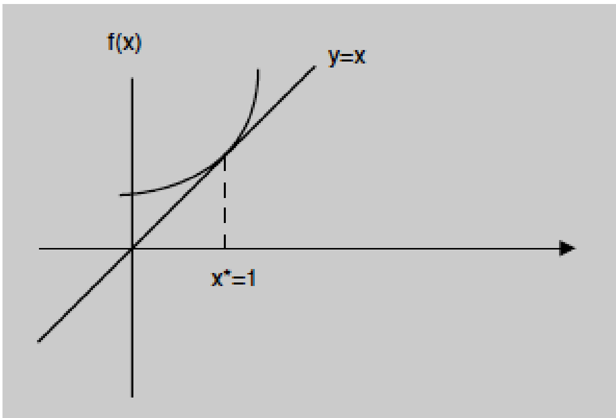


Рисунок 1.2. Неподвижные точки для $f(x) = x^2 - x + 1$

Пример 1.7. Отображение тент

Рассмотрим уравнение (Рисунок 1.3)

$$x(n+1) = T\big(x(n)\big),$$

где

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } 0 \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ 2(1-x), & \text{если } \dfrac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

Есть две точки равновесия, 0 и $\frac{2}{3}$ (см. Рисунок 1.3). Нахождение периодических точек не так просто алгебраически. Если $x(0) = \frac{1}{4}$, то $x(1) = \frac{1}{2}$, $x(2) = 1$ и $x(3) = 0$. Таким образом, $\frac{1}{4}$ это периодическая точка. Читателю предоставляется доказать, что если $x = k/2^n$, где k и n целые положительные числа, причем $0 < k/2^n \le 1$, то x периодическая точка (Упражнение 1.3, Задача 15).

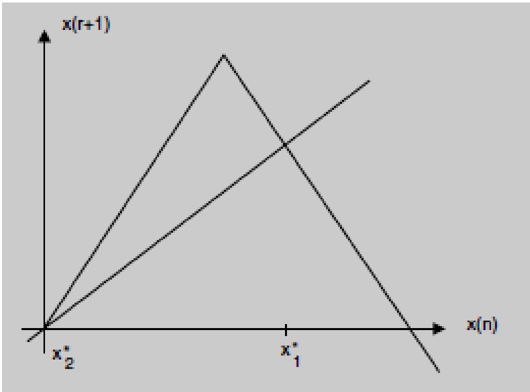


Рисунок 1.3 Точки равновесия отображения тент

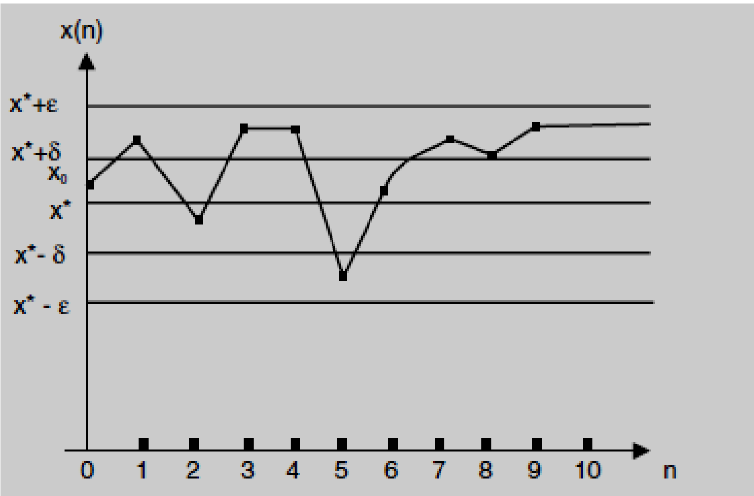


Рисунок 1.4. Устойчивая неподвижная точка x^*. Если $x(0)$ находится в δ-окрестности точки x^*, то $x(n)$ находится в ε-окрестности точки x^* для всех $n > 0$.

Одной из главных задач при изучении динамической системы является анализ поведения решений вблизи точки равновесия. Эта область знаний представляет собой теорию устойчивости. Далее мы вводим основные понятия устойчивости.

Определение 1.8. (a) Точка равновесия x^* устойчива (Рисунок 1.4), если для любых $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из $|x_0 - x^*| < \delta$ следует $|f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$ для всех $n > 0$. Если x^* не является устойчивой, то она называется неустойчивой (Рисунок 1.5).

(b) Точка x^* называется притягивающей (аттрактором), если существует $\eta > 0$ такое, что из $|x(0) - x^*| < \eta$ следует $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = x^*$.

Если $\eta = \infty$, то x^* называют *глобальным аттрактором* или *глобально притягивающей точкой*.

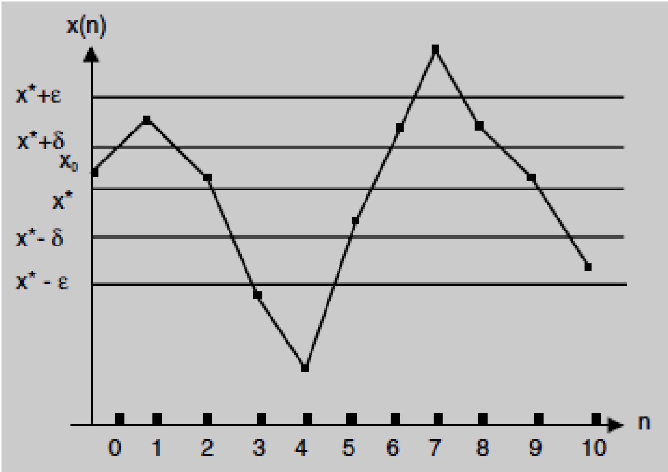


Рисунок 1.5. Неустойчивая неподвижная точка x^*. Для любого $\delta > 0$ существует $x(0)$, лежащее в δ-окрестности точки x^*, такое что при некотором N значение $x(N)$ отличается от x^* как минимум на ε.

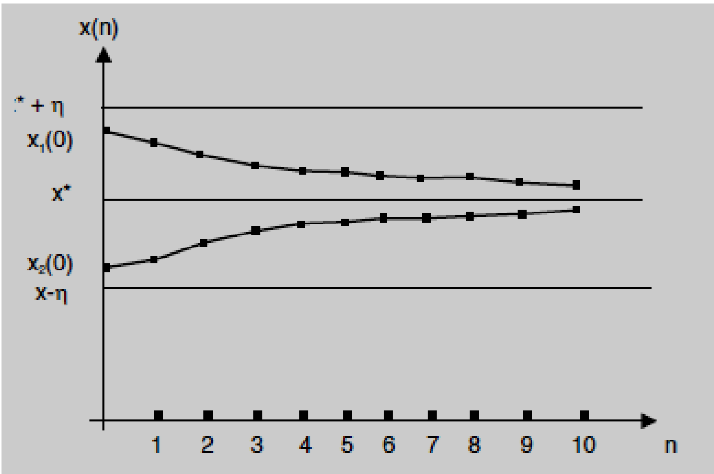


Рисунок 1.6. Асимптотически устойчивая точка x^*. Устойчивая и, кроме того, при некотором η если $x(0)$ находится в η-окрестности точки x^*, то.

(c) Точка x^* является *асимптотически устойчивой точкой равновесия*, если она устойчивая и притягивающая (Рисунок 1.6).

Если $\eta = \infty$, то точка x^* называется глобально асимптотически устойчивой (Рисунок 1.7).

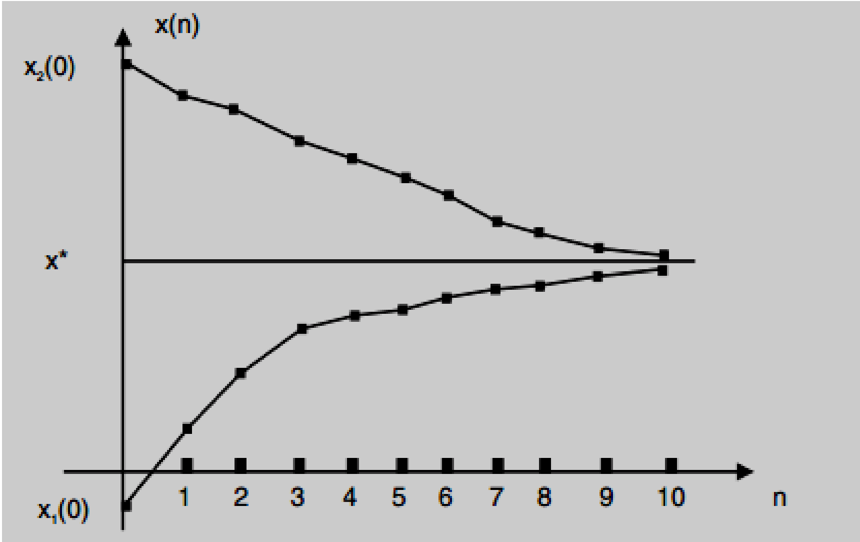


Рисунок 1.7. Глобально асимптотически устойчивая точка x^*. Она устойчива и, кроме того, $\lim_{n\to\infty} x(n) = x^*$ для всех $x(0)$.

Выяснение устойчивости равновесной точки согласно вышеприведенным определениям может оказаться очень трудным. Это связано с тем, что мы не можем найти решение в замкнутой форме даже для обманчиво простого на первый взгляд уравнения (1.1.1). В этом разделе мы укажем некоторые простые, но мощные приёмы, чтобы помочь понять поведение решений (1.1.1) в окрестности точек равновесия, а именно, графическую технику. Карманный калькулятор вполне достаточен для работы при чтении данного раздела.

1.3.1 Ступенчатые (паутинные) диаграммы

Опишем еще один важный графический метод для анализа устойчивости равновесных (и периодических) точек для (1.1.1). Так как $x(n+1) = f\big(x(n)\big)$, мы можем нарисовать график f в плоскости $\big(x(n), x(n+1)\big)$ (Рисунок 1.8). Тогда при $x(0) = x_0$ мы определяем значение $x(1)$, проведя вертикальную линию через x_0 так, что она пересекает график f в точке $(x_0, x(1))$. Затем проводим горизонтальную линию из точки $(x_0, x(1))$ так, чтобы пересечь диагональную прямую $y = x$ в точке $(x(1), x(1))$. Вертикальная линия, проведенная из точки $(x(1), x(1))$, встретится с графиком функции f в точке $(x(1), x(2))$. Продолжая этот процесс, можно найти $x(n)$ для всех $n > 0$.

Пример 1.9 Логистическое уравнение

Пусть $y(n)$ численность популяции в момент времени n. Если μ - это скорость роста популяции от одного поколения к другому, тогда мы можем рассматривать математическую модель в виде

$$y(n+1) = \mu y(n), \qquad \mu > 0. \tag{1.3.1}$$

Если начальная популяция задается как $y(0) = y_0$, то мы находим, что

$$y(n) = \mu^n y_0 \qquad (1.3.2)$$

является решением (1.3.1). Если $\mu > 1$, то $y(n)$ неограниченно возрастает и $\lim_{n\to\infty} y(n) = \infty$. Если $\mu = 1$, то $y(n) = y_0$ для всех $n > 0$, что означает, что размер популяции будет постоянным неопределенное время. Однако, если $\mu < 1$, то $\lim_{n\to\infty} y(n) = 0$ и популяция будет вымирать.

Для большинства биологических видов, тем не менее, вышеописанная модель не адекватна, так как население растет до тех пор, пока не достигнет некоторого верхнего предела. Тогда из-за ограниченного количества имеющихся ресурсов существа начинают участвовать в конкуренции за оставшиеся ресурсы. Эта конкуренция пропорциональна числу враждебных схваток из-за ресурсов, число которых, в свою очередь, пропорционально $y^2(n)$. Коэффициент пропорциональности b положителен. Получаем модель

$$y(n+1) = \mu y(n) - b y^2(n). \qquad (1.3.3)$$

Если в (1.3.3) положим $x(n) = \frac{b}{\mu} y(n)$, то получим

$$x(n+1) = \mu x(n)\big(1 - x(n)\big) = f\big(x(n)\big). \qquad (1.3.4)$$

Это уравнения является простейшим нелинейным разностным уравнением первого порядка, обычно оно называется (дискретным) логистическим уравнением. Тем не менее, в замкнутой форме решения уравнения (1.3.4) недоступно (кроме некоторых значений μ). Несмотря на свою простоту, это уравнение обладает достаточно богатой и сложной динамикой. Для нахождения точек равновесия (1.3.4) предположим $f(x^*) = \mu x^*(1 - x^*) = x^*$. Таким образом, мы определяем две точки равновесия: $x^* = 0$ и $x^* = (\mu - 1)/\mu$.

Рисунок 1.8 даёт ступенчатую диаграмму для $\big(x(n), x(n+1)\big)$ при $\mu = 2.5$ и $x(0) = 0.1$. В этом случае, у нас две точки равновесия. Одна из них, $x^* = 0$, неустойчива, а другая, $x^* = 0.6$, является асимптотически устойчивой.

Пример 1.10 Паутинные диаграммы в экономике

Здесь мы будем изучать ценообразование определенного товара. Пусть $S(n)$ количество товара, поставляемого в период n, пусть $D(n)$ число единиц товара, востребованных в период n, и $p(n)$ это цена за единицу в период n. Коротко $S(n)$ назовем предложением, $D(n)$ спросом, $p(n)$ ценой.

Для простоты будем считать, что $D(n)$ линейно зависит только от $p(n)$ и задается формулой

$$D(n) = -m_d p(n) + b_d, \quad m_d > 0, \ b_d > 0. \qquad (1.3.5)$$

График $D(n)$ называется линией спроса, график $S(n)$ - линией предложения. Константа m_d представляет чувствительность покупателей к цене.

Мы предполагаем, что предложение $S(n+1)$ зависит от цены в предыдущий период, то есть

$$S(n+1) = m_s p(n) + b_s, \quad m_s > 0, \quad b_s > 0. \tag{1.3.6}$$

Константа m_s это чувствительность поставщиков к цене. Наклон линии спроса является отрицательным, потому что увеличения на одну единицу в цене ведёт к уменьшению спроса на m_d единиц. Соответственно, увеличение цены на одну единицу вызывает увеличение предложения на m_s единиц, создавая положительный наклон линии.

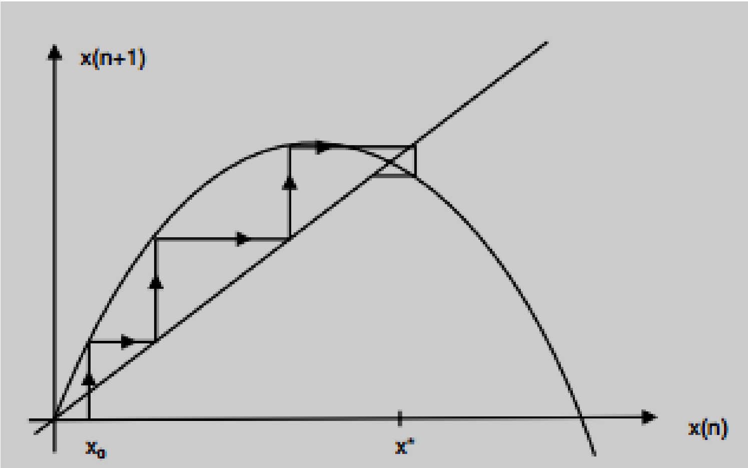


Рисунок 1.8. Ступенчатая диаграмма для $\mu = 2.5$.

Третье предположение, которое мы делаем, это то, что рыночная цена эта цена, при которой спрос на товары и предложение одинаковы, то есть $D(n+1) = S(n+1)$.

Таким образом

$$-m_d p(n+1) + b_d = m_s p(n) + b_s,$$

или

$$p(n+1) = Ap(n) + B = f\big(p(n)\big), \tag{1.3.7}$$

где

$$A = -\frac{m_s}{m_d}, \qquad B = \frac{b_d - b_s}{m_d}. \tag{1.3.8}$$

Это уравнения представляет собой линейное разностное уравнение первого порядка. Равновесная цена p^* определяется в экономике как цена, которая получается при пересечении кривых предложения $S(n+1)$ и спроса $D(n)$. Точка $p^* = B/(1-A)$ является единственной неподвижной точкой $f(p)$ в (1.3.7) (это доказательство появится позже в Упражнении 1.3, Задача 6). Поскольку A это отношение наклонов кривых спроса и предложения, это отношение определяет поведение последовательности цен. Есть три случая, подлежащих рассмотрению:

(a) $-1 < A < 0$,
(b) $A = -1$,
(c) $A < -1$.

Эти три случая рассмотрим графически, используя наше мощное средство, ступенчатые диаграммы (Рисунки 1.9–1.11).

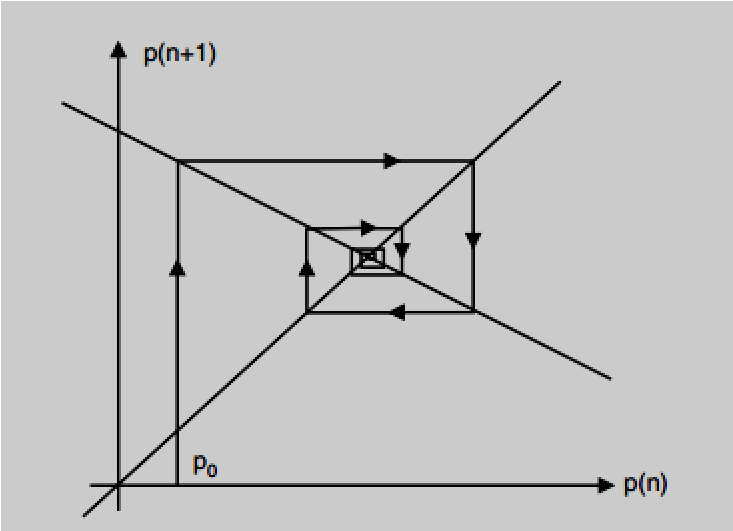


Рисунок 1.9. Асимптотически устойчивая равновесная цена $(-1 < A < 0)$.

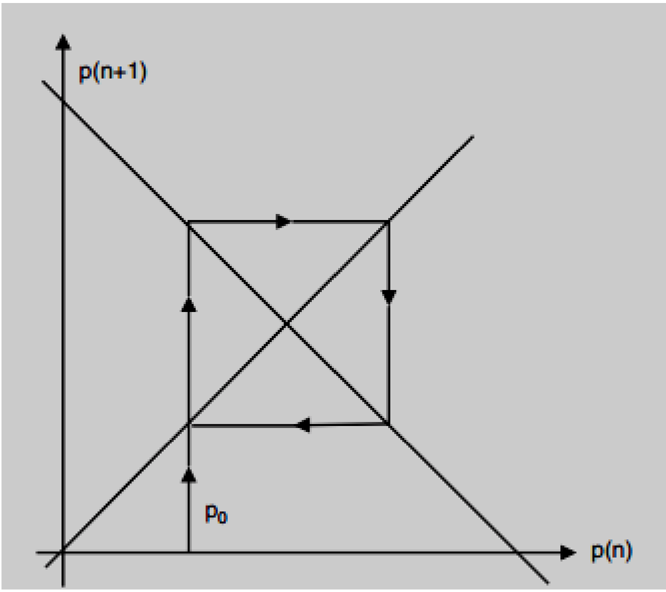


Рисунок 1.10. Устойчивая равновесная цена $(A = -1)$.

(i) В случае (a) цены чередуются, становятся то выше, то ниже равновесной цены, но сходятся к равновесной цене p^*. В терминах экономики, цена p^* называется "устойчивой", в математике мы называем её "асимптотически устойчивой" (Рисунок 1.9).

(ii) В случае (b) цены колеблются только между двумя значениями. Если $p(0) = p_0$, то $p(1) = -p_0 + B$ и $p(2) = p_0$. Следовательно, точка равновесия p^* устойчива (Рисунок 1.10).

(iii) В случае (c) цены бесконечно колеблются вокруг равновесной точки p^*, но постепенно отодвигаются все дальше и дальше от неё. Таким образом, равновесная точка считается неустойчивой (Рисунок 1.11).

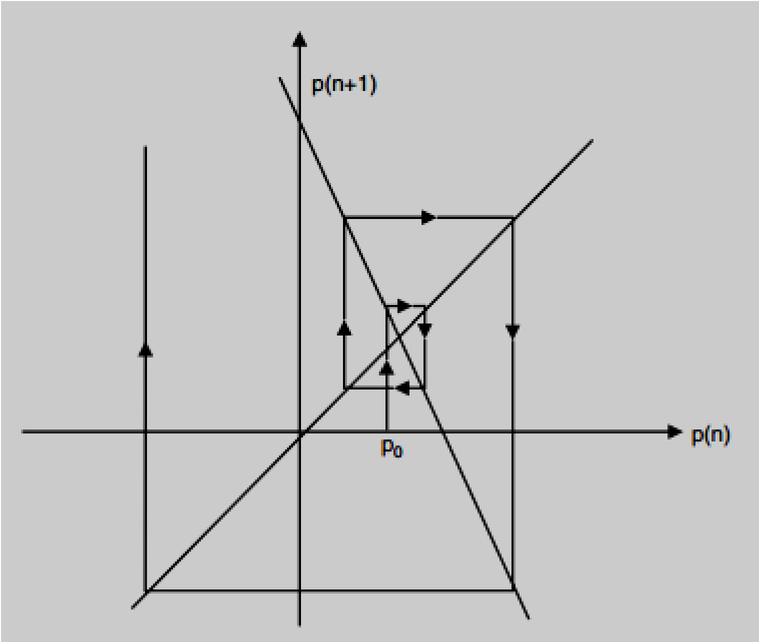


Рисунок 1.11. Неустойчивая равновесная цена $(A < -1)$.

Явное решение уравнения (1.3.7) с $p(0) = p_0$ задается формулой

$$p(n) = \left(p_0 - \frac{B}{1-A}\right)A^n + \frac{B}{1-A} \qquad (1.3.9)$$

(Упражнение 1.3, Задача 9). Это явное решение позволяет пересчитать случаи (a) и (b) в следующем разделе.

1.3.2 Паутинная теорема экономики

Если поставщики менее чувствительны к цене, чем покупатели (то есть $m_s < m_d$), рынок будет устойчивым. Если поставщики более чувствительны, чем покупатели, то рынок будет неустойчивым.

Замкнутую форму решения итерационного уравнения (1.3.7) можно найти в виде (1.3.9), используя систему компьютерной алгебры, например Maple. Можно ввести следующую программу:

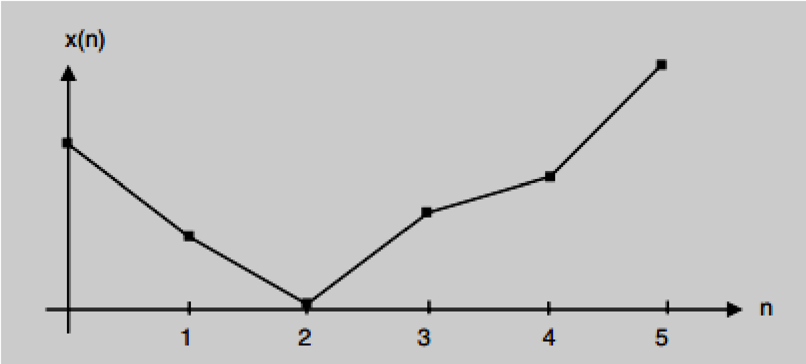
$$rsolve\left(\{p(n+1) = a * p(n) + b, \qquad p(0) = p_0\}, p(n)\right).$$

Упражнение 1.3.

1. Рассмотреть уравнение $x(n+1) = f\left(x(n)\right)$, где $f(0) = 0$.

(a)Доказать, что $x(n) \equiv 0$ является решением уравнения.

(b) Показать, что функция, изображенная на следующей $(n, x(n))$ диаграмме, не может быть решением уравнения.



2. (Метод Ньютона для вычисления квадратного корня из положительного числа) Уравнение $x^2 = a$ может быть записано в форме $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. Эта форма приводит к методу Ньютона

$$x(n+1) = \frac{1}{2}\left[x(n) + \frac{a}{x(n)}\right].$$

(a)Показать, что это разностное уравнение имеет две точки равновесия, $-\sqrt{a}$ и $\sqrt{a}$.

(b) Нарисовать ступенчатую диаграмму для $a = 3$, $x(0) = 1$, и $x(0) = -1$.

(c)Какой вывод можно сделать из (b)?

3. (Логистическое уравнение Пиелоу)

Э.К. Пиелоу [119] называет следующее уравнение дискретным логистическим уравнением:

$$x(n+1) = \frac{\alpha x(n)}{1 + \beta x(n)}, \qquad \alpha > 1, \qquad \beta > 0.$$

(a)Найти положительные точки равновесия.

(b) Показать, используя ступенчатую диаграмму, что положительные точки равновесия асимпто-тически устойчивы при $\alpha = 2$ и $\beta = 1$.

4. Найти неподвижные точки уравнения $x(n+1) = 5 - \frac{6}{x(n)}$. Определить их устойчивость.

5. (a) Нарисовать ступенчатую диаграмму для (1.3.4) при $\mu = 0.5,\ 3$ и 3.3. Какие выводы можно сделать из этих диаграмм?

(b) Определить, какие значения μ порождают периодические решения периода 2. 6. (Паутинная диаграмма [уравнение (1.3.7)]). Экономисты определяют равновесную цену p^* товара как цену, при которой спрос $D(n)$ (см. (1.3.5)) равен предложению $S(n+1)$ (см. (1.3.6)). (a) Показать, что $p^* = B/(1-A)$, где A, B определены в (1.3.8).

(b) Пусть $m_s = 2$, $b_s = 3$, $b_s = 3$, $m_d = 1$ и $b_d = 15$. Найти равновесную цену p^*. Затем построить ступенчатую диаграмму для $p(0) = 2$.

7. Продолжение Задачи 6: (a) Экономисты используют другие ступенчатые диаграммы, которые мы объясним по шагам:

(i) откладываем по горизонтальной оси цену $p(n)$ товара, по вертикальной оси $S(n+1)$ или $D(n)$. Рисуем линию предложения и спроса и находим их точку пересечения p^*.

(ii) Начиная с $p(0) = 2$, находим $S(1)$, проводя вертикальную линию до линии предложения, затем двигаясь по горизонтали, чтобы найти $D(1)$ (так как $D(1) = S(1)$), таким образом определяя $p(1)$ на оси цен. Предложение $S(2)$ ищется на линии предложения прямо над $p(1)$, а потом $D(2)(= S(2))$ находится движением по горизонтали к линии спроса, и так далее.

(iii) Устойчива ли p^*?

8. Повторить решение задач 6 и 7 для других значений параметров:
(a) $m_s = m_d = 2$, $b_d = 10$ и $b_s = 2$. (b) $m_s = 1$, $m_d = 2$, $b_d = 14$ и $b_s = 2$.

9. Проверить, что формула (1.3.9) дает решение уравнения (1.3.7).

10. С помощью (1.3.9) доказать, что: (a) Если $-1 < A < 0$, то $\lim_{n\to\infty} p(n) = B/(1-A)$. (b) Если $A < -1$, то $p(n)$ неограничена. (c) Если $A = -1$, то $p(n)$ принимает только два значения:

$$p(n) = \begin{cases} p(0), & \text{если } n \text{ четно,} \\ p(1) = B - p_0, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

11. Предположим, что предложение и спрос имеют вид $D(n) = -2p(n) + 3$, $S(n+1) = p^2(n) + 1$. (a) Считая, что рыночная цена это цена, при которой предложение равно спросу, найти разностное уравнение, выражающее $p(n+1)$ через $p(n)$. (b) Найти положительное положение равновесия для этого уравнения. (c) С помощью лестничной диаграммы определить устойчивость этого положительного положения равновесия.

12. Рассмотрим отображение пекаря:

$$B(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } 0 \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ 2x - 1, & \text{если } \dfrac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

(a) Построить график $B(x)$ на $[0,1]$.
(b) Показать, что $x \in [0,1]$ является периодической точкой тогда и только тогда, когда оно имеет вид $x = k/2^n$, где k и n положительные целые числа и $0 \le k \le 2^n - 1$.

13. Найти неподвижные точки и периодические точки отображения $x(n+1) = f(x(n))$, где $f(x) = x^2$.

14. Найти неподвижные точки отображения тент Примера 1.7, не представимые в виде $x = k/2^n$.

15. Рассмотрим отображение тент Примера 1.7. Пусть $x = k/2^n$, где k и n положительные целые числа, такие что $0 < k/2^n \le 1$. Показать, что x является периодической точкой.

* * *

ДИСКРЕТНАЯ И КОМБИНАТОРНАЯ МАТЕМАТИКА

Введение и приложения

РАЛЬФ ГРИМАЛЬДИ

3-е издание

DISCRETE AND COMBINATORIAL MATHEMATICS

An applied introduction

RALF P. GRIMALDI

3RD EDITION

От редактора перевода

Настоящее издание является переводом части книги R. Grimaldi.

Издано шесть экземпляров для учебных целей.

Перевод сделан студентами Челябинского государственного педагогического университета М. Серковой (2011) и Е. Аникаевой (2015).

Редактировал перевод профессор Кипнис М.М.

1

Фундаментальные принципы счета

Дети узнают счет, когда начинают изучать арифметику. С более сложными областями математики, такими как алгебра, геометрия, тригонометрия, они сталкиваются немного позже.

Счет не заканчивается арифметикой. Он находит свое применение в таких областях, как теория кодирования, теория вероятности, статистика, анализ алгоритмов (в информатике).

1.1 Правила суммы и произведения

Изучение дискретной и комбинаторной математики начинается с двух основных правил счета: правил сложения и произведения. Изложение и первоначальное применение этих правил является довольно простым. Анализируя более сложные проблемы, их очень часто можно разделить на части, которые могут быть решены с помощью этих основных правил. Хороший способ сделать это - проанализировать и разрешить несхожие задачи счета, принимая во внимание правила, которые используются в решении задач. Такой подход используется ниже.

Наше первое правило счета звучит так:

Правило сложения. Если одно задание может быть выполнено m способами, в то время как второе задание может быть выполнено n способами, и оба задания не могут быть выполнены одновременно, тогда выполнение одного из заданий возможно $m + n$ способами.

Заметим, что когда мы говорим, что задание может быть выполнено m способами, эти m способов должны быть различны, в противном случае утверждение неверно. Это утверждение относится ко всему тексту.

Пример 1.1. В библиотеке колледжа хранится 40 учебников по социологии и 50 по антропологии. По правилу сложения студент этого колледжа может выбрать среди $40 + 50 = 90$ учебников для изучения одной из указанных дисциплин.

Пример 1.2 Правило суммы может быть применено к более чем двум заданиям, при условии, что выполняется ровно одно задание. Пусть, например, у преподавателя информатики есть по пять учебников каждого из языков программирования APL, BASIC, FORTRAN и Pascal. Он может порекомендовать один из этих 20 учебников студенту, который будет заинтересован в изучении какого-либо из этих четырех языков программирования.

Пример 1.3. У преподавателя информатики есть 2 сослуживца. У одного из этих сослуживцев есть три учебника по анализу алгоритмов, а у другого пять. Если за n обозначить максимальное количество различных учебников по этой теме, то преподаватель информатики может взять почитать $5 \leq n \leq 8$ учебников.

Следующий пример представляет второе правило счета.

Пример 1.4. Для достижения наилучшего роста растений руководитель разделил своих 12 работников на два комитета. Комитет A состоит из пять членов, которые занимаются изучением благоприятных условий для роста растений. Другие семь работников, комитет B, будут исследовать неблагоприятные условия для роста растений. Если руководитель для того, чтобы принять верное решение, решит поговорить с одним членом одного из комитетов, то по правилу сложения он может пригласить для разговора одного из 12 работников. Для того, чтобы принять объективное решение, руководитель решил пригласить работника из комитета A в понедельник, а из комитета B во вторник. Следуя такому принципу, мы приходим к выводу, что пригласить двух работников для беседы руководитель может $5 \times 7 = 35$ способами.

<u>Правило умножения.</u> Если процесс может быть разбит на два этапа и если количество всех всевозможных исходов на первом этапе равно m, а количество всевозможных исходов на втором этапе равно n, то конечный результат может быть выполнен в назначенном порядке mn способами.

Иногда мы будем называть это правило *принципом выбора.*

Пример 1.5 Драматический кружок Центрального Университета проводит пробы для весенней пьесы. Шесть мужчин и восемь женщин пробуются на главную женскую и мужскую роли. По правилу произведения режиссер может составить пару $6 \times 8 = 48$ способами.

Пример 1.6. Здесь представлены различные примеры, иллюстрирующие изготовление номерных автомобильных знаков, состоящих из двух букв английского алфавита, за которыми следуют четыре цифры.

A) Если не может быть повторена ни одна буква или цифра, то может быть изготовлено $26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 3276000$ номеров.

B) Если и буквы и цифры могут повторяться, то может быть изготовлено $26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 6760000$ номеров.

C) Если и буквы и цифры могут повторяться, то, сколько номеров будут содержать только гласные (A, E, I, O, U) и четные цифры (0 считаем четным числом)?

Пример 1.7. В памяти компьютера информация хранится в ячейках. Чтобы идентифицировать ячейки, за каждой из них закреплено определенное имя, названное ее адресом. Для многих компьютеров адреса ячеек представлены упорядоченным списком из восьми символов, где каждый символ является одним из *битов* 0 или 1. Список из восьми битов называется *байт*. Используя правило умножения, мы выясним, что всего $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8 = 256$ таких байтов. Отсюда мы имеем 256 адресов для ячеек памяти, в которых может храниться определенная информация. В некоторых компьютерах используется двухбайтные адреса. Такие адреса состоят из двух последовательных байтов, или 16 последовательных битов, поэтому возможно хранение $256 \times 256 = 2^8 \times 2^8 = 2^{16} = 65536$ «кусочков» информации. Другие компьютеры используют систему адресов из четырех байтов. В таком случае, $2^8 \times 2^8 \times 2^8 \times 2^8 = 2^{32} = 4294967296$ адресов используется для хранения памяти в компьютере.

Пример 1.8. Иногда необходимо использовать несколько различных правил счета для решения одной задачи. В данном примере мы используем для нахождения ответа и правило сложения, и правило умножения.

В ранних версиях языках программирования BASIC имя переменной состояло либо из одной заглавной буквы $(A, B, C, ...)$, либо из буквы вместе со следующей за ней одной цифрой. Так как компьютер не видит отличий между заглавной и строчной буквой, то a и A одинаковые буквы, также как и имена $E7$ и $e7$. По правилу произведения существует $26 \times 10 = 260$ вариаций имен, состоящих из буквы со следующей за ней цифрой. Так как существует 26 различных имен, состоящих из одной буквы, то по правилу сложения получается $260 + 26 = 286$ различных имен в этом языке программирования.

1.2

Перестановки

Продолжая изучать приложения правила произведения, мы приступаем к подсчету линейных размещений объектов. Эти размещения мы называем *перестановками,* если объекты различны. Нам необходимо изложить некоторые систематические методы для подсчета линейных размещений, начиная с типичного примера.

Пример 1.9. В классе из 10 учеников пятеро были выбраны и посажены в один ряд. Сколько таких возможных линейных размещений?

Ключевое слово здесь *размещение*, которое указывает на важность *порядка.* Если $A, B, C, \dots, I, J$ обозначают 10 студентов, то $BCEFI, CEFIB$ и $ABCFG$ являются тремя различными перестановками.

Чтобы ответить на вопрос, мы рассмотрим позиции и возможные номера студентов, которые мы можем выбрать, чтобы заполнить каждую позицию. Заполнение позиции это этап нашей процедуры.

$$10 \quad \times \quad 9 \quad \times \quad 8 \quad \times \quad 7 \quad \times \quad 6$$

1-я позиция	2-я позиция	3-я позиция	4-я позиция	5-я позиция

Любой из 10 студентов может занять первую позицию в ряде. Так как повторения невозможны, то мы можем выбрать только одного из девяти оставшихся студентов, чтобы заполнить вторую позицию. Продолжая дальше так же, мы будем выбирать из шести студентов, чтобы заполнить последнюю, пятую позицию. Это приводит нас к 30240 возможных перестановок пяти учеников из класса, состоящего из 10 человек.

Точно такой же ответ будет, если позиции заполняются в противоположном порядке $(6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10)$. Если сначала мы заполняем 3ю позицию, потом 1-ю, 4-ю, 5-ю, 2-ю, тогда ответ будет следующим: $9 \times 6 \times 10 \times 8 \times 7$.

Как показано в примере 1.9, произведение нескольких последовательных положительных чисел появляется в большом количестве задач. Поэтому следующее обозначение весьма полезно, когда мы имеем дело с задачами перечисления. Она часто позволяет нам точно выражать наши ответы в наиболее подходящей форме.

Определение 1.1. Для целых $n \geq 0$, n *факториал* (записывается $n!$) определяется следующим образом:

$$0! = 1,$$

$$n! = (n)(n-1)(n-2) \dots (3)(2)(1), \quad \text{для} \quad n \geq 1.$$

Очевидно, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$ и $5! = 120$. Кроме того, для любого $n \geq 0$ верно $(n+1)! = (n+1)(n!)$.

Мы хотим показать, что величина $n!$ возрастает довольно быстро. Мы можем подсчитать, что $10! = 3628800$, и оказывается, что это точное число секунд за шесть недель. Следовательно, $11!$ превышает количество секунд за год, $12!$ превышает количество секунд за 12 лет, а $13!$ превосходит количество секунд за век.

В факториальной записи ответ на пример 1.9 запишем в следующей форме:

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times \frac{5\times4\times3\times2\times1}{5\times4\times3\times2\times1} = \frac{10!}{5!}.$$

Определение 1.1. Если дан набор из n различных объектов, то любое (линейное) расположение этих объектов называется *перестановкой*.

Если мы возьмем буквы $a, b, c,$ то получим шесть способов их перестановки: $abc, acb, bac, bca, cab, cba.$ Если мы возьмем только две буквы, то получим следующий набор перестановок: $ab, ba, ac, ca, bc, cb.$

Если имеется n различных объектов, обозначенных $a_1, a_2, \dots, a_n,$ и дано целое число $r,$ такое, что $1 \le r \le n,$ то по правилу произведения количество перестановок размером r из n объектов равно

$$(n)(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) \times \frac{(n-r)(n-r-1)\dots(3)(2)(1)}{(n-r)(n-r-1)\dots(3)(2)(1)} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Мы обозначаем это число посредством $P(n, r)$. Если $r = 0,$ то $P(n, 0) = 1 = n!/(n-0)!$, поэтому $P(n, r) = n!/(n-r)!$, где $0 \le r \le n$. Частный случай это пример 1.9, где $n = 10,\ r = 5,\ P(10,5) = 30240$. Когда переставляем все n объектов из последовательности, то $n = r$ и мы получаем $P(n, n) = n!/0! = n!$.

Заметим, что если $n \ge 2,$ то $P(n, 2) = n!/(n-2)! = n(n-1)$. Если $n > 3$, то

$$P(n, n-3) = n!/[n-(n-3)]! = n!/3! = (n)(n-1)(n-2)\dots(5)(4).$$

Количество перестановок размером $r,$ где $0 \le r \le n,$ из набора в n объектов равно $P(n, r) = n!/(n-r)!$. (Напомним, что $P(n, r)$ вычисляет (линейные) перестановки, в которых объекты не могут повторяться.) Однако, если повторения имеют место, то по правилу произведения количество перестановок равно $nr,$ где $r \ge 0.$

Пример 1.10 Количество перестановок букв в слове $COMPUTER$ равно 8!. Если переставляют только четыре буквы, то количество перестановок (размером 4) будет $P(8{,}4) = 8!/(8-4)! = 8!/4! = 1680$. Если буквы могут повторяться, то количество возможных 12-буквенных перестановок будет $8^{12} \approx 6{,}872 \times 10^{10}$.

Пример 1.11. В отличие от примера 1.10, количество линейных перестановок из четырех букв в слове $BALL$ будет 12, а не 4!. Причина этому та, что у нас нет четырех различных букв для расстановки. 12 перестановок мы построили в Таблице 1.1.

Если две буквы L обозначить как L_1 и L_2, то мы можем использовать наши предыдущие идеи по поводу перестановок отдельных объектов; с четырьмя различными объектами B, A, L_1, L_2 у нас будет $4! = 24$ перестановки. Они представлены в таблице 1.1(б). Таблица 1.1 показывает, что каждая перестановка, в которой буквы L одинаковы, соответствует паре перестановок с различными буквами.

Таблица 1.1

ABLL	ABL_1L_2	ABL_2L_1
ALBL	AL_1BL_2	AL_2BL_1
ALLB	AL_1L_2B	AL_2L_1B
BALL	BAL_1L_2	BAL_2L_1
BLAL	BL_1AL_2	BL_2AL_1
BLLA	BL_1L_2A	BL_2L_1A
LABL	L_1ABL_2	L_2ABL_1
LALB	L_1AL_2B	$L_2AL_1B_2$
LBAL	L_1BAL_2	L_2BAL_1
LBLA	L_1BL_2A	L_2BL_1A
LLAB	L_1L_2AB	L_2L_1AB
LLBA	L_1L_2AB	L_2L_1BA

Поэтому, $2 \times$(количество перестановок из букв $B,\ A,\ L,\ L$) $=$ (количество перестановок из символов B, A, L_1, L_2), и, таким образом, количество перестановок из четырех букв слова $BALL$ равно $4!/2 = 12$.

Пример 1.12. Используя идею, раскрытую в примере 1.11, рассмотрим перестановки всех шести букв в слове $PEPPER$.

Количество перестановок с различными буквами P, получаемых из перестановки с одинаковыми буквами P, будет равно $3! = 6$. Например, $P_1EP_2P_3ER$, $P_1EP_3P_2ER$, $P_2EP_1P_3ER$, $P_2EP_3P_1ER$, $P_3EP_1P_2ER$, $P_3EP_2P_1ER$. Перестановка $P_1EP_2P_3ER$ соответствует паре перестановок $P_1E_1P_2P_3E_2R$, и $P_1E_2P_2P_3E_1R$, где буквы E различны. Поэтому,

$(2!)(3!)$(количество перестановок букв в слове $PEPPER$) $=$ (количество перестановок букв $P_1,\ E_1,\ P_2,\ P_3,\ E_2,\ R$),

значит, количество перестановок всех шести букв в слове $PEPPER$ будет $6!/(2!\,3!) = 60$.

Прежде чем мы изложим основные правила счета перестановок с повторяющимися символами, заметим, что в наших предыдущих двух примерах мы решали новые проблемы посредством соотнесения их с ранее введенными правилами сложения и умножения. Эта практика является обычной вообще в математике и часто встречается в рассуждениях в дискретной и комбинаторной математике.

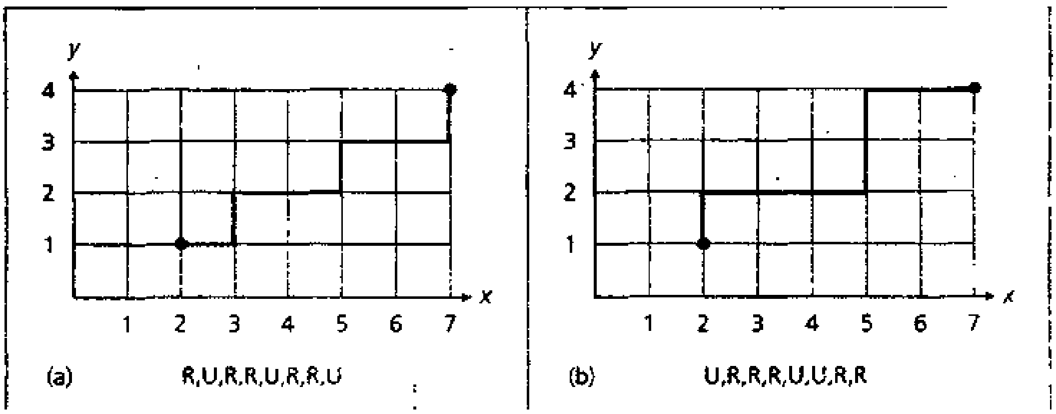
Если дано n объектов и n_1 есть количество объектов первого типа, n_2 второго, … , n_r r-го типа и $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, то количество перестановок из n объектов будет $n!/(\,n_1!\,n_2!\,\ldots n_r!)$.

Пример 1.13 $MASSASAUGA$ это ядовитая змея коричневого и белого цвета, обитающая в Северной Америке. Переставляя все буквы в слове $MASSASAUGA$, мы получим $10!/(4!\,3!\,1!\,1!\,1!) = 25200$ возможных перестановок. Среди них $7!/(3!\,1!\,1!\,1!\,1!) = 840$ перестановок, в которых все буквы A стоят вместе. Последнее число мы получили, рассмотрев все перестановки семи символов $AAAA$ (один символ), S, S, S, M, U, G.

Пример 1.14. Определить количество (ступенчатых) траекторий в декартовой системе координат на плоскости от точки $(2,1)$ до $(7,4)$, где каждая ступенька проходит на одну единицу либо направо (R), либо вверх (U).

Ниже на Рисунке 1.1 показаны две траектории. В части (a) мы имеем последовательность действий R, U, R, R, U, R, R, U. Начинаем с точки $(2,1)$: сначала на одну клетку направо [к $(3,1)$], затем наверх [к $(3,2)$], затем на две клетки направо [к $(5,2)$] и т.д., пока не дойдем до клетки $(7,4)$. Таким образом, траектория состоит из 5 ступеней направо и 3 вверх.

Рисунок 1.1



В части (b) траектория также состоит из 5 ступеней направо и 3 вверх. Передвижение от точки $(2,1)$ до $(7,4)$ требует $7 - 2 = 5$ горизонтальных передвижений вправо и $4 - 1 = 3$ вверх. И количество путей является количеством размещений пяти букв R и трех букв U на восьми местах, которое равно $8!/(5!\,3!) = 56$.

Пример 1.15. Сейчас мы докажем, что если n и k положительные целые числа и $n = 2k,$ то $n!/2k$ также положительное. Такое доказательство является примером *комбинаторного доказательства.*

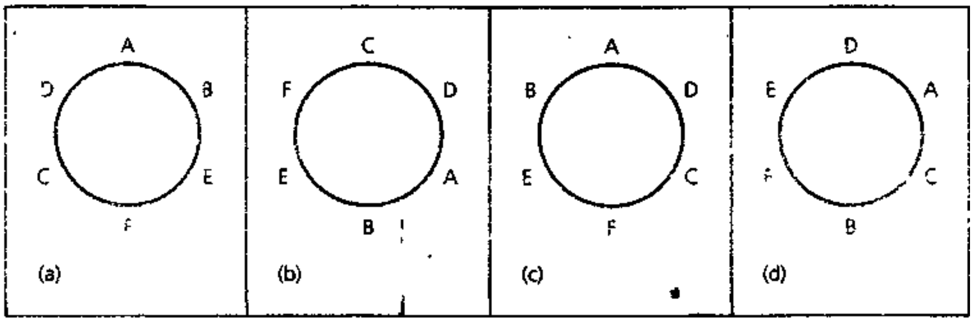
Рассмотрим n символов $x_1,\ x_1,\ x_2,\ x_2,\ \dots\ x_k,\ x_k.$ Количество способов, которыми мы можем расположить все эти n символов ($n = 2k$), будет равно целому числу $\frac{n!}{2!2!\dots2!} = \frac{n!}{2^k}$. .

Далее мы будем рассматривать примеры, в которых перестановки не линейные.

Пример 1.16. Сколько существует размещений шести человек, обозначенных как $A, B, C, D, E, F,$ вокруг круглого стола, если размещения считаются одинаковыми, когда они получены одно из другого вращением. (Обратим внимание на то, что перестановки на Рисунке 1.2 (a) и (b) одинаковые, в то время как (b), (c), (d) - три разных перестановки.)

Рассматривая Рисунки 1.2 (a) и (b), начнем с вершины круга и будем двигаться по часовой стрелке. Получим различные линейные перестановки $ABEFCD$ и $CDABEF,$ которые соответствуют одинаковому расположению. Вдобавок к этим двум перестановкам есть еще четыре перестановки – $BEFCDA, DABEFC, EFCDAB, FCDABE,$ которые соответствуют одинаковым перестановкам по кругу.

Рисунок 1.2



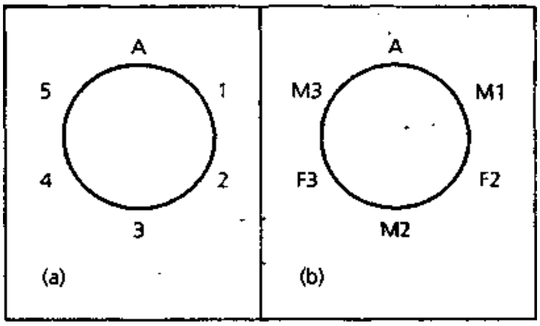
Поскольку каждая линейная перестановка соответствует шести линейным перестановкам по кругу, мы имеем 6 $\times$(количество перестановок по кругу символов A, B, C, D, E, F) $=$ (количество линейных перестановок символов A, B, C, D, E, F) $= 6!$.

Следовательно, количество перестановок вокруг круглого стола будет равно $6!/6 = 5! = 120$.

Пример 1.17. Предположим, что шесть человек из примера 1.16 это три супружеские пары и A, B, C – женщины. Нам необходимо рассадить шесть человек вокруг стола так, чтобы было чередование полов. (Еще раз напомним, что перестановки считаются одинаковыми, когда они получены один из другого вращением.)

Но до того как мы решим эту задачу, решим пример 1.16 другим способом, который поможет нам в дальнейшем решить нашу задачу. Если мы расположим A, как показано на Рисунке 1.3(а), то остальные пять мест (если двигаться по часовой стрелке от A) будут заполнены. Если заполнять эти места буквами B, C, D, E, F, то проблема перемещения этих букв линейным способом будет иметь $5! = 120$ решений.

Рисунок 1.3



Чтобы решить нашу задачу про чередование полов, рассмотрим метод, показанный на Рисунке 1.3(b). Если двигаться по часовой стрелке от A (женщины), то следующую позицию обозначим за $M1$ (мужчина 1), и мы сможем заполнить ее тремя способами. Продолжая двигаться по часовой стрелке от буквы A, мы сможем заполнить позицию $F2$ (женщина 2) двумя способами, и т.д. По правилу произведения существует $3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 12$ способов посадки этих шести человек таким образом, что никакие двое мужчин или женщин не будут сидеть рядом.

УПРАЖНЕНИЯ 1.1 и 1.2

1. Во время местных выборов на пост президента школьного совета выдвинуты восемь республиканских и пять демократических кандидатов.

а) Если президентом должен стать один из этих кандидатов, то, сколько имеется возможных победителей?

б) Сколько существует возможностей составить пары кандидатов (по одному от каждой партии) для выступлений друг против друга на возможных выборах?

в) Какой принцип подсчёта результатов используется в части (а)? в части (б)?

2. Дайте ответ на часть (С) примера 1.6.

3. Автомобили Бьюик имеют 4 модели, 12 цветов, 3 размера двигателя и 2 типа передач.

а) Сколько различных автомобилей Бьюик возможно изготовить?

б) Если один из доступных цветов синий, то, сколько возможно изготовить различных синих автомобилей Бьюик?

4. **а**) Совет директоров фармацевтической корпорации состоит из 10 членов. Предстоящая встреча акционеров, как было намечено, одобрит новый штат сотрудников компании (выбирается из 10 членов совета директоров). Сколько различных вариантов списков кандидатов на посты президента, вице-президента, секретаря и казначея можно представить акционерам для их утверждения?

б) Три члена совета директоров (из части (а)) являются врачами. Сколько вариантов списков кандидатов из части (а) можно получить, если

i) Врач предлагается на пост президента?

ii) В точности один врач включен в список?

iii) По крайней мере один врач включен в список?

5. Во время субботней прогулки по магазинам Дженнифер и Тиффани стали свидетелями того, как двое мужчин отъезжали от входа магазина непосредственно перед тем, как сработала сигнализация. Несмотря на то, что всё произошло довольно быстро, молодые девушки смогли дать полиции следующую информацию о номерном знаке (который состоял из двух букв и последующих за ними четырех цифр) уезжающей машины. Тиффани была уверена, что вторая буква номера была O или Q, а последняя цифра была 3 или

8. Дженнифер рассказала следователю, что первая буква на номере была C или G и первая цифра была, несомненно, 7. Сколько различных номерных знаков должна проверить полиция?

6. Для того чтобы собрать деньги на новый муниципальный бассейн, торговая палата в определённом городе спонсирует гонку. Каждый участник платит входную плату 5$ и имеет шанс выиграть один из видов трофеев, которыми награждают первую восьмёрку бегунов.

а) Если в гонку вошли 30 человек, сколькими способами может составиться список восьми победителей?

б) Если Роберта и Кендис две участницы гонки, то сколько существует возможных восьмерок победителей, в которых Роберта и Кендис входят в первую тройку?

7. Некоторая компания «Гамбургер Джойнт» объявляет, что клиенты могут купить их гамбургеры со следующими ингредиентами или без них: кетчуп, горчица, майонез, салат, помидор, лук, маринованные огурцы, сыр или грибы. Сколько видов различных гамбургеров можно заказать?

8. Мэтью работает оператором ПК в небольшом университете. Однажды вечером он обнаруживает, что 12 компьютерных программ были предоставлены для пакетной обработки данных. Сколько способов для обработки этих программ есть у Мэтью, если (а) нет никаких ограничений? (б) он считает, что четыре программы важнее по приоритету, чем другие восемь, поэтому первыми он будет обрабатывать их? (с) он разделяет программы на четыре самых важных по приоритету, пять менее важных и три совсем неважных, и выполняет обработку программ таким образом, что самые важные обрабатывает первыми, и три совсем неважных последними?

9. Фирма Patter’s Pastry Parlor предлагает восемь различных видов печенья и шесть видов кексов. Помимо хлебобулочных изделий можно приобрести следующие напитки в маленьких, средних или больших контейнерах: кофе (чёрный, со сливками, с сахаром или со сливками и с сахаром), чай (простой, со сливками, с сахаром, со сливками и с сахаром, с лимоном или с лимоном и сахаром), горячий шоколад и апельсиновый сок. Когда Кэрол заходит в Patter's, сколькими способами она может заказать

(**а**) одно хлебобулочное изделие и один напиток в контейнере среднего размера для себя?

(**б**) одно хлебобулочное изделие и один контейнер с кофе для себя и один кекс с контейнером с чаем для своего руководителя, миссис Didio?

(**в**) одну порцию печенья и контейнер с чаем для себя, один кекс и контейнер с апельсиновым соком для миссис Didio, а также по одному хлебобулочному изделию и контейнеру с кофе для мистера Talbot и миссис Gillis, двух ее помощников.

10. У Памелы есть 15 различных книг. Сколько возможно способов расстановки книг на двух полках, если учесть, что на каждой полке стоит хотя бы одна книга (Будем считать, что книги расставлены друг за другом, на каждой полке первая книга поставлена слева).

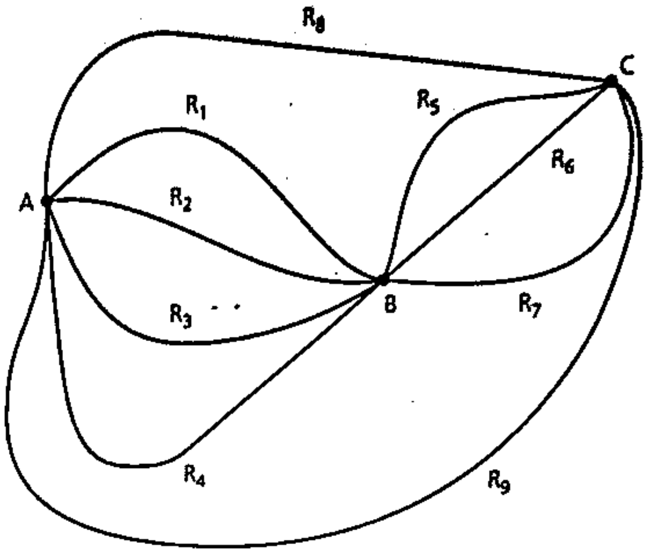
11. Три небольших города, обозначенных посредством $A, B, C,$ соединены системой двусторонних дорог, как показано на Рисунке 1.4.

а) Сколькими способами Линда может добраться с города A в город C?

б) Сколько различных путешествий может совершить Линда из города A в город C и обратно в город A?

в) Сколько возможно поездок в части (б) , если обратный путь (из города C в город A) будет отличаться от маршрута Линды из города A в город C? (Например, если Линда путешествует из города A в город C по дорогам R_1 и R_6, то возвращаться она может по дорогам R_6 и R_3, или по дорогам R_5 и R_1, или по дорогам R_7 и R_2, или по дороге R_9 , или выберет другие варианты, но она не может возвращаться по дорогам R_6 и R_1.

Рисунок 1.4



12. Перечислите все перестановки для букв a, c, t.

13.а) Сколько можно получить перестановок из восьми букв a, c, f, g, i, t, w, x?

б) Сколько перестановок можно получить в задаче (а), если начинать с буквы t?

в) Сколько перестановок можно получить в задаче (а), если начинать с буквы t и заканчивать буквой c?

14. Вычислите каждое из следующих чисел.

а) $P(7,2)$ **б**) $P(8,4)$ **в**) $P(10,7)$ **г**) $P(12,3)$

15. Сколькими способами могут быть переставлены символы $a, b, c, d, e, e, e, e, e$ так, чтобы один символ e не примыкал к другому e?

16. Алфавит состоит из 40 символов и используется для передачи сообщений в системе связи. Сколько можно составить различных сообщений (списков символов) из 25 символов, учитывая, что символы могут повторяться? Сколько можно составить различных сообщений, учитывая, что 10 из 40 символов могут быть только первыми или последними символами в сообщении, а остальные 30 символов могут повторяться?

17. В некоторой версии языка программирования Паскаль идентификатор состоит либо из одной буквы, либо из буквы и следующими за ней символами, количество которых не более семи. Символы могут быть как буквами, так и цифрами. (Мы предполагаем, что компьютер не различает строчные и прописные буквы; имеется 26 букв и 10 цифр). Для команд зарезервированы некоторые ключевые слова; эти ключевые слова не могут быть использованы как идентификаторы. Если было зарезервировано 36 слов, то, сколько различных идентификаторов может быть в данной версии Паскаля?

18. Производство машины состоит из четырёх этапов. Для первого этапа имеются шесть сборочных линий, для второго четыре линии, для третьего пять и для последнего этапа пять. Определите количество вариантов сборки машины, при которых машина будет полностью собрана в производственном процессе.

19. Профессор компьютерных наук имеет семь различных книг по программированию на полке. Три книги по языку FORTRAN; другие четыре по языку BASIC. Сколькими способами профессор может составить книги на полке, если (а) нет никаких ограничений? (б) языки должны чередоваться? (в) книги по языку FORTRAN должны быть рядом друг с другом? (г) все книги по языку FORTRAN должны стоять рядом друг с другом и все книги по языку BASIC тоже должны стоять рядом друг с другом?

20. Какое название штата порождает больше перестановок букв своего имени: $PENNSYLVANIA$ или $MASSACHUSETTS$?

21. **а**) Сколькими способами могут быть переставлены буквы в слове $VISITING$?

б) Сколько вариантов для части (а) можно получить, если все три буквы I будут стоять вместе?

22. Сколькими способами мы можем расставить буквы в слове $POLYUNSATURATED$, при этом сохраняя порядок расстановки гласных?

23. а) Сколько перестановок букв слова $SOCIOLOGICAL$ можно получить?

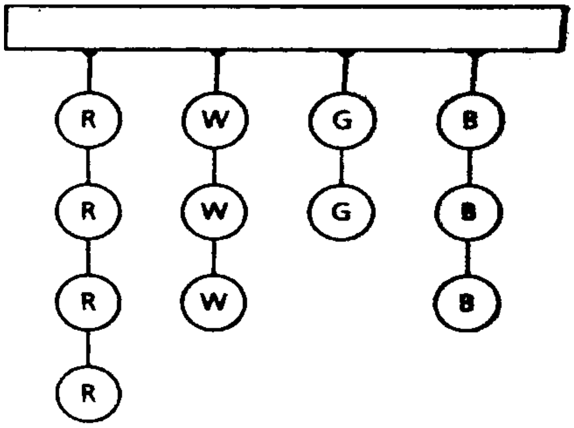
б) Сколько перестановок в задаче (а) можно получить, если A и G стоят рядом?

в) Сколько перестановок в задаче (а) можно получить, если все гласные стоят рядом?

24. Сколько положительных целых чисел n мы можем получить, используя цифры $3, 4, 4, 5, 5, 6, 7,$ так чтобы n было больше 5 000 000?

25. Двенадцать мишеней (одинаковой формы) разместили в четыре подвешенные колонки, как показано на Рисунке 1.5. В первой колонке четыре красные мишени, во второй колонке три белые, в третьей две зелёные и в четвёртой три синие. Чтобы попасть в команду колледжа, Дебора должна обрушить все 12 мишеней (используя свой пистолет и 12 пуль) и при этом она должна попадать по нижним мишеням каждой из колонок. В этих условиях, сколько различных последовательностей выстрелов может сделать Дебора, чтобы выбить все мишени?

Рисунок 1.5



26. Покажите, что для всех целых чисел $n, r \geq 0$, если $n+1 > r$, то

$$P(n+1, r) = \frac{n+1}{n+1-r} P(n, r).$$

27. Найдите значение n в каждом из следующих равенств:

(а) $P(n, 2) = 90$, (б) $P(n, 3) = 3P(n, 2)$, (с) $2P(n, 2) + 50 = P(2n, 2)$.

28. Сколько существует различных траекторий в плоскости xy от точки $(0, 0)$ до точки $(7, 7)$, если траектория движения состоит из шагов на единицу вправо (R) или вверх (U)? Сколько траекторий возможно от $(2, 7)$ до $(9, 14)$? Получите общее утверждение по этим двум результатам.

29.а) Сколько различных траекторий возможно от точки $(-1, 2, 0)$ до $(1, 3, 7)$ в евклидовом трёхмерном пространстве, если движение может быть одним из следующих типов:

(H): $(x, y, z) \rightarrow (x+1, y, z)$; (V): $(x, y, z) \rightarrow (x, y+1, z)$;

(A): $(x, y, z) \rightarrow (x, y, z+1)$.

б) Сколько различных траекторий возможно от $(1, 0, 5)$до $(8, 1, 7)$?

в) Обобщите результаты в части (а) и части (б).

30. а) Определите значение целочисленной переменной `counter` после выполнения следующих сегментов программы Паскаль (здесь i, j и k целочисленные переменные).

```
counter:= 0;
For i:=1 to 12 do
counter:= counter+1;
For j:=5 to 10 do
counter:= counter+2 ;
For k:=15 downto 8 do
counter:= counter+3;
```

б) Какой принцип подсчёта используется в части (а)?

31. Рассмотрите следующий сегмент программы Паскаль, где i, j и k целочисленные переменные.

```
For i:=1 to 12 do
For j:=5 to 10 do
For k:=15 downto 8 do
Writeln (((i-j)*k);
```

а) Сколько раз выполняется оператор `Writeln`?

б) Какой принцип подсчёта используется в части (а)?

32. Последовательность букв вида $abcba$, в которой выражение остаётся неизменным при чтении в обратном порядке, называется *палиндромом* (из 5 букв).

а) Если буква может встретиться в выражении более чем дважды, то, сколько может получиться палиндромов из пяти букв? Из шести?

б) Повторите часть (а) при условии, что буква не употребится более чем дважды.

33. Определите количество шестизначных целых чисел (не начинающихся с нуля), в которых

(а) цифры не могут повторяться; (б) цифры могут повторяться. Ответь на части (а) и (б) с дополнительным условием, что шестизначное число (i) четно; (ii) делится на 5; (iii) делится на 4.

34. а) Дайте комбинаторное доказательство того, что если n и k положительные целые числа и $n = 3k,$ то $n!/(3!)^k$ тоже является целым числом.

б) Обобщите результат части (а).

35. **а**) Сколько возможно вариантов выполнения студентом экзаменационной работы, состоящей из 10 вопросов типа, правда-ложь?

б) Сколько возможно вариантов выполнения работы в части (а), если он может оставить вопрос без ответа во избежание дополнительных штрафов из-за неправильного ответа?

36. Сколько различных четырёхзначных целых чисел можно сконструировать из цифр 1,3,3,7,7 и 8?

37. а) Сколькими способами семь человек могут расположиться вокруг круглого стола?

б) Сколько возможно вариантов при условии, что два человека намерены сидеть рядом друг с другом?

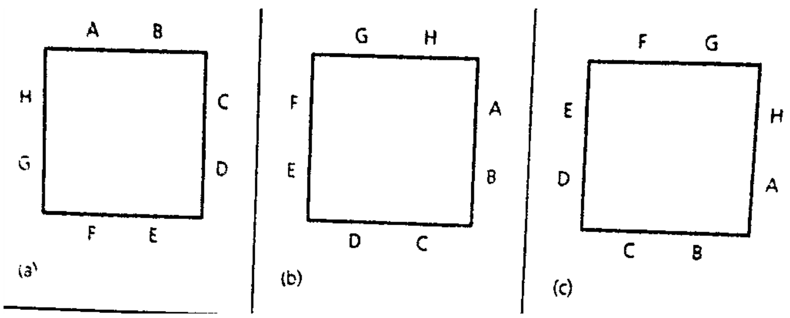
38. а) Каким образом восемь человек, обозначенных буквами $A, B, \dots, H$, могут сесть вокруг квадратного стола, как показано на Рисунке 1.6, где

Рисунки 1.6 (a) и 1.6(b) считаются одинаковыми, но отличаются от Рисунка 1.6(c)?

б) Если двое из восьми человек, скажем A и B, не ладят между собой, то сколько возможно вариантов, в которых A и B не сидят рядом друг с другом?

в) Сколько возможно вариантов в задаче части (б), если A и B избегают сидеть друг против друга?

Рисунок 1.6



39. Реализация операционной системы UNIX позволяет обеспечивать структурирование файлов, смоделированное на Рисунке 1.7. Здесь *i-узел* для файла содержит определенную информацию, такую как разрешения на доступ для файла. Это сопровождается записями, которые содержат информацию о том, где файл расположен на устройстве хранения данных. Первые 10 записей - адреса блоков, где хранятся актуальные данные для файла. Если блок может содержать 512 байтов информации, эти 10 *прямых* блоков могут содержать до $512 \times 10 = 5120$ байтов информации.

Когда размер файла превышает 10 блоков, одиннадцатый вход обеспечивает доступ к *косвенному блоку*. Этот косвенный блок содержит адреса для 128 дополнительных блоков для хранения данных. Если этот косвенный блок используется, то файл может содержать $10 + 128 = 138$ блоков, и, следовательно, до $512 \times 138 = 70656$ байтов информации.

а) Двенадцатый вход необходим, если больше чем 138 блоков требуются для файла. Этот вход содержит адрес двойного косвенного блока, который в свою очередь содержит адреса 128 косвенных блоков. Как отмечено ранее, каждый из этих косвенных блоков содержит адреса для 128 блоков, где данные могут храниться. Если файл использует 12 записей в своем -узле, то какова его максимальная вместимость в блоках и байтах?

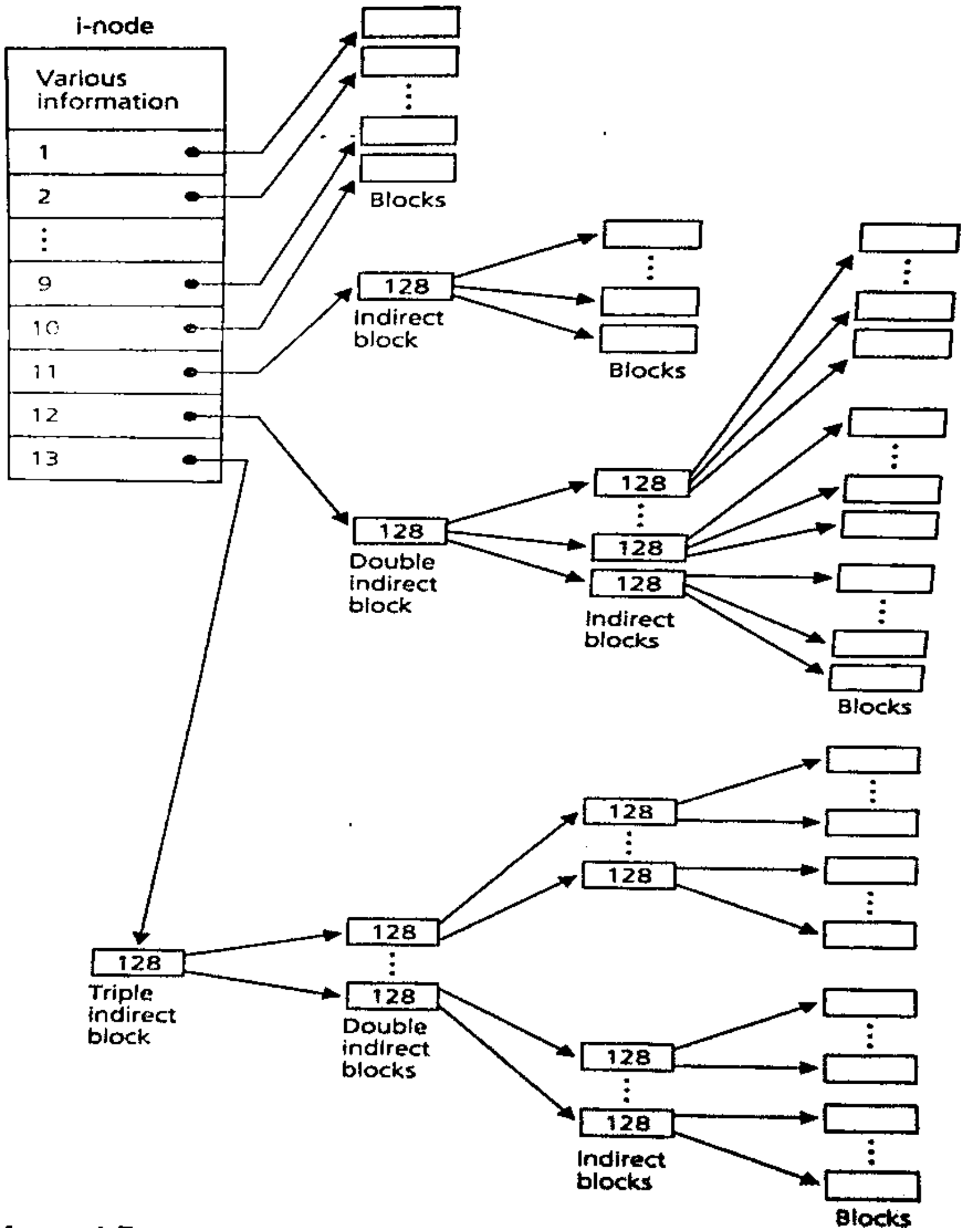
б) Когда файл настолько велик, что не может быть описан 12 записями, необходим тринадцатый вход. Он дает адрес тройного косвенного блока, который указывает на 128 двойных косвенных блоков, как показано на фигуре 1.7. Определите максимальный размер файла в блоках и байтах при этих условиях.

40. Напишите компьютерную программу (или разработайте алгоритм) для вычисления $n!$ для любого целого числа $n \geq 0$.

41. Напишите компьютерную программу (или разработайте алгоритм) для вычисления $P(n,r)$ для любых целых чисел $n, r \geq 0$.

42. Напишите компьютерную программу (или разработайте алгоритм), чтобы выяснить, существует ли трёхзначное целое число abc $(= 100a + 10b + c)$, такое что $abc = a! + b! +$ с!

Рисунок 1.7


i-node
Various information
1
2
9
10
11
12
13
Blocks
128
Indirect block
Blocks
128
Double indirect block
128
128
128
Indirect blocks
Blocks
128
Triple indirect block
128
128
Double indirect blocks
128
128
128
128
Indirect blocks
Blocks