МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика обучения решению задач по теории вероятностей в профильных классах средней школы и при подготовке к ЕГЭ

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность программы бакалавриата «Математика. Информатика»

Форма обучения: очная

Проверка на объем заимствований:
62,3 % авторского текста

Работа рекомендована к защите
рекомендована
«05» апреля 2023 г.

зав. кафедрой математики и МОМ
_____________ Звягин К.А.

Выполнила:
Студентка группы
ОФ-513/204-5 1
Боталова Влада Денисовна

Научный руководитель:
к.ф.-м.н.,
доцент кафедры МиМОМ
Вагина Мария Юрьевна

Челябинск
2023

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность. Изучение теории вероятности играет важную роль в общеобразовательной подготовке современного человека. Обладая вероятностной грамотностью, современному человеку намного проще и легче будет воспринять социальную, политическую, экономическую информацию. Все современные науки, такие как физика, биология, химия, а также весь блок социально-экономических наук, построены и развиваются на вероятностно статистической базе. И без получения этих знаний невозможно полноценное усвоение вышеперечисленных дисциплин уже в школе. При изучении данного материала обогащаются представления обучающихся о современной картине мире и методах его исследования.

Гипотеза исследования. Проведение курса внеурочной деятельности «Элементы теории вероятностей» с программно-методической поддержкой, будет способствовать эффективному формированию умений решать задачи по теории вероятностей и обеспечивать качественную подготовку к ЕГЭ.

Цель исследования. Теоретически обосновать и содержательно представить цикл уроков и курс внеурочной деятельности «Элементы теории вероятности» для обучающихся 10-11 классов, планирующих сдавать профильный ЕГЭ по математике.

В соответствии с поставленной целью, определены следующие **задачи** исследования.

1. Рассмотреть этапы развития профильного обучения в России и профильное обучение в условиях реализации ФГОС.
2. Провести обзор профилей по ФГОС и выявить место образовательной области «Математика» в профильных классах средней школы.

3. Выделить особенности профессиональной ориентации школьников в 10-11 классах.

4. Изучить общую характеристику внеурочной деятельности по математике.

5. Провести анализ учебного материала углубленного уровня и материалов ЕГЭ, содержащих тему «Элементы теории вероятностей».

6. Разработать структуру, содержание и методику проведения курса внеурочной деятельности «Элементы теории вероятностей» в профильных классах средней школы с использованием программно-методической поддержки.

7. Представить технологическую карту урока по теме «Формула полной вероятности».

Объект исследования. Процесс обучения математики в школе.

Предмет исследования. Методика преподавания элементов теории вероятностей в средней школе.

Практическая значимость исследования заключается в том, что в образовательную практику преподавания дисциплины «Математика» в образовательных учреждениях, могут быть включены следующие, полученные в ходе исследования, результаты:

1) методические рекомендации по изучению темы «Элементы теории вероятностей» в школьном курсе математики;

2) программа курса внеурочной деятельности и программно-методическая поддержка по данной теме;

3) технологическая карта урока, которая может быть использована на уроке математики в профильных классах средней школы.

При написании работы использовались различные **источники:** учебные материалы, научные труды, статьи специализированных периодическихизданий, ресурсы Интернет.

При работе над темой был использован метод теоретического анализа педагогических, научных и методических источников по проблеме исследования, а также метод эмпирического анализа.

Структура работы: работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованных источников и приложения.

ГЛАВА 1. ПРОФИЛЬНАЯ ДИФФЕРИНЦИАЦИЯ ОБУЧЕНИЯ В РОССИИ НА СТАРШЕЙ СТУПЕНИ СРЕДНЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

1.1 Этапы развития профильного обучения в России

Основой профилизации служит дифференциация. В настоящее время данное понятие широко используется во многих науках. В нашем исследовании мы исходили из его семантического значения.

«*Дифференциация*» – это разделение, расчленение, расслоение чего-либо на отдельные разнородные элементы. Данное понятие мы используем совместно с термином «обучение». В наиболее употребительном смысле он означает целенаправленную, последовательную передачу (трансляцию) общественно-исторического, социокультурного опыта другому человеку в специально организованных условиях семьи, школы, вуза, сообщества.

Проанализируем исторические аспекты становления профильного обучения в России по формальным и содержательным признакам. Становление национальной государственной образовательной системы восходит к XVII веке Обучение в большей степени носило прикладной характер.

Школы: начальное общее образование и профессиональная подготовка. В школы зачислялись дети всех сословий, за исключением крепостных крестьян. В них обучали грамоте и письму, арифметике и элементарным сведениям по алгебре, геометрии и тригонометрии. Такие школы назывались цифирными школами или цифирными училищами. Обучение в них сочетало в себе начальные образовательные навыки, такие как грамота и специальная подготовка [8].

Корпуса: общее образование, специальное образование, светское воспитание. Сухопутный шляхетский корпус, Морской кадетский корпус, Артиллерийский и Инженерный дворянские корпуса. Приоритетом образовательной политики в этом направлении было удовлетворение культурно-образовательных запросов дворянства. В программу обучения включены были такие предметы как математика, история, политика, география, артиллерия, фортификация, немецкий, французский, латинский языки, чистописание, грамматика. Предметы эстетического курса: риторика, мораль, геральдика, рисование, танцы и др.

Воспитательные дома: воспитание и общее образование. Новая для России форма образовательного учреждения. Попытка создания системы народного образования.

Учеников делили на три группы сообразно их природным дарованиям:

– люди способные к наукам. Они должны были продолжать изучать науки в высших учебных заведениях;

– люди способные в искусствах и ремеслах. Они должны были становиться искусными мастерами;

– люди способные лишь к самой простой работе, к физическому труду.

Гимназии: профильное непрерывное образование. При Академии наук был учрежден первый российский университет в Санкт-Петербурге, а при университете – гимназия. Новым было то, что это первая академическая гимназия. Ее целью была подготовка к слушанию лекций в университете. Ломоносов в своих трудах отмечал отсутствие преемственности между образовательным процессом гимназического и университетского обучения. Он считал необходимым положить в основание учебного курса высшей школы постепенность перехода от широкого общего образования к специализации по отдельным наукам [8].

Именно в XVIII веке зародилась идея профильной школы. Самостоятельное существование гимназий начинается собственно с 1803 года. Гимназия провозглашалась основным типом среднего образования в стране и являлась бессословным учебным заведением.

Лицеи. 12 апреля 1810 года Министерство народного Просвещения издает «Постановление о Царскосельском Лицее». После смерти

Александра I темпы развития лицейского образования в России резко снизились, и к началу XX веке этот тип образования практически прекратил свое существование.

Новый импульс идея профильного обучения получила в процессе подготовки в 1915-1916 годах реформы образования, осуществлявшейся под руководством Министра просвещения П. Н. Игнатьева. По предложенной структуре 4-7 классы гимназии разделялись на три ветви: новогуманитарную, гуманитарно-классическую и реальную.

В 1918 году состоялся первый Всероссийский съезд работников просвещения, и было разработано «Положение о единой трудовой школе», предусматривающее профилизацию содержания обучения на старшей ступени школы. В старших классах средней школы выделялись три направления: гуманитарное, естественно-математическое и техническое. Работа школы строилась на основе принципов связи с жизнью, национального и полового равноправия, обучения на родном языке.

В 20-е годы прошлого века советская школа занималась разработкой направлений в профильной подготовке. Среди этих направлений можно выделить однопрофильные школы крестьянской молодежи (далее – ШКМ) и фабрично-заводского ученичества (далее – ФЗУ), а также многопрофильные курсы в 8-9 классах школы второй ступени.

ШКМ и ФЗУ были ориентированы на подготовку соответствующих категорий учащихся: детей крестьян, сельской молодежи и городских учеников, работающих на промышленных предприятиях. Обучение в этих школах начиналось после окончания первой ступени образования и продолжалось три-четыре года. Профиль школ предполагал получение знаний и навыков, необходимых для сельского хозяйства и промышленности.

ШКМ в 20-е годы становились настоящими культурными центрами в деревне, распространяя знания среди всего населения. ФЗУ, в свою очередь, были лучше оборудованы, чем большинство других школ того времени. Они имели подготовительные мастерские, где ученики осваивали различные трудовые приемы, и только после этого переходили в цеха предприятий. Ученики ФЗУ посещали занятия (длительностью 3 часа в день) после шестичасовой работы на предприятии [8].

Таким образом, в 20-е годы советская школа разрабатывала различные направления в профильной подготовке. ШКМ и ФЗУ были предназначены для подготовки крестьянских детей, сельской молодежи и городских учеников, работающих на промышленных предприятиях, а длительность обучения составляла три-четыре года. Ученики ШКМ получали знания и становились культурными лидерами в деревне, а ученики ФЗУ имели более высокий уровень оборудования и переходили на работу в цехах предприятий.

В школах-девятилетках с 1925 года был введен профессиональный уклон, обеспечивающий множество направлений обучения, связанных с востребованностью профессий в данном районе. Это позволило ученикам выбирать свои профессиональные интересы и продлевать срок обучения в зависимости от их выбора.

Однако эксперимент, проведенный в 1957 году Академией педагогических наук, предлагал новую схему дифференциации обучения по трем направлениям: физико-математическому и техническому, биолого-агрономическому и социально-экономическому и гуманитарному. Такой подход позволял более гибко ориентироваться на потребности научно-технического и социально-экономического развития общества.

В дальнейшем, в 1966 году, были введены еще две формы дифференциации содержания образования по интересам школьников, что дало возможность более глубоко изучать темы, соответствующие их интересам: факультативные занятия в 8-10 классах и школы (классы) с углубленным изучением предметов. Эти формы сохраняются и по сей день, и играют важную роль в современной средней общеобразовательной школе.

В 1984 году был принят важный документ для общеобразовательной школы – «Об основных направлениях реформы общеобразовательной и профессиональной школы». Средняя школа стала одиннадцатилетней.

Для старшеклассников (10-11 классы) предполагалось 3 направления:

– 10-11 классы общеобразовательной школы;
– средние профессионально-технические училища;
– средние специальные учебные заведения.

В 1984 году были утверждены «Основные направления реформы общеобразовательной и профессиональной школы», реформа планировалась на длительный срок и затрагивала все компоненты системы образования на всех уровнях. Реализация основных положений реформы школы должна была привести к улучшению работы педагогов, их подготовки, связи школы, семьи и окружающего школу социума для того, чтобы обеспечить формирование у школьников единства знаний, убеждений и практической деятельности.

В период конца XX века – начала реформирования общего образования были разработаны основные принципы, которые в значительной степени влияют на развитие образовательной системы.

В частности, были сформулированы принципы демократизации, плюрализма, народности, открытости, регионализации, гуманизации, гуманитаризации, дифференциации, развивающего и деятельностного характера учебного процесса, а также непрерывности образования [8].

В России наиболее распространены общеобразовательные школы, лицеи и гимназии, которые взаимодействуют с вузами и ориентированы на индивидуальное развитие личности. Такие учебные заведения требуют, чтобы содержание образования учитывало потребности и возможности каждого ученика, создавая условия для его полноценной самореализации.

Закон «Об образовании РФ» выдвигает ряд требований к содержанию учебной программы, которые направлены на развитие самоопределения личности через обучение, стремление к обеспечению равных возможностей для всех, а также на повышение качества образования в целом. Такой подход обеспечит более эффективное функционирование образовательной системы и позволит достичь более успешных результатов в обучении.

1.2 Профильное обучение в условиях реализации ФГОС

В настоящее время школьное образование находится в процессе модернизации, направленной на совершенствование системы обучения. Современная система образования должна не только давать обучающимся знания, но и стимулировать их к самостоятельному и творческому подходу к новым знаниям, развивать умения самообразования и навыки работы в команде.

Одним из важных направлений модернизации является профилизация старшей ступени общеобразовательной школы. Реализация этой идеи требует введения дополнительных новаций в школьную практику, что позволит ученикам получать более глубокие и специализированные знания в интересующих их областях и развивать свои профессиональные навыки [8].

К числу дополнительных инновационных изменений относятся:

1) введение курсов по выбору в рамках предпрофильной подготовки;

2) организация информационной работы и профильной ориентации

3) старшеклассников по подготовке к выбору профиля обучения;

4) изменение порядка и процедуры проведения аттестации учащихся, заканчивающих вторую ступень основной школы;

5) построение рейтинговой оценки ученика, поступающего в профильную школу, которая включает обязательные экзамены, экзамены

по выбору, соответствующие избираемому профилю; все это дополняется портфелем индивидуальных достижений – «портфолио».

Одной из ведущих идей образовательной реформы в России является профильное обучение на старшей ступени общеобразовательной школы. Эта система обучения основана на тесном взаимодействии школы со учреждениями начального, среднего и высшего профессионального образования. Такой подход позволяет учащимся получить глубокие знания в выбранной ими области и готовиться к будущей профессиональной деятельности [22].

Профильное обучение – это система специализированной подготовки старшеклассников, направленная на то, чтобы сделать процесс их обучения на последней ступени общеобразовательной школы, более индивидуализированным, отвечающим реальным запросам и ориентациям, способная обеспечить осознанный выбор школьниками своей профессиональной деятельности. Является средством дифференциации и индивидуализации обучения, позволяющее за счет изменений в структуре, содержании и организации образовательного процесса более полно учитывать интересы, склонности и способности учащихся, создавать условия для обучения старшеклассников в соответствии с их профессиональными интересами и намерениями в отношении продолжения образования.

Профильное обучение направлено на реализацию личностно-ориентированного учебного процесса. При этом существенно расширяются возможности выстраивания учеником индивидуальной образовательной траектории. Основная задача профильного обучения – это создание «системы специализированной подготовки (профильного обучения) в старших классах общеобразовательной школы, ориентированной на индивидуализацию обучения и социализацию обучающихся, в том числе с учетом реальных потребностей рынка труда, отработки гибкой системы профилей и кооперации старшей ступени школы с учреждениями начального, среднего и высшего профессионального образования», которая определена в соответствии с распоряжением Правительства Российской Федерации от 29 декабря 2001 г. «Об одобрении Концепции модернизации российского образования» [21].

Переход к профильному обучению преследует следующие основные цели:

1) обеспечить углубленное изучение отдельных предметов программы полного общего образования;

2) создать условия для существенной дифференциации содержания обучения старшеклассников с широкими и гибкими возможностями построения школьниками индивидуальных образовательных программ;

3) способствовать установлению равного доступа к полноценному образованию разным категориям обучающихся в соответствии с их способностями, индивидуальными склонностями и потребностями;

4) расширить возможности социализации учащихся, обеспечить преемственность между общим и профессиональным образованием, более эффективно подготовить выпускников школы к освоению программ высшего профессионального образования.

К настоящему времени уже сложились четыре основные модели организации профильного обучения.

1. В рамках одного общеобразовательного учреждения действуют несколько профильных классов. Эта модель начала складываться еще в 1990-е годы.

2. Организация однопрофильных школ старшей ступени, то есть учащиеся 10-11-х классов готовятся по одному и единому для всех профилю. Постепенно формируются новые типы образовательных учреждений – школы третей ступени.

3. Профильное обучение на основе индивидуальных учебных планов учащихся. На старшей ступени учащимся предлагается несколько учебных курсов независимо от того, связаны ли они общей направленностью. Можно выбрать и математику, и литературу одновременно, что позволяет под одно определение подвести название профиля для такого ученика. Эти школы работают по сложному расписанию.

4. Сетевое взаимодействие школ. Этот вариант наиболее характерен для сельских образовательных учреждений. Учащимся предлагается выбрать учебный курс не только в школе, но и за ее пределами. Иными словами, ученик получает образование фактически в нескольких учебных заведениях, а часть курсов осваивает дистанционно [8].

1.3 Обзор профилей по ФГОС

В основной школе основным направлением дифференциации является уровневое обучение, которое сохраняет свою значимость и в старших классах. Однако, на старшей ступени школы приоритет отдается использованию разнообразных форм профильного изучения предметов. Стоит отметить, что основная школа является обязательной, в то время как старшая школа – профильной.

В настоящее время идея становления отечественной профильной школы привлекает внимание методистов и учителей. Стоит отметить, что профильная школа не является профессиональной, а ее задача заключается в том, чтобы дать общее среднее образование с ориентацией на определенную сферу деятельности, к которой учащиеся определенной группы имеют большую склонность.

Базовые общеобразовательные курсы – курсы федерального и регионального компонента, обязательные для всех учащихся во всех профилях обучения. Набор этих курсов должен быть функционально полным (с точки зрения реализации задач общего образования), но минимальным.

В «Концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования» предлагается следующий набор обязательных общеобразовательных курсов (образовательных областей): математика, русский язык и литература, иностранный язык, история, физическая культура, а также интегрированные курсы обществознания для естественно-математического, технологического профилей, естествознания – для гуманитарного, филологического, социально-экономического профилей.

Профильные общеобразовательные предметы – это курсы повышенного уровня, углубляющие базовые общеобразовательные предметы [21].

Школа имеет обязательство обеспечить реализацию учебного плана, включающего один или несколько профилей обучения. Для этого, образовательная организация проводит анализ предпочтений учеников, чтобы определить, какие профили будут реализовываться. Важно отметить, что при изучении профильных предметов учитель и ученик работают на достижение знаний и умений, установленных федеральным государственным стандартом среднего общего образования.

Перечень профилей, которые может предложить школа обучающимся на среднем уровне образования следующий (п.18.3.1 Федеральный государственный образовательный стандарт (далее – ФГОС) среднего общего образования утв. Приказом Министерства образования и науки РФ от 17.05.2012 года № 413):

1. *Естественнонаучный.* Профильные предметы — математика и начала математического анализа, геометрия, химия, биология.

2. *Гуманитарный.* Профильные предметы — русский язык и литература, иностранный язык, обществознание, история, право.

3. *Социально-экономический.* Профильные предметы — математика и начала математического анализа, экономика, право, география, геометрия.

4. *Технологический профиль.* Профильные предметы — алгебра и начала математического анализа, геометрия, физика, информатика.

5. *Универсальный.* Данный профиль подходит тем обучающимся, которые не определились с выбором профессии, сфера интересов ребенка не вписывается в рамки других профилей. Универсальный профиль позволяет обучающемуся ограничиться только изучением базовых предметов, не исключая углубленного изучения предметов. Требования ФГОС среднего общего образования выбрать 3-4 предмета для углубленного изучения не распространяются на универсальный профиль [21].

Достижение выпускниками уровня требований государственного образовательного стандарта по базовым общеобразовательным и профильным предметам определяется по результатам единого государственного экзамена.

Математика входит в число обязательных учебных предметов, однако она может иметь разный удельный вес в общеобразовательной подготовке ученика по времени, отводимого на ее изучение, а также по глубине и охвату рассматриваемого материала. В соответствии с общими целями обучения математике выделяются разделы, общие для всех профилей обучения: числа, уравнения, функции и их графики, геометрические величины и их измерения, начало теорий вероятностей и статистики.

Теоретические и экспериментальные исследования позволили сформулировать *общие требования к формированию содержания математического образования и построению учебно-методического комплекса*, реализующего профильную дифференциацию обучения математике в общеобразовательной школе:

1) изучение математики является обязательным для профильной средней школы любого направления;

2) в программу по математике должны включаться дополнительные разделы, полезные для применения в будущей профессии;

3) содержание математики имеет некоторое общее ядро;

4) все виды пособий по математике для учащихся различных направлений должны иметь качественные различия по методическим подходам, языку, системам упражнений [9].

В соответствии с базисным учебным планом, на изучение математики в старшей профильной школе отводиться 4 или 6 часов в неделю в зависимости от уровня ее представления в том или ином профиле. Обобщим данные базисного учебного плана, программ и стандартов в виде Таблице 1.

Таблица 1 – Данные базисного учебного плана

Профиль ФГОС СОО	Количество часов (в неделю) на изучение математики
Технологический	6 часов
Естественно – научный	6 часов
Социально экономический	6 часов
Гуманитарный	4 часа
Универсальный	4 часа

Место учебного предмета «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» в учебном плане.

Обязательное изучение Математики: алгебры и начал математического анализа, геометрии в 10 классе (углубленный уровень) предусматривает ресурс учебного времени в объеме 204 часа (6 часов в неделю), в 11 классе (углубленный уровень) – в объеме 198 часов (6 часов в неделю). Итого 402 часа.

Учебно-методические комплексы для углубленного изучения математики в средней школе:

1. Мерзляк, Поляков, Номировский Алгебра и начала математического анализа. Геометрия (углубленный уровень).

2. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа.

3. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа. Геометрия (базовый и углубленный уровни) и др.

Требования к предметным результатам освоения *базового курса* математики должны отражать:

1) сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;

2) сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;

3) владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

4) владение стандартными приёмами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;

5) сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа;

6) владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;

7) сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в

реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;

8) владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач.

Требования к предметным результатам освоения *углубленного курса* математики должны включать требования к результатам освоения *базового курса и дополнительно* отражать:

1) сформированность представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений;

2) сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;

3) сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат;

4) сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей;

5) владение умениями составления вероятностных моделей по условию задачи и вычисления вероятности наступления событий, в том числе с применением формул комбинаторики и основных теорем теории вероятностей; исследования случайных величин по их распределению [19].

Предметные результаты освоения основной образовательной программы для учебных предметов на углубленном уровне ориентированы преимущественно на подготовку к последующему профессиональному образованию, развитие индивидуальных способностей обучающихся путем более глубокого, чем это предусматривается базовым курсом, освоением основ наук, систематических знаний и способов действий, присущих данному учебному предмету [22].

1.4 Профессиональная ориентация старшеклассников и её особенности

Профориентация – это система психолого-педагогических, медицинских и государственных мероприятий, помогающих человеку, вступающему в жизнь, научно обоснованно и устойчиво избрать свою профессию, с учетом, как потребностей общества, так и своих интересов и способностей [1].

В нашей стране в последние годы были проведены исследования, благодаря которым формирование профессиональной ориентации понимается как научно-практическая система деятельности на школе, в семье, на производственных коллективах, в учреждениях профессионально-технического, высшего, среднего и специального образования, а также в культурных учреждениях. Они работают на достижение соответствующей особенностей личности школьника требованиям выбранной профессии.

Работа по профессиональной ориентации начинается с младших классов, где школа обеспечивает высокий уровень общего образования учащихся, и формирует у них моральную готовность трудиться. Школа также создает начальные трудовые и профессионально важные навыки, что является основой для сознательного выбора профессии.

В современном мире особое значение приобретает обоснованный выбор профессии. Ведь средняя школа не только обеспечивает общеобразовательную подготовку, но и дает профессиональный базис. Проведение профессиональной ориентации в процессе учебной деятельности важно для успешного выбора карьерного пути, ведь необходимо обеспечить обучающихся конкретными знаниями о профессиональных возможностях. Это можно добиться путем профессионального просвещения, которое поможет развить интересы к различным видам трудовой деятельности, способности и мотивы выбора. Такой подход способствует формированию положительного отношения к избирательному труду [1].

В проведении профориентации огромную роль играет профессиональная консультация, направленная на предоставление учащимся обоснованных рекомендаций по выбору профессии и активизацию их собственной деятельности в поиске профессионального призвания. Содержание консультации определяется взаимодействием активного профессионального самоопределения школьника и психолого-педагогического руководителя, который играет важную роль в этом процессе. Кроме того, важным направлением профориентации является профориентационный отбор, который направлен на выявление пригодности человека к конкретному виду труда.

Заключительный этап профориентации – профессиональная адаптация личности. Это сложный процесс: человек овладевает необходимыми профессиональными умениями и навыками конкретной профессиональной деятельности на основе включения его в систему производственных и межличностных отношений.

Не только возрастные особенности старшеклассников играют роль в выборе профессии. Старшеклассник принимает во внимание сведения не только об особенностях различных профессий, но и массу другой информации.

По мнению Е. А. Климова существует 8 углов ситуации выбора профессии:

– позиция старших членов семьи;
– позиция товарищей, подруг (сверстников);

– позиция учителей, школьных педагогов, классного руководителя;

– личные профессиональные планы;

– способности обучающихся;

– уровень притязания на общественное признание;

– информированность – важная, неискаженная информация – важный фактор выбора профессии;

– склонности проявляются и формируются в деятельности. Сознательно включаясь в разные виды деятельности, человек может менять свои увлечения, а значит и направления. Для старшеклассника это важно, так как профессиональные увлечения – путь к будущему [1].

Профессиональная направленность обучения математике – это ориентация содержания, методов и форм обучения на применение математики в профессиональной деятельности. Она помогает обучающимся определить свои профессиональные интересы, расширить и углубить знания по основам математики, а также подготовиться к дальнейшему математическому образованию. Однако на этапе школьного обучения еще сложно говорить о конкретных профессиях. Поэтому важнее говорить о формировании у обучающихся способностей к поиску решений практических задач с использованием математических знаний, о навыках интеграции знаний из разных предметов, и о способности строить математические модели различных процессов и явлений [9].

1.5 Внеурочная деятельность как компонент ФГОС

Внеурочная деятельность (в рамках реализации ФГОС) – это обязательная образовательная деятельность, организуемая участниками образовательного процесса, осуществляемая на основе вариативной составляющей базисного учебного (образовательного) плана в формах, отличных от классно-урочной системы обучения, и направленная на достижение планируемых результатов освоения основной образовательной программы.

К внеурочной работе относятся разнообразные формы обучения и воспитания, реализуемые во внеурочное время под руководством учителя.

Внеурочная работа – естественное продолжение работы на уроке или же, наоборот, подготовка к усвоению нового программного материала. В любом случае она является составной частью учебного процесса, хотя в отдельных своих формах имеет отличные от урока дидактические задачи [19].

Основная цель заключается в том, что внеурочная деятельность, как и деятельность обучающихся в рамках уроков направлена на достижение результатов освоения основной образовательной программы. Но в первую очередь – это достижение личностных и метапредметных результатов. Это определяет и специфику внеурочной деятельности, в ходе которой обучающийся не только и даже не столько должен узнать, сколько научиться действовать, чувствовать, принимать решения и др. Если предметные результаты достигаются в процессе освоения школьных дисциплин, то в достижении метапредметных, а особенно личностных результатов – ценностей, ориентиров, потребностей, интересов человека, удельный вес внеурочной деятельности гораздо выше, так как ученик выбирает ее исходя из своих интересов, мотивов.

В процессе внеурочной работы по математике решаются следующие основные *дидактические задачи:*

– вырабатывание интереса к изучению математических дисциплин;

– углубление и расширение математических знаний, умений и навыков учащихся;

– развитие логического мышления, математической зоркости, математической интуиция и смекалки;

– выявление интересов, склонностей, способностей, возможностей учащихся к различным видам деятельности;

– создание условий для индивидуального развития ребенка в избранной сфере внеурочной деятельности;

– формирование систематических знаний, умений, навыков;

– развитие опыта творческой деятельности, творческих способностей;

– создание условий для реализации приобретенных знаний, умений и навыков;

– развитие опыта неформального общения, взаимодействия, сотрудничества.

Принципы организации внеурочной деятельности:

– выбор оптимальных методов, форм, средств;

– наглядность;

– последовательность;

– доступность;

– научность;

– учет возрастных особенностей и индивидуальных способностей.

Специфической чертой внеурочной работы по математике, с учетом решаемых в ней дидактических задач, а также возрастных особенностей учащихся, является то, что формы ее организации делятся на постоянные и непостоянные (временные). Исходя из этого, в отличие от традиционного количественного признака при классификации форм обучения (групповые, массовые, индивидуальные, индивидуально-групповые формы), в качестве главного, конститутивного классификационного признака применить временную характеристику форм организации внеурочной работы.

Постоянные формы внеурочной работы имеют систематический характер, хотя и ограничены определенными хронологическими рамками. К постоянным формам относятся, например, математический кружок, творческая группа математиков, научное математическое общество школьников, математическая лаборатория, школа юного математика и др.

Временные формы внеурочной работы приурочены к определенному отрезку учебного года – проведению предметной декады (недели), концу четверти, полугодия и т.д. Эти формы выступают в качестве фрагмента учебного процесса, дополняя и оживляя его. К временным формам относятся, например, математический вечер, математическая олимпиада, математический бой, математический КВН и др. По своей дидактической задаче временные формы имеют приоритетно диагностический характер [19].

Внеурочная деятельность в математическом образовании организуется по следующим *направлениям:*

– реализация курсов внеурочной деятельности (в том числе «курсы по выбору»);

– создание индивидуальных учебных планов для детей с особыми образовательными потребностями;

– организация тематических каникулярных лагерных смен, летних школ;

– организация деятельности детских общественных объединений;

– реализация социальных и учебно-исследовательских проектов [21].

В качестве организационного механизма реализации внеурочной деятельности в образовательном учреждении рекомендуется использовать *план внеурочной деятельности*. Под планом внеурочной деятельности следует понимать нормативный документ образовательного учреждения, который определяет общий объем внеурочной деятельности обучающихся, состав и структуру направлений внеурочной деятельности по годам обучения или для ступени общего образования.

План реализации курсов внеурочной деятельности обучающихся включает в себя предметные кружки, факультативы, ученические научные общества, школьные олимпиады по предметам программы средней школы.

Структура программы курсов внеурочной деятельности состоит из:

1) результатов освоения курса внеурочной деятельности;

2) содержания курса внеурочной деятельности с указанием форм организации и видов деятельности;

3) тематического планирования (с учётом количества часов по каждой теме) (пункт 18.2.2 ФГОС среднего общего образования) [19].

В старшей школе «внеурочная деятельность» должна поддерживать профиль и может быть реализована за счёт учебных предметов.

Для проведения внеурочных занятий целесообразно формировать группы из обучающихся класса (параллели), уровня среднего общего образования, выбравших одинаковый профиль.

Примерное соотношение компонентов плана внеурочной деятельнос ти определяется решением общеобразовательной организации, традициям, актуальными задачами реализации основной образовательной программы среднего общего образования (далее – ОПП СОО).

Ориентиром для общеобразовательной организации может быть такое соотношение: 1-2 часа в неделю на курсы, обеспечивающие образовательные запросы обучающихся.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В СТАРШИХ КЛАССАХ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

2.1 История введения вероятностной линии в школьном курсе математики

В России XIX века началось обсуждение о введении основ теории вероятностей в школьный курс. Прогрессивную позицию российской школы в этом вопросе обуславливали серьезные научные разработки отечественных ученых в этой области. Россия внесла значительный вклад в становление и развитие теории вероятностей, что было отмечено зарубежными учеными, называющими ее «русской наукой».

Уже в первой половине XIX века преподаватель Царскосельского лицея Н. Т. Щеглов в своем школьном учебнике алгебры предлагает для изучения такие вопросы теории вероятностей: «Простая или абсолютная вероятность. Относительная вероятность. Вероятности сложные. Вероятности для явлений одно другим заменяемых. Вероятности явлений в повторяемых опытах». В учебнике даются первоначальные представления об этих понятиях, разбираются примеры с решениями.

Активным обсуждением планов и программ изучения основ теории вероятностей в средних учебных заведениях характеризуется в России начало XX века, которое проводилось в рамках общей широкой дискуссии по реформированию школьного математического образования. Потребность в таком обновлении школьного курса с включением вероятностно-статистического материала осознавалась не только математиками, но и многими представителями естественных наук. Так, план учебного предмета теории вероятностей для средних учебных заведений, разработанный П.С.Фроловым, был опубликован в 1902 году в «Дневнике XI съезда русских естествоиспытателей и врачей». А уже на XIII съезде рассматривались две программы введения вероятностно-статистического материала в школу: программа-минимум и программа-максимум [3].

В советский период также не раз в повестку дня ставился вопрос о включении вероятностно-статистического материала в курс математики средней школы. Уже в 1919 году в объяснительной записке к программе второй ступени Единой трудовой школы-коммуны для физико-технических групп говорится, что «теория вероятностей должна войти в курс математики» со ссылкой на активное использование статистического метода в современной физике.

Понятие о вероятности явлений, сложении и умножении вероятностей, о законе больших чисел, элементы математической статистики, закон случайных ошибок — все это обозначено в программе по математике для школ второй ступени 1925 года. Одновременно продолжалось обсуждение в педагогической среде путей изучения вероятности и статистики в школе, публиковались проекты программ и предлагались методические пути их реализации. Тем не менее, несмотря на активные дискуссии и разработки, никаких реальных попыток включить этот материал в массовую школу не предпринималось.

В 1960-е годы началась реформа математического образования, которую возглавили выдающиеся российские математики А. Н. Колмогоров, А. Я. Хинчин, Б. В. Гнеденко, А. И. Маркушевич, И. М. Яглом. В рамках этой реформы обсуждалось включение элементов теории вероятностей в обязательный курс математики. Некоторые известные математики, такие как А. И. Маркушевич и И. Г. Журбенко, написали книги и статьи, предпринимая попытки объяснения основных идей и приложений теории вероятностей для школьников. Одновременно были опубликованы работы ученых-методистов, которые стремились создать методику преподавания теории вероятностей в школьном курсе. Однако мнения экспертов разделились на две группы. Одни методисты предлагали создать отдельный курс, посвященный теории вероятностей, в то время как другие предлагали сочетать комбинаторно-вероятностную линию. Второе предложение имело целью демонстрацию тесной связи между комбинаторикой и теорией вероятности.

Материал оказался трудным для восприятия учащимися, метод представления материала не был разработан и не способствовал развитию логического мышления, в том числе, и вероятностной интуиции учащихся [18].

Вследствие реформ школьного образования элементы теории вероятностей и статистики были включены в программы профильных классов в 80-е годы. В 1990-х годах реализовывается внедрение элементов теории вероятностей в обязательный курс школьной математики и первые попытки ввести элементы вероятности в учебники для средней школы. Первый учебник, который целиком посвятили теории вероятностей, создали: Е. А. Бунимович и В. А. Булычев. Однако изложение вероятностного и статистического материала в них не носило систематического характера.

В 2003 году было принято решение о включении элементов теории вероятностей и статистики в школьный курс математики общеобразовательной школы. К этому моменту элементы теории вероятностей и статистики уже более десяти лет в разрозненном виде присутствовали в известных школьных учебниках алгебры для разных классов, и в виде отдельных учебных пособий. Однако в изложение вероятностно-статистического материала в них, как правило, не носило систематического характера, а учителя, чаще всего, не обращались к этим разделам, не включали их в учебный план. Принятый Министерством образования в 2003 году документ предусматривал постепенное, поэтапное включение этих разделов в школьные курсы, давая возможность преподавательскому сообществу подготовиться к соответствующим изменениям [6].

С 2007 года теория вероятностей стала неотъемлемой частью образовательной программы в школах. Согласно государственным стандартам первого поколения, начиная с 2010 года задачи стохастической линейки включены в контрольно-измерительные материалы по математике.

В 2015 году Федеральным учебно-методическим объединением по общему образованию была принята «Примерная основная образовательная программа основного общего образования», в которой теория вероятностей заняла важное место, как в научной, так и в прикладной деятельности.

В современном мире трудно представить, что человеческая деятельность в любой области общества может быть эффективной без достаточного уровня понимания случайных событий и их вероятностей. Закономерности теории вероятностей не только имеют теоретическую ценность, но и широко применяются на практике.

2.2 Анализ учебно-методических комплексов с точки зрения исследуемой проблемы

В данном параграфе был проведен анализ учебно-методических комплексов, используемых в современной российской школе на углубленном уровне в 10-11 классах. Авторами учебников нами были выбраны: Мерзляк А. Г., Никольский С. М. и Мордкович А. Г.

Также были рассмотрены методические пособия к данным учебникам.

Учебники были проанализированы на предмет изложения темы «Элементы теории вероятностей» в средней школе. Были рассмотрены главы учебников, содержащие вероятностную линию. Подробно расписано содержание параграфов, очередность тем, включающих вероятностную линию.

Результаты сравнительного анализа школьных учебников представлены в Таблице 2.

Таблица 2 – Анализ школьных учебников

Класс	Учебники		
	Мерзляк А. Г., Номировский Д. А., Поляков В. М. (углубленный уровень)	Никольский С. М., Потапов М. К., Решетников Н. Н., Шевкин А. В. (базовый и профильный уровни)	Мордкович А. Г., Семенов П. В. (базовый и углубленный уровни)
10		Глава III. Элементы теории вероятностей. § 12. Вероятность события 12.1. Понятие вероятности события 12.2. Свойства вероятности событий § 13*. Частота. Условная вероятность 13.1*. Относительная частота события 13.2*. Условная вероятность. Независимые события § 14*. Математическое ожидание. Закон больших чисел. 14.1*. Математическое ожидание 14.2*. Сложный опыт 14.3*. Формула Бернулли. Закон больших чисел.	Глава 8. Комбинаторика и вероятность. § 47. Правило умножения. Перестановки и факториалы § 48. Выбор нескольких элементов. Биномиальные коэффициенты § 49. Случайные события и их вероятности.
11	Глава 4. Элементы теории вероятностей. § 17. Элементы комбинаторики и Бином Ньютона § 18. Аксиомы теории вероятностей § 19. Условная вероятность § 20. Независимые события § 21. Случайная величина § 22. Схема Бернулли. Биномиальное распределение § 23. Характеристики случайной величины § 24. Математическое ожидание суммы случайных величин.		Глава 5. Элементы теории вероятностей и математической статистики. § 22. Вероятность и геометрия § 23. Независимые повторения испытаний с двумя исходами § 24. Статистические методы обработки информации § 25. Гауссова кривая. Закон больших чисел.

Рассмотрим построение вероятностной линии в некоторых учебно-методических комплектах для углубленного изучения математики.

В учебнике С. М. Никольского с соавторами под теорию вероятностей заявлена отдельная глава, но фактически один из трёх параграфов наполнен статистическим содержанием. В рамках изучения темы «Элементы теории вероятностей» в 10 классе закрепляются такие понятия, как единственно возможные, равновозможные, достоверные, невозможные и несовместные события. Далее последует изложение классического определения вероятности и свойств вероятностей событий. Рассматриваются условная и безусловная вероятности. Кроме того, уделяется большое внимание математическому ожиданию, которое определяется как сумма произведений значений случайной величины x на их вероятности. Затем рассматривается формула Бернулли.

Задание 12.1

«В ящике лежат 20 шаров, отличающихся только цветом: 7 белых и 13 черных. Из ящика наудачу вынимают один шар.

Какова вероятность события:

A – «вынут белый шар»;

B – «вынут черный шар»;

C – «вынут красный шар»;

D – «вынут белый или черный шар»?»

Стоит отметить, что в 11 классе у автора Никольского С. М данная тема не рассматривается [17].

В учебнике А. Г. Мордковича с соавторами за 10 класс теоретический материал по теории вероятностей представлен в Главе 8 «Комбинаторика и вероятность» и занимает один параграф из трёх. В § 49 «Случайные события и их вероятности» автором даётся классическая вероятностная схема, с большим количеством примеров, а также само определение классической вероятности, суммы и произведения событий. Рассматриваются теоремы о вероятности суммы (совместных и несовместных) и произведения (зависимых и независимых) событий. После даются формулы для нахождения противоположного события, также в этом же параграфе даётся *теорема:* пусть p – вероятность события A в некотором испытании и пусть это испытание независимым образом повторяют n раз.

Тогда:

– вероятность того, что событие A наступит в каждом из n повторений равна p^n;

– вероятность того, что событие A наступит хотя бы в одном из n повторений равна $1-(1-p)^n$.

Данная теорема применяется при решении одного из типов задачи № 4 в ЕГЭ по профильной математике [13].

В учебнике А. Г. Мордковича за 11 класс теоретический материал представлен в Главе 5 «Элементы теории вероятностей и математической статистики». Название этой главы отсылает нас к трём разделам математической науки. Несмотря на то, что методы, описанные в них, часто используются при решении одних и тех же практических задач, эти разделы являются достаточно самостоятельными и их понятийные аппараты не являются тождественными. В § 22 «Вероятность и геометрия», повторяется классическая схема вероятности, а также её определение, которое было рассмотрено в 10 классе. Даётся правило для нахождения геометрических вероятностей. В § 23 «Независимые повторения испытаний с двумя исходами» рассматривается: теорема Бернулли с большим количеством примеров.

Задание 54.9

«Два стрелка независимо друг от друга по одному разу стреляют в мишень. Вероятности попадания в мишень по отдельности равны 0,8 и 0,6.

Найти вероятность того, что мишень:

– будет поражена дважды;

– не будет поражена ни разу;

– будет поражена хотя бы один раз;

– будет поражена ровно один раз» [14].

В учебнике Мерзляка А. Г. с соавторами в § 18 «Аксиомы теории вероятностей» рассматриваются такие понятия как: элементарное событие, пространство элементарных событий, случайное событие и его вероятность, а также достоверное и невозможное событие. Даётся определение несовместного события с примерами. После этого рассматривается объединение, пересечение и дополнение событий с визуальными примерами. Предлагается рассмотреть такие утверждения как: вероятность объединения двух совместных и несовместных событий, вероятность достоверного события. К данному параграфу предлагается большое количество задач на закрепления материала. § 19 «Условная вероятность» начинается с рассмотрения опыта, заключающегося в том, что игральный кубик бросают дважды. Ставится вопрос, изменится ли вероятность события, если при первом подбрасывании выпала шестёрка. Данный пример подводит обучающихся к понятию условной вероятности. В параграфе говорится о том, что при решении задач на условную вероятность удобно использовать древовидные схемы – дендрограммы. После формулы условной вероятности рассматривается формула полной вероятности и формула Байеса. В § 20 «Независимые события» также приводится пример, который подводит к определению независимых событий. В § 21 «Случайная величина» даётся определение случайной величины с примерами, показывающими способы решения таких задач. § 22 «Схема Бернулли. Биномиальное распределение» начинается с примера, который подводит нас к теореме Бернулли и рассматривается большое количество задач для закрепления материала по данной теме. В § 23 «Характеристики случайной величины» даётся определение математического ожидания, показывается процесс создания распределения вероятностей случайной величины. После этого рассматривается понятие дисперсии с примерами, показывающими применение данного понятия.

Пример 1 (§ 23)

«Страховой полис предполагает выплаты в случае незначительного повреждения автомобиля (поломка кондиционера или повреждение лобового стекла) или его угона. В случае незначительного повреждения размер выплат составит 25 тысяч рублей, а в случае угона – 500 тысяч рублей. По опыту прошлых лет известно, что незначительные повреждения наступают с вероятностью 6 %, а угон происходит с вероятностью 0,1 %. На продаже каждого полиса страховая компания планирует заработать по 3 тысяч рублей. Определите, какую цену полиса должна назначить за него страховая компания» [12].

Выводы, сделанные в ходе анализа:

1. Для включения элементов теории вероятностей в практику преподавания математики создаются реальные условия. Имеется учебно-методическое обеспечение, позволяющее включать элементы теории вероятностей в учебный план.

2. Основываясь на данном анализе, можно сделать вывод, что в учебниках Никольского С. М., Мерзляка А. Г. и Мордковича А. Г. тема «Элементы теории вероятностей» является одной из ведущих.

3. Каждый автор имеет различный подход к изучению элементов стохастической линии. В учебнике Мерзляка А. Г. данная тема рассматривается более обширно, включает в себя большое количество понятий, теорем и примеров. Делается упор на визуальное представление условия задачи. В учебниках Мордковича А. Г. рассматриваются теоремы (в общем виде), которые предполагают своё применение при решении задачи № 4 в ЕГЭ по профильной математике. В учебнике Никольского С. М. имеется довольно обширный понятийный аппарат, уделяется большое внимание теме: «Математическое ожидание».

Перейдём к рассмотрению методического пособия к учебнику Никольского С. М. для 10 класса, авторами которого являются М. К. Потапов, А. В. Шевкин. на предмет описания темы «Элементы теории вероятностей». Данное методическое пособие автор позиционирует, как книга для учителя. Пособие разделено по главам и параграфам согласно оглавлению учебника. Никольский пишет, что Глава 3 «Элементы теории вероятностей» совершенно новый раздел в курсе математики средней школы. Тем самым выполнено требование ФГОС о формировании у обучающихся умения воспринимать и критически оценивать информацию, представленную в различных формах, понимать вероятностный характер многих реальных зависимостей, решать простейшие вероятностные задачи прикладного характера. Также он отмечает, что данные вопросы ранее изучались только в физико-математических классах, а теперь данный материал является общеобязательным для всех. Автор предлагает примерное тематическое планирование к каждой главе. В каждой главе представлена кратная теория и решение задач по темам с подробными комментариями. Стоит отметить, что каждая глава учебников для 10 и 11 классов завершается историческими сведениями [20].

Рассмотрим методическое пособие Мордковича А. Г. для 10 класса (профильный уровень).

Цель данной книги – оказать методическую помощь учителя, работающим по данному комплекту. В методическом пособии имеются тематические планирования из расчёта 4, 5 и 6 часов в неделю. На § 49 «Случайные события и их вероятности» выделено часов (при 6 часах в неделю). Материал данного параграфа преследует различные учебные цели. С одной стороны – это знакомство с новым понятием вероятности случайного события. С другой, новый вероятностный материал является тем самым полигоном, на котором закрепляются комбинаторные задания, а также является подспорьем к введению темы: «Испытания Бернулли» в 11 классе [15].

Рассмотрим методическое пособие Мордковича А. Г. для 11 класса (профильный уровень).

На тему «Элементы теории вероятности и математической статистики» выделяется 13 часов из учёта 6 часов в неделю.

Автор отмечает, что в конце 11 класса основное внимание большинства школьников, обучающихся математике на профильном уровне, сосредоточено, скорее всего, на подготовке к выпускным школьным и вступительным экзаменам в университеты. Поэтому, наряду с выполнением необходимых положений федерального компонента государственного стандарта общего образования по математике в его стохастической части, авторы максимально старались сблизить качественно новый, стохастический, материал с привычным школьным курсом алгебры и начал математического анализа [16].

Далее перейдём к рассмотрению методического пособия Мерзляка А. Г. Данное методическое пособие адресовано учителям, работающим по учебнику «Математика: алгебра и начала математического анализа. 11 класс» авторов А. Г. Мерзляка, Д. А. Номировского, В. Б. Полонского, М. С. Якира.

В данном пособии рассмотрены вопросы, связанные с организацией, осуществлением и контролем учебного процесса по алгебре и началам математического анализа в 11 классе.

В разделе «Примерное поурочное планирование учебного материала» приведены рекомендации по распределению учебного времени на изучаемые темы и контрольные работы. Чтобы углубить знания учеников в теме «Элементы теории вероятности», рекомендуется выделить на нее 25 часов из общего числа учебных часов.

Раздел «Организация учебной деятельности» содержит технологические карты на каждую тему курса (за исключением контрольных работ и уроков по повторению и систематизации учебного материала), которые помогут учителю организовать эффективный учебный процесс. Кроме того, раздел «Контрольные работы» содержит 6 контрольных работ с 4 вариантами каждой. Предоставление такого количества материала поможет учителю организовать объективный и эффективный контроль знаний учеников.

Автор выделяет, в данной теме можно провести аналогию между операциями над событиями и операциями над множествами. Это сделает понятным для учащихся многие практические аспекты применения операций над событиями для вычисления вероятностей. Изложение теоретического материала сопровождается примерами, причём происходит переход от «игровых», с точки зрения обучающихся, к примерам, содержащим описание реальных событий и принятия экономических решений. Автор отмечает, что в параграфе «Условная вероятность» рассматривается удобный и наглядный метод решения вероятностных задач с помощью построения дендрограмм (древовидных диаграмм). Обычно учащиеся легко воспринимают идею построения дендрограмм и с удовольствием их используют [10].

Из анализа математических пособий, можно сделать вывод, что они могут различаться по содержанию и изложению, но самое главное – это основное назначение данных пособий. Оно говорит, что пособие направлено на помощь учителю в организации учебной деятельности по математике. Одной из самых важных задач является создание поурочных разработок, которые направлены на помощь молодым учителям в выборе наилучшего подхода к организации урока, соответствующего новейшим требованиям, а также для преподавателей, работающих с данным учебником первый год.

2.3 Анализ материалов ЕГЭ по теме «Элементы теории вероятностей»

Математика является одним из общеобязательных экзаменов, который обучающиеся сдают каждый год.

Экзаменационная работа профильного уровня по математике распределена на две части, которые имеют разные уровни сложности и отличаются по числу заданий и форме ответов.

В профильном ЕГЭ по математике на текущий момент предлагается решить в общей сложности 18 заданий, из которых 11 относятся к первой части и 7 ко второй.

Участникам экзамена предоставляется 3 часа 55 минут на выполнение заданий.

С 2012 года в ЕГЭ по математике начали появляться задания, связанные с теорией вероятностей. С каждым годом число типов таких заданий увеличивается, и на данный момент эта тема присутствует в каждом экзаменационном варианте.

Проанализируем теоремы и формулы, которые встречаются в заданиях № 3 и № 4 ЕГЭ.

Задание № 3:

- формула классической вероятности;
- формула вероятности противоположных событий.

Задание № 4:

- теоремы сложения (совместных и несовместных) событий;
- теоремы умножения (зависимых и независимых) событий;
- формула условной вероятности;
- формула Бернулли;
- формула полной вероятности;
- формула Байеса;
- задания на комбинацию нескольких формул (теорем).

Оценив материалы ЕГЭ 2022-2023 годов, мы выявили, что в заданиях профильного уровня по математике встречаются множество типовых задач, связанных с теорией вероятностей.

Рассмотрим некоторые типовые задания, которые могут встретиться в экзаменационных вариантах ЕГЭ, связанные с темой «Элементы теории вероятностей».

Вариант досрочного ЕГЭ (резервный день) по математике профиль 2023

Задание 3

В фирме такси в наличии 40 легковых автомобилей: 22 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на бортах, остальные – жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

Решение

По формуле классической вероятности:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{22}{40} = \frac{11}{20} = 0{,}55,$$

где P – вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

Ответ: 0,55.

Задание 4

Игральную кость бросили два раза. Известно, что пять очков не выпали ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков окажется равна 7» (см. Занятие 1, задание 5).

Вариант реального ЕГЭ (Центр) по математике профиль 2023

Задание 3

В чемпионате по гимнастике участвуют 60 спортсменок: 17 из США, 28 из Мексики, остальные – из Канады. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием.

Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Канады.

Решение

Найдём количество спортсменов из Канады: m = 60 – 17 – 28 = 15.

По формуле классической вероятности:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} = 0{,}25,$$

где P – вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Канады.

Ответ: 0,25.

Задание 4

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,04. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,97. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,03. Найдите вероятность того, что случайно выбранная из упаковки батарейка будет забракована.

Решение

Ситуация, при которой батарейка будет забракована, может сложиться в результате событий:

A = {батарейка действительно неисправна и забракована справедливо};

B = {батарейка исправна, но по ошибке забракована}.

$P(A) = 0{,}04 \cdot 0{,}97 = 0{,}0388$, события «батарейка неисправна» и «батарейка забракована» являются независимыми.

Вероятность того, что батарейка неисправна равна: 0,04, следовательно, вероятность того, что батарейка исправна равна: 1 – 0,04 = 0,96.

$P(B) = 0{,}96 \cdot 0{,}03 = 0{,}0288$, события «батарейка исправна» и «батарейка забракована» являются независимыми.

События A и B являются несовместными событиями, вероятность их суммы равна сумме вероятностей эти событий.

По формуле сложения несовместных событий:

$$P\,(A + B) = P\,(A) + P\,(B) = 0{,}0388 + 0{,}0288 = 0{,}0676,$$

где $P\,(A + B)$ – вероятность того, что случайно выбранная из упаковки батарейка будет забракована [23].

Ответ: 0,0676.

2.4 Курс внеурочной деятельности «Элементы теории вероятностей» для обучающихся 10-11 классов

2.4.1 Пояснительная записка

Курс внеурочной деятельности составлен для занятий обучающихся профильных классов средней школы, с целью подготовки обучающихся к ЕГЭ и расширению знаний по теме «Элементы теории вероятностей».

В курс внеурочной деятельности входят теоретические и практические материалы для углубленного изучения данной темы и ряд заданий для подготовки к ЕГЭ по профильной математике.

Цель курса внеурочной деятельности: повторение, углубление и систематизация знаний по теме «Элементы теории вероятностей» при подготовке к ЕГЭ.

Задачи:

1) повышение мотивации обучающихся к изучению математики;
2) расширение знаний по теме «Теория вероятностей»;
3) формирование у подростков навыков применения математических знаний для решения задач повышенной сложности;
4) развитие стохастического мышления, овладение различными приемами и методами мышления необходимыми для продолжения образования, для самостоятельной деятельности в области математики.

Формы организации деятельности: занятия интеллектуально-познавательной направленности.

Виды деятельности: практические работы, решение задач повышенной сложности.

Планируемые результаты курса: программа обеспечивает достижение обучающимися следующих предметных, личностных и метапредметных результатов.

Предметные результаты.

В результате прохождения данного курса, обучающиеся должны *знать:*

– элементарное событие;

– случайное событие, вероятность случайного события;

– противоположные события, вероятность противоположного события;

– совместные несовместные события, правило сложения вероятностей;

– условную вероятность;

– зависимые и независимые события, правило умножения вероятностей;

– испытания Бернулли;

– формулу полной вероятности, формулу Байеса;

– формулу математического ожидания;

уметь:

– вычислять вероятность случайного события;

– вычислять вероятность случайного события с использованием графических представлений;

– применять формулу сложения и умножения вероятностей;

– применять формулу Бернулли, формулу полной вероятности и формулу Байеса.

– применять формулу математического ожидания при решении задач.

Личностные результаты:

– формирование системы нравственных межличностных отношений;

– умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры;

– критичность мышления, умение распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта;

– умение контролировать процесс и результат внеучебной математической деятельности.

Метапредметные результаты:

– способность самостоятельно планировать альтернативные пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения познавательных задач;

– умение устанавливать причинно-следственные связи; строить логические рассуждения, умозаключения (индуктивные, дедуктивные и по аналогии) и выводы;

– умение понимать и использовать математические средства наглядности (рисунки, чертежи, схемы и др.) для иллюстрации, интерпретации, аргументации;

– умение выдвигать гипотезы при решении познавательных задач и понимание необходимости их проверки;

– понимание сущности алгоритмических предписаний и умения действовать в соответствии с предложенным алгоритмом;

– умение самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения познавательных математических проблем;

– способность планировать и осуществлять деятельность.

Место курса в учебном плане: данная программа описывает познавательную учебную деятельность в профильных классах средней школы. Программа рассчитана на 14 часов, из расчёта 1 час в неделю.

2.4.2 Тематическое планирование

Приведём тематическое планирование курса внеурочной деятельности в Таблице 3 представленное в виде тем курса, количество часов, отведённых на данные темы и форм проведения уроков.

Таблица 3 – Тематическое планирование курса внеурочной деятельности

№ п/п	Тема занятия	Кол-во часов	Форма проведения урока
1	Основные понятия теории вероятностей. Классическое определение вероятности.	2	Лекция-беседа. Практическая работа.
2	Теорема о сложении вероятностей несовместных событий. Вероятность противоположных событий.	1	Лекция-беседа. Практическая работа.
3	Зависимые и независимые события. Теорема умножения вероятностей. Условная вероятность.	2	Лекция-беседа. Практическая работа.
4	Теоремы о сложении вероятностей совместных событий.	1	Лекция-беседа. Практическая работа.
5	Формула полной вероятности. Формула Байеса.	2	Лекция-беседа. Практическая работа.
6	Формула Бернулли.	1	Лекция-беседа. Практическая работа.
7	Решение задачи № 4 ЕГЭ.	3	Практическая работа.
8	Проверочная работа.	1	Самостоятельная работа.
9	Разбор результатов проверочной работы.	1	Беседа. Практическая работа.
		Всего:	14 часов

2.4.3 Содержание курса внеурочной деятельности

Занятие 1. Основные понятия теории вероятностей. Классическое определение вероятности

Рассмотрим *основные понятия* темы в Таблице 4.

Таблица 4 – Основные понятия

№ п.п.	Понятие	Определение/описание	Пример
1	*2*	*3*	*4*
1	Испытание.	Опыт, эксперимент.	Игральный кубик или монету бросают один или несколько раз.
2	Элементарное событие.	Появление или не появление того или иного исхода испытания.	Выпадение герба при бросании монеты.

Продолжение таблицы 4

1	*2*	*3*	*4*
3	Пространство элементарных событий.	Это множество (конечное или бесконечное), каждому элементу которого соответствует один исход испытания.	При бросании игральной кости пространство элементарных событий представляет собой шестиэлементное множество {1, 2, 3 ,4, 5, 6}.
4	Случайное событие.	подмножество пространства элементарных событий. Иначе – это событие, которое в результате данного испытания может произойти, а может не произойти. Вероятность случайного события *(А)*: $0<P(A)<1$.	Появление четного числа при бросании игрального кубика.
5	Достоверное событие.	Событие, которое обязательно произойдет в данном испытании. Иначе, подмножество пространства элементарных событий достоверного события совпадает с пространством элементарных событий. Вероятность достоверного события *(U)*: $P(U)=1$.	Выпадение герба или решетки при бросании монеты.
6	Невозможное событие.	Событие, которое точно не произойдет в данном испытании. Подмножество элементарных событий невозможного события – пустое множество. Вероятность невозможного события *(I)*: $P(I)=0$.	Выпадение десятки при бросании игрального кубика.
7	Равновозможные исходы.	Исходы в определённом опыте называются равновозможными, если шансы этих исходов одинаковы.	Монета с одинаковой вероятностью упадет одной из своих сторон вверх, на игральной кости выпадет 1 или 6 очков.

Продолжение таблицы 4

1	*2*	*3*	*4*
8	Число размещений из n элементов по k.	Число размещений из n элементов по k – любое упорядоченное k – элементное подмножество n – элементного множества $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$	Выбрать двоих дежурных из четверых, один из которых назначен ответственным, можно 4·3=12 способами.
9	Число сочетаний из n элементов по k.	Число сочетаний из n элементов по k – любое k элементное подмножество n – элементного множества: $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$	Выбрать двоих дежурных из четверых можно: $\frac{4!}{(4-2)!\,2!} = 6.$

Классическое определение вероятности.

Пусть производится испытание, в котором возможно **n** исходов, причем исходы попарно несовместны и равновозможны.

Пусть A – случайное событие данного испытания.

Тогда вероятность события A вычисляется по формуле: $P(A) = \frac{m}{n}$; где m – число исходов, благоприятствующих событию A в данном испытании, n – общее число исходов, возможных в данном испытании.

Замечание: так как $m \leq n$, то вероятность события A – это число, удовлетворяющее неравенству: $0 \leq P(A) \leq 1$ [11].

Задания к уроку

Задание 1

В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) красным, в) чёрным.

Решение

Для использования классического определения вероятности необходима важнейшая предпосылка – возможность подсчета общего количества исходов.

В данном случае имеется урна, содержащая 30 шаров, которая позволяет извлечь любой шар одинаково возможно, образуя таким образом полную группу событий из элементарных исходов. То есть, в результате проведения испытания обязательно будет извлечен один из 30 шаров, т.е. $n = 30$.

Рассмотрим событие *A*, связанное с извлечением белого шара из урны. Данному событию благоприятствуют элементарные исходы: $m = 15$, и по классическому определению вероятность того, что будет извлечен белый шар, равна отношению количества благоприятных элементарных исходов к общему числу элементарных исходов в группе событий:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Рассмотрим событие *B*, связанное с извлечением красного шара из урны. Данному событию благоприятствуют элементарные исходы: $m = 5$, и по классическому определению вероятность того, что будет извлечен красный шар, равна отношению количества благоприятных элементарных исходов к общему числу элементарных исходов в группе событий:

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

Рассмотрим событие *C*, связанное с извлечением чёрного шара из урны. Данному событию благоприятствуют элементарные исходы: $m = 10$, и по классическому определению вероятность того, что будет извлечен чёрный шар, равна отношению количества благоприятных элементарных исходов к общему числу элементарных исходов в группе событий:

$$P(C) = \frac{m}{n} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: а) 0,5; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{1}{3}$.

Задание 2

В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что выпадет хотя бы две решки.

Решение

Пусть *О* – орёл, *Р* – решка. Найдём общее количество возможных исходов: *ООО, ООР, ОРО, ОРР, РРР, РРО, РОР, РРО.*

Следовательно, $n = 8$.

Благоприятными являются исходы: *ОРР, РРО, РРО, РРР*. Следовательно, $m = 4$.

По формуле *классической вероятности:*

$$P = \frac{m}{n} = \frac{4}{8} = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

Задание 3

Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 4, но не дойдя до отметки 7 часов.

Решение

Рассмотрим циферблат на механических часах (рисунок 1).

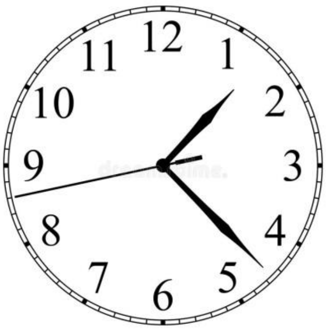


Рисунок 1

Всего на циферблате 12 делений, следовательно, $n = 12$. Между 7 и 4 часами на циферблате имеются три часовых деления, значит $m = 3$.

По формуле *классической вероятности:*

$$P = \frac{m}{n} = \frac{3}{12} = 0{,}25.$$

Ответ: 0,25.

Задание 4

Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнит, что одна из них – ноль, а другая – нечётная. Найти вероятность того, что он наберёт правильный номер.

Решение

Найдём общее количество исходов. Абонент помнит, что одна из последних цифр – ноль, а другая – нечётная. Воспользуемся *методом прямого перечисления исходов.*

(0,1), (0,3), (0,5), (0,7), (0,9)

(1,0), (3,0),(5,0),(7,0), (9,0).

Следовательно, всего вариантов 10. Благоприятствующий исход всего один – это верный номер.

Значит, по *классическому определению вероятности:*

$$P = \frac{m}{n} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$

Ответ: 0,1.

Задание 5

Игральную кость бросили два раза. Известно, что пять очков не выпали ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков окажется равна 7».

Решение

В данной задаче сказано, что игральную кость бросили 2 раза. При первом броске может выпасть от 1 до 6 очков, при втором также. Следовательно, 6·6 = 36 вариантов. Начертим таблицу с 6 строками и 6 столбцами (Таблицы 5-7).

Таблица 5 – Задание № 6 (1)

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

По условию дано, что 5 очков не выпало ни разу, то есть выпадают строка и столбец со значением 5.

Таблица 6 – Задание № 6 (2)

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Исходя из данных таблицы, получается, что количество общих исходов *n = 25*.

Нас интересует вариант, при котором «сумма выпавших очков окажется равна 7».

Таблица 7 – Задание № 6 (3)

	1	2	3	4	5	6
1						+
2						
3				+		
4			+			
5						
6	+					

Следовательно, благоприятных исходов *m = 4*.

По формуле *классической вероятности:*

$$P = \frac{m}{n} = \frac{4}{25} = 0{,}16,$$

где *P* – вероятность события «сумма выпавших очков окажется равна 7».

Ответ: 0,16.

Дополнительные задания

Задание 6

Брошено 8 игральных костей. Найти вероятность того, что на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков.

Решение

В данной задаче также используется формула классической вероятности.

Для того, чтобы найти общее количество исходов, воспользуемся *формулой числа сочетаний из* n *элементов по* k*:*

$$C_6^1 = \frac{6!}{(6-1)!\,1!} = 6.$$

У каждой кости 6 граней, следовательно, n=6. Выпадает только одна грань, следовательно, $k = 1$.

Возведём в 8 степень, так как всего имеется 8 игральных костей.

Исходя из этого, общее количество исходов равно 6^8.

Рассмотрим благоприятствующие исходы, их 6.

(1,1,1,1,1,1,1,1), (2,2,2,2,2,2,2,2), (3,3,3,3,3,3,3,3) и т.д. То есть нам нужны одинаковые цифры на выпавших гранях костей.

По *классическому определению вероятности:*

$$P = \frac{m}{n} = \frac{6}{6^8} = \frac{1}{6^7} \approx 0{,}000004,$$

где P – вероятность того, что на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков.

Ответ: 0,000004.

Задание 7

В коробке 7 красных и 5 синих карандашей. Наудачу взяли три карандаша. Найти вероятность того, что среди выбранных карандашей – ровно 2 красных и 1 синий.

Решение

Найдём общее количество исходов. Всего 7 красных и 5 синих карандашей, следовательно, n = 7 + 5 = 12.

Наудачу взяли три карандаша. Воспользуемся формулой *числа* *сочетаний из n элементов по k.* Общее количество карандашей равно 12, следовательно, *n = 12*. Взяли три карандаша, следовательно, *k = 3*.

По формуле *числа сочетаний из n по k:*

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{(12-3)!3!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{6} = 220,$$

где C_{12}^3 – количество способов извлечь три карандаша из коробки.

Среди выбранных карандашей ровно два красных. Общее количество красных карандашей равно 7, следовательно, *n = 7.* Нас интересует два красных карандаша, значит *k = 2.*

По *формуле числа сочетаний из n элементов по k:*

$$C_7^2 = \frac{7!}{(7-2)!2!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21,$$

где C_7^2 – количество способов извлечь два красных карандаша из коробки.

Среди выбранных карандашей ровно один синий. Общее количество синих карандашей равно 5, следовательно, *n = 5*. Нас интересует один синий карандаш, значит *k = 1.*

По *формуле числа сочетаний из n элементов по k:*

$$C_5^1 = \frac{5!}{(5-1)!\,1!} = 5,$$

где C_5^1 – количество способов извлечь синий карандаш из коробки.

Количество способов выбрать два красных и один синий карандаша из коробки: 21 · 5 = 105 – благоприятные исходы.

По формуле *классической вероятности:*

$$P = \frac{m}{n} = \frac{105}{220} = \frac{21}{44} \approx 0{,}4773,$$

где *P* – вероятность того, что среди выбранных карандашей – ровно 2 красных и 1 синий.

Ответ: $\frac{21}{44} \approx 0{,}4773.$

Домашнее задание

Зарегистрироваться на сайте «Элементы теории вероятностей», повторить формулы и решить задачи из блока «Домашнее задание» по данной теме, выполнив задание на платформе learningapps (рисунки 2-4) [24].

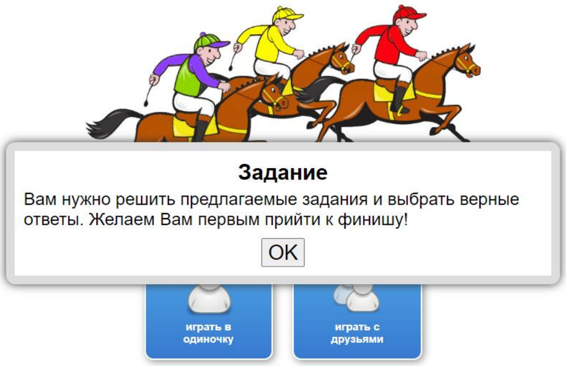


Рисунок 2

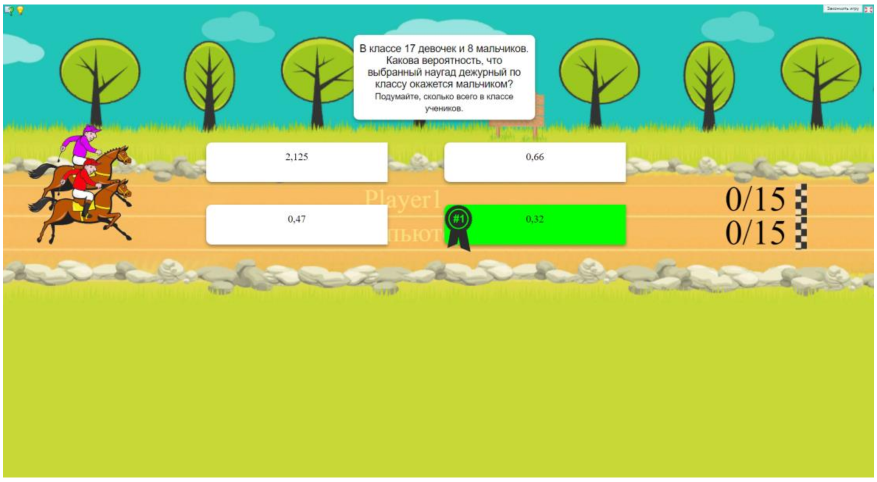


Рисунок 3

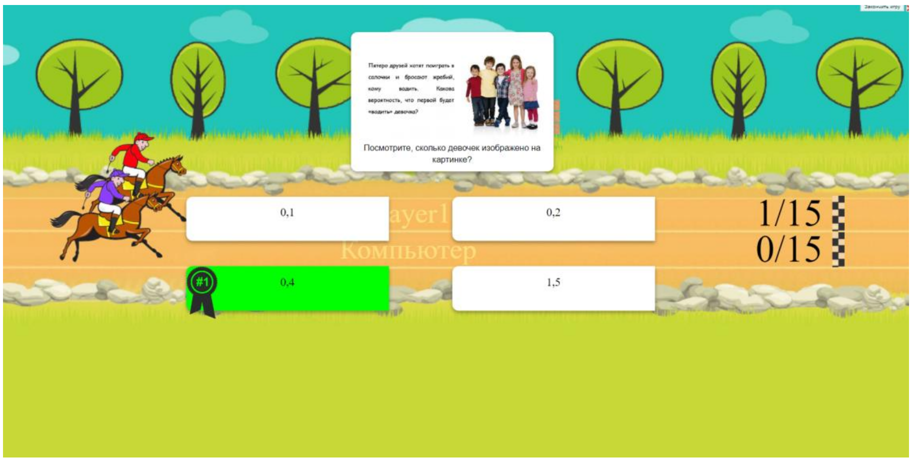


Рисунок 4

Занятие 2. Теорема о сложении вероятностей несовместных событий. Вероятность противоположных событий

Основные понятия

Суммой двух событий A и B, называется событие $A + B$, которое произойдет, если произойдет хотя бы одно из событий A или B.

Несовместные события – это два случайных события, которые в данном испытании не могут произойти одновременно.

Пусть A и B – два несовместных события, тогда вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P\ (A + B) = P\ (A) + P\ (B).$$

Пример:

при однократном бросании монеты одновременное выпадение орла и решки [4].

Одним из следствий данной теоремы является формула о вероятности противоположных событий.

Пусть имеется событие A.

Противоположным событием (по отношению к событию A), называется такое событие, которое не происходит тогда и только тогда, когда A происходит.

Обозначение: $\overline{\mathrm{A}}$.

Формула: $P(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - P(A)$.

Пример:

выпадение нечетного числа очков противоположно выпадению четного числа очков [11].

Задания к уроку

Задание 1

На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Решение

Рассмотрим события:

A = {школьнику достанется вопрос на тему «Вписанная окружность»}.

B = {школьнику достанется вопрос на тему «Параллелограмм}.

P(A) = 0,2.

P(B) = 0,15.

A и B являются несовместными событиями, так как вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет.

A + B = {школьнику достанется вопрос по одной из тем}.

По формуле *вероятности двух несовместных событий:*

$$P\ (A+B) = \ P\ (A) + \ P\ (B) = 0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}35,$$

где $P\ (A+B)$ – вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Ответ: 0,35.

Задание 2

Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит не меньше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение

Рассмотрим события:

A = {чайник прослужит больше года, но меньше двух лет}.

B = {чайник прослужит не меньше двух лет}; *P(B) = 0,89.*

A и B являются несовместными событиями, так как в данном испытании они не могут произойти одновременно, следовательно:

A + B = {чайник прослужит больше года}.

P(A + B) = 0,97.

Нас интересует вероятность: *P(A) – ?*

По формуле *вероятности двух несовместных событий:*

$$P\ (A+B) =\ P\ (A) +\ P\ (B);$$

$$0{,}97 = P(A) + 0{,}89;$$

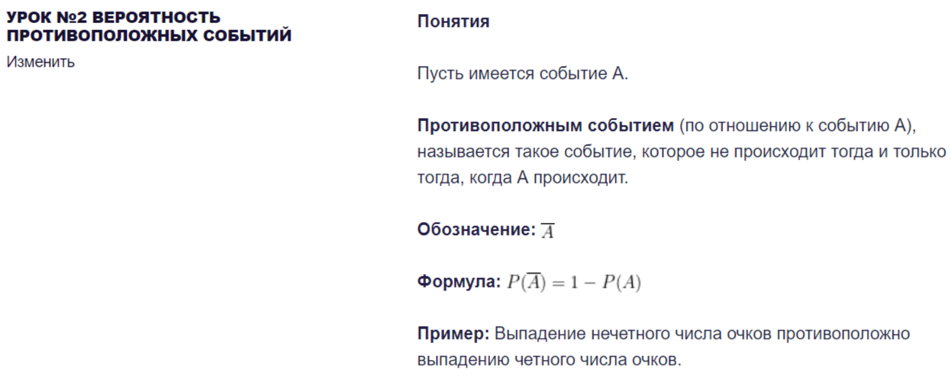
$$P(A) = 0{,}97 - 0{,}89 = 0{,}08,$$

где *P(A)* – вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Ответ: 0,08.

Задание 3

Самостоятельно изучите тему «Вероятность противоположных событий на сайте (рисунки 5-6) «Элементы теории вероятностей» [24].



УРОК №2 ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОТИВОПОЛОЖНЫХ СОБЫТИЙ

Изменить

Понятия

Пусть имеется событие А.

Противоположным событием (по отношению к событию А), называется такое событие, которое не происходит тогда и только тогда, когда А происходит.

Обозначение: $\overline{A}$

Формула: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Пример: Выпадение нечетного числа очков противоположно выпадению четного числа очков.

Рисунок 5

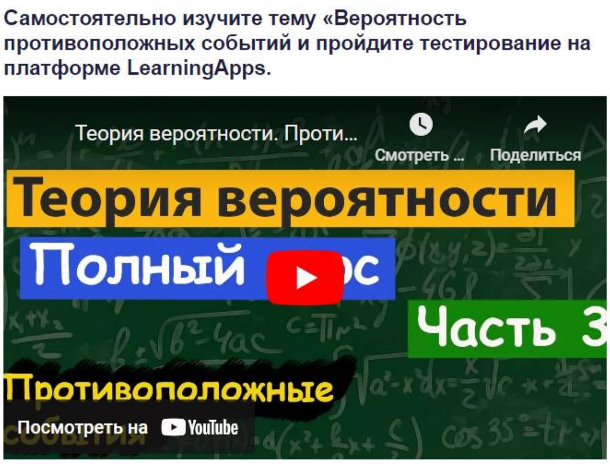


Рисунок 6

Домашнее задание:

– выполнить задание на соответствие (рисунок 7) на платформе learningapps [24];

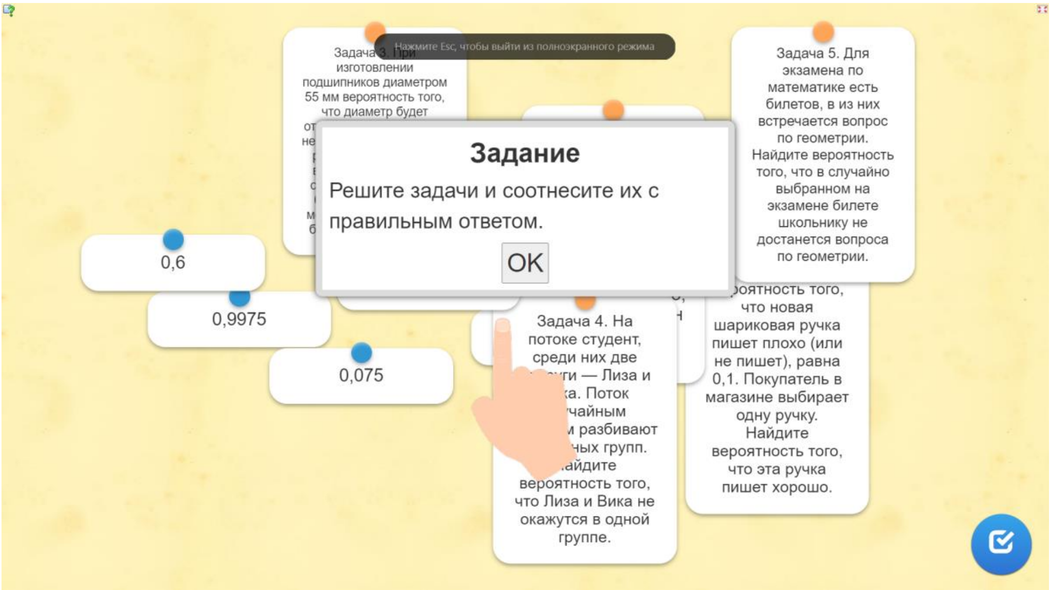


Рисунок 7

– придумать 2 задачи на расчет вероятности противоположных событий. При оценивании задания учитывается: содержание задачи, решение (оформление, правильность), оригинальность.

Занятие 3. Зависимые и независимые события. Теорема умножения вероятностей. Условная вероятность

Основные понятия

Два события называются *независимыми,* если вероятность одного события не зависит от того наступило другое или нет.

Пример:

при подбрасывании двух монет, выпадет орел.

События, появление одного из которых влияет на появление другого события, называются *зависимыми событиями*.

Пример:

на первой кости выпало 5 очков, на второй кости выпало 3 очка.

Условной вероятностью называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Обозначение: $P_A(B) = P(B|A)$.

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго, вычисленную при условии, что первое событие произошло, т.е.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).$$

В частности, отсюда получаем формулы для условной вероятности:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)};\ P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}.$$

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий [2] :

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Задания к уроку

Задание 1

Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,45. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,4. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Решение

Рассмотрим события:

A = {А. выиграл белыми}; $P(A) = 0{,}45$.

B = {А. выиграл чёрными}; $P(B) = 0{,}4$.

А · В = {А. выиграл и черными и белыми}; $P(A \cdot B)$ – ?

События A и B являются независимыми, так как результат одной партии не зависит от результата другой.

По формуле *произведения вероятностей двух независимых событий:*

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B);$$

$$P(A \cdot B) = 0{,}45 \cdot 0{,}4 = 0{,}18,$$

где $P(A \cdot B)$ – вероятность того, что А. выиграет оба раза.

*Ответ:*0,18.

Задание 2

На рисунке изображен лабиринт. Мышка заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и идти назад мышка не может, поэтому на каждом разветвлении, мышка выбирает один из путей, по которому ещё не шла. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите с какой вероятностью мышка придёт к выходу *В* (рисунок 8).

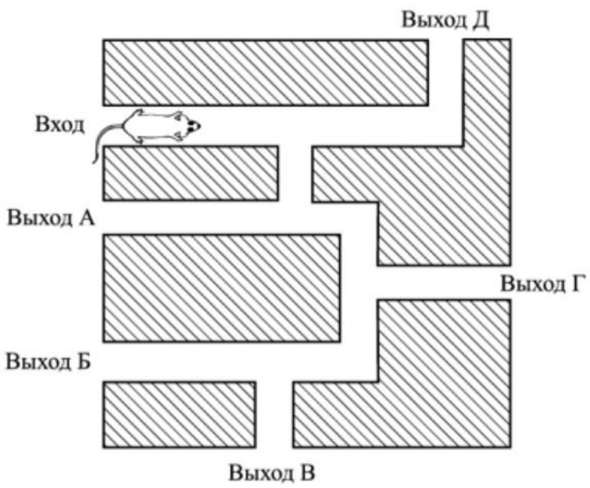


Рисунок 8

Решение

При движении у мышки имеются всего два варианта движения, т.е. вероятность выбрать путь, ведущий к выходу *В* равна: 0,5. Всего на рисунке отмечено четыре развилки (рисунок 9).

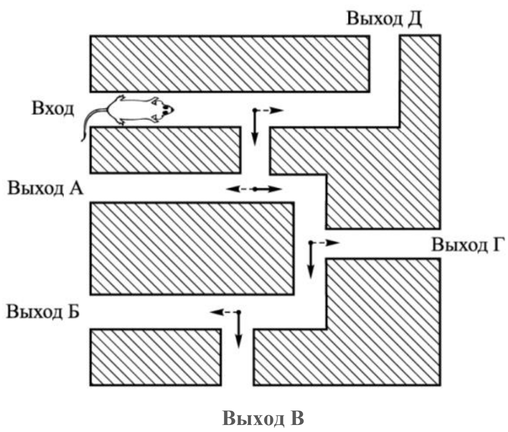


Рисунок 9

Данные события являются независимыми, следовательно, по формуле *вероятности произведения двух независимых событий:*

$$P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}0625,$$

где *P(B)* – вероятность того, что мышка придёт к выходу *В*.

Ответ: 0,0625.

Задание 3

В ящике три красных и три синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счету?

Решение

Составим дерево вероятностей, иллюстрирующее задачу (рисунок 10).

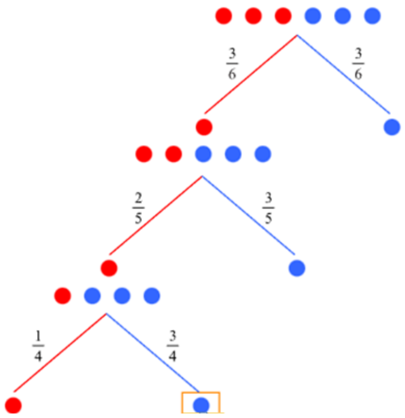


Рисунок 10

Рассмотрим события:

A_1 = {первым будет извлечен красный фломастер};

A_2 = {вторым будет извлечен красный фломастер};

B = {третьим будет извлечен синий фломастер}.

$A_1 \cdot A_2 \cdot B$ = {первым и вторым будет извлечен красный фломастер, а третьим синий фломастер}.

Всего фломастеров 6 штук, следовательно, *n = 6*.

Красных фломастеров 3 штуки, следовательно, *n = 3*.

По формуле *классической вероятности:*

$$P(A_1) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6},$$

где P – вероятность того, что первым будет извлечен красный фломастер.

Предположим, что красный фломастер извлечен, значит, красных фломастеров осталось 2 штуки, а всего фломастеров 5.

Следовательно,

$$P_{A_1}(A_2) = \frac{2}{5}$$

где $P_{A_1}(A_2)$ – вероятность того, что будет извлечен красный фломастер во втором испытании при условии, что до этого был извлечен красный фломастер.

В третьем испытании вынимают синий фломастер, синих фломастеров 3, всего фломастеров осталось 4.

Следовательно,

$$P_{\mathrm{A}_1 A_2}(B) = \frac{3}{4}$$

где $P_{\mathrm{A}_1 A_2}(B)$ – вероятность того, что будет извлечен синий фломастер в третьем испытании при условии, что до этого были извлечены два красных фломастера.

Данные события являются зависимыми, значит, по формуле *вероятности произведения зависимых событий:*

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{\mathrm{A}_1 A_2}(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20} = 0{,}15,$$

где $P(A_1 \cdot A_2 \cdot B)$ – вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счету.

Ответ: 0,15.

Задание 4

На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию А благоприятствуют элементарные события a, b и c, а событию *B* благоприятствуют элементарные события b, c и d.

Найдите *P(A|B)* — условную вероятность события А при условии В (рисунок 11).

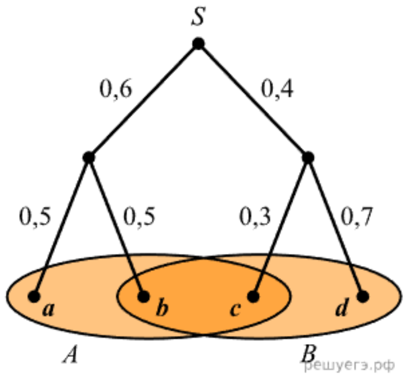


Рисунок 11

Решение

Событие A состоит из элементарных событий a, b, c, событие B состоит из элементарных событий b, c, d .

$$P(a) = P(b) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3; P(c) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12;$$

$$P(d) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}28;$$

$$P(A) = P(a) + P(b) + P(c) = 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}12 = 0{,}72;$$

$$P(B) = P(b) + P(c) + P(d) = 0{,}3 + 0{,}12 + 0{,}28 = 0{,}7.$$

По формуле *условной вероятности:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)},$$

где $P(A \cdot B)$ – вероятность произведения двух зависимых событий.

$$P(A \cdot B) = P(b) + P(c) = 0{,}3 + 0{,}12 = 0{,}42.$$

Следовательно:

$$P(A|B) = \frac{0{,}42}{0{,}6} = 0{,}7,$$

где $P(A|B)$ – вероятность события А при условии В.

Ответ: 0,7.

Дополнительные задания

Задание 5

Павел Юрьевич совершает прогулку из точки A по дорожкам парка. На каждой развилке он наудачу выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке. Найдите вероятность того, что Павел Юрьевич попадет в точку G (рисунок 12).

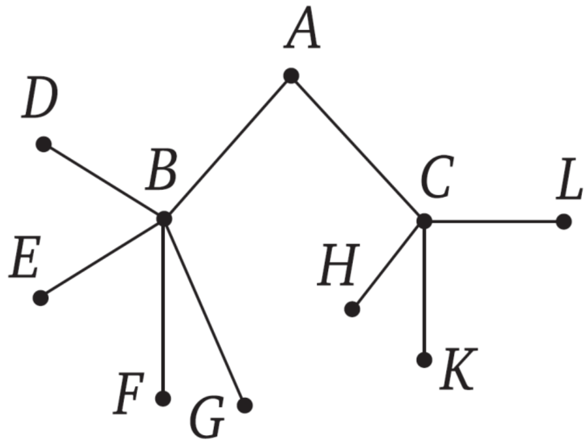


Рисунок 12

Решение

Рассмотрим дерево, иллюстрирующее схему дорожек.

Рассмотрим события:

AB = {выберет дорожку AB}, AC= {выберет дорожку AC}, BD = {выберет дорожку BD}, BE = {выберет дорожку BE}, BF = {выберет дорожку BF}, BG = {выберет дорожку BG}, CH = {выберет дорожку CH}, CK = {выберет дорожку CK}, CL = {выберет дорожку CL}.

В точку *G* попадет, если он пройдет дорожку *AB* (**И**) дорожку *BG*.

$AB \cdot BG$ = {первой выберет *AB*, а второй выберет BG}.

Рассмотрим дорожку AB: из точки A ведут две дорожки. Следовательно, по формуле *классической вероятности:*

$$P(\mathrm{AB}) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$$

где $P(\mathrm{AB})$ – вероятность того, что сначала Павел Юрьевич выберет дорожку AB.

Предположим, что первой Павел Юрьевич выбрал дорожку *AB*, значит, рассмотрим току *B*, из неё ведут четыре дорожки.

Следовательно,

$$P_{AB}(BG) = \frac{1}{4},$$

где $P_{AB}(BG)$ – вероятность того, что будет выбрана дорожка *BG* во втором испытании при условии, что до этого была выбрана дорожка *AB*.

Данные события являются зависимыми, значит, по формуле *вероятности произведения зависимых событий:*

$$P(AB \cdot BG) = P(AB) \cdot P_{AB}(BG) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = 0{,}125,$$

где $P(AB \cdot BG)$ – вероятность того, что Павел Юрьевич попадет в точку G.

Ответ: 0,125.

Домашнее задание

В урне 4 белых и 7 черных шаров. Из урны наудачу один за другим извлекают два шара, не возвращая их обратно.

Найти вероятность того, что:

– оба шара будут белыми;

– оба шара будут чёрными;

– сначала будет извлечён белый шар, а затем – чёрный.

Занятие 4. Теорема о сложении вероятностей совместных событий

Основные понятия

Суммой двух событий A и B, называется событие $A + B$, которое произойдет, если произойдет хотя бы одно из событий A или B.

События, появление одного из которых не исключает возможность появления другого, называются *совместными событиями.*

Пусть A и B – два совместных события, тогда вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их совместного появления:

$$P\,(A + B) = P\,(A) + P\,(B) - P\,(A \cdot B).$$

Задания к уроку

Задание 1

Ведется стрельба по мишени двумя стрелками. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0,8, а вероятность поражения мишени вторым – 0,7. Какова вероятность поражения мишени?

Решение

Рассмотрим события:

A = {мишень поразил первый стрелок}.

B = {мишень поразил второй стрелок}.

События A и B являются совместными, так как поражение мишени первым стрелком не исключает поражения мишени вторым стрелком, следовательно:

$A + B$ = {мишень поражена хотя бы одним из стрелков};

$A \cdot B$ = {мишень поражена обоими стрелками};

$P(A) = 0{,}8; P(B) = 0{,}7$.

По формуле *вероятности сложения двух совместных событий:*

$$P\ (A + B) = \ P\ (A) + \ P\ (B) - \ P\ (A \cdot B).$$

Данные события являются независимыми, т.е. появление события поражение мишени первым стрелком не влияет на появление события поражения мишени вторым стрелком, следовательно:

$$P\ (A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56.$$

Следовательно: $P(A + B) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}56 = 0{,}94.$

Ответ: 0,94.

Задание 2

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,1. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,03. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение

1 способ

Рассмотрим события:

A = {кофе закончится в первом автомате};

B = {кофе закончится во втором автомате};

$A \cdot B$ = {кофе закончится в обоих автоматах};

$A + B$ = {кофе закончится хотя бы в одном автомате};

C = {кофе останется в обоих автоматах};

P(A) = P(B) = 0,1; P(A · B) = 0,03.

События A и B являются совместными, так как то, что кофе закончится в первом автомате, не влияет на то, что кофе закончится во втором автомате.

По формуле *вероятности сложения двух совместных событий:*

$$P\ (A + B) =\ 0{,}1\ +\ 0{,}1\ -\ 0{,}03 = 0{,}17,$$

где $P\ (A + B)$ – вероятность того, что кофе закончится хотя бы в одном автомате.

Событие {кофе останется в обоих автоматах} является противоположным событию {кофе закончится хотя бы в одном автомате}, следовательно:

$$P(C) = 1 - P(A + B),$$

$$P(C) = 1 - 0{,}17 = 0{,}83,$$

где $P(C)$ – вероятность того, что кофе останется в обоих автоматах.

*Ответ:*0,83.

2 способ

Имеются два автомата, в каждом из них кофе либо остался, либо закончился, следовательно: $2 \cdot 2 = 4$ варианта.

Вероятность появления всех четырёх вариантов равна 1.

Построим таблицу два на два (рисунки 13-17).

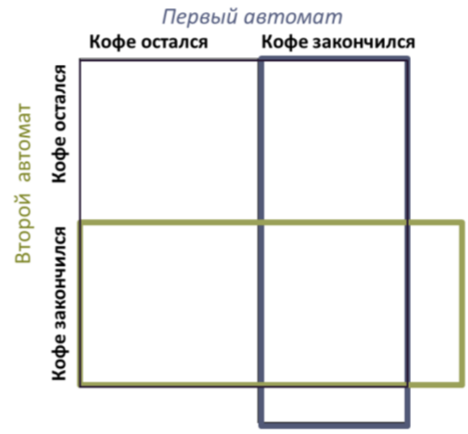


Рисунок 13

Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах 0,03.

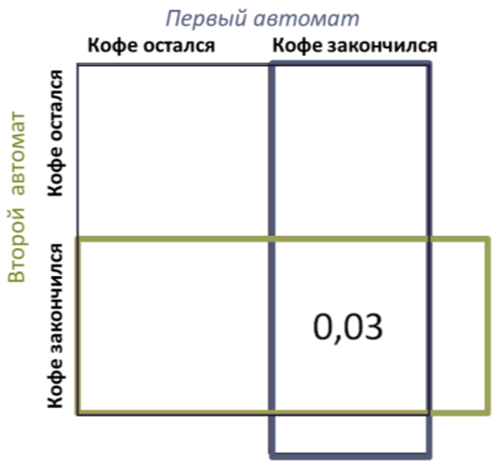


Рисунок 14

Вероятность, что кофе закончится в каждом из двух автоматов 0,1.

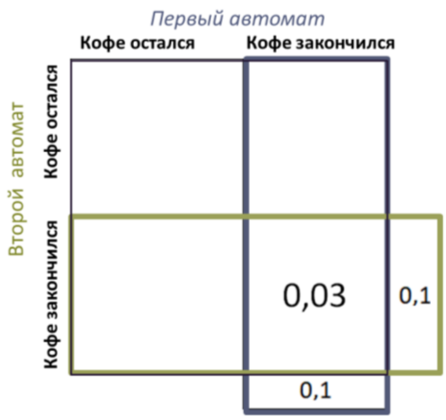


Рисунок 15

Вероятность того, что кофе останется в первом автомате, а во втором закончится: 0,1 – 0,03 = 0,07.

Аналогично, если кофе останется во втором автомате, а в первом закончится: 0,1 – 0,03 = 0,07.

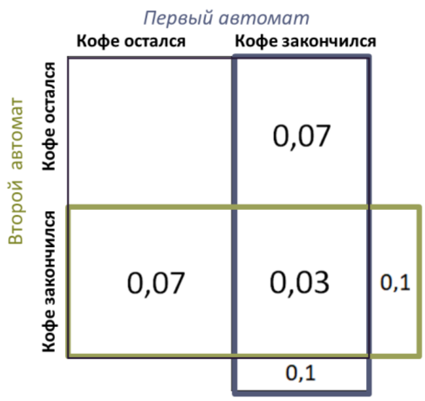


Рисунок 16

Следовательно, вероятность того, что кофе останется в двух автоматах, равна: 1 – 0,03 – 0,07 – 0,07 = 0,83.

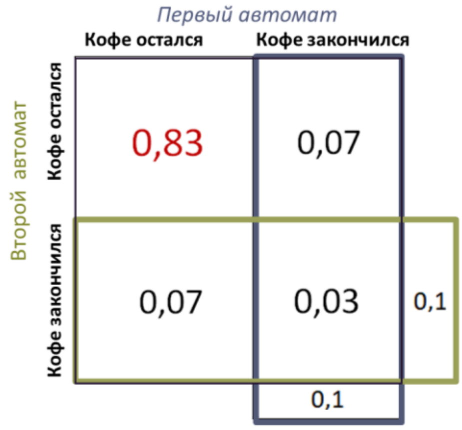


Рисунок 17

Ответ: 0,83.

Домашнее задание: решить задачу двумя способами.

В торговом центре два одинаковых автомата продают жвачку. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится жвачка, равна 0,4. Вероятность того, что жвачка закончится в обоих автоматах, равна 0,2. Найдите вероятность того, что к концу дня жвачка останется в обоих автоматах.

Занятие 5. Формула полной вероятности (см. ПРИЛОЖЕНИЕ А). Формула Байеса

Если случайное событие *A* может произойти только при выполнении одного из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, объединение которых совпадает с пространством элементарных событий проводимого испытания, то верна *формула полной вероятности:*

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|\, H_2) \cdot P(H_2) + \ldots + P(A|H_n) \cdot P(H_n).$$

$H_1, H_2, \ldots, H_n$ – называют *гипотезами.*

Если событие *A* произошло, то это может изменить вероятность гипотез $P(H_1), \ldots, P(H_n)$.

По теореме умножения вероятностей:

$$P(A \cdot H_1) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) = P(A) \cdot P(H_1|A),$$

откуда

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)}.$$

Аналогично для остальных гипотез.

Формула Байеса:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)} \text{ [7].}$$

Задания к уроку

Задание 1

Два завода производят зонты. Первый завод производит 30 %, а второй 70 % всего объёма зонтов. Вероятность купить бракованный зонт равна 1 %, если он изготовлен на первом заводе, и равна 3 %, если на втором заводе. Найдите вероятность того, что наугад выбранный зонт окажется бракованным.

Решение

Нас интересует событие:

A = {выбранный зонт окажется бракованным}; *P(A) – ?*

Выделим *гипотезы* данной задачи:

H_1 = {зонт изготовлен первым заводом};

H_2 = {зонт изготовлен вторым заводом}.

По условию:

$$P(H_1) = 0{,}3,$$

где $P(H_1)$ – вероятность того, что зонт будет изготовлен первым заводом.

Аналогично:

$$P(H_2) = 0{,}7,$$

где $P(H_2)$ – вероятность того, что зонт будет изготовлен вторым заводом.

$$P(A|H_1) = 0{,}01,$$

где $P(A|H_1)$ – вероятность того, что зонт был куплен на первом заводе и оказался бракованным.

$$P(A|H_2) = 0{,}03,$$

где $P(A|H_2)$ – вероятность того, что зонт был куплен на втором заводе и оказался бракованным.

По формуле *полной вероятности:*

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|\ H_2) \cdot P(H_2) + \ldots + P(A|H_n) \cdot P(H_n).$$

Следовательно:

$$P(A) = 0{,}01 \cdot 0{,}3 + 0{,}03 \cdot 0{,}7 = 0{,}024,$$

где $P(A)$ – вероятность того, что выбранный зонт окажется бракованным.

Ответ: 0,024.

Задание 2

Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из не пристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнется.

Решение

Разберём условие задачи. Найдём *гипотезы:*

H_1 = {Джон схватил пристрелянный пистолет};

H_2 = {Джон схватил не пристрелянный пистолет}.

Нас интересует событие:

A = {Джон промахнётся при выстреле в муху}; $P(A)$ – ?

Всего пистолетов 10, из них 4 пристрелянные, следовательно, $n = 10$, $m = 4$.

По *классической формуле вероятности:*

$$P(H_1) = \frac{m}{n} = \frac{4}{10} = 0{,}4,$$

где $P(H_1)$ – вероятность того, что Джон схватил пристрелянный пистолет.

Не пристрелянных пистолетов: 10 – 4 = 6, следовательно, $n = 10$, $m = 6$.

По *классической формуле вероятности:*

$$P(H_2) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = 0{,}6,$$

где $P(H_2)$ – вероятность того, что Джон схватил не пристрелянный пистолет.

$$P(A|H_1) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1,$$

где $P(A|H_1)$ – вероятность того, что Джон схватил пристрелянный пистолет, сделал выстрел и промахнулся.

$$P(A|H_2) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8,$$

где $P(A|H_2)$ – вероятность того, что Джон схватил не пристрелянный пистолет, сделал выстрел и промахнулся.

По формуле *полной вероятности:*

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|\, H_2) \cdot P(H_2) + \ldots + P(A|H_n) \cdot P(H_n).$$

Следовательно:

$$P(A) = 0{,}1 \cdot 0{,}4 + 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}04 + 0{,}48 = 0{,}52,$$

где $P(A)$ – вероятность того, что Джон промахнётся при выстреле в муху.

Ответ: 0,52.

Задание 3

В городе 51 % взрослого населения – женщины. Работающие составляют 79,8 % взрослого населения, причём доля работающих среди взрослых мужчин равна 90 %. Для проведения исследования выбрали взрослую женщину случайным образом. Какова вероятность того, что выбранная женщина окажется работающей?

Решение

Пусть событие A = {случайно выбранный взрослый человек окажется работающим}.

Выделим *гипотезы* данной задачи:

H_1 = {случайно выбранный взрослый человек является мужчиной};

H_2 = { случайно выбранный взрослый человек является женщиной}.

Нас интересует $P(A|H_2)$ – вероятность того, что случайно выбранный человек работающая женщина.

По условию:

$$P(A|H_1) = 0{,}9,$$

где $P(A|H_1)$ – вероятность того, что случайно выбранный работающий человек мужчина.

$$P(H_2) = 0{,}51,$$

где $P(H_2)$ – вероятность того, что случайно выбранный взрослый человек оказался женщиной.

Следовательно:

$$P(H_1) = 1 - P(H_2) = 1 - 0{,}51 = 0{,}49,$$

где $P(H_1)$ – вероятность того, что случайно выбранный взрослый человек оказался мужчиной.

$$P(A) = 0{,}798,$$

где $P(A)$ – вероятность того, что случайно выбранный взрослый человек окажется работающим.

По формуле *полной вероятности:*

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|\, H_2) \cdot P(H_2) + \ldots + P(A|H_n) \cdot P(H_n).$$

Следовательно:

$$0{,}798 = 0{,}9 \cdot 0{,}49 + P(A|\, H_2) \cdot 0{,}51,$$

$$P(A|\, H_2) = \frac{0{,}798 - 0{,}441}{0{,}51} = 0{,}7,$$

где $P(A|\, H_2)$ – вероятность того, что случайно выбранный человек работающая женщина.

Ответ: 0,7.

Задание 4

Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет чётных чисел, а нечётные числа 1, 3 и 5 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 3 и 5 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

Решение

Пусть событие A = {выпало три и пять очков}.

Выделим *гипотезы* данной задачи:

H_1 = {бросали первый кубик};

H_2 = {бросали второй кубик}.

По *классической формуле вероятности:*

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2} = 0{,}4,$$

где $P(H_1)$ – вероятность того, что бросили первый кубик, $P(H_2)$ – вероятность того, что бросили второй кубик.

Найдём условные вероятности:

$$P(A|H_1) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18},$$

где $P(A|H_1)$ – вероятность того, что бросили первый кубик и выпали три и пять очков.

$$P(A|H_2) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9},$$

где $P(A|H_2)$ – вероятность того, что бросили второй кубик и выпали три и пять очков.

По *формуле полной вероятности:*

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|\, H_2) \cdot P(H_2) + \ldots + P(A|H_n) \cdot P(H_n).$$

Следовательно:

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{18} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} = \frac{5}{36},$$

где $P(A)$ – вероятность того, что выпадет три и пять очков.

Нас интересует вероятность, что бросали второй кубик, значит, $P(H_2|A)$.

По *формуле Байеса:*

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)}.$$

Следовательно:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9}}{\frac{5}{36}} = \frac{2 \cdot 36}{18 \cdot 5} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Ответ: 0,8.

Задание 5

При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 88 % случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 92 % случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 11 % пациентов, направленных на тестирование.

При обследовании некоторого пациента врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент действительно имеет это заболевание?

Решение

Пусть эксперимент заключается в выборе одного случайного пациента, направленного на анализ.

Пусть событие A = {у случайно выбранного пациента тест дал положительный результат}.

Выделим *гипотезы* у данной задачи:

H_1 = {выбранный пациент болен};

H_2 = {выбранный пациент не болен}.

Нас интересует вероятность того, что тест дал положительный результат и человек действительно болен, значит, $P(H_1|A)$.

По условию:

$$P(A) = 0{,}11,$$

где $P(A)$ – вероятность того, что у случайно выбранного пациента тест дал положительный результат.

$$P(A|H_1) = 0{,}88,$$

где $P(A|H_1)$ – вероятность того, что случайно выбранный пациент болен и тест дал положительный результат.

$$P(A|H_2) = 1 - 0{,}92 = 0{,}08,$$

где $P(A|H_2)$ – вероятность того, что случайно выбранный пациент не болен и тест дал положительный результат.

Пусть $P(H_1) = x,\ P(H_2) = 1 - x$.

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|\,H_2) \cdot P(H_2);$$

$$0{,}11 = 0{,}88 \cdot x + 0{,}08 \cdot (1 - x);$$

$$x = \frac{3}{80}.$$

По *формуле Байеса:*

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{80} \cdot \frac{88}{100}}{\frac{11}{100}} = 0{,}3,$$

где $P(H_1|A)$ – вероятность того, что тест дал положительный результат и человек действительно болен.

Ответ: 0,3.

Домашнее задание

1. На соревнованиях по метанию копья последнему спортсмену осталось выполнить последнюю попытку. Если во время броска ветер будет попутным, то спортсмен сможет победить с вероятностью 0,42, если же ветер будет встречный– то с вероятностью 0,35. Вероятность метнуть копьё при попутном ветре равна 0,6.

Найдите вероятность того, что:

а) спортсмен победит;

б) спортсмен метал копьё при попутном ветре, если известно, что он победил.

2. В коробке лежат 24 синих и 16 красных ручек. Дима выбирает наугад ручку из коробки и этой ручкой пишет число на бумаге. Электронный сканер распознаёт число, написанное синей ручкой, с вероятностью 90 %, а число, написанное красной ручкой, с вероятностью 70 %.

Найдите вероятность того, что:

а) написанное число будет распознано;

б) Дима выбрал красную ручку, если известно, что сканер распознал число.

Занятие 6. Формула Бернулли

Теория вероятностей имеет дело с такими экспериментами, которые можно повторять (по крайней мере, теоретически) неограниченное число раз. Пусть некоторый эксперимент повторяется раз, причем результаты каждого повторения не зависят от исходов предыдущих повторений. Такие серии повторений называют независимыми испытаниями.

Частным случаем таких испытаний являются *независимые испытания Бернулли*, которые характеризуются двумя условиями:

– результатом каждого испытания является один из двух возможных исходов, называемых соответственно «успехом» или «неудачей».

– вероятность «успеха», в каждом последующем испытании не зависит от результатов предыдущих испытаний и остается постоянной.

Схему испытаний Бернулли называют также *биномиальной схемой,* а соответствующие вероятности – биномиальными, что связано с использованием биномиальных коэффициентов C_n^k.

Теорема Бернулли: пусть проводится серия из n идентичных независимых экспериментов. В каждом из них вероятность события A равна p. Тогда вероятность того, что в указанной серии экспериментов событие наступит ровно k раз ($k \leq n$), вычисляется по формуле:

$$P_n^k = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

где $q = 1 - p$ – вероятность «неудачи».

Формула Бернулли позволяет избавиться от большого числа вычислений – сложения и умножения вероятностей – при достаточно большом количестве испытаний [5].

Задания к уроку

Задание 1

Пусть проводится $n = 6$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна $p = 0{,}1$. Найти вероятность того, что в данной серии испытаний событие A появится $k = 3$ раза.

Решение

В данной задаче:

$n = 6$ – всего испытаний;

$k = 3$ – ожидаемое количество появлений события A шести испытаниях;

$p = 0{,}1$ – вероятность появления события A в каждом испытании;

$q = 1 - p = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$ – вероятность того, что событие A не появится в каждом испытании;

P_6^3 – вероятность того, что в 6 испытаниях событие А появится ровно 3 раза.

По формуле *Бернулли:*

$$P_n^k = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k};$$

$$P_6^3 = C_6^3 \cdot (0{,}1)^3 \cdot (0{,}9)^{6-3} = \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} \cdot (0{,}1)^3 \cdot (0{,}9)^3;$$

$$= \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} \cdot 0{,}001 \cdot 0{,}729 = 0{,}01458,$$

где P_6^3 – вероятность того, что в данной серии испытаний событие A появится $k = 3$ раза.

Ответ: 0,01458.

Задание 2

В результате обследования были выделены семьи, имеющие по четыре ребенка.

Считая вероятности появления мальчика и девочки в семье равными, определить вероятности появления в ней:

а) одного мальчика;

б) двух мальчиков.

Решение

а) Рассмотрим условие задачи. Имеются семьи, в которых по 4 ребёнка, т.е. $n = 4$. Вероятности появления мальчика и девочки равны, следовательно, $p = q = \frac{1}{2}$. Нас интересует появление одного мальчика, значит $k = 1$. По формуле *Бернулли:*

$$P_n^k = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k};$$

$$P_4^1 = C_4^1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = 0{,}25.$$

б) Во втором случае аналогично: $n = 4$, $p = q = \frac{1}{2}$. Здесь нас интересует появление двух мальчиков, следовательно, $k = 2$. По формуле *Бернулли:*

$$P_4^2 = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}375.$$

Ответ: а) 0,25; б) 0,375.

Задание 3

Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно пять мишеней» больше вероятности события «стрелок поразит ровно четыре мишени»?

Решение

Построим дерево вероятностей, иллюстрирующее вероятность поражения одной мишени (рисунок 18).

Первый выстрел: вероятность того, что стрелок поразит мишень каждым выстрелом, равна: 0,6. Следовательно, вероятность того, что он не попадёт в мишень, равна: 0,4.

Второй выстрел: вероятность того, что стрелок не поразит мишень первым выстрелом, а вторым поразит, равна: $0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$. Вероятность того, что стрелок не попадет два раза, равна: $0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$ (данные события являются независимыми).

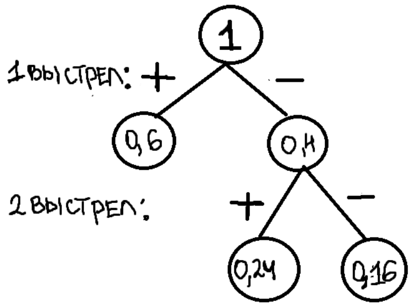


Рисунок 18

Следовательно, вероятность попасть в мишень с первого или второго выстрела: $\mathrm{P} = 1 - 0{,}16 = 0{,}84$.

Рассмотрим событие «стрелок поразит ровно пять мишеней»: $n = 5$, $k = 5$, $p = 0{,}84$, $q = 0{,}16$

Вероятность события «стрелок поразит ровно пять мишеней» по формуле *Бернулли* равна:

$$P_5^5 = (0{,}84)^5.$$

Рассмотрим событие «стрелок поразит ровно четыре мишени»: $n = 5$, $k = 4$, $p = 0{,}84$, $q = 0{,}16$.

Вероятность события «стрелок поразит ровно четыре мишени» по формуле *Бернулли* равна:

$$P_5^4 = C_5^4 \cdot (0{,}84)^4 \cdot (0{,}16)^1 = 5 \cdot (0{,}84)^4 \cdot 0{,}16.$$

Нас интересует во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно пять мишеней» больше вероятности события «стрелок поразит ровно четыре мишени».

Найдём искомое отношение:

$$\frac{P_5^5}{P_5^4} = \frac{(0{,}84)^5}{5 \cdot (0{,}84)^4 \cdot 0{,}16} = \frac{84}{5 \cdot 16} = 1{,}05.$$

Ответ: 1,05.

Задание 4

В каждой из восьми урн имеется 10 белых и 5 черных шаров. Из каждой урны извлекли по одному шару. Что вероятнее: появление двух черных и шести белых или трех черных и пяти белых шаров?

Решение

Имеется 10 белых и 5 чёрных шаров, следовательно, $n = 15$.

Чёрных шаров 5, следовательно, $m = 5$.

По формуле классической вероятности:

$$p = \frac{m}{n} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3},$$

где p – вероятность появления чёрных шаров.

Следовательно, $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ – вероятность не появления чёрных шаров (т.е. вероятность появления белых шаров).

Рассмотрим событие «появление двух чёрных шаров и шести белых шаров»: $n = 8$, $k = 2$, $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$.

По формуле *Бернулли:*

$$P_8^2 = C_8^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} \cdot \frac{64}{3^8} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 64}{2 \cdot 3^8} = \frac{1792}{3^8} \approx 0{,}2731,$$

где P_8^2 – вероятность появление двух чёрных шаров и шести белых шаров.

Рассмотрим событие «появление трех черных и пяти белых шаров»: $n = 8$, $k = 3$, $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$.

По формуле *Бернулли*:

$$P_8^3 = C_8^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{32}{3^8} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 32}{3 \cdot 3^8} = \frac{1792}{3^8} \approx 0{,}2731,$$

где P_8^3 – вероятность появление трех черных и пяти белых шаров.

Следовательно, $P_8^2 = P_8^3$.

Ответ: данные события равновероятны.

Домашнее задание

Пройти тестирование на сайте и оценить свои результаты (рисунки 19-23) [24].

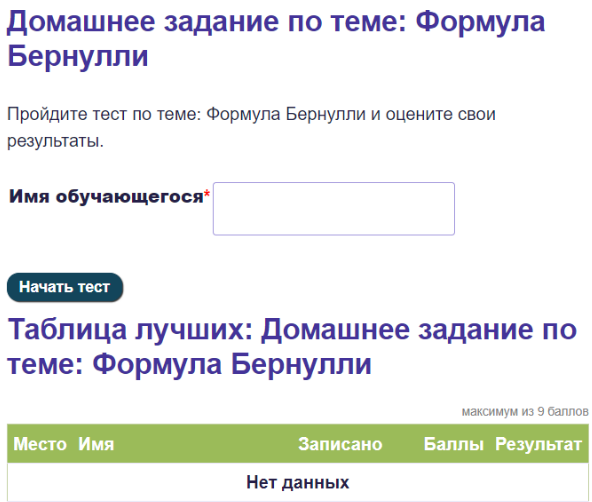


Рисунок 19

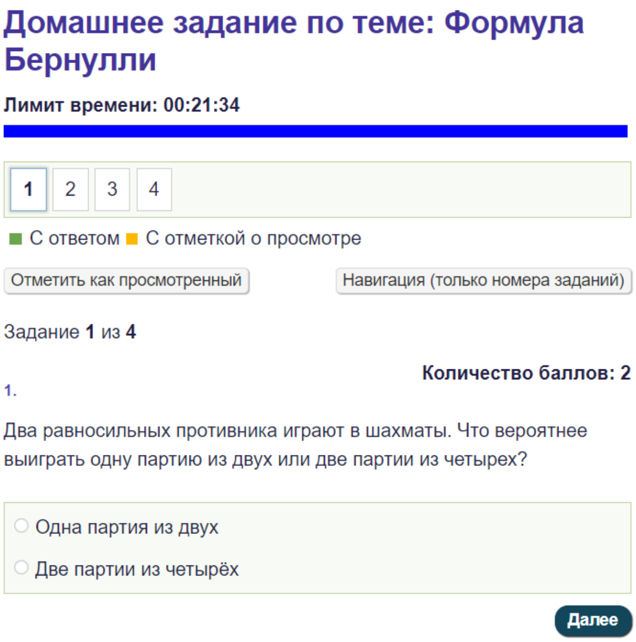


Рисунок 20

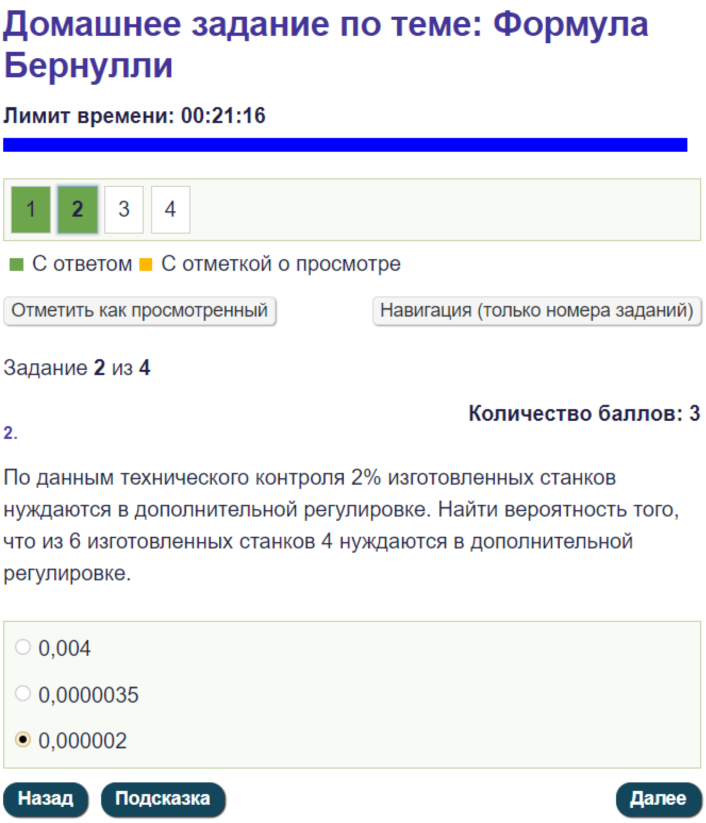


Рисунок 21

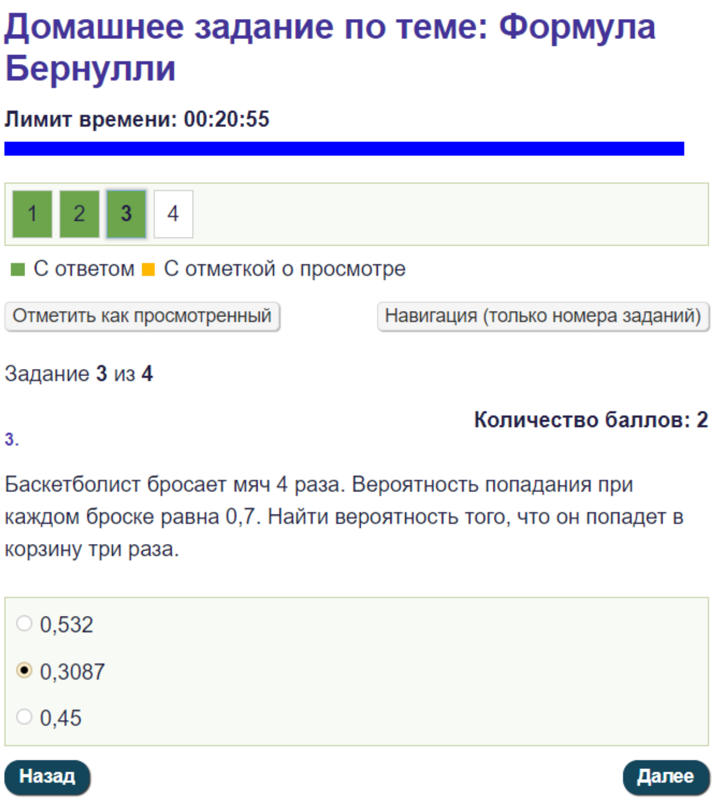


Рисунок 22

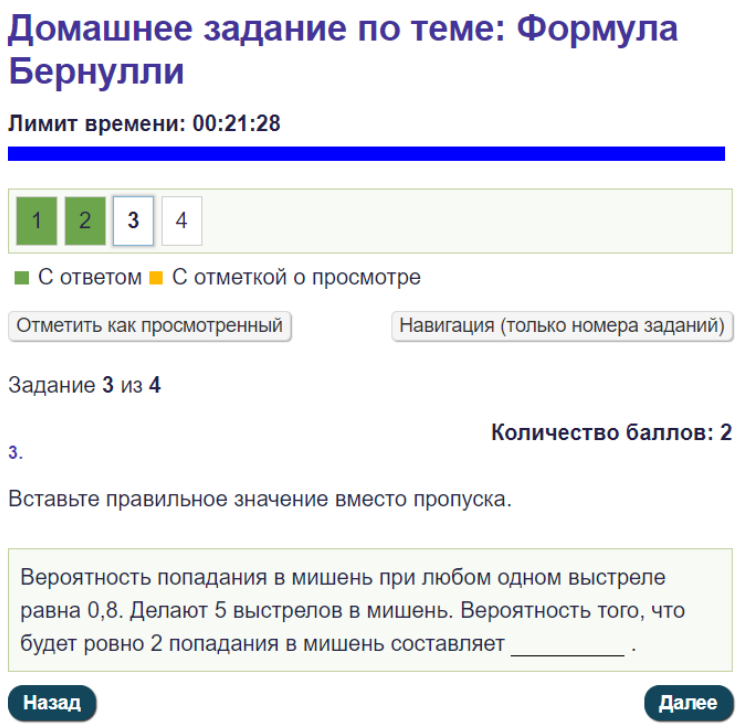


Рисунок 23

Занятие 7. Решение задачи № 4 ЕГЭ.

Задание 1

В одном ресторане в г. Тамбове администратор предлагает гостям сыграть в «Шеш-беш»: гость бросает одновременно две игральные кости. Если он выбросит комбинацию 5 и 6 очков хотя бы один раз из двух попыток, то получит комплемент от ресторана: чашку кофе или десерт бесплатно. Какова вероятность получить комплемент? Результат округлите до сотых.

Решение

Имеются две игральные кости. При броске каждой из двух костей получается 6 исходов. Значит при бросании двух игральных костей: $6 \cdot 6 = 36$ исходов (данные события являются независимыми).

Рассмотрим предполагаемые комбинации в Таблице 8.

Таблица 8 – Комбинации бросков

№ броска	Первый исход	Второй исход
1	5 очков	6 очков
2	6 очков	5 очков

По формуле классической вероятности:

$$P_1 = P_2 = \frac{m}{n} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18},$$

где $P_1 = P_2$– вероятность того, что при первом броске (втором) выпадет нужная комбинация.

Найдём вероятность того, что при первом броске не выпала нужная комбинация, а выпала при втором:

$$P_3 = (1 - P_1) \cdot P_2 = \frac{17}{18} \cdot \frac{1}{18} = \frac{17}{324},$$

где P_3– вероятность того, что при первом броске не выпала нужная комбинация, а выпала при втором (данные события являются независимыми).

Найдём вероятность того, что данная комбинация выпадет хотя один раз из двух попыток:

$$P_4 = \frac{1}{18} + \frac{17}{324} = \frac{35}{324} \approx 0{,}11,$$

где P_4 – вероятность того, что данная комбинация выпадет, хотя один раз из двух попыток (данные события являются несовместными).

Ответ: 0,11.

Задание 2

Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 5. Какова вероятность того, что для этого потребовалось ровно два броска? Ответ округлите до сотых.

Решение

Составим Таблицу 9 подходящих вариантов для двух бросков (данные события являются независимыми).

Таблица 9 – Подходящие варианты для двух бросков

Первый бросок	Второй бросок			
Возможный вариант числа	Подходящие числа под условие суммы	Вероятность выпадения первого числа	Вероятность выпадения второго числа	Итоговая вероятность каждого варианта
1	*2*	*3*	*4*	*5*

Продолжение таблицы 9

1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	5, 6	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}$
2	4, 5, 6	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}$
3	3, 4, 5, 6	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}$
4	2, 3, 4, 5, 6	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$
5	1, 2, 3, 4, 5, 6	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{6}$
6	Уже превысило.			

Чтобы найти итоговую вероятность нужно сложить итоговые вероятности каждого варианта (данные события являются несовместными):

$$P=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{6}=\frac{1}{6}\left(\frac{2+3+4+5+6}{6}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{20}{6}=\frac{20}{36}=$$

$$=\frac{5}{9}\approx 0{,}56,$$

где P – вероятность того, что для выпадения суммы более 5 очков потребовалось ровно два броска.

Задание 3

Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,2 при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее количество патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,6?

Решение

Вспомним *теорему:* пусть p – вероятность события *A* в некотором испытании и пусть это испытание независимым образом повторяют n раз. Тогда:

1) вероятность того, что событие *A* наступит в каждом из n повторений равна p^n;

2) вероятность того, что событие *A* наступит хотя бы в одном из n повторений равна $1-(1-p)^n$ [13].

Найдём искомые вероятности:

– вероятность попадания в мишень равна: $p = 0{,}2$;

– вероятность промаха равна: $q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$;

– вероятность попадания с n-го раза равна: $1 - 0{,}8^n$.

Составим неравенство и найдём наименьшее количество патронов для поражения цели с вероятностью не менее 0,6:

$$1 - 0{,}8^n \geq 0{,}6;$$

$$0{,}8^n \leq 0{,}4.$$

Подберём подходящую n:

При $n = 4$: $0{,}8^4 = 0{,}4096$, следовательно, не подходит.

При $n = 5$: $0{,}8^5 = 0{,}32768$, удовлетворяет неравенству.

Ответ: 5.

Задание 4

При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше, чем 810 грамм, равна 0,97. Вероятность того, что масса окажется больше, чем 790 грамм, равна 0,91. Найдите вероятность того, что масса буханки больше, чем 790 грамм, но меньше, чем 810 грамм.

Решение

Пусть событие A = {масса хлеба меньше, чем 810 грамм}; $P(A) = 0{,}97$;

B = {масса хлеба больше, чем 790 грамм}; $P(B) = 0{,}91$.

Нам следует вычислить, вероятность того, что масса буханки хлеба больше, чем 790 грамм, но меньше, чем 810 грамм, следовательно, нужно найти произведение данных событий.

Сумма этих событий является событием достоверным, его вероятность равна 1.

Данные события являются совместными, следовательно, по формуле сложения совместных событий:

$$P\,(A + B) = P\,(A) + P\,(B) - P\,(A \cdot B).$$

$$1 = 0{,}97 + 0{,}91 - P\,(A \cdot B);$$

$$P\ (A \cdot B) = 0{,}97 + 0{,}91 - 1 = 0{,}88,$$

где $P\ (A \cdot B)$ – вероятность того, что масса буханки хлеба больше, чем 790 грамм, но меньше, чем 810 грамм.

Ответ: 0,88.

Задание 5

Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 7 очков в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 6 очков, в случае ничьей – 1 очко, если проигрывает – 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3.

Решение

Составим таблицы вероятностей (Таблицы 10-11).

Таблица 10 – Вероятности выигрыша и проигрыша

Вероятность выигрыша	Вероятность проигрыша	Вероятность ничьи
0,3	0,3	$1 - (0{,}2 + 0{,}2) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

Чтобы пройти в следующий круг соревнований, нужно набрать хотя бы 7 очков в двух играх.

Пусть *В* – выигрыш, *П* – проигрыш, *Н* – ничья.

Нас интересуют варианты: *ВВ, ВН, НВ.*

Таблица 11 – Вероятностные исходы

Игра 1	Вероятность 1	Игра 2	Вероятность 2	Итоговая вероятность (данные события независимые)
В = 6 очков	0,3	В = 6 очков	0,3	$0{,}3 \cdot 0{,}3$
В = 6 очков	0,3	Н = 1 очка	0,6	$0{,}3 \cdot 0{,}6$
Н = 1 очка	0,6	В = 6 очков	0,3	$0{,}6 \cdot 0{,}3$

Эти события являются несовместными, следовательно, по формуле сложения несовместных событий:

$$P = 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}33,$$

где P – вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований.

Ответ: 0,33.

Задание 6

Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 85 % яиц из первого хозяйства – яйца высшей категории, а из второго хозяйства – 65 % яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 80 % яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Решение

Пусть событие A = {яйцо имеет высшую категорию};

H_1 = {яйцо произведено в первом хозяйстве};

H_2 = {яйцо произведено во втором хозяйстве};

$A|H_1$ ={яйцо, произведённое в первом хозяйстве, имеет высшую категорию};

$A|H_2$ ={яйцо, произведённое во втором хозяйстве, имеет высшую категорию}.

По условию: $P(A) = 0{,}8; P(A|H_1) = 0{,}85; P(A|H_2) = 0{,}65$.

Пусть $P(H_1) = x, P(H_2) = 1 - x$.

Следовательно, по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|\, H_2) \cdot P(H_2) + \cdots + P(A|H_n) \cdot P(H_n);$$

$$0{,}8 = 0{,}85 \cdot x + 0{,}65 \cdot (1 - x);$$

$$0{,}2x = 0{,}8 - 0{,}65;$$

$$0{,}2x = 0{,}15;$$

$$x = 0{,}75.$$

Следовательно:

$$P(H_1) = 0{,}75,$$

где $P(H_1)$ – вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Ответ: 0,75.

Дополнительные задания

Основные понятия

Случайной называют *величину*, которая в результате испытания примет одно и только одно числовое значение, зависящее от случайных факторов и заранее непредсказуемое.

Обозначение: X.

Пример:

X – количество очков, которое выпадет после броска игрального кубика.

В результате данного испытания выпадет одна и только грань, какая именно – не предсказать; при этом случайная величина X может принять одно из следующий значений: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5, x_6 = 6$.

Случайная величина X может принять *бесконечно много* значений из некоторого числового промежутка.

Дискретная случайная величина – принимает отдельно взятые, изолированные значения. Количество этих значений *конечно* либо *бесконечно, но счётно*.

Ряд распределения дискретной случайной величины – это *соответствие* между возможными значениями этой величины и их вероятностями (рисунок 24):

Значение величины X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
Вероятность	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Рисунок 24

Поскольку случайная величина X *обязательно* примет одно из значений $x_1, x_2, x_3, x_4, .., x_n$ То соответствующие события образуют полную группу и сумма вероятностей их наступления равна единице: $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Так, например, ряд распределения вероятностей выпавших на кубике очков имеет следующий вид (рисунок 25).

X	1	2	3	4	5	6
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Рисунок 25

Определение: пусть дискретная случайная величина X имеет следующее распределение вероятностей (рисунок 24), тогда число $M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$ называют *математическим ожиданием случайной величины* x.

Вычислим, математическое ожидание случайной величины X – количества выпавших на игральном кубике очков:

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5 \text{ очка.}$$

Свойство: если случайная величина принимает значения *x* с одинаковой вероятностью, то $M(X) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ [12].

Задание 7

Страховая компания в некотором регионе страхует владельцев автомобилей. Цена годового страхового полиса равна 35 000 рублей. Исследования показали, что в течение года владелец автомобиля попадает в мелкую аварию с вероятностью 0,16 и средняя сумма страховой выплаты при этом равна 40 000 рублей. С вероятностью 0,035 автомобилист попадает в более серьезную аварию, и средняя сумма выплаты при этом равна 700 000 рублей. Найдите математическое ожидание случайной величины «средний доход страховой компании от продажи одного полиса»

Решение

По формуле математического ожидания случайной величины:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n;$$

$$M(X) = 40000 \cdot 0{,}16 + 70000 \cdot 0{,}035 = 30900 \text{ рублей.}$$

Стоимость полиса составляет: 35000 рублей.

Следовательно, средний доход с одного полиса составит: 35000 − 30900 = 410035000 – 30900 = 4100 рублей.

Ответ: 4100.

Задание 8

Найдите математическое ожидание случайной величины x «число очков, выпавших на игральной кости».

Решение

Так как при бросании кости с одинаковой вероятностью могут выпасть числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, то математическое ожидание случайной величины *X* по свойству математического ожидания равно:

$$M(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5,$$

где $M(X)$ – математическое ожидание случайной величины x «число очков, выпавших на игральной кости».

Ответ: 3,5.

Домашнее задание: подготовиться к проверочной работе, пройти 5 этапов решения задач ЕГЭ по теме Элементы теории вероятностей на сайте [24].

Занятие 8. Проверочная работа

Проверочная работа состоит из 6 заданий, соответствующих порядку пройденных тем из курса.

Задание 1 (1 балл)

В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел выпадет все три раза.

Ответ: 0,125.

Задание 2 (1 балл)

Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 18 пассажиров, равна 0,82. Вероятность того, что окажется меньше 10 пассажиров, равна 0,51. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 10 до 17.

Ответ: 0,31.

Задание 3 (1 балл)

Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем 36,8 °С, равна 0,81. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется 36,8 °С или выше.

Ответ: 0,19.

Задание 4 (2 балла)

При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,6, а при каждом последующем – 0,7. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

Ответ: 4.

Задание 5 (2 балла)

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,2. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,16. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Ответ: 0,76.

Задание 5 (4 балла)

Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 95 % яиц из первого хозяйства – яйца высшей категории, а из второго хозяйства – 45 % яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 60 % яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Ответ: 0,3.

Задание 6 (4 баллов)

Симметричную монету бросают 8 раз. Во сколько раз вероятность события «выпало ровно 4 орла» больше вероятности события «выпадет ровно 3 орла»?

Ответ: 1,25 [23].

Баллы за выполнение заданий представлены в Таблице 12.

Таблица 12 – Баллы за выполненные задания

Количество баллов	Оценка
1-3	2
4-7	3
8-12	4
13-15	5

Занятие 9. Разбор результатов проверочной работы

В рамках завершающего четырнадцатого урока предусмотрена цель, заключающаяся в развитии навыков и отражении осуществленной образовательной деятельности, проведении анализа ошибок, обнаруженных в проверочной работе, выявлении возникающих трудностей и создании алгоритма коррекции, который затем реализуется обучающимися самостоятельно.

Ход данного занятия напрямую зависит от анализа заполненных проверочных работ, предоставленных обучающимися, и предполагает повторение и систематизацию знаний и навыков в разделах программы, в которых было допущено наибольшее количество ошибок.

2.5 Программно-методическая поддержка курса внеурочной деятельности «Элементы теории вероятностей»

В качестве программно-методической поддержки курса внеурочной деятельности по теме «Элементы теории вероятностей» был разработан онлайн-курс, имеющий одноимённое название.

Тематическое планирование данного курса полностью совпадает с запланированным тематическим планированием на период обучения в школе.

Курс внеурочной деятельности ориентирован на усиление взаимосвязей между различными предметами, более глубокое освоение многих вопросов и помощь ученикам в быстром вхождении в суть вероятностной линии.

Теоретический материал сопровождается подробным разбором типовых задач, которые часто встречаются в ЕГЭ по профильной математике. Также на сайте выложено обязательное домашнее задание к каждому уроку.

Программно-методическая поддержка курса внеурочной деятельности позволит обучающимся не только повторять темы и выполнять домашние задания, а также развивает их самостоятельность. С её помощью ученикам будет проще структурировать знания по данной теме и осуществлять самоконтроль.

Перейдём к структуре сайта.

Данный курс представлен на платформе WordPress (система управления содержимым сайта с открытым исходным кодом; написана на PHP; сервер базы данных – MySQL). Пройдя по ссылке http://t96346so.beget.tech/ (ссылка рабочая), мы оказываемся на главной странице курса внеурочной деятельности, где представлено главное меню (рисунок 26).

Рисунок 26

Продвигаясь вниз по странице, мы оказываемся на главной странице сайта, содержащей выложенные на сайте записи (рисунок 27).

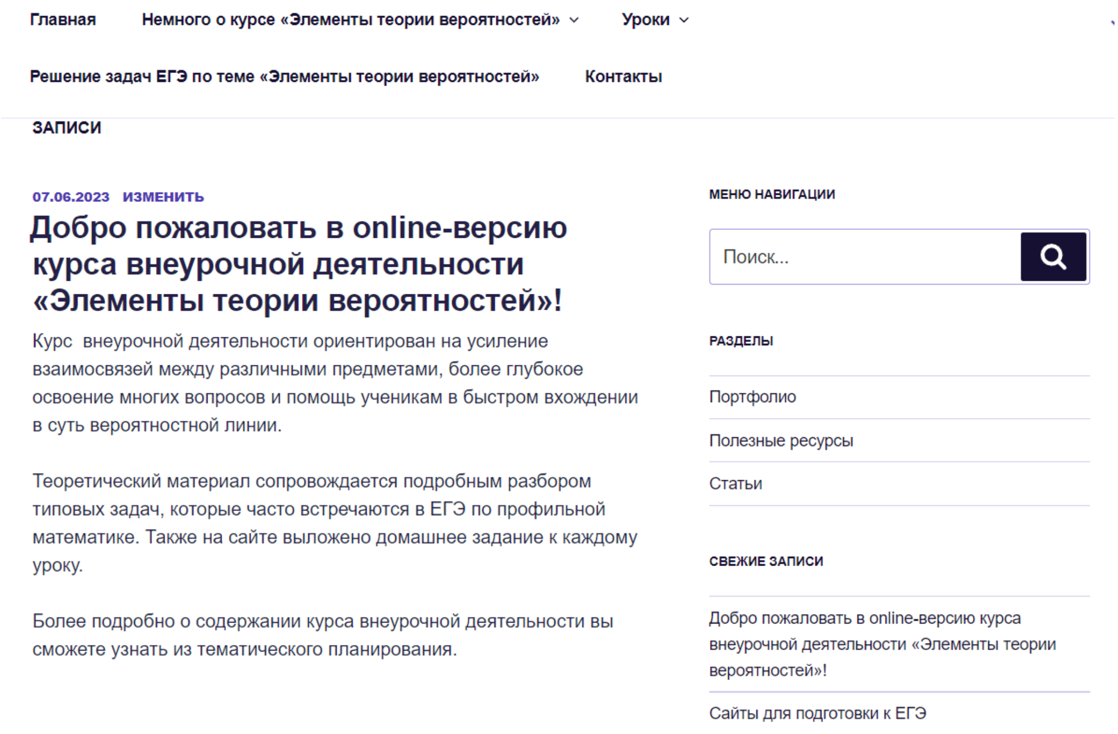


Рисунок 27

Ранее было сказано, что тематическое планирование данного курса полностью совпадает с запланированным тематическим планированием на период обучения в школе. На панели меню «Немного о курсе «Элементы теории вероятностей» имеется вкладка – Тематическое планирование курса (рисунок 28).

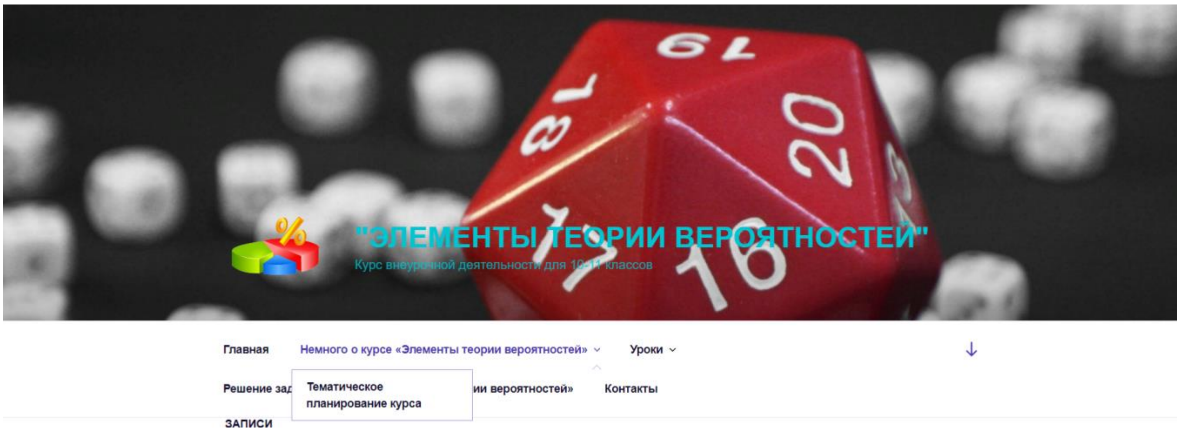


Рисунок 28

Перейдя по данной вкладке, мы увидим таблицу с тематическим планированием курса внеурочной деятельности (рисунок 29).

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ КУРСА
Изменить

№ п/п	Тема занятия	Кол-во часов	Форма проведения урока
1	Основные понятия теории вероятностей. Классическое определение вероятности.	2	Практическая работа.
2	Теорема о сложении вероятностей несовместных событий. Вероятность противоположных событий.	1	Лекция-беседа. Практическая работа.
3	Зависимые и независимые события. Теорема умножения вероятностей. Условная вероятность.	2	Лекция-беседа. Практическая работа.
4	Теоремы о сложении вероятностей совместных событий.	1	Лекция-беседа. Практическая работа.

Рисунок 29

Передвигаясь по главному меню, мы видим раскрывающуюся вкладку «Уроки». Здесь в виде списка отображаются все уроки из тематического планирования, расположенные по порядку (рисунок 30).

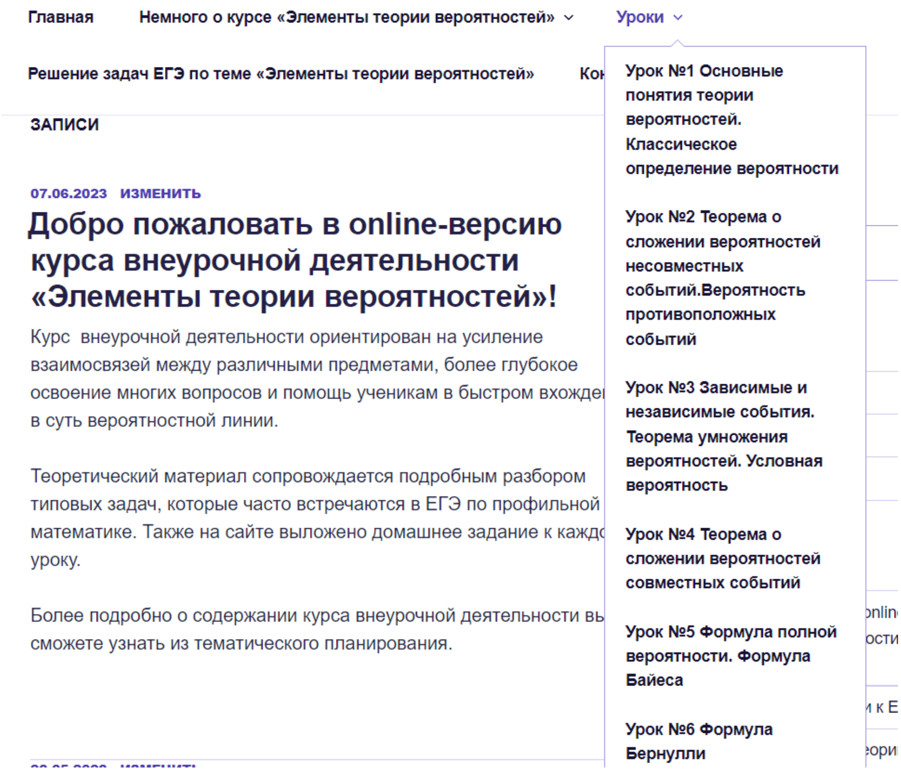


Рисунок 30

Перейдя по одной из вкладок, мы увидим Урок № 4 Теорема о сложении вероятностей совместных событий. В уроке представлены основные понятия, относящиеся к данной теме и представлен разбор типовых задач. После разбора задач, обучающимся предлагается выполнить домашнее задание по данной теме (рисунки 31-33).

Проверка текстовых домашних заданий происходит с помощью формы обратной связи (рисунок 50).

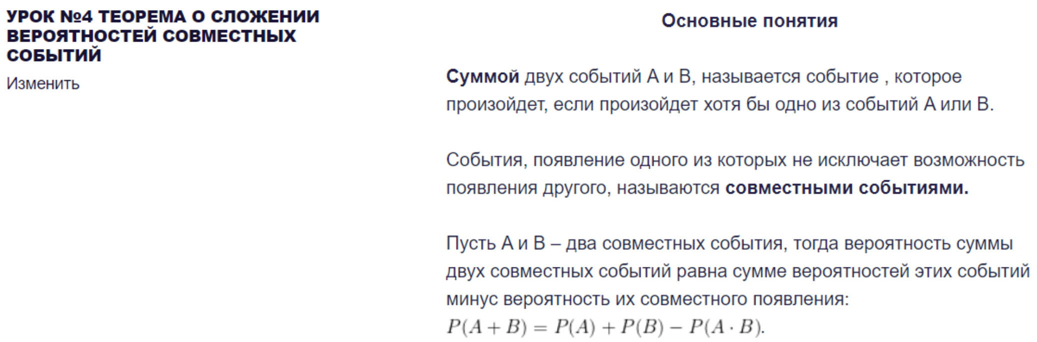


Рисунок 31

Разбор задач.

Задание 1.

Ведется стрельба по мишени двумя стрелками. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0,8, а вероятность поражения мишени вторым – 0,7. Какова вероятность поражения мишени?

Решение.

Рассмотрим события:

А = {мишень поразил первый стрелок}.

В = {мишень поразил второй стрелок}.

События А и В являются совместными, так как поражение мишени первым стрелком не исключает поражения мишени вторым стрелком, следовательно:

А+В = {мишень поражена хотя бы одним из стрелков}.

$A \cdot B$ ={мишень поражена обоими стрелками}

P(A)=0,8, P(B)=0,7.

P(A)=0,8, P(B)=0,7.

По формуле вероятности сложения двух совместных событий:

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.

Данные события являются независимыми, т.е. появление события поражение мишени первым стрелком не влияет на появление события поражения мишени вторым стрелком, следовательно: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56$.

Следовательно: $P(A+B) = 0,8 + 0,7 - 0,56 = 0,94$.

Ответ: 0,94.

Рисунок 32

Домашнее задание: решить задачу двумя способами.

- В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Обслуживание автоматов происходит по вечерам после закрытия центра. Известно, что вероятность события «К вечеру в первом автомате закончится кофе» равна 0,25. Такая же вероятность события «К вечеру во втором автомате закончится кофе». Вероятность того, что кофе к вечеру закончится в обоих автоматах, равна 0,15. Найдите вероятность того, что к вечеру кофе останется в обоих автоматах.

Рисунок 33

Перейдём по вкладке Урок № 2 Теорема о сложении вероятностей несовместных событий. Вероятность противоположных событий. Второй аспект данного урока вынесен на самостоятельное обучение. В уроке присутствует краткая теория и представлен видео-материал для разбора типовых задач по данной теме (рисунки 34-35).

Понятия

Пусть имеется событие А.

Противоположным событием (по отношению к событию А), называется такое событие, которое не происходит тогда и только тогда, когда А происходит.

Обозначение: $\overline{A}$

Формула: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Пример: Выпадение нечетного числа очков противоположно выпадению четного числа очков.

Рисунок 34

Самостоятельно изучите тему «Вероятность противоположных событий и пройдите тестирование на платформе LearningApps.

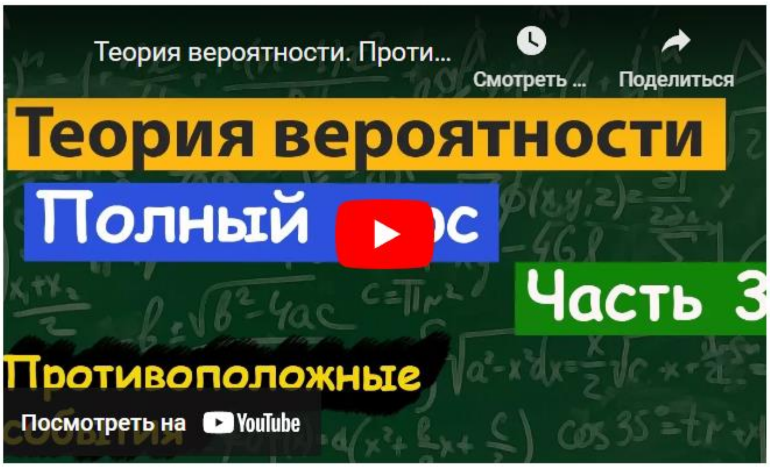


Рисунок 35

На сайте также присутствуют обучающие ресурсы. В качестве проверки усвоения материала, предлагается выполнить задание на соответствие, при этом решив все задачи (рисунок 36).

Тестирование:

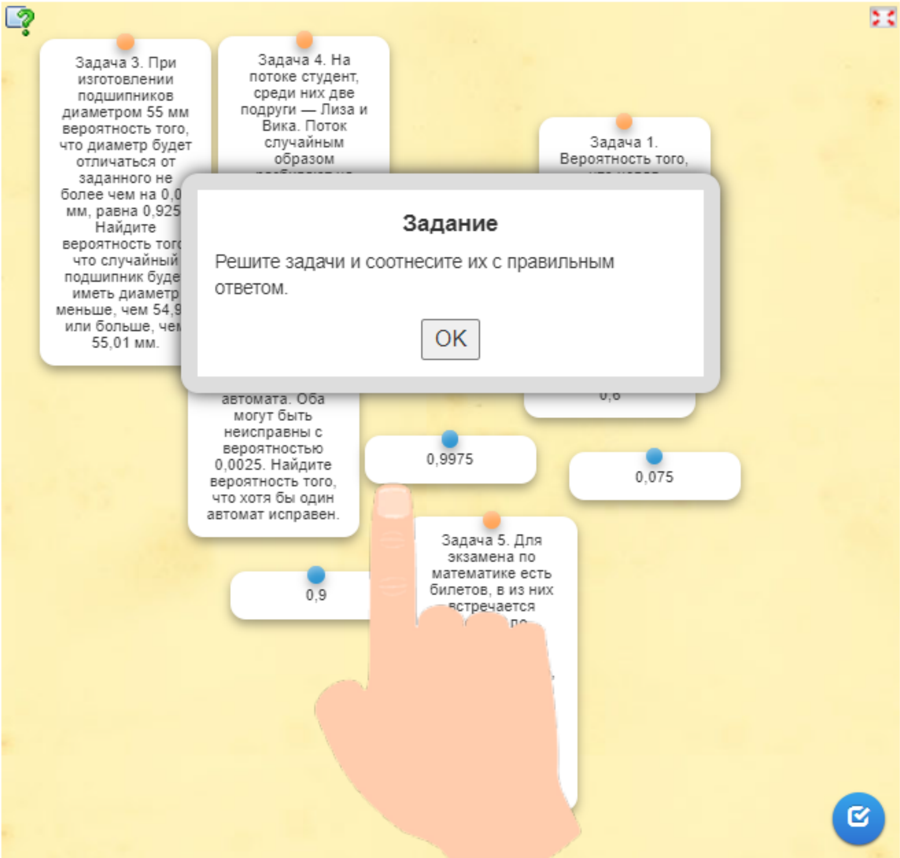


Рисунок 36

Проверка полученных знаний будет осуществляться при выполнении обучающимися следующего задания (рисунок 37). Проверка текстовых домашних заданий происходит с помощью формы обратной связи (рисунок 50).

- ***Придумать 2 задачи на расчет вероятности противоположных событий. При оценивании задания учитывается: содержание задачи, решение (оформление, правильность), оригинальность.***

Рисунок 37

Многие домашние задания к темам представлены в виде тестовых заданий. Для того, чтобы начать проходить тест, нужно ввести своё имя. Это необходимо для ведения рейтинговой таблицы обучающихся по данному курсу внеурочной деятельности. Чтобы решить тест, нужно выполнить все предложенные задания. В некоторых заданиях имеются подсказки. Каждый из тестов имеет свою длительность, каждый ученик может выполнить его только один раз. После ввода правильного ответа, ответ подсвечивается зелёным и выскакивает слово «Правильно». Если мы ввели неправильный ответ, то он будет подсвечиваться красным и после прикрепится подробное решение данного задания.

Также в конце теста выводится рейтинговая таблица, которая показывает количество набранных баллов (рисунки 38-39).

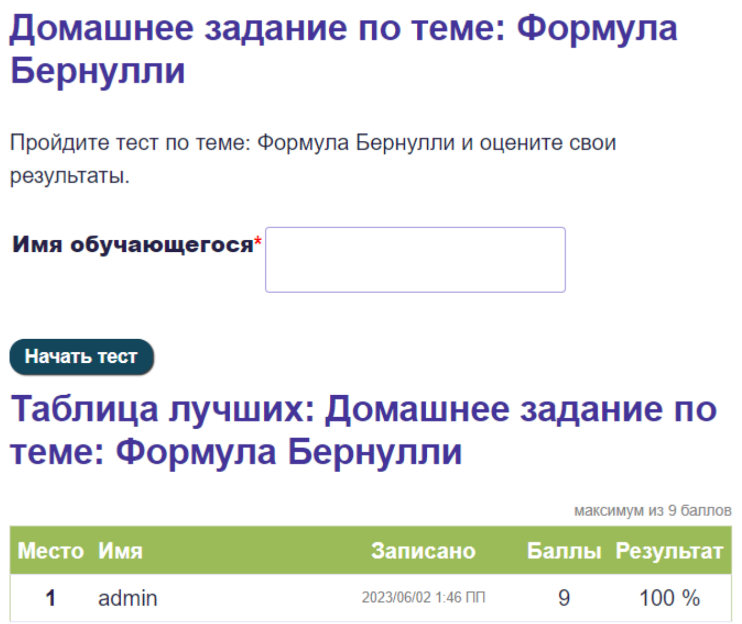


Рисунок 38

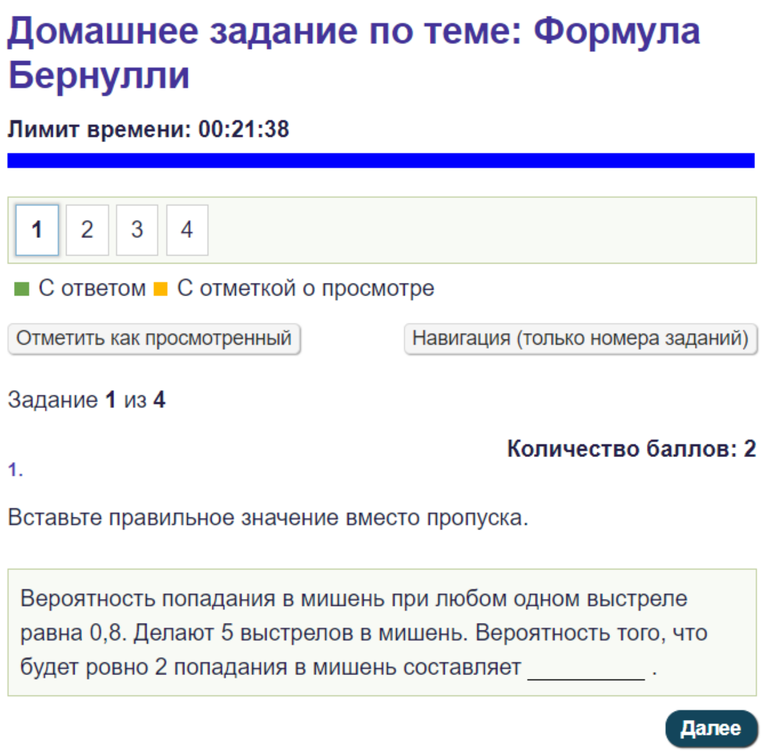


Рисунок 39

Перед итоговой проверочной работой обязательным является подготовиться к ней с помощью пяти этапов решения задач по теме «Элементы теории вероятностей», представленных в тестовом варианте на вкладке – Решение задач ЕГЭ по теме «Элементы теории вероятностей». Каждый этап состоит из задач по пройденным в курсе внеурочной деятельности темам. Представлены тестовые задания в виде: одиночного выбора; сортировки; вставки пропущенного значения (рисунки 40-47).

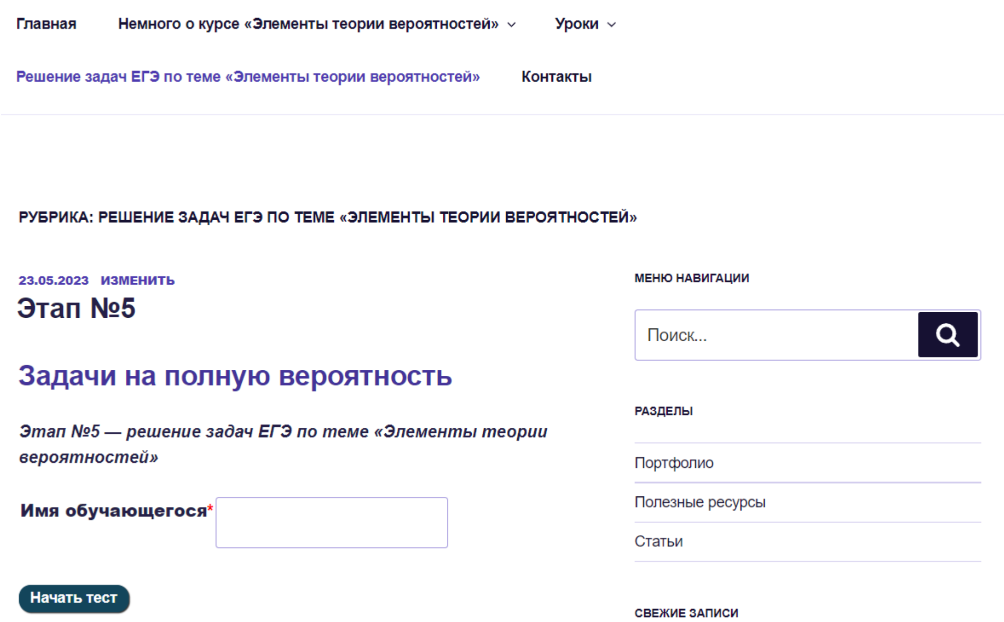


Рисунок 40

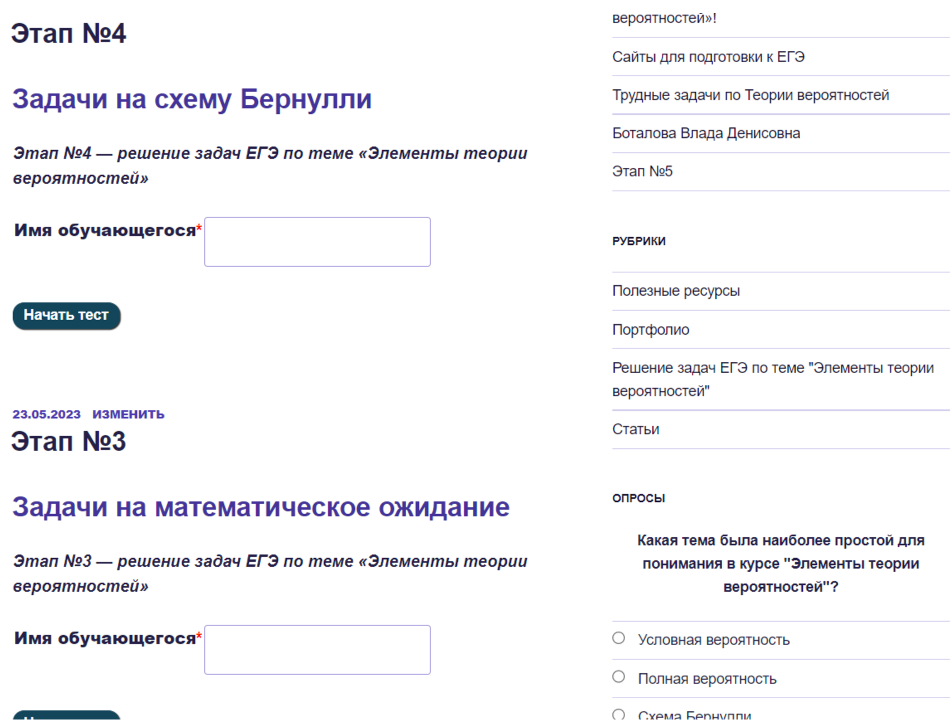


Рисунок 41

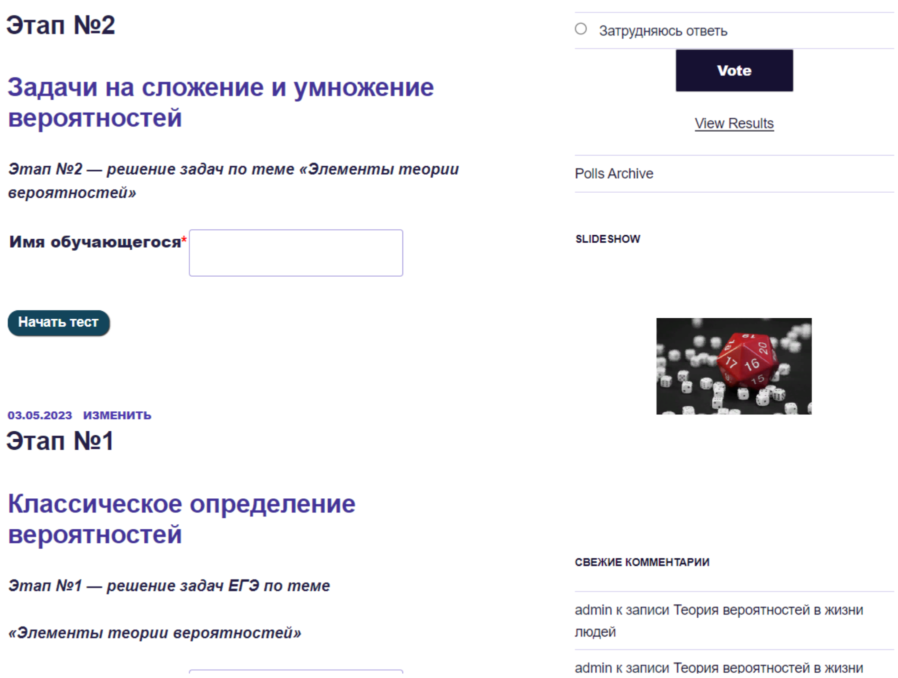


Рисунок 42

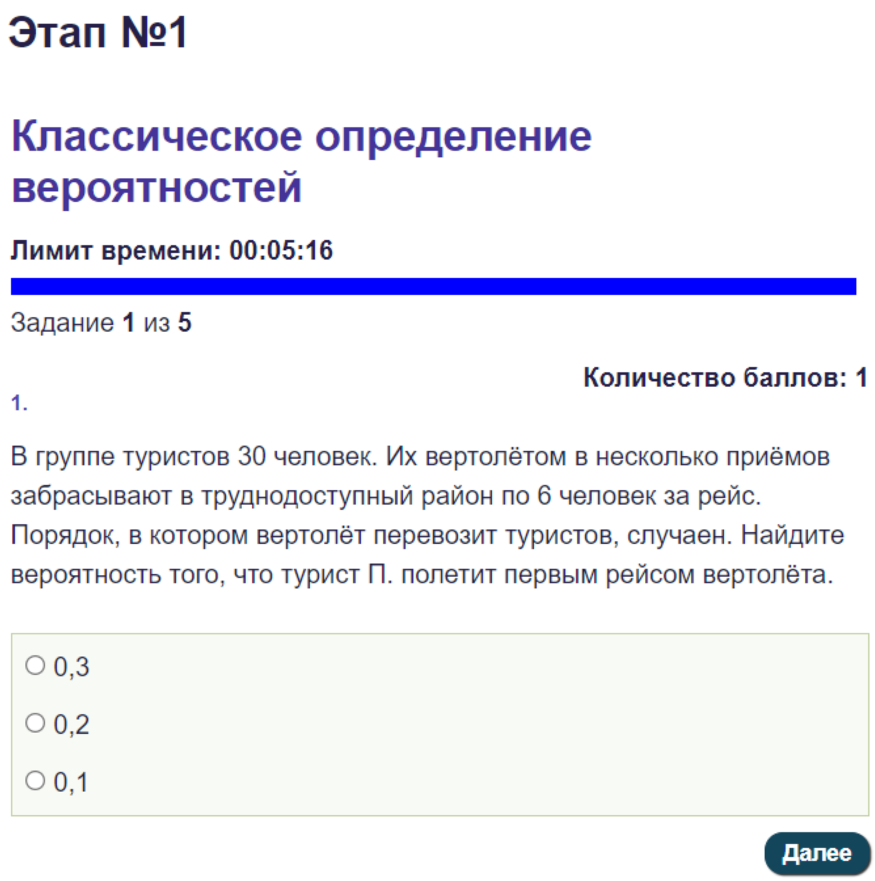


Рисунок 43

Этап №2

Задачи на сложение и умножение вероятностей

Лимит времени: 00:10:50

1 2 3 4 5

■ С ответом ■ С отметкой о просмотре

Отметить как просмотренный | Навигация (только номера заданий)

Задание **1** из **5**

Количество баллов: 2

1.

Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

1. ○ 0,25
2. ○ 0,156
3. ○ 0,12

Рисунок 44

Этап №3

Задачи на математическое ожидание

Лимит времени: 00:09:45

1 2 3

■ С ответом ■ С отметкой о просмотре

Отметить как просмотренный | Навигация (только номера заданий)

Задание **1** из **3**

Количество баллов: 3

1.

Страховая компания в некотором регионе страхует владельцев автомобилей. Цена годового страхового полиса равна 35 000 рублей. Исследования показали, что в течение года владелец автомобиля попадает в мелкую аварию с вероятностью 0,16 и средняя сумма страховой выплаты при этом равна 40 000 рублей. С вероятностью 0,035 автомобилист попадает в более серьезную аварию, и средняя сумма выплаты при этом равна 700 000 рублей. Найдите математическое ожидание случайной величины «средний доход страховой компании от продажи одного полиса»

○ 4100

○ 4200

Рисунок 45

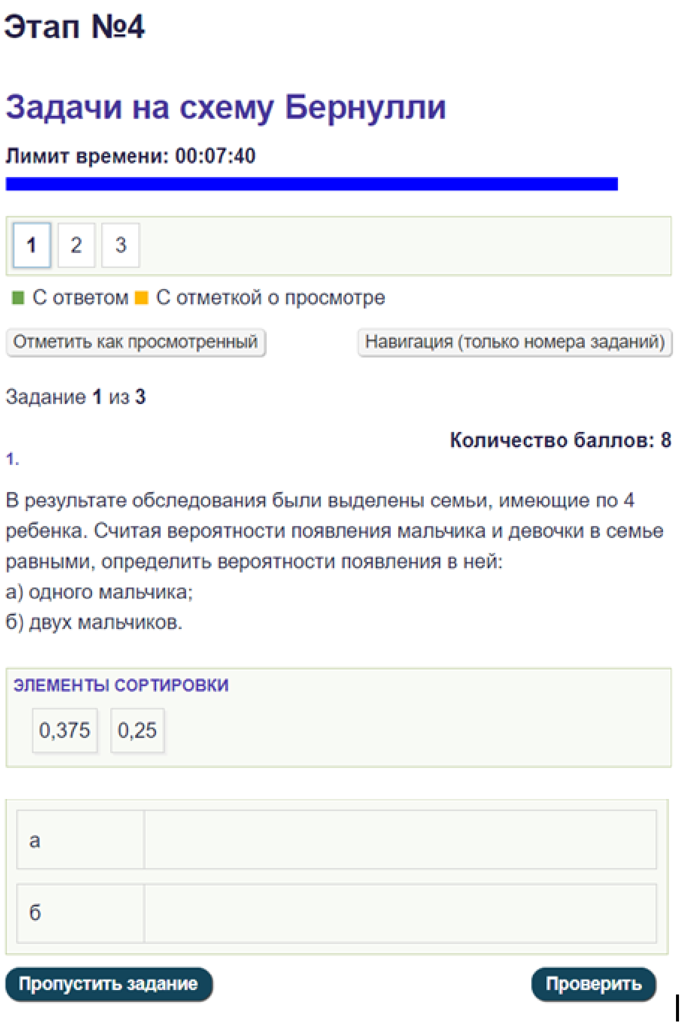

Этап №4
Задачи на схему Бернулли
Лимит времени: 00:07:40
1 2 3
С ответом С отметкой о просмотре
Отметить как просмотренный
Навигация (только номера заданий)
Задание 1 из 3
Количество баллов: 8
1.
В результате обследования были выделены семьи, имеющие по 4 ребенка. Считая вероятности появления мальчика и девочки в семье равными, определить вероятности появления в ней:
а) одного мальчика;
б) двух мальчиков.
ЭЛЕМЕНТЫ СОРТИРОВКИ
0,375
0,25
а
б
Пропустить задание
Проверить

Рисунок 46

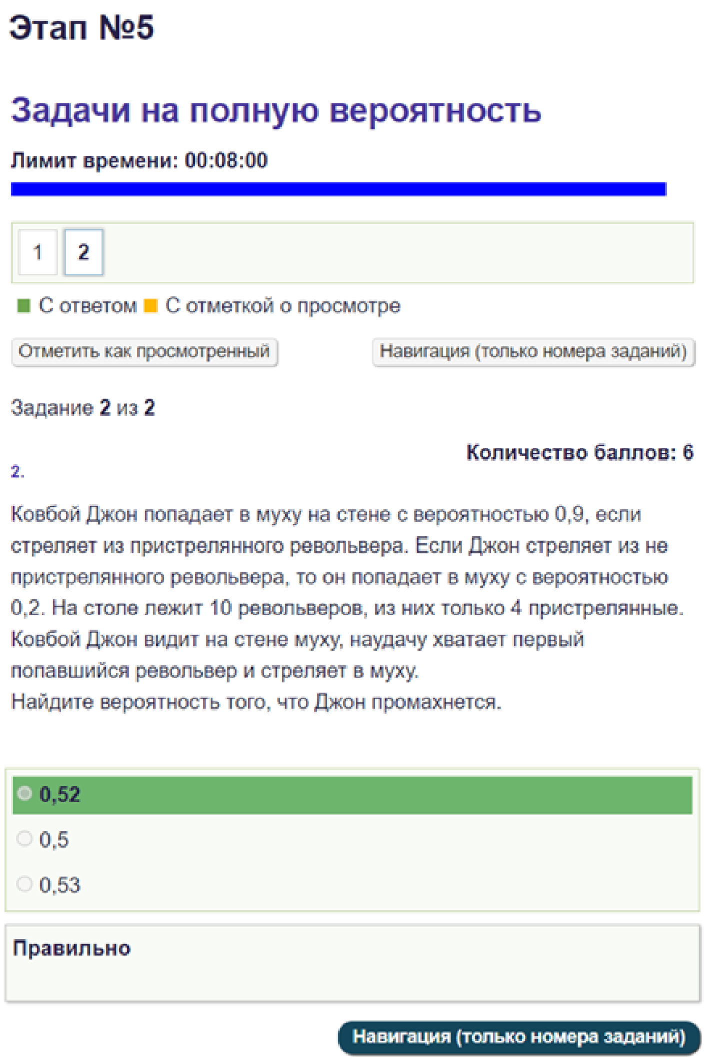


Рисунок 47

На панели меню, на вкладке – ответы на проверочную работу и разбалловка, содержатся ответы к итоговой проверочной работе. И примерное соотношение баллов к оценке (рисунок 48).

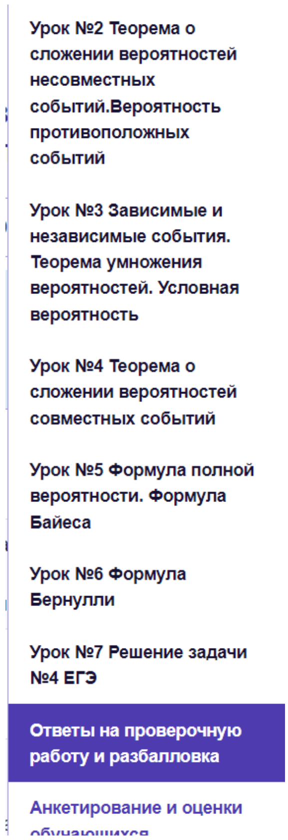


Рисунок 48

Двигаясь далее по главному меню, перейдём на вкладку Контакты, где можно увидеть контактные данные разработчика сайта, место где был создан данный сайт. Также в этой же вкладке представлены формы обратной связи и заказ обратного звонка. При возникновении вопросов по организации и проведению курса можно написать сообщение или заказать звонок, указав своё имя и телефон (рисунки 49-51).

КОНТАКТЫ

Изменить

Разработчик сайта:

ФИО: Боталова В.Д.

E-mail: botalova_vlada@mail.ru

Телефон: +79634694466

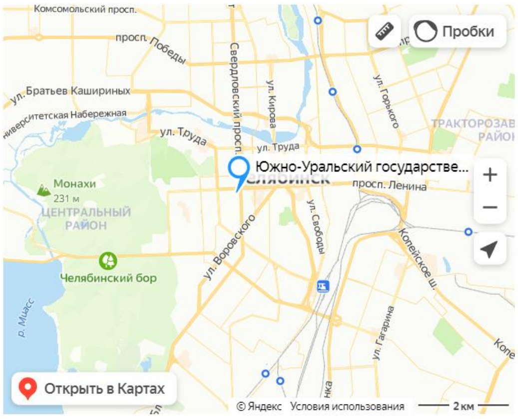


Рисунок 49

Обратная связь:

Ваше имя (обязательно)

Ваш e-mail (обязательно)

Тема

Сообщение

Отправить

Рисунок 50

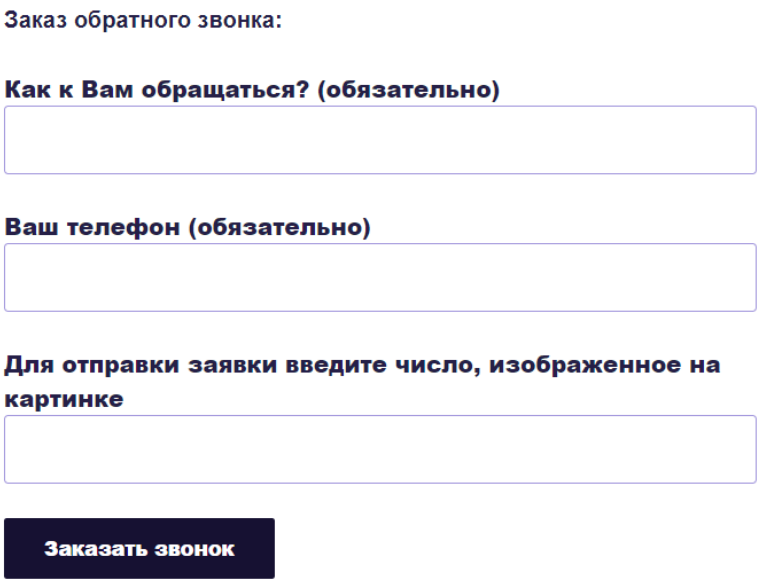


Рисунок 51

В главном меню на вкладке Уроки также представлены оценки обучающихся и анкетирование, которое нужно пройти после прохождения курса «Элементы теории вероятностей» (рисунки 52-56).

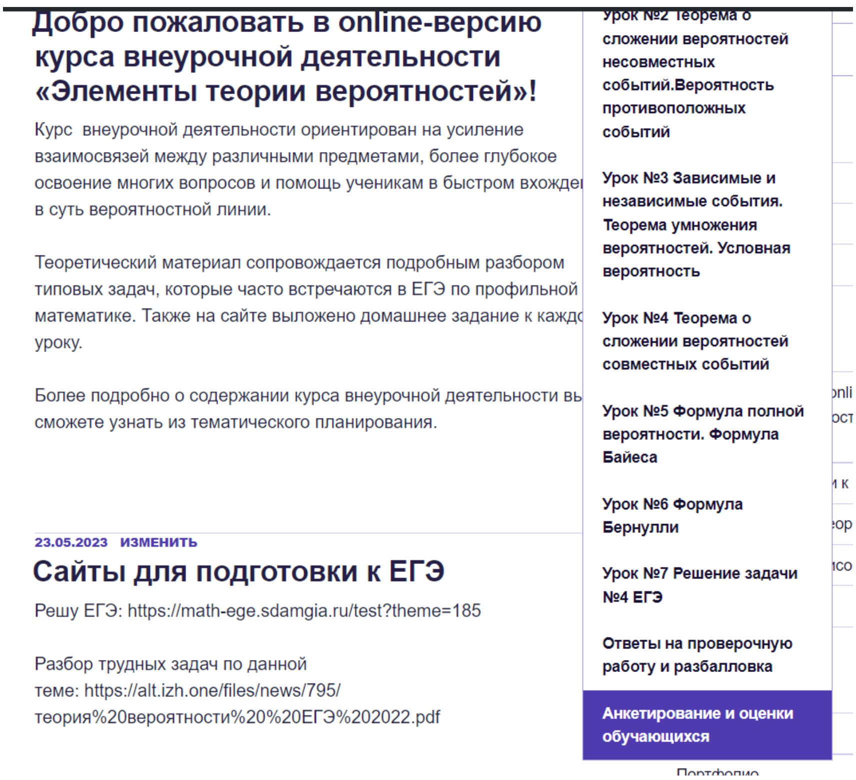


Рисунок 52

Оценки за решение задач ЕГЭ по теме "Элементы теории вероятностей"

Показать 10 **записей** **Поиск:**

ФИО	Условная вероятность	Теоремы сложения и умножения вероятностей	Формула Бернулли	Формула Байеса	Формула полной вероятности
Боталова Влада Денисовна	5	5	3	5	4
Гребенщикова Виктория Александровна	5	5	4	5	5
Латыпова Анжелика Альбертовна	5	5	3	5	4
Черепанова Нина Владимировна	5	4	5	3	5
Соловьёва Ольга Валерьевна	3	5	4	4	4

Рисунок 53

Анкетирование

Пройдите опрос после прохождения курса "Элементы теории вероятностей"

angelikalat29@gmail.com Сменить аккаунт

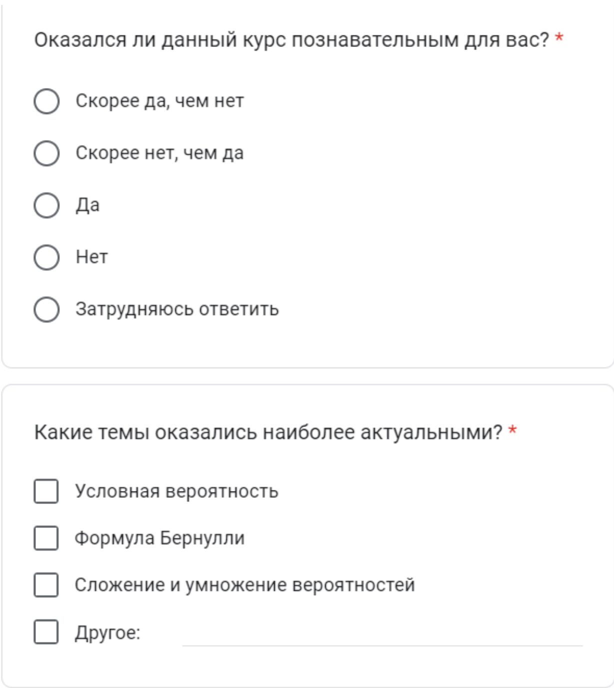
Совместный доступ отсутствует

*Обязательный вопрос

В каком Вы классе? *

- Основная школа
- 10 класс
- 11 класс

Рисунок 54



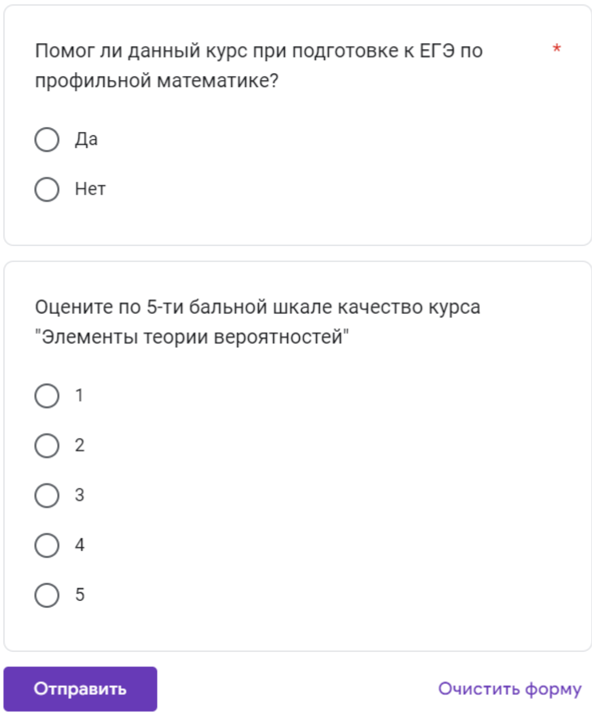
Оказался ли данный курс познавательным для вас? *

- Скорее да, чем нет
- Скорее нет, чем да
- Да
- Нет
- Затрудняюсь ответить

Какие темы оказались наиболее актуальными? *

- Условная вероятность
- Формула Бернулли
- Сложение и умножение вероятностей
- Другое:

Рисунок 55



Помог ли данный курс при подготовке к ЕГЭ по профильной математике? *

- Да
- Нет

Оцените по 5-ти бальной шкале качество курса "Элементы теории вероятностей"

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

Отправить

Очистить форму

Рисунок 56

Можно отметить, что на странице данного курса в боковом меню присутствуют: полезные ресурсы, которые включают в себя необходимые материалы для решения «Трудных задач» по теме «Элементы теории вероятностей», а также статьи, в которых приводится подробный разбор задачи № 4 ЕГЭ по профильной математике (рисунок 57).

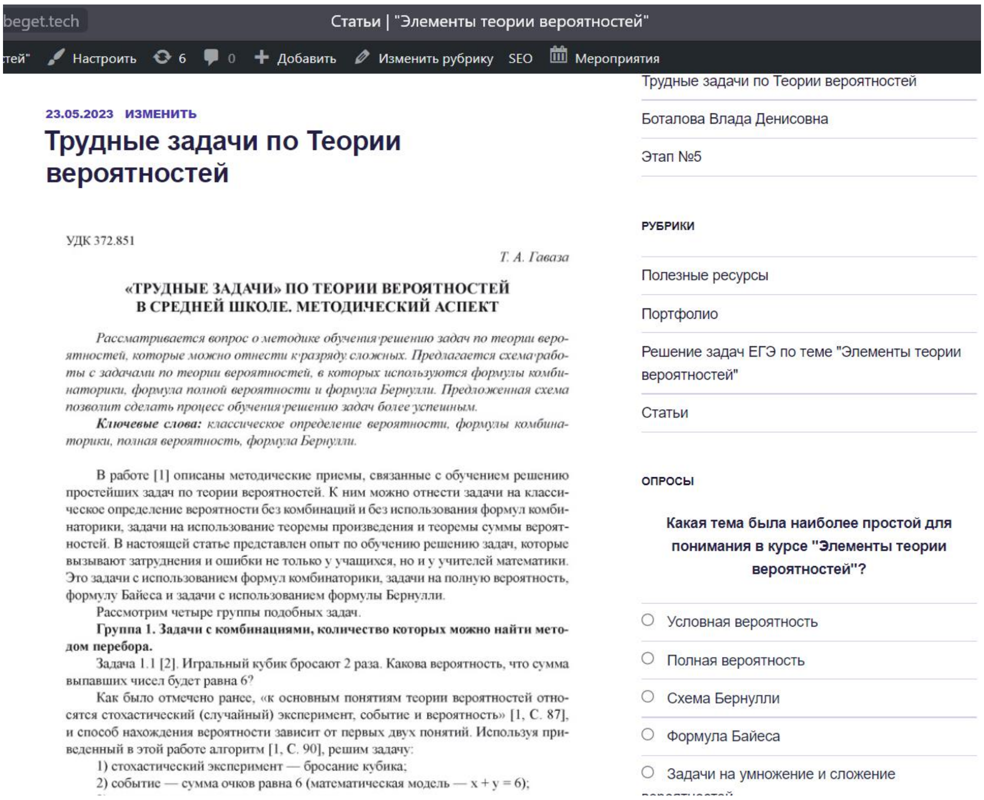


Рисунок 57

В конце обзора курса внеурочной деятельности хочется отметить такие преимущества онлайн-обучения как:

– возможность изучения материала в своём темпе, без привязки к группе;

– доступность, возможность изучать материал с любого устройства, имеющего доступ в интернет;

– эффективная обратная связь между учителем и учениками в течение всего периода обучения;

– возможность в любое время просмотреть урок и передать работу учителю для проверки.

Образование является непрерывным и важным социальным процессом. Оно играет огромную роль в формировании личности, развитии талантов и достижении личных и профессиональных целей. Именно поэтому образование должно быть доступно и максимально удобно для каждого, чтобы каждый мог получить знания и навыки, которые приведут его к успеху и счастью. В нашей современной эпохе развития технологий, онлайн обучение становится все более популярным и доступным. Режим реального времени – это новейшая технология, которая позволяет ученикам получать знания и навыки независимо от места проживания, а также владения компьютером и выходом в Интернет.

Кроме того, обучение в режиме реального времени может быть очень эффективным, так как ученик может смотреть и решать задачи прямо на настоящей учебной платформе, которая может симулировать реальные ситуации и действия. В таком режиме онлайн-обучения обучающиеся также могут иметь быстрый доступ к материалам, заданиям, которые будут обновляться в режиме онлайн. Преподаватель может общаться со студентами в непосредственном режиме, а также устранять возникшие ошибки в режиме реального времени.

Таким образом, обучение в режиме реального времени является мощным инструментом, который может преобразить образование, сделав его более доступным, удобным и эффективным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория вероятностей представляют собой раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений, событий и значений. В современном мире, для получения наиболее достоверных количественных значений экономических показателей, все более актуально применение математического аппарата теории вероятности, устанавливающего взаимосвязь между различными случайными параметрами, что помогает принимать обоснованные решения в управлении экономическими процессами. Задачи, решаемые данным способом, имеют огромную практическую значимость, позволяя упростить довольно громоздкие вычисления.

Большое значение при изучении математики играет внеурочная деятельность. Она формирует у обучающихся способность логически мыслить, формирует потребность в постоянном саморазвитии и самореализации, а также позволяет более обширно изучать темы, которые вызывают затруднения при урочной деятельности. Исходя из этого, нами была рассмотрена внеурочная деятельность с учётом её значения для обучающихся.

Во второй главе нами была рассмотрена история введения вероятностной линии в школьном курсе математики, при этом были выделены проблемы внедрения данной темы в учебный план.

Проанализировав современные учебники на изложение темы элементы теории вероятностей, был сделан вывод, что данная тема является одной из ведущих, но вызывает затруднения у обучающихся, так как введение вероятностной линии в школьный курс математики произошло относительно недавно.

В работе были проанализированы результаты исследований, а также представленные научные материалы, что позволило классифицировать задачи согласно их типам. На основе проведенного анализа были сформированы подборки задач для каждого типа, а также создан курс внеурочной деятельности «Элементы теории вероятностей», направленный на изучение основ теории вероятностей. В курсе были использована программно-методическая поддержка, онлайн-курс с одноимённым названием, обеспечивающая лучшее усвоение материала. Все вышеперечисленные шаги способствовали более эффективному обучению теме элементы теории вероятностей.

Данный курс составляет 14 часов, из расчёта 1 час в неделю и захватывает обширное количество заданий, содержащих вероятностную линию.

Программно-методическая поддержка курса внеурочной деятельности позволяет обучающимся не только повторять темы и выполнять домашние задания, а также развивает их самостоятельность. С её помощью ученикам будет проще структурировать знания по данной теме и осуществлять самоконтроль.

По одной из тем, содержащихся в курсе внеурочной деятельности, а именно по теме «Формула полной вероятности» была разработана технологическая карта урока на основе изученной литературы и материалов ЕГЭ.

Таким образом, цель, поставленная нами, была достигнута и задачи выполнены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Болдина, М. А.** Понятие и сущность профориентационной работы в образовательном учреждении / М. А. Болдина, Е. В. Деева // Социально-экономические явления и процессы. – 2012. – № 3. – С. 1–9.

2. **Булычев, В. А.** Изучение теории вероятностей и статистики в школьном курсе математики. Программа для курсов повышения квалификации учителей / В. А. Булычев, Е. А. Бунимович // Математика в школе. 2003. – № 4. – С. 28–33.

3. **Бунимович, Е. А.** Теория и практика преподавания вероятности и статистики в российской школе / Е. А. Бунимович // Математика. – 2009. – № 14. – С. 2.

4. **Виленкин, Н. Я**. Алгебра и математический анализ для 11 класса: учебное пособие для школ и классов с углубленным изучением математики / Н. Я. Виленкин. – Москва: Просвещение, 1998. – 288 с.

5. **Гаваза, Т. А.** «Трудные задачи» по теории вероятностей в средней школе. Методический аспект / Т. А. Гаваза // Вестник Псковского государственного университета. Серия «Естественные и физико-математические науки». – 2015. – № 6. – С. 61–68.

6. **Гаваза, Т. А.** О преподавании теории вероятностей в средней школе. Методический аспект / Т. А. Гаваза // Вестник Псковского государственного университета. Серия «Естественные и физико-математические науки». – 2014. – № 4. – С. 87–92.

7. **Гмурман, В. Е.** Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для ВУЗов. / В. Е. Гмурман. – Москва: Высшая школа, 2003. – 464 с.

8. **Горбачева, Е. Ю.** Анализ становления профильного образования в России / Е. Ю. Горбачева // Теория и практика общественного развития. – 2013. – № 8. – С. 1–3.

9. **Макусева, Т.** Г. Математика в профильном обучении в школе / Т. Г. Макусева // Наука и школа. – 2010. – № 3. – С. 60–62.

10. Математика: алгебра и начала математического анализа. Углублённый уровень: 11 класс: методическое пособие / Е. В. Буцко, А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Москва: Вентана-Граф, 2020. – 143 с. – ISBN 978-5-360-10609-8.

11. **Мельникова, И. Н.** Теория вероятностей: конспект лекций для факультета АиВТ / И. Н. Мельникова, Н. О. Фастовец. – Москва: Издательский центр РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина, 2017. – 100 с.

12. **Мерзляк, А. Г.** Алгебра и начала математического анализа. 11 класс (углубленный уровень): учебное пособие / А. Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В. М. Поляков. – 2-е издание – Москва: Вентана-Граф, 2019. – 416 с.

13. **Модкович, А. Г.** Алгебра и начала математического анализа. 10 класс (базовый и углубленный уровни). Часть 1: учебное пособие / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 9-е издание. – Москва: Мнемозина, 2020. – 457 с.

14. **Модкович, А. Г.** Алгебра и начала математического анализа. 11 класс (базовый и углубленный уровни). Часть 1: учебное пособие / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 9-е издание – Москва: Мнемозина, 2014. – 311 с. – ISBN 978-5-346-03199-4.

15. **Мордкович, А.** Г. Алгебра и начала анализа. 10 класс (профильный уровень): методическое пособие для учителя/ А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. 2-е издание – Москва: Мнемозина, 2010. – 191 с. – ISBN 978-5-346-01401-0.

16. **Мордкович, А.** Г. Алгебра и начала анализа. 11 класс (профильный уровень): методическое пособие для учителя / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. 2-е издание – Москва: Мнемозина, 2010. – 239 с. – ISBN 978-5-346-01422-5.

17. **Никольский, С. М.** Алгебра и начала математического анализа. 10 класс (базовый и углубленный уровни). Часть 1. / С. М. Никольский, М. К. Потапов, А. В. Шевкин. 9-е издание – Москва: Просвещение, 2020. – 457 с.

18. **Ткачева М. В.** О готовности учащихся к изучению стохастики / М. В. Ткачева, Е. Н. Василькова, Т. В. Чуваева // Математика в школе. – 2003. – № 9. – С. 2.

19. **Попова, И. Н.** Организация внеурочной деятельности в условиях реализации ФГОС / И. Н. Попова // Народное образование. – 2013. – № 1. – С.219 – 227.

20. **Потапов, М. К**. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: книга для учителя / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. – Москва: Просвещение, 2008. – 159 с.

21. **Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 12.08.2022 № 732** «О внесении изменений в федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования, утвержденный приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 мая 2012 г. № 413». – Москва, 2022. – URL: http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202209120008?index=84 (дата обращения: 1.06.2023). – Текст: электронный.

22. **Примерная рабочая программа среднего общего образования предмета «Математика»: углубленный уровень** (для 10-11 классов общеобразовательных организаций): одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию, протокол 7/22 от 29 сентября 2022 г. – Москва, 2022. – URL: https://fgosreestr.ru/poop/primernaya-osnovnaya-obrazovatelnaya-programma-srednego-obshhego-obrazovaniya (дата обращения: 3.06.2023). – Текст: электронный.

23. СДАМ ГИА: РЕШУ ЕГЭ: образовательный портал для подготовки к экзаменам. – URL: https://math-ege.sdamgia.ru/?redir=1 (дата

обращения: 30.05.2023). – Текст: электронный.

24. Элементы теории вероятностей: курс внеурочной деятельности: сайт. – Челябинск, 2023. – URL: http://t96346so.beget.tech/ (дата обращения: 20.05.2023). – Текст: электронный.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Технологическая карта урока

Классы: 10-11

Тема урока: Формула полной вероятности и её применение при решении задач ЕГЭ.

Тип урока: урок усвоения новых знаний на основе имеющихся.

Цель урока: рассмотреть формулу полной вероятности. Научиться применять новые знания на практике в комбинации с изученным материалом.

Планируемые результаты.

1. Личностные (далее – Л):

Л1 – самооценка на основе критериев успешности;

Л2 – адекватное понимание причин успеха/неуспеха в учебной деятельности.

2. Метапредметные.

Регулятивные (далее – Р):

Р1 – принятие и сохранение учебной задачи;

Р2 – выбор наиболее эффективных способов решения учебных и познавательных задач;

Р3 – способность дифференцировать изученный материал и материал подлежащий изучению;

Р4 – осознание качества усвоения;

Р5 – определение уровня усвоения.

Познавательные (далее – П):

П1 – анализ объектов с выделением существенных и несущественных признаков;

П2 – построение логической цепи рассуждений;

П3 – способность проводить анализ представленной информации;

П4 – структурирование знания.

Коммуникативные (далее – К):

К1 – планирование учебного сотрудничества с учителем;

К2 – оформлять свои мысли в устной форме;

К3 – доносить свою позицию до других.

3. Предметные (далее – Пр):

Пр1 – Оперировать понятиями: условная вероятность, умножение вероятностей, несовместные события;

Пр2 – знать алгоритм решение задачи на применение формулы полной вероятности;

Пр3 – использовать формулу полной вероятности при решении задач.

Методы и приемы: наглядный, словесный, практический.

Используемые педагогические технологии: развивающее обучение, проблемное обучение.

Опорные понятия, термины: несовместные события, условная вероятность.

Новые понятия: формула полной вероятности, гипотезы, полная группа несовместных событий.

Дидактический материал: презентация, дидактическая карточка: кроссворд на платформе learningapps (далее – ДК1).

Оборудование: проектор, персональный компьютер.

Способы контроля достижения планируемых результатов: дидактическая карточка 2 – листы самооценки (далее – ДК2).

Этапы урока:

1. Организационный момент (1 мин).
2. Актуализация знаний. Формулировка темы и целей урока (6 мин).
3. Изучение нового материала (13 мин).
4. Применение знаний и умений (18 мин).
5. Подведение итогов урока. Рефлексия (2 мин).

Далее в Таблице А.1 рассмотрим структуру урока.

Таблица А.1 – Структура урока

№ Этапа	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся	Планируемые результаты*		Примечание **
			Предметные	УУД	
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	Приветствует учащихся. Проводит проверку готовности к уроку.	Приветствуют учителя.		К1.	
2	Говорит о том, что на прошлых уроках были сформировано понимание, что представляет собой условная вероятность; понятие несовместных событий. Говорит о том, что сегодня ученики узнают ещё об одной формуле, которая применяется в задании № 4 ЕГЭ по профильной математике. Предлагает разгадать кроссворд, проверить знание понятийного аппарата в рамках темы «Элементы теории вероятностей» в LearningApps и узнать название темы урока. Контролирует выполнение задания. Просит записать тему урока со слайда в тетрадь. Говорит о целях и задач на урок.	Внимательно слушают учителя. Выполняют задание. Внимательно слушают учителя. Записывают тему урока в тетрадь.	Пр1.	Р3, П1, П2, П3, К2.	ДК1, Слайд 1.

Продолжение таблицы А.1

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
3	Говорит о том, что формула полной вероятности является следствием основных двух теорем теории вероятности: сложения и умножения. Предлагает посмотреть на слайд и записать формулу полной вероятности. Просит обратить внимание на то, что формула полной вероятности позволяет вычислить вероятность интересующего события через условные вероятности этого события в предположении неких гипотез, а также вероятностей этих гипотез. Выводит на слайд алгоритм решения задач на формулу полной вероятности. Просит записать данный алгоритм в тетрадь и рассказать друг другу данный алгоритм по шагам.	Внимательно слушают учителя. Задают вопросы. Записывают формулу полной вероятности. Записывают в тетрадь алгоритм, проговаривая его шаги	Пр1, Пр2.	Р3,Р4, П1, П2, П3, К1.	Слайд 2-3.

Продолжение таблицы А.1

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
3	Разбирает задачу, представленную на слайде по шагам, следуя пунктам алгоритма. *Задача 1* Два завода производят зонты. Первый завод производит 30 %, а второй 70 % всего объёма зонтов. Вероятность купить бракованный зонт равна 1 %, если он изготовлен на первом заводе, и равна 3 %, если на втором заводе. Найдите вероятность того, что наугад выбранный зонт окажется бракованным.	Внимательно слушают учителя. Участвуют в обсуждении условия задачи. Записывают решение задачи в тетрадь. *Решение* A = {выбранный зонт окажется бракованным}; $P(A)$ *–?* H_1 = {зонт изготовлен первым заводом}; H_2 = {зонт изготовлен вторым заводом}. По условию: $P(H_1) = 0{,}3,$ – вероятность того, что зонт будет изготовлен первым заводом. $P(H_2) = 0{,}7,$ – вероятность того, что зонт будет изготовлен вторым заводом. $P(A\|H_1) = 0{,}01,$ – вероятность того, что зонт был куплен на первом заводе и оказался бракованным. $P(A\|H_2) = 0{,}03,$ – вероятность того, что зонт был куплен на втором заводе и оказался бракованным. По формуле *полной вероятности:* $P(A) = 0{,}01 \cdot 0{,}3 + +0{,}03 \cdot 0{,}7 = 0{,}024,$ – вероятность того, что выбранный зонт окажется бракованным. *Ответ:* 0,024.			Слайд 4.

Продолжение таблицы А.1

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
4	Выводит на слайде следующую задачу. Вызывает учеников к доске для её решения. *Задача 2* Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из не пристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнется.	Один ученик выполняет задание у доски с объяснением по шагам, остальные выполняют в тетради, сверяясь с доской. *Решение* Нас интересует событие: A = {Джон промахнётся при выстреле в муху}; $P(A)$ – ? Найдём гипотезы: H_1 = {Джон схватил пристрелянный пистолет}; H_2 = {Джон схватил не пристрелянный пистолет}. Всего пистолетов 10, из них 4 пристрелянные, следовательно, $n = 10$, $m = 4$. По *классической формуле вероятности:* $P(H_1) = \frac{m}{n} = \frac{4}{10} = 0{,}4,$ – вероятность того, что Джон схватил пристрелянный пистолет. Не пристрелянных пистолетов: 10 – 4 = 6, следовательно, $n = 10$, $m = 6$. По *классической формуле вероятности:* $P(H_2) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = 0{,}6,$ – вероятность того, что Джон схватил не пристрелянный пистолет.	Пр1, Пр2, Пр 3.	К2,К3 П1, Л2 П2, П3, Р1,Р2.	Слайд 5.

Продолжение таблицы А.1

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
4		$P(A\|H_1) =$ $= 1 - 0{,}1 = 0{,}1,$ – вероятность того, что Джон схватил пристрелянный пистолет, сделал выстрел и промахнулся. $P(A\|H_2) =$ $= 1 - 0{,}2 = 0{,}8,$ – вероятность того, что Джон схватил не пристрелянный пистолет, сделал выстрел и промахнулся. По формуле *полной вероятности:* $P(A) = 0{,}1 \cdot 0{,}4 +$ $+0{,}8 \cdot 0{,}6 =$ $= 0{,}04 + 0{,}48 = 0{,}52,$ – вероятность того, что Джон промахнётся при выстреле в муху. *Ответ:* 0,52.			
5	Спрашивает обучающихся о том, что нового они сегодня узнали. Раздаёт листы самооценки и просит заполнить их. Говорит о том, что домашнее задание выложено на сайте [24].	Отвечают на вопрос учителя. Узнали формулу *полной вероятности* и алгоритм её применения при решении задач. Заполняют листы самооценки.		Р5, П4, Л1, Л2.	ДК2.

Компьютерная презентация на урок

Автор: Боталова В.Д.

На рисунке А.1 приведён Слайд 1 из компьютерной презентации по теме «Формула полной вероятности и её применение при решении задач ЕГЭ».

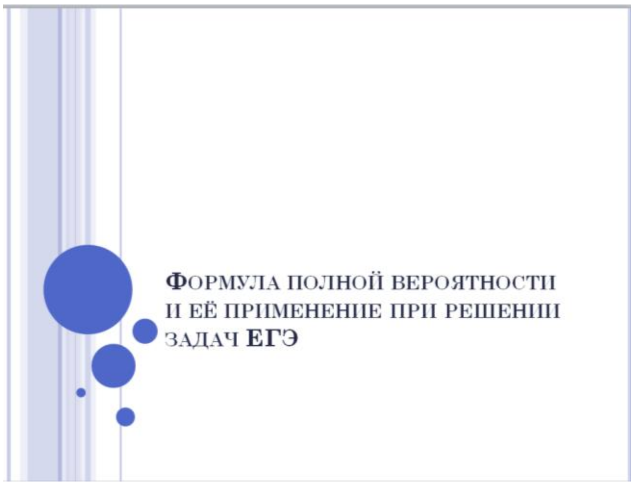


Рисунок А.1

На рисунке А.2 приведён Слайд 2 из компьютерной презентации по теме «Формула полной вероятности и её применение при решении задач ЕГЭ».

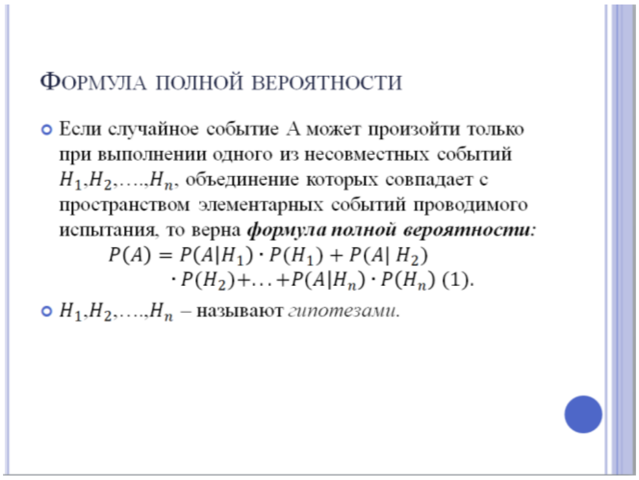


Рисунок А.2

На рисунке А.3 приведён Слайд 3 из компьютерной презентации по теме «Формула полной вероятности и её применение при решении задач ЕГЭ».

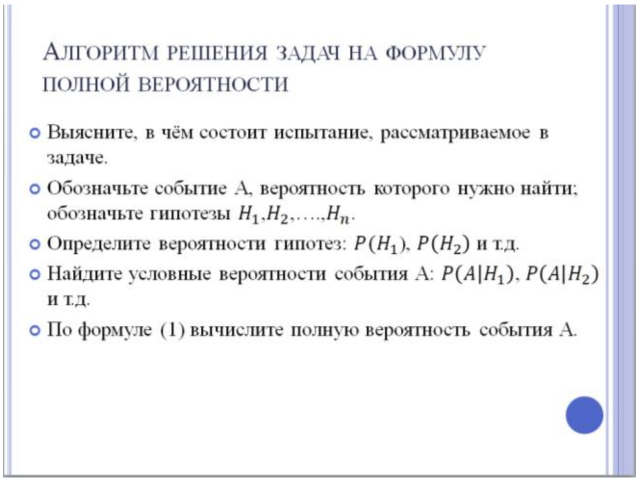


Рисунок А.3

На рисунке А.4 приведён Слайд 4 из компьютерной презентации по теме «Формула полной вероятности и её применение при решении задач ЕГЭ».

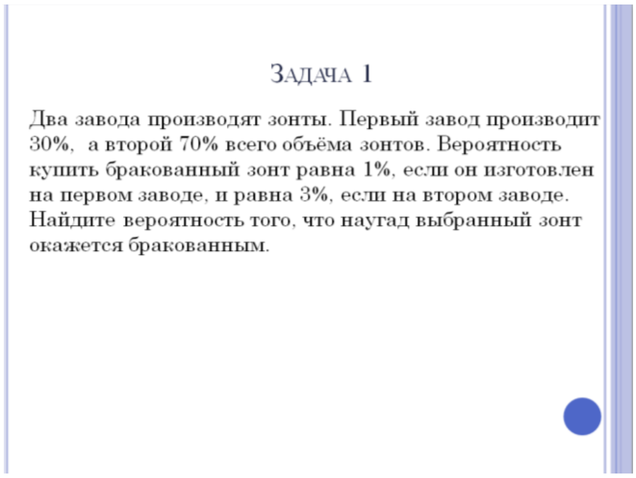


Рисунок А.4

На рисунке А.5 приведён Слайд 5 из компьютерной презентации по теме «Формула полной вероятности и её применение при решении задач ЕГЭ».

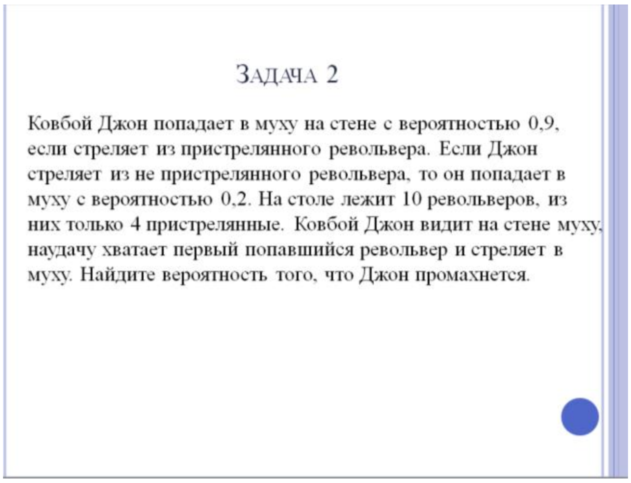


Рисунок А.5

Дидактические материалы

ДК1: кроссворд (рисунок А.6-А.8).

Данный кроссворд находится на сайте «Элементы теории вероятностей» в боковом меню на вкладке Полезные ресурсы [24].

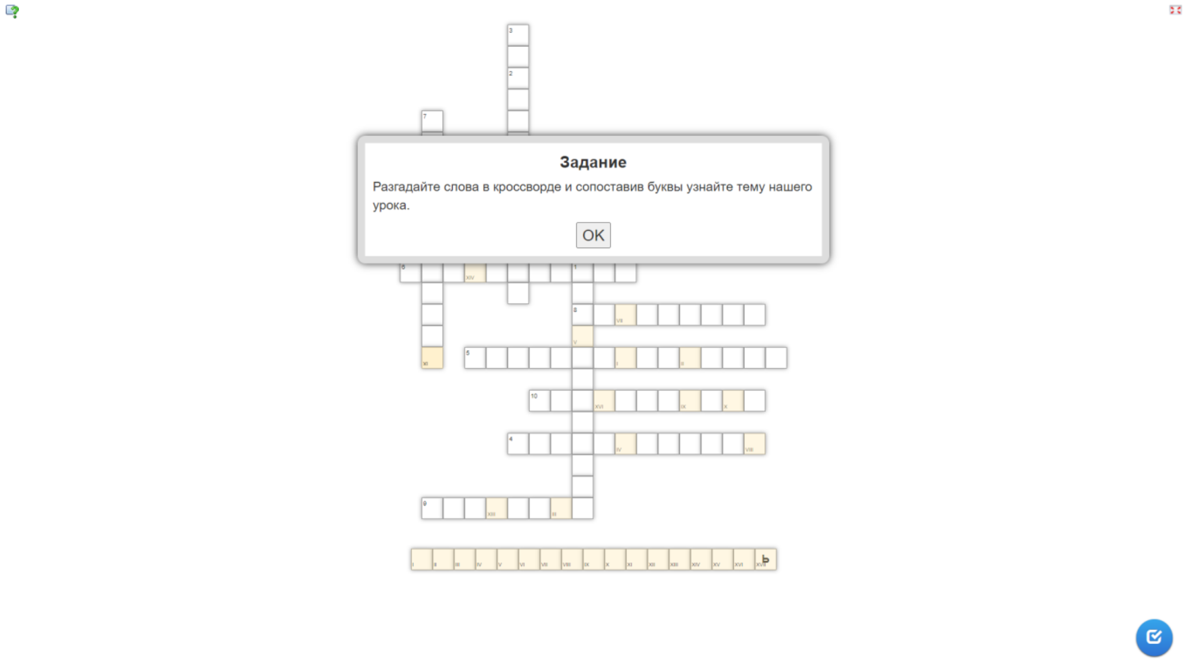


Рисунок А.6

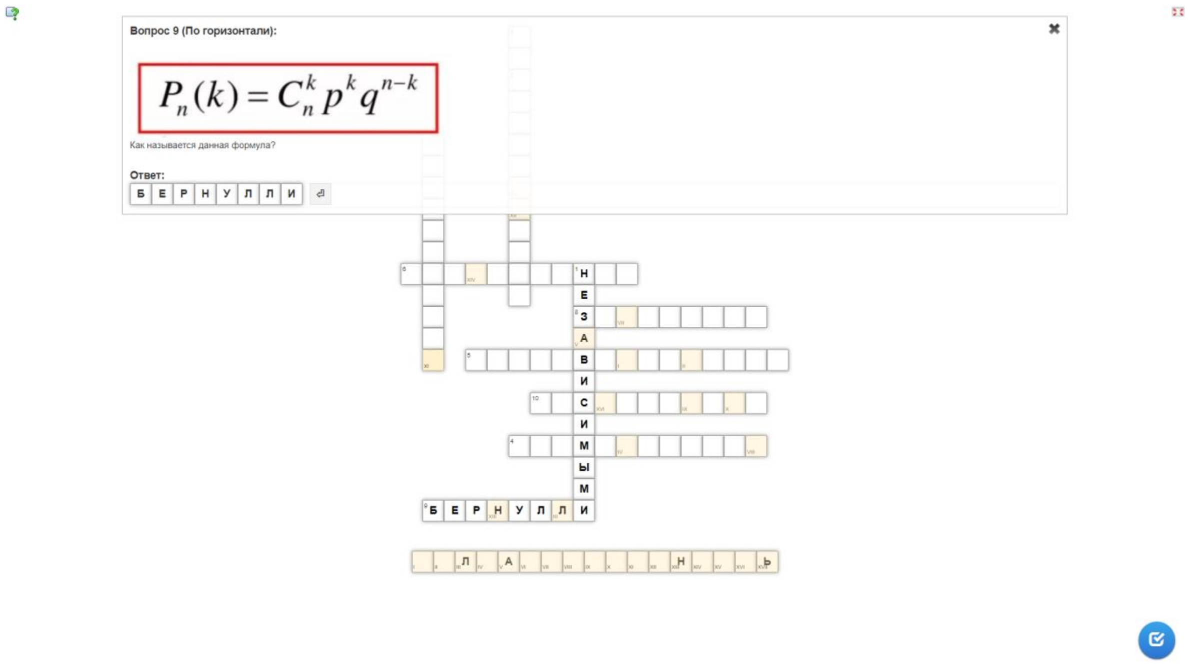


Рисунок А.7

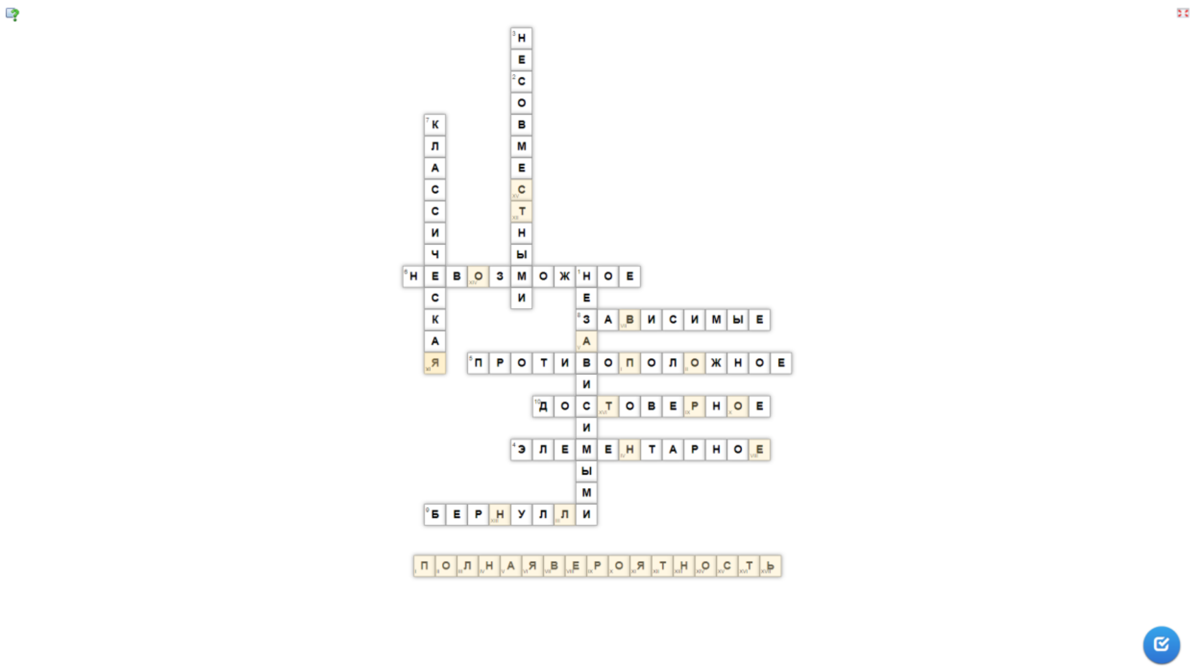


Рисунок А.8

ДК 2: лист самооценки (рисунок А.9).

Лист самооценки ученика (цы) ____ класса

____

Критерии	Мои комментарии	Баллы
Готовность к уроку		
Активность на уроке		
Итоговая оценка		

«5» - 11-12 баллов
«4» - 8 -10 баллов
«3» - 6-7 баллов

Менее 6 баллов – нужно поработать

ГЕНИЙ – 15 баллов

Рисунок А.9