МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Формирование универсальных учебных действий при решении уравнений в курсе основной общеобразовательной школы

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Направленность программы бакалавриата
«Математика. Информатика»
Форма обучения очная

Проверка на объем заимствований:
64,79% авторского текста
Работа рекомендована к защите
«26» марта 2021 г.
и. о. зав. кафедрой математики и МОМ
_____________ Шумакова Е.О.

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513/204-5-1
Мамоева Елена Малхазовна
Научный руководитель:
Доцент, к.п.н., доцент кафедры МиМОМ
Эрентраут Елена Николаевна

Челябинск
2021

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Математическое образование, которое учащийся получает в общеобразовательной школе, является главным элементом общего образования и общей культуры современного человека. В действительности все, что охватывает современного человека – это естественным образом связано с математикой. Именно поэтому практические задачи сводятся к решению различных видов уравнений, которые необходимо научиться решать.

Материал, связанный с темой уравнения, занимает большую половину школьного курса математики. Эта тема обильна по содержанию, по методам и приемам решения уравнений, по потенциалу ее использования при освоении ряда других вопросов школьного курса математики. В данной работе будут рассмотрены линейные, квадратные, биквадратные, дробно-рациональные, иррациональные уравнения.

Часто ученики задаются вопросом: зачем нужны уравнения? Вычислительные задачи бывают прямые и косвенные. В прямой задаче действия выполняются последовательно и диктуются непосредственно условием задачи, в то время как в косвенной, из условия задачи не видно, какие действия ведут к ее решению.

Для рационализации вычислительного процесса был создан метод уравнений, который является основным методом изучения в алгебре и которым пользуются по сей день. Суть этого метода такова.

1. Искомые величины именуются буквенными знаками (предпочтительно последними буквами латинского алфавита). С помощью этих знаков и знаков действий (+, - и т.д.) условие задачи «переводится на математический язык». Каждая «математическая фраза» является уравнением.

2. После этого решается уравнение, т.е. находятся значения искомых неизвестных величин. Решение уравнения производится механически, по общим правилам.

Таким образом, уравнения нужны, чтобы механизировать процесс вычисления. Главная трудность решения задачи – это составить уравнение.

Составить уравнение – это значит показать в математической форме связь между известными величинами задачи и искомыми, т.е. неизвестными.

При решении уравнений расширяется кругозор учащихся, а также углубляются знания, помогая в поступлении в ВУЗы. Курс математики значительно обедняется, если данная тема в нем отсутствует.

Цель данной работы – исследовать методику решения уравнений и разработать систему заданий для формирования универсальных учебных действий (далее – УУД) для учащихся 9 класса.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

– изучить и подвергнуть анализу учебную литературу по математике 5-9 классов;

– проанализировать данную тему в учебниках по математике;

– изучить УУД для решения уравнений в основной школе;

– составить систему заданий для контроля по данной теме и найти примеры решения уравнений из курса основной школы для 9 класса.

Объектом исследования является процесс обучения математике в основной школе.

Предметом исследования является изучение способов решения уравнений в курсе математики основной школы.

Методы исследования: анализ научно-методической литературы по данной теме.

Гипотеза: если систематически использовать систему заданий, формирующую УУД при решении уравнений в 9 классе, то учащиеся смогут повысить уровень своих знаний и умений по данной теме.

Все материалы могут быть использованы как для школьного изучения, так и для самостоятельного обучения, а также для подготовки к сдаче государственного экзамена после 9 класса и для учащихся, которым необходимо углубить собственные знания в этой теме.

Структура работы: работа состоит из двух глав, введения, заключения и списка литературы.

Введение раскрывает актуальность, определяет объект, предмет, цель, задачи и методы исследования. В первой главе затрагивается история развития уравнений, проводится анализ учебников и раскрытие в них темы «Уравнения», рассматриваются теоретические аспекты темы. Вторая глава посвящена универсальный учебным действиям и приемам для их формирования. Также составлена система заданий для 9 класса и приведены результаты апробации данной системы заданий.

Предметом алгебры является изучение уравнений и ряда вопросов, которые развились из теории уравнений. В современном мире к алгебре стали относить только алгебраические уравнения, после того как математика разделилась на ряд областей. Однако, в школьном курсе алгебры принято включать и такие вопросы, которые имеют лишь отдаленное отношение к учению об уравнениях. Такие как, теория прогрессий и логарифмические вычисления, которые скорее больше принадлежат арифметике, чем алгебре.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕМЫ «УРАВНЕНИЯ»

1.1 История развития уравнений

В связи с новыми требованиями к образованию в школе, такие как гуманизация образования, профильное обучение и т.п., большое значение принимает овладение истории математики в высших учебных заведениях. Если учителя владеют опытом развития математических знаний, то это помогает им выполнять свои профессиональные обязанности. При знании истории своего предмета учитель может с легкостью направлять учебный процесс, тем самым делая его более продуктивным. В основе данной работы лежит принцип историзма и историко-генетический метод. Генетический принцип нуждается в том, чтобы обучение придерживалось способам возникновения знания. Историко-генетический метод принимает во внимание, что учащиеся в своем индивидуальном обучении отражают в той или иной степени общий исторический путь, следуя которому, человечество добывало математические знания [34].

Периоды развития математики:

1. Зарождение математики (с возникновением человечества до VI-V вв. до н.э.).

2. Период элементарной математики (от VI-V вв. до н.э. до конца XVI в. н.э.).

3. Период создания математики переменных величин (от начала XVII в. до середины XIX в.).

4. Период современной математики (с середины XIX в. по наши дни).

Алгебра как умение решать уравнения зародилась очень давно. Вавилонские ученые обладали умением решать квадратные уравнения и системы двух уравнений, из которых одно – второй степени. При помощи таких уравнений решались различные задачи землемерия, строительного искусства и военного дела. Тогда уравнения записывали только в словесной форме. Слово «алгебра» появилось после написания трактата «Китаб аль-джебр вальмукабала» хорезмского математика и астронома Мухамеда Бен Муса аль Хорезми.

Первые сокращенные обозначения встречаются у древнегреческого математика Диофанта (2-3 в н.э.). Неизвестное он именует «аритмос» (число), вторую степень неизвестного – «дюнамис» (сила, могущество, имущество, степень и др.). Третью степень Диофант называет «кюбос» (куб), четвертую – «дюнамодюнамис», пятую – «дюнамокюбос», шестую – «кюбокюбос». Обозначает он их так: ар, дю, кю, ддю, дкю, ккю. Извествные числа для отличия от неизвестных сопровождаются обозначением «мо» (монас – единица). Сложение не обозначается совсем, для вычитания имеется сокращенное обозначение, равенство обозначается «ис» (исос – равный).

Отрицательные числа греки и вавилоняне не рассматривали. Уравнение 3 ар 6 мо ис 2 ар 1 мо ($3x + 6 = 2x + 1$) Диофант называл «неуместным», так как перенося члены из одной части уравнения в другую слагаемое становится вычитаемым, а вычитаемое – слагаемым.

В 1556 году английский математик Рекорд ввел знак равенства, объяснив это тем, что ничто не может быть более равным, чем два параллельных отрезка.

Франсуа Виет (французский математик) создал современную буквенную символику. До XVI в. толкование алгебры велось по большей части словесно. Знаки +, - впервые встречаются у немецких алгебраистов в XVI в., позже вводится знак * для умножения. Знак деления (:) был введен лишь в XVII в., решительный шаг в использовании алгебраической символики был сделан в XVI в., когда французский математик Франсуа Виет и его современники стали применять буквы для обозначения не только неизвестных (что делалось и ранее), но и любых чисел. Однако эта символика еще отличалась от современной [9].

Новая система позволила просто, ясно и компактно описать общие законы арифметики и алгоритмы.

Уравнениями также занимались Китай, Индия, страны арабского языка (Узбекистан и Таджикистан), в Средневековой Европе в 12 веке начинается развитие алгебры. Появляются отрицательные числа (13-16 в н.э.), комплексные числа.

После того, как были решены уравнения 3 и 4 степени, математики усиленно искали формулу для решения уравнения 5 степени. И в 1830 г. Галуа доказал, что никакое общее уравнение, степень которого больше чем 4, нельзя решить алгебраически. Тем не менее всякое уравнение n-ой степени имеет (если рассматривать и комплексные числа) n корней (среди которых могут быть и равные). В этом математики были убеждены еще в 17 веке, но только на рубеже 18 и 19 веков упомянутая теорема была доказана Гауссом.

Самые ранние дошедшие до нас рукописи свидетельствуют о том, что в Древнем Вавилоне и Древнем Египте были известны приёмы решения линейных уравнений. Нильс Хенрик Абель (1802-1829) внес важный вклад в теорию уравнений. В 1824 году он опубликовал доказательство неразрешимости в радикалах общего буквенного выражения пятой степени.

Сейчас алгебра как наука значительно расширилась и усложнилась. Однако элементарная алгебра по-прежнему, как и во времена древних египтян, является наилучшим тренажёром для развития мышления.

Многие тексты глубокой древности уже сопровождались задачами, решаемыми с помощью уравнений. К примеру, в папирусе Ахмеса и в Московском папирусе (на нем сделаны записи около 1850 г. до н. э.), который представляет собой свиток, изготовленный из растений, содержатся задачи, в которых неизвестное имеет особый символ (рисунок 1) и название: «хау» или «аха». Оно означает «куча», «количество». А так называемое «исчисление кучи», или «вычисление хау», приблизительно соответствует нашему решению задач с помощью уравнений.

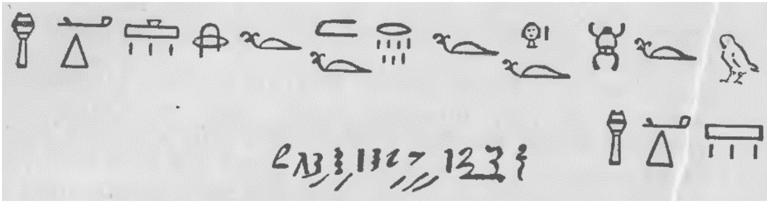


Рисунок 1 – Древнеегипетская запись уравнения $x\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+1\right)=37$

Рассмотрим пример задачи и ее решения из папируса Ахмеса:

Задача 1. «Количество и его четвертая часть дают вместе 15».

В наше время для решения задачи составляется уравнение $x+\frac{1}{4}x=15$.

Решая его, находим: х = 12.

А в папирусе Ахмеса решение начинается так: «Считай с 4; от них ты должен взять четверть, а именно 1; вместе 5». Затем 15 делится на 5, частное умножается на 4 и получается неизвестное 12.

Египетский метод решения является по существу методом предположения. Начинают с того, что в качестве неизвестного берут произвольное число, в данном случае 4, так как четверть его, 1, просто вычисляется. Далее $4+5=1$. Однако по условию задачи результат должен быть не 5, а 15, следовательно, во сколько раз 15 больше 5, во столько раз неизвестное должно быть больше произвольно взятого числа 4.

Огромный вклад в развитие уравнений внесли итальянские математики XVI века Н. Тарталья, С. Дель Ферро, Л. Феррари и Д. Кордано: они нашли общие решения уравнений третьей и четвертой степеней. Французский математик Ф. Виет нашел единый метод решения уравнений второй, третьей и четвертой степеней. Ньютон открыл соотношение меду корнями и дискриминантом квадратного уравнения, а именно, что уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет равные действительные, разные действительные или комплексно сопряженные корни в зависимости от того, будет ли дискриминант равен нулю, больше или меньше нуля. В 1799 г. К.

Фридрих Гаусс доказал так называемую основную теорему алгебры: каждый многочлен n-ой степени имеет ровно n корней [7; 8].

1.2 Анализ учебников по математике по теме «Уравнения»

Применяемая терминология в разных учебниках математики в основном относится к одному классу уравнений. В этом отношении необходимо употреблять только те термины, которые приведены в учебнике и быть очень внимательным к пониманию смысла, которое им придается.

1. Учебники по математике за 5-6 класс – Виленкин Н.Я., Жохов В.И. и др.

В учебнике 5 класса тема «Уравнения» встречается в параграфе «Сложение и вычитание натуральных чисел». Сначала рассматривается задача и вопрос задачи. Далее автор дает четкое определение уравнения: «Уравнение – это равенство, содержащее букву, значение которой надо найти». Позже он дает определение корня уравнения, как найти неизвестное слагаемое и что значит решить уравнение. Кроме того, автор учит правилу чтения уравнений. В практической части учебника представлено достаточно много заданий на закрепление этой темы [34].

В 6-м классе учащиеся могут раскрывать скобки, приводить подобные слагаемые, знакомятся с основными свойствами уравнений. После разбора примеров автор дает определение линейного уравнения: «Уравнение, приводимое к виду $ax = b$ методом переноса слагаемых и с помощью приведения подобных, называют линейным уравнением с одним неизвестным». Практическая часть также насыщена заданиями различного типа по данной теме [28].

2. Учебники по математике за 5-6 класс – Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г.

В учебнике 5-го класса автор не упоминает данную тему [10].

В учебнике 6 класса теме «Уравнения» выделен отдельный параграф в 3 части учебника. В нем рассматриваются вопросы: раскрытие скобок, коэффициент, приведение подобных слагаемых, понятие уравнения, решение уравнений, решение задач с помощью уравнений. Автор начинает с повторения основных понятий по данной теме.

Начинается изучение темы с обучения раскрытию скобок. В пункте «Коэффициент» дается определение: «Если выражение является произведением числа и буквенной части, то числовой множитель в этом выражении называют коэффициентом» [11]. Далее обучают приводить подобные слагаемые и уже после автор вводит понятие: «Уравнением будем называть равенство, содержащее переменную, значение которой надо найти». Приводит два свойства уравнений:

– уравнение – это равенство;

– в этом равенстве имеется буква, значение которой надо найти.

Рассматривает теорию решения уравнений. Дает формулировку: «Слагаемое можно переносить из одной части уравнения в другую, при этом изменяя его знак на противоположный». Автор предлагает учащимся понятие корня уравнения: «Значение переменной, при подстановке которого в уравнение получается верное числовое равенство, называется корнем уравнения» [11]. После этого автор поясняет, что решить уравнение – это значит найти множество всех его корней. Дается четкий алгоритм решения задач с помощью уравнений. По данной теме приведены задания различной трудности, которые помогут ученикам в полной мере овладеть материалом.

3. Учебники по математике и алгебре за 5-9 класс – Муравин Г.К., Муравина О.В.

В учебнике 5-го класса учащиеся встречаются с уравнениями в главе «Числовые и буквенные выражения» под параграфом «Формулы и уравнения». В нем дана формулировка уравнения: «Уравнение – это равенство с неизвестным слагаемым, значение которого нужно найти» [23].

Также автор данного учебника вводит определение корня уравнения и говорит, что значит решить уравнение. Автор также знакомит учащихся с правилом чтения уравнений. Практическая часть насыщена достаточным количеством заданий на закрепление данной темы.

В 6-м классе в разделе «Решение уравнений» повторяются главные понятия в данной теме. Автор формулирует удобное правило решения уравнений для учащихся, которые знакомы с отрицательными числами: «При решении уравнения можно переносить слагаемые из одной части в другую, изменяя при этом их знаки на противоположные». Затем он вводит такое определение: «Числовой множитель при неизвестном называется коэффициентом» [24]. Далее дает следующий закон: «При решении уравнения можно делить или умножать обе его части на любое число, отличное от нуля». Чтобы учащимся хорошо овладеть материалом, автор приводит множество заданий по данной теме в конце учебника.

В учебнике 7 класса рассматриваются следующие задачи: на выполнение плановых заданий, на изменение количества, на сплавы и смеси, на движение. В параграфе «Решение уравнений» автор приводит два определения: определение высказывания и равносильных предложений. Весь материал сопровождается подробным решением примеров. В главе «Линейная функция» учащимся предлагается ознакомиться с графиком линейного уравнения с двумя переменными. Но о линейном уравнении с одной переменной автор не говорит. Даются следующие определения: «Уравнение вида $ax + by = c$ называют линейным уравнением с двумя переменными», «Графиком уравнения называют множество точек координатной плоскости, координаты которых являются решением уравнения» [25]. Также в конце учебника есть задания для отработки данной темы.

В учебнике 8 класса изучению уравнений отводится много времени. Тема «Дробные уравнения с одной переменной» находится в главе «Рациональные выражения». В ней автор дает определение: «Рациональные уравнения с дробными выражениями называются дробными» [26]. В главе «Квадратные уравнения» нет четкого определения квадратного уравнения. Автор говорит, что «$ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0 -$ уравнение второй степени, или квадратное уравнение». После этого дает понятие дискриминанта: «Число корней квадратного уравнения зависит от знака числа $b^2 - 4ac$. Это число называют дискриминантом и обозначают буквой D». После автор предлагает удобную блок-схема для решения квадратного уравнения (рисунок 2).

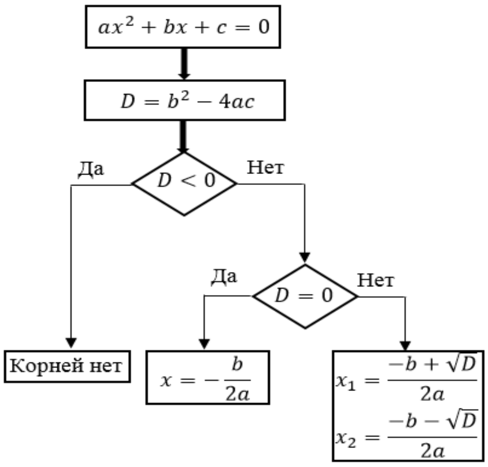


Рисунок 2 – Блок-схема алгоритма для решения квадратного уравнения

А этой теме автор перед формулировкой теоремы Виета сначала доказывает ее. После этого приводит формулировку приведенного квадратного уравнения, а после формулу Виета для него. Затем автор показывает частные случаи квадратных уравнений. Вводит определение неполного квадратного уравнения, а также сокращенного дискриминанта, рассматривает различные способы решения квадратного уравнения. Далее учащиеся знакомятся с темой «Системы двух уравнений с двумя переменными». Также представлена историческая справка по данной теме [26].

В 9-м классе в разделе «Квадратичная функция» в пункте «Корни многочленов» автор дает определение уравнения n-ой степени: «Уравнение, левая часть которого многочлен n-ой степени с одной переменной, а правая

– ноль, называют уравнением n-ой степени» [27]. Автор показывает решение уравнений 2 степени и больше. Также в конце учебника автор предлагает учащимся упражнения для закрепления данной темы.

4. Учебники по математике и алгебре за 5-9 класс – Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.

В учебнике 5 класса в главе «Сложение и вычитание натуральных чисел» вводится понятие уравнения с помощью сюжетной задачи. Автор приводит формулировку корня уравнения: «Корень уравнения – число, которое при подстановке вместо буквы обращает уравнение в верное числовое равенство» [12]. Весь материал подробно разобран на примерах различной сложности.

В учебнике 6 класса уравнения встречаются в теме «Пропорции». В ней рассматриваются задачи, которые решаются с помощью уравнений. В главе «Рациональные числа и действия над ними» находятся два пункта – «Решение уравнений» и «Решение задач с помощью уравнений». В 1-ом пункте автор выделяет основные свойства и на их основе решает уравнения. Во 2-м пункте даны задачи разной степени сложности, которые можно решить уравнениями. Упражнения на закрепление темы представлены в конце учебника [13].

В 7-м классе уравнениям посвящена первая глава. Автор знакомит учащихся с линейными уравнениями с одной переменной. Также дает понятие: «Уравнение вида $ax = b,$ где $x -$ переменная, a и $b -$ некоторые числа, называют линейным уравнением с одной переменной».

Автор предлагает удобную таблицу (рисунок 3):

Значения a и b	$a \neq 0$	$a = 0, b = 0$	$a = 0, b \neq 0$
Корни уравнения $ax = b$	$x = \frac{b}{a}$	$x -$ любое число	Корней нет

Рисунок 3 – Таблица корней линейного уравнения

В этом разделе выделяется пункт «Решение задач с помощью уравнений». В нем автор предлагает учащимся определение математической модели, дает четкий алгоритм для решения задач с помощью уравнений, рассматривает примеры.

В последней главе автор посвящает большую часть уравнениям, в основном системам линейных уравнений с двумя переменными. Также дается определение решения уравнения с двумя переменными, выделяются основные свойства. Автор знакомит учащихся с графиком такого уравнения. Даются основные понятия, далее автор приводит пример решения одной из систем [14].

В учебнике 8 класса изучению уравнений выделяется много времени. В главе «Рациональные выражения» учащихся знакомят с равносильными и рациональными уравнениями. Автор дает формулировку: «Два уравнения являются равносильными, если они имеют одни и те же корни или каждое из уравнений не имеет корней» [15]. Формулируются свойства уравнений с одной переменной, вводится понятие рационального уравнения. Весь материал закрепляется практическими заданиями.

В главе «Квадратные уравнения» учащиеся знакомятся с основными определениями. Подробно рассматриваются неполные квадратные уравнения. В пункте «Формула корней квадратного уравнения» дается понятие дискриминанта. Подробно расписывается о количестве корней в зависимости от знака дискриминанта. Теорема Виета дается прямо. Автор объясняет материал детально с доказательствами. В пункте «Уравнения, сводящиеся к квадратным» автор приводит формулировку биквадратного уравнения.

В учебнике 9 класса уравнения встречаются в главе «Квадратичная функция». В ней учащиеся ознакомляются с системами уравнений с двумя переменными. Подробно изучаются такие методы решения систем, как метод подстановки, метод сложения и метод замены переменной [16].

5. Учебники по алгебре за 7-9 класс – Алимов Ш.А., Колягин Ю.М. и др.

В учебнике 7 класса определение уравнения вводится с помощью сюжетной задачи. Уравнение – это равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, называется уравнением». После этого автор приводит понятие корня уравнения: «Корнем уравнения называется то значение неизвестного, при котором это уравнение обращается в верное равенство» [1]. Далее автор приводит определение «решить уравнение», т.е. найти все его корни или установить, что их нет. Определение уравнения автор заменяет описанием и несколькими примерами. В разделе «Решение уравнений с одним неизвестным, сводящихся к линейным» автор приводит свойства уравнений. Далее решаются задачи с помощью уравнений. Автор рассматривает подробный пример решения задачи и дает упражнения для самостоятельного решения.

После этого автор возвращается к теме «Системы двух уравнений с двумя неизвестными». В ней приводит понятие: «Уравнением первой степени с двумя неизвестными x и y называется уравнение вида $ax + by = c$, в котором a, b, c – заданные числа, причем хотя бы одно из чисел a и b не равно нулю, т.е. $a^2 + b^2 \neq 0$» [1]. Затем дает формулировку еще одного определения: «Решением уравнения с двумя неизвестными x и y называется упорядоченная пара чисел $(x; y)$, при подстановке которых в это уравнение получается верное числовое равенство». Четкого определения системы двух уравнений автор не приводит, а лишь рассматривает пример.

Также описываются методы решения систем уравнений: способ подстановки, способ сложения и графический способ. Автор рассматривает решение задач с помощью систем уравнений. Приводятся примеры и выстраивается алгоритм.

В учебнике 8 класса данная тема начинается с квадратных уравнений. Автор дает определение: «Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c - заданные числа, $a \neq 0$, x – неизвестное» [2]. Дается теорема: «Уравнение $x^2 = d$, где $d > 0$, имеет два корня: $x_1 = \sqrt{d}$, $x_2 = -\sqrt{d}$» [2]. О дискриминанте автор пока не говорит. Далее автор знакомит учащихся с неполными квадратными уравнениями: дает определение и подробно разбирает решения всех видов таких уравнений. Затем следует пункт «Метод выделения полного квадрата». Этот метод автор поясняет на примерах. В параграфе «Решение квадратных уравнений» автор выводит вместе с учащимися формулу корней квадратного уравнения, а также вводит определение дискриминанта: «Выражение $b^2 - 4ac$ называют дискриминантом и обозначают буквой D, т. е. $D = b^2 - 4ac$» [2]. Далее учащихся знакомят с приведенными квадратными уравнениями, теоремой Виета и теоремой, обратной теореме Виета. В пункте «Уравнения, сводящиеся к квадратным» вводится определение биквадратного уравнения: «Уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, называют биквадратным».

В учебнике 9 класса тема начинается с главы «Алгебраические уравнения. Системы нелинейных уравнений». Автор знакомит учащихся с делением многочленов, после чего рассматривает пример алгебраического уравнения. Дается определение: «Алгебраическим уравнением степени n называется уравнение $P_n(x) = 0$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n ≥ 1» [3]. Далее рассматриваются уравнения, сводящиеся к алгебраическим. Рассматриваются различные способы решения систем нелинейных уравнений с двумя неизвестными.

6. Учебники по алгебре за 7-9 класс – Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б.

В 7-м классе учащиеся изучают выражения и их преобразования, а после знакомятся с уравнениями. В учебнике с помощью сюжетной задачи автор вводит понятие уравнения с одной переменной. После этого автор вводит понятие: «Корнем уравнения называется значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство» [25]. Затем рассматриваются примеры уравнений с различным количеством корней. Автор говорит, что «решить уравнение – это значит найти все его корни или доказать, что корней нет», также дает определение равносильных уравнений. Выделяются свойства уравнений. Рассматривается определение линейного уравнения: «Уравнение вида $ax = b$, где x – переменная, a и b – некоторые числа, называется линейным уравнением с одной переменной» [25]. Вводится правило: «Линейное уравнение $ax = b$ при $a \neq 0$ имеет один корень, при $a = 0$ и $b \neq 0$ не имеет корней, при $a = 0$ и $b = 0$ имеет бесконечно много корней» [25]. Когда учащиеся изучают тему «Решение задач с помощью уравнений» им предоставляется понятный алгоритм действий. По данной теме существует однотипная система задач на решение уравнений. Также существует пункт «Дополнительные упражнения», в котором присутствуют упражнения различной степени трудности.

В конце учебника даны системы линейных уравнений. Учащихся знакомят с линейными уравнениями с двумя переменными: автор вводит определение, понятие решения таких уравнений, а также их свойства. В главе «График линейного уравнения с двумя переменными» вводится определение: «Графиком линейного уравнения с двумя переменными называется множество всех точек координатной плоскости, координаты которых являются решением этого уравнения» [25]. Определение системы уравнений с двумя переменными вводится с помощью сюжетной задачи. Автор показывает учащимся способы решения систем линейных уравнений: способ подстановки и способ сложения. Для этих способов дан четкий алгоритм действий. После этого автор говорит про «Решение задач с помощью систем уравнений». Далее в разделе «Задачи повышенной трудности» автор приводит уравнения с модулем, целочисленные уравнения, уравнения с параметром и задачи на составление систем уравнений.

В 8-м классе в разделе «Квадратные корни» учащиеся изучают уравнения вида $x^2 = a$. Автор говорит о количестве корней такого уравнения, а именно: «если $a < 0$, то уравнение $x^2 = a$ не имеет корней; если $a = 0$, то уравнение имеет единственный корень; если $a > 0$, то уравнение имеет два корня» [26]. Изучение квадратных уравнений автор начинает с темы «Неполные квадратные уравнения». Также автор приводит понятие квадратного уравнения: «Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x – переменная, a, b и c – некоторые числа, причем $a \neq 0$» [26]. После этого автор предлагает определение приведенного и неполного квадратных уравнений. В параграфе «Формула корней квадратного уравнения» подробно рассматривается решение уравнений. Вводится понятие дискриминанта и говорится о количестве решений уравнения при различных знаках дискриминанта. Также дан четкий алгоритм решения квадратного уравнения. Затем автор приводит теорему Виета: «Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену» [26]. Доступно для учащихся автор доказывает теорему Виета. Далее изучаются дробно-рациональные уравнения. Автор приводит алгоритм решения уравнений после приведения нескольких примеров. Дополнительно рассматривается тема «Уравнения с параметром». Также есть пункт «Задачи повышенной трудности».

В учебнике 9 класса две главы посвящены уравнениям. Учащиеся сначала изучают уравнения с одной переменной. Далее автор рассматривает различные методы решения таких уравнений: разложение многочлена на множители и метод введения новой переменной. Автор приводит формулировку биквадратного уравнения: «Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, являющиеся квадратным относительно x^2, называют биквадратными уравнениями» [27]. Затем автор напоминает, что такое дробно-рациональное уравнение, рассматривает более сложные примеры. Вов торой главе рассматриваются уравнения с двумя переменными и их системы. Говорится, что является решением уравнения с двумя переменными, дается определение равносильных уравнений, графика уравнений с двумя переменными. Изучается графический способ решения систем уравнений: автор дает понятие решения системы уравнений, а также разбирает пример. Для решения систем уравнений второй степени автор дает учащимся четкий алгоритм и приводит примеры решения таких систем уравнений.

7. Учебники по алгебре за 7-9 класс – Мордкович А.Г.

В 7-м классе происходит знакомство с линейным уравнением с одной переменной. Дается определение: «Линейным уравнением с одной переменной x называется уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b – любые числа». Затем автор предлагает учащимся два четких алгоритма для решения линейного уравнения:

1) для уравнения $ax + b = 0$ в случае, когда $a \neq 0$;

2) для уравнения, записанного в более сложном виде - $ax + b = cx + d$ $(a \neq c)$.

Далее во второй главе автор знакомит учащихся с темой «Линейное уравнение с двумя переменными и его график». Определение линейного уравнения с двумя переменными автор приводит с помощью сюжетной задачи. Автор рассматривает 5 случает графика таких уравнений:

1) график уравнения – вся плоскость;

2) уравнение не имеет решений;

3) графиком служит прямая, параллельная оси x;

4) график уравнения – прямая, параллельная оси y;

5) графиком является прямая, не параллельная ни одной из оси координат.

Автор дает теорему: «Если хотя бы один из коэффициентов a, b линейного уравнения $ax + by + c = 0$ отличен от нуля, то графиком уравнения служит прямая линия» [17]. Вместе с тем автор предлагает учащимся алгоритм построения графика линейного уравнения с двумя переменными.

В следующей главе рассматриваются системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Также даны основные понятия: система уравнений, решение системы. Автор подробно описывает метод подстановки, приводит четкий алгоритм. Также автор знакомит учащихся с методом алгебраического сложения.

В учебнике 8 класса автор дает учащимся тему «Первые представления о решении рациональных уравнений». Дается понятие: «Если $p(x)$ – рациональное выражение, то уравнение $p(x) = 0$ называют рациональным уравнением» [19]. Также автор рассматривает простейшие рациональные уравнения.

В разделе «Квадратичная функция. Функция $y = \frac{k}{x}$» учащиеся впервые сталкиваются с графическим решением квадратных уравнений. Дается определение: «Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – любые числа (коэффициенты), причем $a \neq 0$» [19]. Автор знакомит учащихся с 5 методами решения квадратного уравнения графически. Затем автор описывает главу «Квадратные уравнения». Автор приводит основные понятия: квадратное уравнение и квадратных трехчлен, приведенное и не приведённое квадратные уравнения, полное и неполное квадратное уравнение, корень квадратного уравнения и квадратного трехчлена. Автор знакомит учащихся с формулами корней квадратного уравнения. Предлагает им формулировку дискриминанта: «Выражение $b^2 - 4ac$ обозначают буквой D и называют дискриминантом квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (или дискриминантом квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$)» [19]. Автор дает учащимся четкий алгоритм действий для решения квадратных уравнений после приведения подробного решения нескольких примеров.

Затем рассматриваются рациональные уравнения, повторяется определение, вводится понятие постороннего корня, приводится и формулируется четкий алгоритм решения рациональных уравнений. После изучения метода введения новой переменной автор приводит формулировку биквадратного уравнения: «Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$ называют биквадратным уравнением» [19]. Решаются более сложные уравнения. Очень подробно разбирается теорема Виета. Изучаются иррациональные уравнения. Далее автор предлагает учащимся такое понятие: «Если в уравнении переменная содержится под знаком квадратного корня, то уравнение называют иррациональным» [19]. Также автор рассматривает основной метод решения иррациональных уравнений – метод возведения в квадрат. После автор вводит понятие равносильных уравнений и равносильных преобразований.

В учебнике 9 класса выделена один раздел «Системы уравнений». В нем автор ведет речь о рациональных уравнениях с двумя переменными. Также автор предлагает учащимся формулировку: «Рациональное уравнение с двумя переменными x, y – это уравнение вида $h(x, y) = g(x, y)$, где $h(x, y)$, $g(x, y)$ – рациональные выражения, т. е. алгебраические выражения, составленные из чисел и переменных x, y с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в натуральную степень». После этого автор рассматривает график уравнения с двумя переменными. Далее вводит понятие: «Пусть дано уравнение $p(x, y) = 0$. Множество точек (x, y) координатной плоскости xOy, таких, что (x, y) – решение уравнения $p(x, y) = 0$, называют графиком уравнения» [21]. Здесь идет речь о системах нелинейных уравнений с двумя переменными. После изучения основных понятий автор предлагает изучение методов решения систем уравнения: метод постановки, метод алгебраического сложения, метод введения новых переменных. В конце раздела автор рассматривает системы уравнения как математические модели реальных ситуаций. На этом изучение уравнений заканчивается.

Проанализировав учебную литературу по математике с 5 по 9 класс разных авторов, можно заметить, что для полного усвоения данной темы учащимся не хватает практики над квадратными и биквадратными уравнениями. Следует более тщательно разобрать данные виды уравнений и нарешать как можно больше примеров.

1.3 Виды уравнений и их решения

В данной работе будут рассмотрены такие уравнения как: линейные, квадратные, биквадратные, дробно-рациональные и иррациональные. Рассмотрим вид каждого уравнения и способы его решения на примерах [22; 24; 26].

1. *Линейным уравнением* с одной переменной называется уравнение вида: $ax = b$, где a и b − постоянные, а x − переменная и $a \neq 0$.

Примеры:

a. Решить уравнение: $2 - 3(2x + 2) = 5 - 4x$.

Раскроем скобки в левой части уравнения: $2 - 6x - 6 = 5 - 4x$.

Получим ответ: $x = -4{,}5$.

b. Решить уравнение: $\frac{5x+4}{2} + 3 = \frac{9x}{4}$.

Умножим обе части уравнения на 4: $10x + 8 + 12 = 9x$.

Получаем: $x = -20$.

c. Решить уравнение: $-x - 2 + 3(x - 3) = 3(4 - x) - 3$.

Раскроем скобки: $-x - 2 + 3x - 9 = 12 - 3x - 3$.

Получаем: $5x = 20$; $x = 4$.

2. *Квадратное уравнение* – это уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и $c -$ коэффициенты, причем $a \neq 0$.

Для решения квадратных уравнений нужно знать определение дискриминанта и уметь определять количество корней уравнения [6].

Дискриминант – это такое число $D = b^2 - 4ac$, что если:

a. D > 0, то уравнение имеет два действительных корня, которые вычисляются по формуле: $x_{1.2} = \frac{-b \pm\sqrt{D}}{2a}$.

b. D = 0, то уравнение имеет один корень: $x = \frac{-b}{2a}$.

c. D < 0, то уравнение не имеет корней.

В том числе квадратные уравнения бывают неполными. Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ называется *неполным квадратным уравнением*, если $b = 0$ или $c = 0$.

Для решения квадратных уравнений существует Теорема Виета: если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1и x_2, то для них выполняется условие: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Рассмотрим примеры квадратных уравнений и решим их.

1) $x^2 + 7x - 18 = 0$ – полное квадратное уравнение.

Находим дискриминант: $D = 7^2 - 4 \cdot 1(-18) = 49 + 72 = 121$.

Находим корни уравнения: $x_1 = \frac{-7+\sqrt{121}}{2\cdot1} = \frac{-7+11}{2} = 2$;

$x_2 = \frac{-7-\sqrt{121}}{2\cdot1} = \frac{-7-11}{2} = -9$.

Ответ: 2; -9.

2) $2x^2 - 10x = 0$ – неполное квадратное уравнение, так как свободный член равен нулю .

Вынесем за скобки 2x:

$$2x(x-5) = 0;$$

$$2x = 0 \text{ или } x - 5 = 0;$$

$$x = 0 \text{ или } x = 5.$$

Ответ: 0; 5.

3) $x^2 - 5x + 4 = 0.$

По теореме Виета, сумма корней равна 5, а их произведение равно 4. То есть, это числа 4 и 1.

Ответ: 4; 1.

4) $(x+10)^2 = (5-x)^2.$

С помощью формул сокращенного умножения раскроем скобки:

$$x^2 + 20x + 100 = 25 - 10x + x^2;$$

Приведем подобные: $30x = -75.$

Ответ: $x = -2{,}5.$

3. *Биквадратные уравнения* вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$ решаются заменой переменной. Существует алгоритм решения биквадратных уравнений:

– ввести замену переменной $x^2 = t$;

– составить квадратное уравнение с новой переменной $at^2 + bt + c = 0$;

– решить новое квадратное уравнение;

– вернуться к замене переменной;

– найти корни биквадратного уравнения.

Рассмотрим примеры решения биквадратных уравнений:

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Замена: $x^2 = t$.

Уравнение примет вид: $t^2 - 5t + 4 = 0$.

Находим корни этого уравнения: $D = 5^2 - 4 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$.

$t_1 = \frac{5+\sqrt{9}}{2\cdot1} = \frac{5+3}{2} = 4$;

$t_2 = \frac{5-\sqrt{9}}{2\cdot1} = \frac{5-3}{2} = 1$.

Возвращаемся к замене: $x^2 = 4$ и $x^2 = 1$.

Получаем: $x_{1.2} = \pm 2$, $x_{3.4} = \pm 1$.

Ответ: -2; -1; 1; 2.

2) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

Сделаем замену: $x^2 = t$.

Уравнение примет следующий вид: $4t^2 - 5t + 1 = 0$.

Найдем решение уравнения: $D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$.

$t_1 = \frac{5+\sqrt{9}}{2\cdot4} = \frac{5+3}{8} = 1$;

$t_2 = \frac{5-\sqrt{9}}{2\cdot4} = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$.

Возвращаемся к замене: $x^2 = 1$ и $x^2 = \frac{1}{4}$.

Получаем: $x_{1.2} = \pm 1$, $x_{3.4} = \pm \frac{1}{2}$.

3) $(x^2 - 1)^2 - 8(x^2 - 1) + 12 = 0$.

Введем замену: $x^2 - 1 = t$.

Тогда: $t^2 - 8t + 12 = 0$.

Находим корни уравнения: $D = (-8)^2 - 4 \cdot 12 = 64 - 48 = 16$.

$t_1 = \frac{8+\sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{8+4}{2} = 6$;

$t_2 = \frac{8-\sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{8-4}{2} = 2$.

Возвращаемся к замене: $x^2 - 1 = 6$ и $x^2 - 1 = 2$.

Получаем: $x_{1,2} = \pm\sqrt{7}$; $x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$.

4. *Дробно-рациональное уравнение* – это уравнение вида $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, причем $Q(x) \neq 0$.

Алгоритм решения:

– привести к общему знаменателю;

– выписать область допустимых значений (далее – ОДЗ): $Q(x) \neq 0$;

– приравнять числитель дроби к 0 и найти корень;

– указать в ответе корни, исключив те, которые попали в ОДЗ.

Рассмотрим несколько примеров дробно-рациональных уравнений:

1) $\frac{x-4}{x-6} = 2$;

ОДЗ: $x \neq 6$.

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель:

$$x - 4 = 2(x - 6).$$

Раскроем скобки и приведем подобные:

$$x - 4 = 2x - 12;$$

$$-x = -8;$$

$$x = 8.$$

Ответ: $x = 8$.

2) $\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+9} = \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+21}$.

ОДЗ: $x \neq -3, x \neq -9, x \neq -5, x \neq -21$.

Приведем к общему знаменателю дроби:

$$\frac{x+9-x-3}{(x+3)(x+9)} = \frac{x+21-x-5}{(x+5)(x+21)};$$

$$\frac{6}{x^2+12x+27} = \frac{16}{x^2+26x+105}.$$

Преобразуем: $3(x^2 + 26x + 105) = 8(x^2 + 12x + 27)$.

Получаем квадратное уравнение: $5x^2 + 18x - 99 = 0$.

$D = 18^2 - 4 \cdot 5(-99) = 324 + 1980 = 2304$.

$x_1 = \frac{-18+\sqrt{2304}}{2\cdot 5} = \frac{-18+48}{10} = 3;$

$x_2 = \frac{-18-\sqrt{2304}}{2\cdot 5} = \frac{-18-48}{10} = -6{,}6.$

Так как корни не входят в ОДЗ, то оба числа являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 3;\ x_2 = -6{,}6$.

3) $\frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x^2-5x}$;

ОДЗ: $x \neq 0, x \neq 5$.

Знаменатель дроби, стоящей в правой части уравнения, можно разложить на множители: $x^2 - 5x = x(x - 5)$.

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель, получим:

$$\frac{x-3}{x-5} \cdot x(x-5) + \frac{1}{x} \cdot x(x-5) = \frac{x+5}{x^2-5x} \cdot x(x-5);$$

$$x(x-3) + (x-5) = x + 5;$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0;$$

$$D = (-3)^2 - 4(-10) = 9 + 40 = 49;$$

$x_1 = \frac{3+\sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{3+7}{2} = 5;$

$x_2 = \frac{3-\sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{3-7}{2} = -2.$

Один корень не подходит, так как он попадает в ОДЗ.

Ответ: $x = -2$.

5. *Иррациональное уравнение* – это уравнение, в котором выражение с переменной находится под корнем или возводится в дробную степень.

В 9 классе в основном встречаются квадратные корни, редко корни третьей, четвертой и т.д. степеней. Поэтому большинство иррациональных уравнений решаются однократным или многократным возведением обеих частей уравнения в некоторую степень.

Рассмотрим примеры:

1) $\sqrt{6x-4} = 1$.

Возведем обе части уравнения в квадрат: $6x - 4 = 1$.

Решим данное уравнение: $x = \frac{5}{6}$.

Чтобы убедиться, что найденное число является корнем уравнения, проведем проверку, подставив полученное число в изначальное уравнение: $\sqrt{6 \cdot \frac{5}{6} - 4} = 1$.

Решив это уравнение, можем убедиться, что полученное число является корнем уравнения.

Ответ: $x = \frac{5}{6}$.

2) $\sqrt{x^2 - 7x - 9} = 3$.

Возведем обе части уравнения в квадрат: $x^2 - 7x - 9 = 9$.

Решим квадратное уравнения: $x^2 - 7x - 18 = 0$;

$$D = (-7)^2 - 4(-18) = 49 + 72 = 121;$$

$x_1 = \frac{7+\sqrt{121}}{2\cdot 1} = \frac{7+11}{2} = 9$;

$x_2 = \frac{7-\sqrt{121}}{2\cdot 1} = \frac{7-11}{2} = -2$.

Чтобы убедиться, что найденные числа являются корнями уравнения, проведем проверку, подставив полученные числа в изначальное уравнение.

Сначала проверим первое число: $\sqrt{9^2 - 7\cdot 9 - 9} = 3$. Решив данное уравнение, можем сказать, что данный ответ является корнем данного уравнения.

Теперь проверим второе число: $\sqrt{(-2)^2 - 7(-2) - 9} = 3$. Решив это уравнение, можем убедиться, что полученное число также является корнем уравнения.

Ответ: 9; -2.

3) $\sqrt{3x - 1} = \sqrt{x - 5}$.

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x \geq 5 \end{cases}$.

Возведем обе части уравнения в квадрат: $3x - 1 = x - 5$.

Решим полученное уравнение: $2x = -4$; $x = -2$.

Найденное число не входит в ОДЗ, а значит не является корнем уравнения.

Ответ: корней нет.

4) $\sqrt{x^2 - 3x} = x + 3$.

Возведем обе части уравнения в квадрат: $x^2 - 3x = x^2 + 6x + 9$.

Решим уравнение: $9x = -9, x = -1$.

Чтобы убедиться, что найденное число является корнем уравнения, проведем проверку, подставив полученное число в изначальное уравнение: $\sqrt{(-1)^2 - 3 \cdot (-1)} = -1 + 3$.

Решив это уравнение, можем убедиться, что полученное число является корнем уравнения.

Ответ: $x = -1$.

5) $\sqrt{x - 2} = x - 4$.

Возведем обе части уравнения в квадрат: $x - 2 = x^2 - 8x + 16$.

$$x^2 - 9x + 18 = 0.$$

Решим квадратное уравнение:

$$D = (-9)^2 - 4 \cdot 18 = 81 - 72 = 9.$$

$x_1 = \frac{9+\sqrt{9}}{2\cdot 1} = \frac{9+3}{2} = 6$;

$x_2 = \frac{9-\sqrt{9}}{2\cdot 1} = \frac{9-3}{2} = 3$.

Чтобы убедиться, что найденное число является корнем уравнения, проведем проверку, подставив полученное число в изначальное уравнение:

Сначала проверим первое число: $\sqrt{6-2}=6-4$. Решив данное уравнение, можем сказать, что данный ответ является корнем исходного уравнения.

Теперь проверим второе число: $\sqrt{3-2}=3-4$. Решив это уравнение, можем убедиться, что полученное число не является корнем уравнения.

Ответ: $x=6$.

6) $\sqrt{5x+1}-\sqrt{13-3x}=2$.

Перенесем вправо один из корней: $\sqrt{5x+1}=2+\sqrt{13-3x}$.

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$5x+1=4+4\sqrt{13-3x}+(\sqrt{13-3x})^2.$$

$$5x+1=4+4\sqrt{13-3x}+13-3x.$$

Снова сгруппируем слагаемые так, чтобы в одной из частей остался только корень:

$$5x+1-4-13+3x=4\sqrt{13-3x};$$

$$8x-16=4\sqrt{13-3x};$$

$$2x-4=\sqrt{13-3x}.$$

Теперь снова возводим в квадрат обе части уравнения:

$$4x^2-16x+16=13-3x;$$

$$4x^2-13x+3=0.$$

Решим квадратное уравнение:

$$D = (-13)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 169 - 48 = 121.$$

$x_1 = \frac{13+\sqrt{121}}{2\cdot4} = \frac{13+11}{8} = 3;$

$x_2 = \frac{13-\sqrt{121}}{2\cdot4} = \frac{13-11}{8} = 0{,}25.$

Чтобы проверить, есть ли посторонние корни, подставим их в исходное уравнение. При $x = 3$:

$$\sqrt{5 \cdot 3 + 1} - \sqrt{13 - 3 \cdot 3} = 2;$$

$$\sqrt{16} - \sqrt{4} = 2;$$

$$4 - 2 = 2;$$

$$2 = 2.$$

Получили справедливое равенство. Теперь проверим второй корень. При $x = 0{,}25$:

$$\sqrt{5 \cdot 0{,}25 + 1} - \sqrt{13 - 3 \cdot 0{,}25} = 2;$$

$$\sqrt{2{,}25} - \sqrt{12{,}25} = 2;$$

$$1{,}5 - 3{,}5 = 2;$$

$$-2 = 2.$$

Получили ошибочное равенство, а это значит, что этот корень не является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x = 3$.

ГЛАВА 2. ФОРМИРОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ

2.1 Понятие УУД и приемы для их формирования

Основная миссия российской образовательной политики – обеспечить современное качество образования, основанное на удержании его устойчивости и соотношении текущим и будущим потребностям личности, общества и государства. Проблемы индивидуализации обучения, гуманистические основы образовательного процесса в современной школе требуют, прежде всего, формирования мыслящего человека с достаточной математической культурой и мышлением [35].

Это означает, что школьники должны не только приобрести объем знаний и навыков по учебным предметам, но и овладеть навыками учебы, организации своей деятельности и стать обладателями определенных личностных качеств.

Воспитание личности с помощью обучения гарантируется, в первую очередь, через формирование универсальных учебных действий, являющихся неизменным фундаментом образовательного процесса. При освоении универсальных учебных действий учащиеся смогут успешно усвоить новые знания, навыки и компетенции, то есть способность учиться. «Уметь учиться» означает эффективно осуществлять учебную деятельность самостоятельно.

«Уметь учиться» – значит «уметь выбирать формы обучения», составлять план своей работы на определенный период времени, использовать различные методы сбора информации, формировать собственное мнение и доказывать его аргументированно.

А.Г. Асмолов в своей работе «Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли» говорил: «Для развития мотивации учебной деятельности следует раскрыть учащимся личностный смысл самого процесса учения, то есть для чего и ради чего они учатся, значимость учения в школе для реализации профессиональных планов, социальной карьеры, межличностных и ролевых отношений в социальной практике взрослой жизни. Также нужно обязательно организовывать рефлексию учащимся, чтобы они оценили свои результаты и сове отношение к учению» [4].

Стратегия формирования мотивации учения – это проектирование новых типов учебной деятельности и учебного сотрудничества учащегося, которые задают новые уровни мотивации.

Для организации учебной деятельности был создан ряд психологических рекомендаций:

– не обязательно использовать излишнюю стимуляцию познавательной потребности с помощью привлечения интереса. Если усилить эти интересы на элементарном уровне, то можно прийти к отрицательному результату.

– наилучшим методом развития познавательной потребности считается переоценка содержания обучения и понимание его в виде системы теоретических понятий.

Организация обучения по системе, разработанной Д.Б. Элькониным и В.В. Давыдовым способствует развитию познавательной мотивации учащихся.

В широком понимании термин «универсальные учебные действия» означает умение учиться, т.е. возможность субъекта к саморазвитию и самосовершенствованию путем сознательного и активного присвоения нового социального опыта.

В узком понимании УУД определяются, как совокупность способов действий учащегося, которые обеспечивают способность учащегося к самостоятельному освоению новых знаний и умений, в том числе и организацию данного процесса.

Состав и функции универсальных учебных действий представляют собой специфику возрастной формы универсальных учебных действий и возрастные психологические особенности учащихся, факторы и условия их развития, которые изучали Л.С. Выготский, Д.Б. Эльконин, В.В. Давыдов, Д.И. Фельдштейн, Л. Кольюерг, Э. Эриксон, Л.И. Бажович, А.К. Маркова, Я.А. Пономарева, А.Л. Венгера, Б.Д. Эльконин, Г.А. Цукерман и др.

Основные функции универсальных учебных действий:

– предоставление возможностей учащимися самостоятельно осуществлять деятельность обучения, ставить учебные цели и задачи, находить и применять нужные средства и способы достижения, оценивать и осуществлять контроль процесса и результатов деятельности;

– создание условий для развития личности и ее самореализации на основе готовности к непрерывному образованию, компетентности «научить учиться» толерантности в поликультурном обществе, высокой социальной и профессиональной мобильности;

– предоставление эффективного усвоения знаний, умений и навыков и формирование картины мира и компетентностей в любой предметной области познания.

В учебной деятельности можно выделить два вида действий:

1. Действие смыслообразования – это формирование учащимися взаимосвязей между целью учебной деятельности и ее мотивом, иначе говоря, между результатом обучения, и тем, что стимулирует эту деятельность. Учащиеся задаются вопросом о том, какое значение и смысл для него имеет обучение, исследование материала, и уметь найти ответ на данный вопрос.

2. Действие нравственно-этического оценивания усваиваемого содержания, исходя из социальных и личностных ценностей.

Личностные действия позволяют сделать обучение осмысленным, донести до ученика важность решения образовательных проблем и связать их с реальными жизненными целями и ситуациями. Они позволяют развить свою жизненную позицию по отношению к миру, окружающим людям, себе и своему будущему.

Актуальность формирования УУД обусловлена вопросами социума, которые отражают преобразование России из индустриального в постиндустриальное общество; призывом общества в увеличенной профессиональной подвижности и постоянном обучении; общественные запросы предопределяют цели образования, как общекультурное, личностное и познавательное расширение возможностей учащихся, которые обеспечивают компетенцию образования как «научить учиться».

Математика – это та наука, с помощью которой можно познавать другие. В математике отводится большая роль формированию познавательных и регулятивных УУД. В первую очередь у учащихся развиваются такие свойства интеллекта, как: интуиция на методы решения задач; анализ, синтез, обобщение, сравнение; пространственное мышление; способность к конструктивно-математической деятельности; комбинаторное и алгоритмическое мышление; работа с формулами; абстрагирование.

С помощью формирования УУД учащиеся переходят от учебной деятельности к самостоятельной.

Федеральный Государственный Образовательный Стандарт (далее – ФГОС) второго поколения говорит о том, что целью и результатом обучения должно быть формирование у учащихся возможности применения задач для их решения на практике. Это значит, что необходима разработка упражнений, которые будут решать проблемы в реальной жизни с помощью математики.

Решение каждой задачи требует определения цели, выбора метода решения задачи, работа по собственному плану или готовому алгоритму, проверка и коррекция результата. То есть, любая математическая задача или проблема формирует регулятивные, познавательные и коммуникативные УУД.

Для осуществления всех видов формирования универсальных учебных действий рассмотрим примеры для обучения решению уравнений в 9 классе.

№1. Решить уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$ [18].

Личностные УУД: мотивация обучения, развитие интереса к математике, аккуратность при выполнении работы.

Регулятивные УУД: контроль в виде способа решения уравнения, планирование решения учебной задачи, удерживание цели деятельности до получения ее результата, планирование решения учебной задачи, анализ собственной работы, развитие внимательности при решении.

Познавательные УУД: применение способа решения задачи, установление причинно-следственной связи и зависимости между объектами.

Коммуникативные УУД: умение воспринимать текст с учетом поставленной задачи.

№2. Задание на самопроверку. Решите представленные уравнения и проверьте себя с ответами, которые вынесены на доску [20].

1. $x^2 + 17x - 18 = 0$. Ответ: 1; -18.
2. $5x^2 + 7x + 2 = 0$. Ответ: -1; $-\frac{2}{5}$.
3. $x^2 - 11x + 18 = 0$. Ответ: 2; 9.
4. $x^2 - 13x - 36 = 0$. Ответ: 9; 4.
5. $2x^2 - 9x + 7 = 0$. Ответ: 1, $\frac{7}{2}$.
6. $3x^2 - 11x + 4 = 0$. Ответ: $\frac{1}{3}$; 4.

Личностные УУД: мотивация обучения, развитие интереса к математике, оценивание собственной учебной деятельности.

Регулятивные УУД: развитие внимательности при вычислении, постановка учебной задачи на основе того, что уже известно и неизвестно, прогноз результата, осознание качества усвоения результата.

Познавательные УУД: умение сравнивать различные объекты, установление причинно-следственных связей между объектами, выполнение учебной задачи.

Коммуникативные УУД: умение воспринимать текст с учетом поставленной учебной задачи, находить в тексте информацию, необходимую для ее решения [28].

Учитель задается вопросом, как организовать учебную деятельность, чтобы сформировать у учащихся интерес в реализации творческого изменения материала для обучения с целью овладения знаниями.

Учителю также важно помнить, что каждый ребенок уникален и к нему нужен отдельный подход. Важно найти его личные особенности, помочь ему найти и развить в себе сильные качества и умения. Нужно помнить, что учитель своей работой формирует личность, а не предмет формирует его.

Учащийся также должен уметь контролировать свою речь и действия, кроме того, адекватно оценивать свою работу. Учащиеся должны научиться мыслить системно. Важно развивать творческое мышление учащегося с помощью практических творческих заданий. Для этого можно попробовать разные виды игр, дискуссий и групповых работ. Учащийся должен самостоятельно научиться задавать вопросы по материалу.

В том числе, на этапе разработки урока учитель должен выйти за рамки учебного предмета, чтобы сформировать у учащихся УУД. Также нужно выделить способ деятельности для определенной цели урока [34].

2.2 Система заданий для 9 класса при подготовке к основному государственному экзамену

Для того, чтобы сформировать УУД для учащихся 9 класса, необходимо составить систему заданий.

Для формирования личностных УУД можно предложить учащимся такое задание.

Задание 1. Учащимся предлагается проблемная задача [22]. Они получают задание, которое они могут решить. Затем дается похожее задание, но измененное так, что у учащихся возникают затруднения.

Например:

1. Решить уравнение: $3x^2 + x - 2 = 0$.

$D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 3(-2) = 25, \sqrt{D} = 5$.

$$x_1 = \frac{-1+5}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3};$$

$$x_2 = \frac{1-5}{6} = -1.$$

Ответ: -1; $\frac{1}{3}$.

2. Решить уравнение: $1 - x - 2x^2 = 0$.

У учащихся возникает затруднение, так как это уравнение представлено в другом виде.

Для формирования регулятивных УУД учащимся предлагается такое задание.

1. Ученик решил уравнение $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ так:

$$x^2 = t;$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 4 = 9, \sqrt{D} = 3;$$

$$t_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4;$$

$$t_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

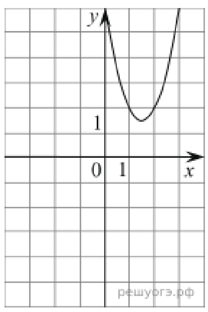
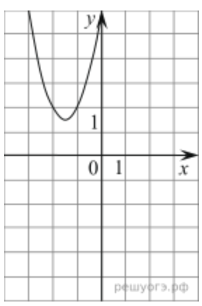
Ответ: 1; 4.

Найди ошибку в уравнении.

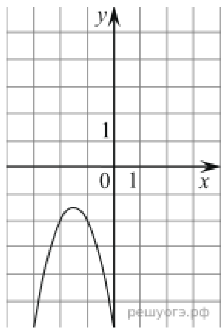
Для формирования познавательных УУД можно предложить такое задание.

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают в Таблице 1 (рисунки 4-6).

Таблица 1 – Графики функций

№	Графики	Предлагаемые ответы
А)	 Рисунок 4 – График функции 1	1) $y = -2x^2 + 6x - 6$ 2) $y = -2x^2 - 6x - 6$ 3) $y = 2x^2 + 6x + 6$ 4) $y = 2x^2 - 6x + 6$
Б)	 Рисунок 5 – График функции 2	

Продолжение таблицы 1

В)	 Рисунок 6 – График функции 3	

Ответ укажите в виде последовательности цифр без пробелов и запятых в указанном порядке (Таблица 2).

Таблица 2 - Ответы

А	Б	В

Для формирования коммуникативных универсальный учебных действий учащимся предлагается такое задание.

Работа в парах. Учащиеся решают уравнения, после чего меняются тетрадями с соседом по парте, проверяя друг друга (Таблица 3).

Таблица 3 – Уравнения по вариантам

I вариант	II вариант
1) $3x^2 - 27 = 0$ 2) $x^2 - 9x + 20 = 0$ 3) $5x^2 - 8x + 3 = 0$ 4) $36y^2 - 12y + 1 = 0$	1) $4x^2 - 9 = 0$ 2) $x^2 + 11x - 12 = 0$ 3) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ 4) $16y^2 - 8y + 1 = 0$

2.3 Апробация системы заданий при изучении темы «Квадратные уравнения»

Этапы исследовательской работы:

1. Проведена проверочная работа по теме «Уравнения».

2. Проанализированы результаты с целью формированности УУД при выполнении заданий.

3. Составлена и проведена корректирующая работа.

Исследование проводилось в период педагогической практики в МАОУ «СОШ с углубленным изучением отдельных предметов №104 г. Челябинска» в 9 «В» классе. В классе обучается 23 человека, из них 3 отличника, 14 хорошистов и 6 слабоуспевающих.

Цель: сформировать универсальные учебные действия у учащихся 9 класса при решении уравнений.

Ход проведения проверочной работы: в опыте участвовало 23 человека, было разработано 2 варианта, на работу отводилось 30 минут.

Работа состояла из 7 заданий разного уровня сложности. Проверяется умение решать квадратные и биквадратные уравнения, правильное применение формул сокращенного умножения, нахождение дискриминанта, умение работать с корнями.

Для решение проверочной работы ученикам необходимо было знать и уметь:

1. Знать определение квадратного уравнения (это уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где коэффициенты – a, b, c действительные числа и $a \neq 0$).

2. Уметь раскрывать скобки.

3. Знать формулы сокращенного умножения ($(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$ или $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$).

4. Уметь преобразовывать биквадратное уравнение в квадратное методом замены переменной ($x^2 = t$).

5. Уметь решать уравнения с корнем.

6. Уметь решать квадратные уравнения.

Содержание проверочной работы № 1(Таблица 4):

Таблица 4 – Проверочная работа №1

I вариант	II вариант
Задание: решить уравнения	
1	*2*
$12x^2+17x-14=0$	$20x^2+31x+12=0$
$(x^2-7)^2-4x^2=17$	$(x^2-10)^2-3x^2=-34$
$(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)=8$	$(x^2+x)^2-11(x^2+x)=12$
$x^4-13x^2+36=0$	$x^4+6x^2-27=0$
$\sqrt{21-10x}=1-x$	$\sqrt{10-x}=x-4$

Анализ результатов проверочной работы.

После проверки был проведен анализ, в результате которого были выявлены характерные ошибки. Итог проверочной работы представлен в Таблице 8.

Обозначения:

«2» – задание полностью выполнено;

«1» – задание частично выполнено;

«0» – задание выполнено неправильно.

Критерии оценивания работы:

10-9 баллов – оценка 5;

8-6 баллов – оценка 4;

5-4 балла – оценка 3;

3-0 баллов – оценка 2.

Таблица 5 – Результаты проверочной работы №1

№ задания / № ученика	1	2	3	4	5	Количество баллов	Оценка
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Ученик 1	2	1	1	2	2	8	4
Ученик 2	2	1	2	1	2	8	4
Ученик 3	2	0	1	2	1	6	4
Ученик 4	2	1	0	0	2	5	3
Ученик 5	2	2	1	1	2	8	4
Ученик 6	1	1	1	0	1	4	3
Ученик 7	2	2	2	1	0	7	4
Ученик 8	2	1	0	1	1	5	3
Ученик 9	2	0	1	1	0	4	3
Ученик 10	2	2	2	2	2	10	5
Ученик 11	1	0	1	0	1	3	2
Ученик 12	2	1	2	2	1	8	4
Ученик 13	2	1	0	0	1	4	3
Ученик 14	2	0	1	1	1	5	3
Ученик 15	2	2	0	0	1	5	3
Ученик 16	1	1	0	1	0	3	2
Ученик 17	2	0	0	0	1	3	2

Продолжение таблицы 5

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Ученик 18	2	1	0	1	2	6	4
Ученик 19	1	0	1	1	2	5	3
Ученик 20	2	1	1	0	1	5	3
Ученик 21	2	2	1	1	2	8	4
Ученик 22	2	2	1	2	1	8	4
Ученик 23	2	1	0	1	0	4	3
Итого	23	17	15	16	20	124	

Вывод: из приведенных в Таблице 5 результатов можно сделать вывод, что мало, кто из учащихся справился со 2, 3 и 4 заданиями. Большая часть учеников справилась с заданиями и научились решать уравнения (это видно из заданий 1-5). Все ученики справились с 1 заданием. Задание 5 все учащиеся смогли решить (уравнения с корнем).

Оценки за проверочную работу представлены в диаграмме (рисунок 7).

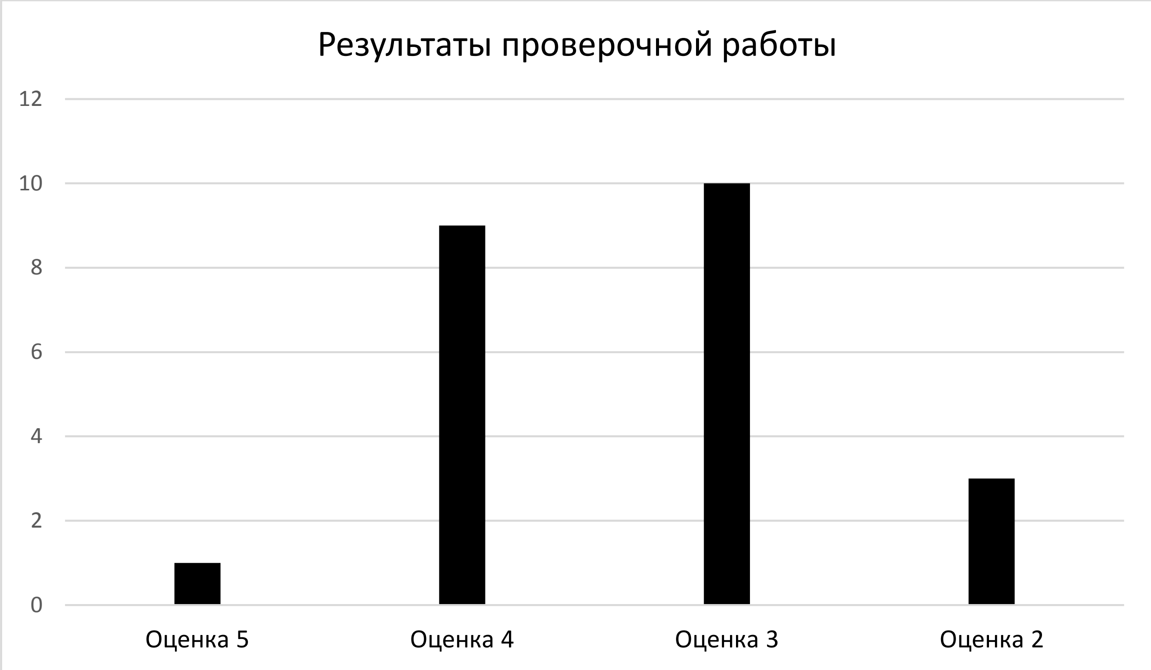


Рисунок 7 – Результаты проверочной работы №1

Вывод: по результатам проверочной работы на диаграмме видно, что большая часть класса (10 человек) получили оценку 3; оценку 4 получили 9 человек; оценку 2 получили 3 человека; оценку 5 получил 1 человек.

Для повышения качества знаний учащихся необходимо создать условия для формирования как регулятивных, так и познавательных действий. И особое внимание следует уделить постановке целей, планированию, прогнозированию, оценке, общеучебным и логическим действиям, постановке и решению задач.

Проведение корректирующей работы:

1. На первом этапе проводилось повторение с учениками уже изученных основных определений:

– квадратное уравнение – это уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где коэффициенты – a, b, c действительные числа и $a \neq 0$;

– дискриминантом квадратного уравнения называют выражение $b^2 - 4ac$ и обозначают буквой D;

– уравнение называется приведенным, если коэффициент $a = 1$. Уравнение называется неполным, если один из коэффициентов b или c равен нулю или оба коэффициента равны нулю.

2. На втором этапе была проведена классная работа с подробным решением уравнений, которые наиболее сложно давались ученикам. А именно: квадратные, биквадратные и иррациональные уравнения. Данная работа представлена в Таблице 6.

Таблица 6 – Решение уравнений

<table>
<tr><th>Пример</th><th>Решение</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Для формирования личностного УУД</td></tr>
<tr><td>$6x^2 + 13x + 6 = 0$</td><td>$a = 6, b = 13, c = 6;$
$D = b^2 - 4ac = 13^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6 = 169 - 144 = 25;$
$\sqrt{D} = 5;$
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-13+5}{12} = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3};$
$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-13-5}{12} = -\frac{18}{12} = -\frac{3}{2}.$
Ответ: $x_1 = -\frac{2}{3}; x_2 = -\frac{3}{2}.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Для формирования регулятивного УУД</td></tr>
<tr><td>$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$</td><td>Замена: $x^2 = t.$
$t^2 - 5t + 4 = 0;$
$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 4 = 25 - 16 = 9;$
$\sqrt{D} = 3;$
$t_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4;$
$t_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1.$</td></tr>
</table>

Продолжение таблицы 6

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th></tr>
<tr><td></td><td>Обратная замена:
$$x^2 = 4;$$
$$x_1 = 2,\ x_2 = -2;$$
$$x^2 = 1;$$
$$x_3 = 1,\ x_4 = -1;$$
Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Для формирования познавательного УУД</td></tr>
<tr><td>$(4x + 18)\sqrt{x^2 + 9x + 20} = 0$</td><td>1) ОДЗ: $x^2 + 9x + 20 \geq 0$;
$x^2 + 9x + 20 = 0$;
$D = 81 - 80 = 1$; $\sqrt{D} = 1$;
$x_1 = \frac{-9+1}{2} = -4$;
$x_2 = \frac{-9-1}{2} = -5$;
График смотреть на рисунке 8:

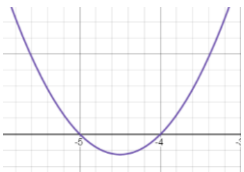



Рисунок 8 – График квадратного уравнения
Решение ОДЗ: $(-\infty; -5] \cup [-4; +\infty)$.
2) $4x + 18 = 0$;
$4x = -18$;
$x_3 = -4{,}5$ – посторонний корнень.
Ответ: $x_1 = -4$, $x_3 = -5$.</td></tr>
</table>

Продолжение таблицы 6

1	*2*
Для формирования коммуникативного УУД	
$\sqrt{23-x}=x-3$	ОДЗ: $\begin{cases}23-x\geq 0\\ x-3\geq 0\end{cases}, \Rightarrow \begin{cases}x\leq 23\\ x\geq 3\end{cases}.$ Возведем в квадрат обе части уравнения: $23-x=(x-3)^2;$ $23-x=x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2;$ $23-x=x^2-6x+9;$ $x^2-5x-14=0;$ $D=b^2-4ac=5^2-4(-14)=25+56=81;$ $\sqrt{D}=9;$ $x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{5+9}{2}=\frac{14}{2}=7;$ $x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{5-9}{2}=-\frac{4}{2}=-2.$ $x_2=-2$ – посторонний корень, так как не входит в промежуток $[3;23]$. Ответ: $x_1=7$.

Продолжение таблицы 6

1	*2*
Для формирования личностного УУД	
$(x^2+x)(x^2+x-5)=84$	Введем замену: $x^2+x=t$. $$t(t-5)=84;$$ $$t^2-5t-84=0.$$ По теореме обратной теореме Виета: $t_1=-7; t_2=12, (t_1+t_2=5; t_1\cdot t_2=-84.$ Вернемся к замене: 1) $x^2+x=-7; x^2+x+7=0;$ $D=b^2-4ac=1-4\cdot 7=-27-$ корней нет; 2) $x^2+x=12; x^2+x-12=0;$ $D=b^2-4ac=1-4(-12)=49;\ \sqrt{D}=7;$ $$x_{1,2}=\frac{-1\pm 7}{2};$$ $$x_1=-4; x_2=3.$$ Ответ: -4; 3.

3. На третьем этапе учащимся дается время для проведения работы над ошибками. После проводится взаимоконтроль – ученики меняются с одноклассником по парте своими тетрадями и проверяют ее, находят ошибки, если есть и пытаются исправить их вместе.

В качестве домашнего задания были предоставлены номера 10, 14, 42, 50 из пункта «Уравнения и системы» раздела «Итоговое повторение» на отработку данного материала [3].

4. Контрольный этап.

Ученикам выдается проверочная работа №2 на умение решать уравнения. Работа была разделена на два варианта. В данной работе был упор на те задания, которые в проверочной работе №1 дались сложнее других. На проверочную работу отводилось 30 минут. Работа представлена в Таблице 7.

Содержание проверочной работы № 2 (Таблица 7):

Таблица 7 – Проверочная работа № 2

I вариант	II вариант
Задание: решить уравнения	
$3x^2 - 8x + 5 = 0$	$5x^2 + 9x + 4 = 0$
$(x^2 - x)^2 - 11(x^2 - x) = 12$	$(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) = 8$
$(x^2 + 2x)^2 - 2x^2 = -4x + 3$	$(x^2 + x)^2 - 5x^2 = -5x - 6$
$\sqrt{x - 2} = x - 8$	$\sqrt{5 - 4x} = 2x + 5$
$16x^4 - 25x^2 + 9 = 0$	$9x^4 - 32x^2 - 16 = 0$

Анализ результатов проверочной работы.

После проверки второй работы был проведен анализ, в результате которого было ясно, что корректирующая работа помогла учащимся. Итог проверочной работы представлен в Таблице 5.

Обозначения:

«2» – задание полностью выполнено;

«1» – задание частично выполнено;

«0» – задание выполнено неправильно.

Критерии оценивания работы:

10-9 баллов – оценка 5;

8-6 баллов – оценка 4;

5-4 балла – оценка 3;

3-0 баллов – оценка 2.

Таблица 8 – Результаты проверочной работы №2

№ задания / № ученика	1	2	3	4	5	Количество баллов	Оценка
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Ученик 1	2	2	2	2	2	10	5
Ученик 2	2	2	2	1	2	9	5
Ученик 3	2	1	2	2	1	8	4
Ученик 4	2	1	1	2	2	8	4
Ученик 5	2	2	2	1	2	9	5
Ученик 6	2	2	1	1	1	7	4
Ученик 7	2	2	2	1	1	8	4
Ученик 8	2	1	1	2	1	7	4
Ученик 9	2	2	1	1	2	8	4
Ученик 10	2	2	2	2	2	10	5
Ученик 11	2	2	2	1	1	8	4
Ученик 12	2	1	2	2	1	8	4
Ученик 13	2	2	1	2	1	8	4
Ученик 14	2	1	2	1	2	8	4
Ученик 15	2	2	1	0	1	6	4
Ученик 16	2	2	0	1	2	7	4
Ученик 17	2	2	0	1	1	6	4
Ученик 18	2	1	1	2	2	8	4
Ученик 19	2	1	1	1	2	7	4
Ученик 20	2	1	2	1	1	7	4

Продолжение таблицы 8

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Ученик 21	2	1	1	1	1	6	4
Ученик 22	2	2	1	2	1	8	4
Ученик 23	2	2	2	1	1	8	4
Итого	23	23	21	22	23	173	

Вывод: из приведенных в Таблице 8 результатов можно сделать вывод, что все ученики улучшили свои результаты (это видно из Таблицы 5 и Таблицы 8). Все ученики справились почти со всеми заданиями. Задания 3 и 4 не выполнили лишь единицы.

Оценки за проверочную работу представлены в диаграмме (рисунок 9).

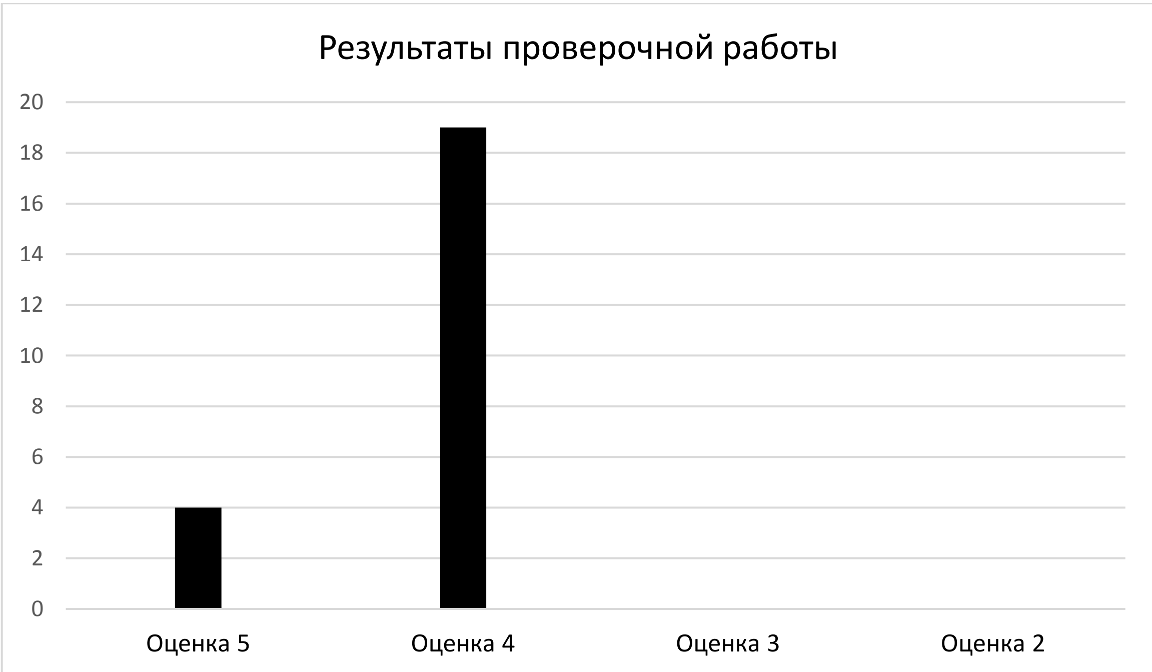


Рисунок 9 – Результаты проверочной работы №2

Вывод: по результатам проверочной работы №2 на диаграмме видно, что большая часть класса (19 человек) получили оценку 4; оценку 4 получили 4 человека.

Можно заметить, что по общему количеству баллов произошло увеличение со 124 баллов по проверочной работе №1 до 173 баллов по проверочной работе №2, т.е. увеличилось на 49 баллов. Можно сделать вывод, что у каждого ученика повысился уровень сформированности УУД.

Анализ по количеству выполненных заданий (рисунок 10).

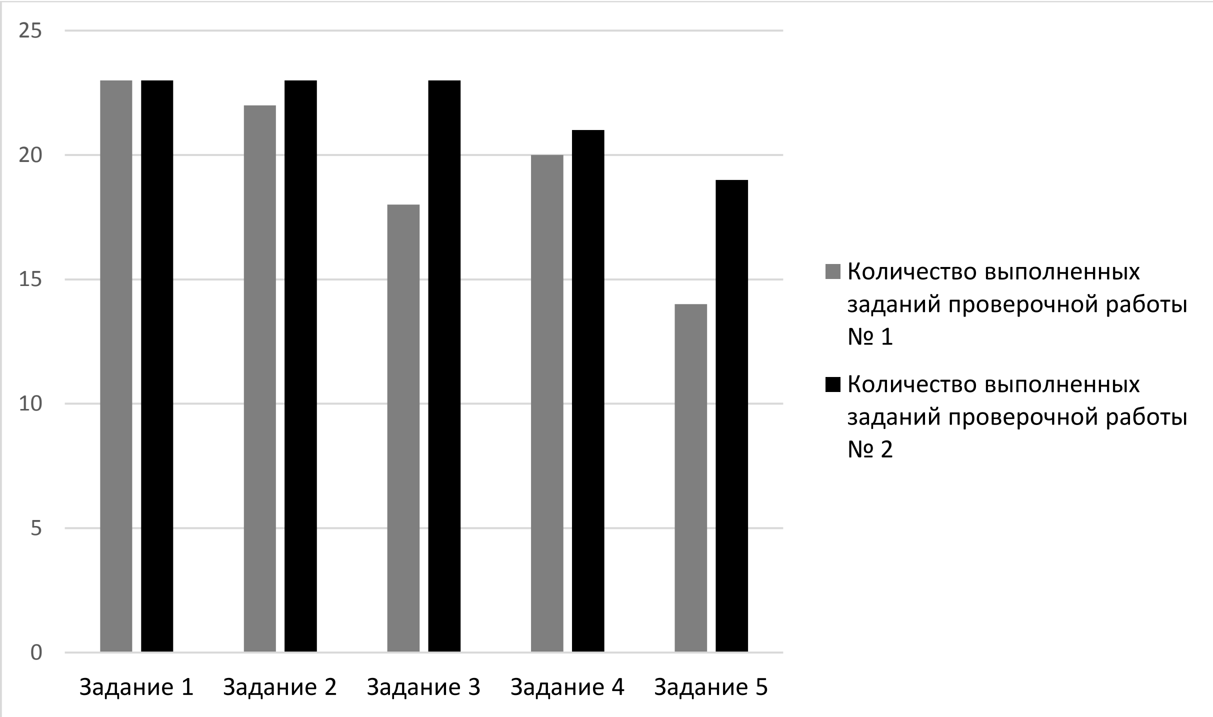


Рисунок 10 – Результаты анализа по количеству выполненных заданий

Из приведенной диаграммы видно, что после проведения корректирующей работы с учащимися, при правильном формировании УУД, количество выполненных заданий увеличилось.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тема выпускной квалификационной работы очень важна в современном обществе. При изучении уравнений важно максимально точно донести до учащегося все тонкости данной темы. Также важно облегчить обучение с помощью правильного формирования универсальных учебных действий.

В ходе написания работы были изучены объект и предмет исследования. Также установлено, что главной целью работы является исследовать методику решения уравнений и разработать систему заданий для формирования УУД. Были выдвинуты задачи: изучить и проанализировать учебную литературу по математике 5-9 классов; изучить УУД для решения уравнений в основной школе; составить систему заданий для контроля по данной теме и подобрать примеры решения уравнений из курса основной школы для 9 класса.

В практической части данной работы было выяснено и подтверждено, что правильное формирование УУД поможет учащимся лучше и легче справляться с заданиями на тему «Уравнения». Также с помощью формирования УУД доказали улучшение качества обучения учащихся. Результаты исследования приведены в диаграммах второй части второго параграфа исследовательской работы.

В ходе исследовательской деятельности квалификационной работы подтвердилась выдвинутая гипотеза, что если систематически использовать систему заданий, формирующую УУД при решении уравнений, то учащиеся смогут повысить уровень своих знаний и умений по данной теме.

Приведенные приемы формирования УУД смело можно использовать в педагогической деятельности, дополняя их своими приемами, примерами и опытом.

Цель выпускной квалификационной работы достигнута, задачи решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Алимов, Ш. А.** Алгебра. 7 класс : учебник для общеобразовательных учреждений / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров. – Текст: непосредственный // 18-е изд. – Москва : Просвещение. – 2011. – 224 с. : ил. – ISBN 978-5-09-025169-3.
2. **Алимов, Ш. А.** Алгебра. 8 класс : учебник для общеобразовательных учреждений / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров. – Текст: непосредственный // 19-е изд. – Москва : Просвещение. – 2012. – 255 с. : ил. – ISBN 978-5-09-028790-6.
3. **Алимов, Ш. А.** Алгебра. 9 класс : учебник для общеобразовательных учреждений / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров. – Текст: непосредственный // 17-е изд. – Москва : Просвещение. – 2012. – 287 с. : ил. – ISBN 978-5-09-028981-8.
4. **Асмолов, А. Г.** Формирование универсальных учебных действий в основной школе : от действия к мысли. Система заданий : пособие для учителя / А. Г. Асмолов, Г. В. Бурменская, И. А. Володарская ; под ред. А. Г. Асмолова. – 2-е изд. – Москва : Просвещение. – 2010. – 159 с. – Текст : электронный. – URL: http://s_poshin.isk.edu54.ru/wp-content/uploads/2015/06/%D0%BE%D1%82-%D0%B4%D0%B5%D0%B9%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B8%D1%8F-%D0%BA-%D0%BC%D1%8B%D1%81%D0%BB%D0%B8.pdf (дата обращения: 30.04.2021).
5. **Боженкова, Л. И.** Методика формирования универсальных учебных действий при обучении алгебре / Л. И. Боженкова. – 2-е изд., электрон. – Москва : Лаборатория знаний. – 2020. – 243 с. – Систем. требования : Adobe Reader XI. – Загл. с титул. экрана. – Текст : электронный. – URL: https://avidreaders.ru/book/metodika-formirovaniya-universalnyh-uchebnyh-deystviy-pri-1.html (дата обращения: 11.05.2021). – ISBN 978-5-00101-904-6.

6. **Выгодский, М. Я.** Справочник по элементарной математике : таблицы, арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия, функции и графики / М. Я. Выгодский. – изд. 7-е. – Москва : Гостехиздат. – 1954. – 412 с. – Текст : электронный. – URL: https://www.mathedu.ru/text/vygodskiy_spravochnik_po_ elementarnoy_matematike_1954/p0/ (дата обращения: 15.05.2021).

7. **Глейзер, Г. И.** История математики в школе, 7-8 классы : пособие для учителей / Г. И. Глейзер. – Москва : Просвещение. – 1982. – 240 с. – Текст : электронный. – URL: https://www.mathedu.ru/text/gleyzer_istoriya_matematiki_ v_shkole_7-8_klassy_1982/p0/ (дата обращения: 25.04.2021).

8. **Глейзер, Г. И.** История математики в школе, 9-10 классы : пособие для учителей / Г. И. Глейзер. – Москва : Просвещение. – 1983. – 352 с. – Текст : электронный. – URL: https://www.mathedu.ru/text/gleyzer_istoriya_matematiki_ v_shkole_9-10_klassy_1983/p0/ (дата обращения: 25.04.2021).

9. **Гринченко, И.С.** Современные средства оценивания результатов обучения: учебно-методическое пособие / И.С. Гринченко. – Москва : УЦ Перспектива. – 2013. – 247 с. – Текст : непосредственный.

10. **Дорофеев, Г. В.** Математика. 5 класс : учебник для общеобразовательных организаций / Г. В. Дорофеев, И. Ф. Шарыгин, С. Б. Суворова. – Текст: непосредственный // под ред. Г. В. Дорофеева, И. Ф. Шарыгина. – 5-е изд. – Москва : Просвещение. – 2017. – 287 с. : ил. – ISBN 978-5-09-045882-5.

11. **Дорофеев, Г. В.** Математика. 6 класс : учебник для общеобразовательных организаций / Г. В. Дорофеев, И. Ф. Шарыгин, С. Б. Суворова ; под ред. Г. В. Дорофеева, И. Ф. Шарыгина. – Текст: непосредственный // 4-е изд. – Москва : Просвещение. – 2016. – 287 с. : ил. – ISBN 978-5-09-037277-0.

12. **Мерзляк, А. Г.** Математика : 5 класс : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Текст: непосредственный // Москва : Вентана-Граф. – 2013. – 304 с. : ил. – ISBN 978-5-360-03677-7.

13. **Мерзляк, А. Г.** Математика : 6 класс : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Текст: непосредственный // Москва : Вентана-Граф. – 2014. – 304 с. : ил. – ISBN 978-5-360-04784-1.

14. **Мерзляк, А. Г.** Алгебра : учебник для 7 класса общеобразовательных учебных заведений / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Текст: непосредственный // Харьков : Гимназия. – 2015. – 256 с. : ил. – ISBN 978-966-474-254-9.

15. **Мерзляк, А. Г.** Алгебра : 8 класс : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Текст: непосредственный // Москва : Вентана-Граф. – 2013. – 256 с. : ил. – ISBN 978-5-360-04345-4.

16. **Мерзляк, А. Г.** Алгебра : 9 класс : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Текст: непосредственный // Москва : Вентана-Граф. – 2014. – 304 с. : ил. – ISBN 978-5-360-05308-8.

17. **Мордкович, А. Г.** Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович. – Текст: непосредственный // 17-е изд., доп. – Москва : Мнемозина. – 2013. – 175 с. : ил. – ISBN 978-5-346-02432-3.

18. **Мордкович, А. Г.** Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович. – Текст: непосредственный // под ред. А. Г. Мордковича. – 17-е изд., стер. – Москва : Мнемозина. – 2013. – 271 с. : ил. – ISBN 978-5-346-02433-0.

19. **Мордкович, А. Г.** Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович. – Текст:

непосредственный // 12-е изд., доп. – Москва : Мнемозина. – 2010. – 215 с. : ил. – ISBN 978-5-346-01427-0.

20. **Мордкович, А. Г.** Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович ; под ред. А. Г. Мордковича. – Текст: непосредственный // 12-е изд., стер. – Москва : Мнемозина. – 2010. – 271 с. : ил. – ISBN 978-5-346-01428-7.

21. **Мордкович, А. Г.** Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович., П. В. Семенов. – Текст: непосредственный // 12-е изд., стер. – Москва : Мнемозина. – 2010. – 224 с. : ил. – ISBN 978-5-346-01420-1.

22. **Мордкович, А. Г.** Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, Л. А. Александрова, Т. Н. Мишустина ; под ред. А. Г. Мордковича. – Текст: непосредственный // 12-е изд., стер. – Москва : Мнемозина. – 2010. – 272 с. : ил. – ISBN 978-5-346-01421-8.

23. **Муравин, Г. К.** Математика. 5 класс : учебник / Г. К. Муравин, О. В. Муравина. – Текст: непосредственный // 3-е изд., стереотип. – Москва : Дрофа. – 2014. – 318 с. : ил. – ISBN 978-5-358-13524-6.

24. **Муравин, Г. К.** Математика. 6 класс : учебник / Г. К. Муравин, О. В. Муравина. – Текст: непосредственный // 2-е изд., стереотип. – Москва : Дрофа. – 2014. – 319 с. : ил. – ISBN 978-5-358-13669-3.

25. **Муравин, Г. К.** Алгебра. 7 класс : учебник для общеобразовательных учреждений / Г. К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина. – Текст: непосредственный // 9-е изд., стереотип. – Москва : Дрофа. – 2013. – 285 с. : ил. – ISBN 978-5-358-11925-3.

26. **Муравин, Г. К.** Алгебра. 8 класс : учебник для общеобразовательных учреждений / Г. К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина. – Текст: непосредственный // 15-е изд., стереотип. – Москва : Дрофа. – 2013. – 254 с. : ил. – ISBN 978-5-358-11837-9.

27. **Муравин, Г. К.** Алгебра. 9 класс : учебник / Г. К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина. – Текст: непосредственный // 14-е изд., стереотип. – Москва : Дрофа. – 2014. – 315 с. : ил. – ISBN 978-5-358-13345-7.

28. **Талочкин, П.Б.** Неравенства и уравнения. Упражнения и методические указания. / П.Б. Талочкин. – Москва : Просвещение. – 2010. – 234 с. – Текст : электронный. – URL: https://uch-lit.ru/matematika-2/dlya-uchiteley-i-prepodavateley/talochkin-p-b-neravenstva-i-uravneniya (дата обращения: 20.05.2021).

29. Алгебра. 7 класс : учебник для общеобразовательных учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова. – Текст: непосредственный // под ред. С. А. Теляковского. – Москва : Просвещение. – 2013. – 256 с. : ил. – ISBN 978-5-09-018967-5.

30. Алгебра. 8 класс : учебник для общеобразовательных организаций с прил. на электрон. носителе / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова. – Текст: непосредственный // под ред. С. А. Теляковского. – Москва : Просвещение. – 2013. – 287 с. : ил. – ISBN 978-5-09-022881-7.

31. Алгебра. 9 класс : учебник для общеобразовательных организаций / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова. – Текст: непосредственный // под ред. С. А. Теляковского. – 21-е изд. – Москва : Просвещение. – 2014. – 271 с. : ил. – ISBN 978-5-09-032009-2.

32. Математика. 5 класс : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. – Текст: непосредственный // 31-е изд., стер. – Москва : Мнемозина. – 2013. – 280 с. : ил. – ISBN 978-5-346-02441-5.

33. Математика. 6 класс : учебник для общеобразовательных учреждений / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. – Текст: непосредственный // 25-е изд., стер. – Москва : Мнемозина. – 2009. – 288 с. : ил. – ISBN 978-5-346-01240-5.

34. Современные проблемы школьного математического образования. Материалы научно-практических конференций учителей математики и преподавателей вузов. – Текст: непосредственный // Пермский государственный педагогический университет. Пермь. – 2002. – 190 с.

35. **Федеральный Государственный Образовательный Стандарт** Основного Общего Образования, утвержденный приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от «17» декабря 2010 г. № 1897. – Текст : электронный. – URL: http://standart.edu.ru/catalog.aspx?CatalogId=2588 (дата обращения: 09.04.2021).