МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Тема выпускной квалификационной работы

Формирование универсальных учебных действий при изучении квадратных уравнений и неравенств в основной школе

Выпускная квалификационная работа по направлению

44.03.01 Педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата

«Математика»

Форма обучения заочная

Проверка на объем заимствований:
87,57 % авторского текста
Работа рекомендована к защите
«2» июля 2021 г.
и. о. зав. кафедрой математики и МОМ
____________ Шумакова Е.О.

Выполнила:
Студентка)группы ЗФ-513-087-5-1
Бочкарева Анна Михайловна

Научный руководитель:
канд.физ-мат наук, доцент,
и.о.зав.кафедрой математики и МОМ
Шумакова Екатерина Олеговна

Челябинск
2021

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Тема выпускной квалификационной работы

Формирование универсальных учебных действий при изучении квадратных уравнений и неравенств в основной школе

Выпускная квалификационная работа по направлению

44.03.01 Педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата

«Математика»

Форма обучения заочная

Проверка на объем заимствований:
87,57 % авторского текста
Работа рекомендована к защите
«___» ___________ 2021 г.
и. о. зав. кафедрой математики и МОМ
_______________ Шумакова Е.О.

Выполнила:
Студентка)группы ЗФ-513-087-5-1
Бочкарева Анна Михайловна
Научный руководитель:
канд.физ-мат наук, доцент,
и.о.зав.кафедрой математики и МОМ
Шумакова Екатерина Олеговна

Челябинск
2021

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Федеральный государственный образовательный стандарт (далее – ФГОС) предъявляет требования не только к предметным и личностным результатам, но и к метапредметным результатам [30].

К метапредметным результатам относится формирование универсальных учебных действий (далее – УУД) обучающихся.

В соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования [5] предметным результатом изучения математики является формирование у обучающихся умений работать с учебным математическим текстом, точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить классификации, логические обоснования. Достижение данного результата становится возможным благодаря формированию системы универсальных учебных действий, под которыми в широком смысле понимается «умение учиться».

В качестве основных групп универсальных учебных действий А. Г. Асмолов и др. [31] выделяют познавательные, регулятивные, личностные и коммуникативные универсальные учебные действия. При этом авторы подчеркивают, что именно познавательные универсальные учебные действия (далее – ПУУД) позволяют развить в личности такие умения как: умение работать с текстом, умение проводить исследование, умение искать, отбирать и структурировать необходимую информацию.

УУД обеспечивают развитие логического и творческого мышления. Это определяет значимость разработки специальных заданий, способствующих формированию УУД для достижения результата при изучении математического материала. При этом отметим, что его составляющая – историко-математический материал кроме вышеуказанных функций наделяет учебно-познавательный процесс еще и эмоционально-ценностной ориентацией (Г. И. Щукина). Современному обществу требуются люди, максимально развившие свои задатки, имеющие высокий интеллектуальный и нравственный потенциал, определившие к окончанию основной школы сферу своих жизненных интересов, целенаправленное развитие тех собственных качеств, умений, свойств, которые потребуются при получении дальнейшего образования.

Вопрос формирования у школьников умения учиться интересовал многих психологов и педагогов (Ю.К. Бабанского, В.В. Давыдова, А.Н. Леонтьева, С.Л. Рубинштейна, Н.Ф. Талызину, Т.И. Шамову, Д.Б.Эльконина и др.) в контексте обсуждения проблемы учебной деятельности: умение учиться предполагает овладение обобщенными способами действий (общеучебными умениями), обеспечивающими самостоятельное эффективное выполнение учебной деятельности. На важность формирования у школьников общеучебных умений указывали Ю.К. Бабанский, Л.С.

Выготский, ПЯ. Гальперин и др. Отдельные виды общеучебных умений и методику их формирования рассматривали Г.К. Селевко, А.В. Усова, О. Б. Епишева и др. Программа, формирующая общеучебные умения и навыки учащихся, впервые была предложена Д.Б. Элькониным и его учениками: В.В. Давыдовым, Г.А. Цукерман и др. Подходы к формированию универсальных учебных действий, учащихся активно рассматриваются А.Г. Асмоловым [4], Г.В. Бурменской, И.А. Володарской, О.А.Карабановой и др.

Выделяя в работе познавательные универсальные учебные действия (ПУУД), отметим, что вопросы их формирования рассматриваются в исследованиях А.Г. Асмолова, Г.В. Бурменской, И.А. Володарской, Э.Г. Гельфман, О.А. Карабановой, Л.Г. Петерсон и др. В работах этих авторов показано, что ПУУД обеспечивают организацию учебно-познавательной деятельности и направлены на формирование у обучающихся научной картины мира, развитие способности управлять своей познавательной и интеллектуальной деятельностью, формирование умений искать и перерабатывать информацию.

Несмотря на то, что выводы указанных выше авторов могут быть использованы при организации современного процесса обучения математике в школе для достижения современных образовательных результатов, отметим, что вопросы, связанные с возможностями решения квадратных уравнений и неравенств для формирования, в частности, познавательных универсальных учебных действий полностью не раскрыты.

Сказанное определяет **актуальность** заявленной темы выпускной квалификационной работы.

Объект исследования: процесс изучения решения квадратных уравнений и неравенств.

Предмет исследования: решение квадратных уравнений и неравенств как средство формирования универсальных учебных действий у обучающихся.

Цель исследования: составить систему заданий, направленных на формирование УУД обучающихся при изучении квадратных уравнений и неравенств.

Гипотеза: процесс формирования УУД при изучении квадратных уравнений и неравенств будет эффективным, если:

– использовать в работе специальные приемы, направленные на формирование УУД и учебные задания, разные по уровню сложности, форме выполнения,

– проводить курс внеурочной деятельности по решению квадратных уравнений и неравенств с параметром,

– использовать электронные образовательные ресурсы для решения квадратных уравнений неравенств.

Для достижения цели определены следующие **задачи:**

1. Выделить особенности формирования универсальных учебных действий.

2. Рассмотреть приемы формирования универсальных учебных действий при изучении математики.

3. Проанализировать УМК теме «Квадратные уравнения и неравенства».

4. Предложить задания по формированию универсальных учебных действий при изучении квадратных уравнений и неравенств.

5. Рассмотреть электронные образовательные ресурсы для решения квадратных уравнений и неравенств (в том числе графическим способом).

6. Разработать курс внеурочной деятельности по решению квадратных уравнений и неравенств с параметром.

Теоретическая значимость работы заключается в систематизации представлений об универсальных учебных действиях и средствах их формирования при обучении математике.

Практическая значимость состоит в том, что результаты данного исследования могут быть использованы педагогами основной школы при организации учебного процесса по предмету «Математика», ориентированного на развитие универсальных учебных действий у учащихся основной школы.

Структура работы. Данная работа состоит из введения, двух глав, заключения и приложений. Во введении обозначена актуальность и разработанность проблемы, объект, предметы, цели, гипотеза и задачи исследования.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

1.1. Сущность и определение понятий «универсальные учебные действия»

Современное общество подвержено постоянным изменениям, которые требуют быстрой модернизации процесса образования, определения и постановки новых образовательных целей, принимающих во внимание как социальные и государственные интересы и потребности, так и личностные.

В 2011 году принят Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (ФГОС ООО) второго поколения, где представлены новые запросы к основной программе образования, а именно к ее содержанию, условиям реализации и результатам освоения.

Главным отличием в ФГОС ООО второго поколения становится переход от традиционных способов обучения к системно-деятельностному подходу, который был разработан и отражен в работах Л. С. Выготского, Д. Б. Эльконина, А. Н. Леонтьева, где раскрываются основные психологические закономерности процесса развивающего обучения [15].

На современном этапе в школе реализуются стандарты второго поколения. При этом особое внимание в ФГОС уделяется процессу формирования универсальных учебных действий (УУД).

В 2021 году завершается переход на усовершенствованные стандарты третьего поколения. Главным их отличием становится конкретизация требований к обучающимся.

Сам термин «УУД» рассматривается как в широком смысле («способность субъекта к саморазвитию и самосовершенствованию путем сознательного и активного присвоения нового социального опыта»), так и в узком («совокупность способов действия учащегося, обеспечивающих самостоятельное усвоение новых знаний, формирование умений, включая организацию этого процесса»).

Универсальность таких учебных действий обеспечивает «целостность общекультурного, личностного и познавательного развития и саморазвития личности; преемственность всех ступеней образовательного процесса; основу реорганизации и регуляции любой деятельности учащегося независимо от ее специально-предметного содержания».

Универсальные учебные действия, их свойства и качества определяют эффективность образовательного процесса, в частности, усвоение знаний, формирование умений, образа мира и основных видов компетенций учащегося, в том числе социальной и личностной.

Меняются и требования к результатам обучения. В современном мире информация постоянно изменяется и обновляется. Уже недостаточно только знать, нужно обладать особыми умениями, чтобы работать с ней. Поэтому результаты в виде умений становятся более востребованными и ценными.

Концепция развития универсальных учебных действий создана на основе системно-деятельностного подхода группой авторов: А.Г. Асмоловым, И.А. Володарской, Г.В. Бурменской, О.А. Карабановой, С.В. Молчановым и Н.Г. Салминой [4].

Асмолов А.Г., Бурменская Г.В., Володарская И.А. и другие рассматривают универсальные учебные действия как способность субъекта к саморазвитию и самосовершенствованию, с помощью осознанного и интенсивного присвоения нового для себя общественного опыта.

В более узком значении Асмолов А.Г., Бурменская Г.В., Володарская И.А. рассматривают универсальные учебные действия как комплекс способов действия ученика, которые дают возможность самостоятельно усваивать новые учебные знания и учебные умения [4].

Под универсальными учебными действиями в современной педагогической науке понимается совокупность обобщенных действий учащегося, а также связанных с ними умений и навыков учебной работы, обеспечивающих способность субъектов к самостоятельному усвоению новых знаний, умений и компетентностей, к сознательному и активному присвоению нового социального опыта, к саморазвитию и самосовершенствованию.

Концепция развития УУД разрабатывалась группой авторов под руководством А. Г. Асмолова [4] на основе системно - деятельностного подхода, который предполагает:

– воспитание и развитие качеств личности, отвечающих требованиям информационного общества, инновационной экономики, задачам построения российского гражданского общества на основе принципов толерантности, диалога культур и уважения его многонационального, поликультурного и поли конфессионального состава;

– формирование соответствующей целям общего образования социальной среды развития обучающихся в системе образования, переход к стратегии социального проектирования и конструирования на основе разработки содержания и технологий образования, определяющих пути и способы достижения желаемого уровня (результата) личностного и познавательного развития обучающихся;

– ориентацию на достижение цели и основного результата образования – развитие на основе освоения универсальных учебных действий, познания и освоения мира личности обучающегося, его активной учебно-познавательной деятельности, формирование его готовности к саморазвитию и непрерывному образованию;

– признание решающей роли содержания образования, способов организации образовательной деятельности и учебного сотрудничества в достижении целей личностного и социального развития обучающихся;

– учет индивидуальных возрастных, психологических и физиологических особенностей обучающихся, роли, значения видов деятельности и форм общения при построении образовательного процесса и определении образовательно-воспитательных целей и путей их достижения;

– разнообразие индивидуальных образовательных траекторий и индивидуального развития каждого обучающегося, в том числе одарённых детей, детей-инвалидов и детей с ограниченными возможностями здоровья.

Эта концепция отвечает новым социальным запросам, отражающим переход России от индустриального к постиндустриальному информационному обществу, основанному на знаниях и высоком инновационном потенциале.

В целом, формирование УУД определяет успешное осмысление и усвоение знаний, умений и навыков, увязывание их с жизненным опытом, формирование компетентностей в любой предметной области познания, способствующих готовности личности к непрерывному образованию, высокой социальной и профессиональной мобильности.

Универсальные учебные действия – это общие воздействия, раскрывающие возможность широкой ориентации учеников, - как в разных предметных сферах, так и в строении самой учебной деятельности, включая понимание учениками ее целенаправленных, ценностно-смысловых и операциональных характеристик [32].

В широком смысле значение фразы «универсальные учебные действия» обозначают самостоятельное развитие и самосовершенствование путём осознанного и интенсивного присвоения нового общественного навыка.

Поскольку понимание новых требований является необходимым условием эффективной реализации стандарта, рассмотрим связи всех трех компонентов требований [1].

Универсальные учебные действия формируются в единстве друг с другом. Нельзя отдельно друг от друга формировать различные группы УУД – регулятивные, познавательные, коммуникативные и личностные.

Формирование универсальных учебных действий обусловливается тремя взаимодополняющими положениями.

1. Формирование универсальных учебных действий как цель общеобразовательного процесса устанавливает его организацию и содержание.

2. Формирование универсальных учебных действий совершается в контексте овладения различными учебными дисциплинами.

3. Универсальные учебные действия, их качества и свойства определяют результативность учебного процесса, в частности формирование знаний и умений; формирование компетенций учащихся и образа мира [28].

Самостоятельное усвоение учащимися новых учебных знаний, формирование учебных умений, компетентности, самостоятельную организацию учебного процесса, то есть умение учиться, развивается с помощью универсальных учебных действий, которые дают возможность учащимся разбираться в различных предметных областях и в организации самой учебной деятельности. Умение учиться дает возможность учащимся усвоить все необходимые компоненты учебной деятельности, таких как: познавательные и учебные мотивы; учебные цели и задачи; учебные действия и операции [1].

Основные функции универсальных учебных действий:

– обеспечение возможностей обучающегося самостоятельно осуществлять деятельность учения, ставить учебные цели, искать и использовать необходимые средства и способы их достижения, контролировать и оценивать процесс и результаты деятельности;

– создание условий для гармоничного развития личности и её самореализации на основе готовности к непрерывному образованию; обеспечение успешного усвоения знаний, формирования умений, навыков и компетентностей в любой предметной области.

Универсализация содержания общего образования в форме выделения неизменного фундаментального ядра общего образования включает совокупность наиболее существенных идей науки и культуры, а также концепцию развития универсальных учебных действий.

В связи с тем, что приоритетным направлением новых образовательных стандартов является реализация развивающего потенциала общего среднего образования, на мой взгляд, актуальной задачей становится обеспечение развития универсальных учебных действий как собственно психологической составляющей ядра образования наряду с предметным содержанием конкретных дисциплин. Важнейшей задачей современной системы образования является формирование универсальных учебных действий, обеспечивающих школьникам умение учиться, способность к саморазвитию и самосовершенствованию. Все это достигается путем сознательного, активного присвоения учащимися социального опыта. При этом знания, умения и навыки рассматриваются как производные от соответствующих видов целенаправленных действий. Качество усвоения знаний определяется многообразием и характером видов универсальных действий [8].

В составе основных видов универсальных учебных действий, соответствующих ключевым целям общего образования, А.Г. Асмоловым были выделены четыре блока:

1) личностный,

2) регулятивный,

3) познавательный,

4) коммуникативный.

1.2. Особенности формирования универсальных учебных действий

Проблема формирования универсальных учебных действий, обучающихся 7–9-х классов активно обсуждается в рамках научных конференций различного уровня, а также научных статей и монографий. Многие авторы описывают структуру УУД, определяют условия их формирования, критерии, предлагают конкретные методические приемы.

Н.В. Аргунова, А.М. Попова в результате исследования пришли к выводу, что суть формирования УУД заключается в том, что обучающиеся должны владеть отдельными компонентами каждого действия. В своей работе они рассматривают примеры методических приемов формирования УУД обучающихся 7-9-х классов на уроках математики [5].

Е.Н. Перевощикова сформулировала условия формирования УУД при обучении математике в основной школе [26]. А именно, она делает акцент на тщательный отбор учебного материала для каждого урока. Учебный материал, по ее мнению, должен быть представлен в виде системы знаний, усвоение которых станет основой формирования УУД. Учебный материал следует выстраивать так, чтобы обеспечить включение ученика в учебную деятельность. Каждый новый учебный элемент должен быть представлен в образовательном процессе в соответствии с основными этапами его усвоения: актуализация знаний, полученных ранее; выделение новых закономерностей, подлежащих изучению; выполнение новых действий с изучаемым объектом, их распознавание, осмысление и закрепление; применение знаний в знакомой по обучению или новой ситуации, их обобщение и систематизация.

Универсальные учебные действия группируются в четыре основных блока. Рассмотрим подробно каждый из них.

Познавательные УУД – общеучебные логические действия и операции, постановка и решение проблем; исследовательские действия (поиск информации, исследование); сложные формы опосредованной деятельности; переработка и структурирование информации (работа с текстом, смысловое чтение); формирование элементов комбинаторного мышления как одного из компонентов гипотетико-дедуктивного интеллекта; работа с научными понятиями и освоение общего приема доказательства как компонента воспитания логического мышления;

Познавательные универсальные учебные действия – это система способов познания окружающего мира, построения самостоятельного процесса поиска, исследования и совокупность операций по обработке, систематизации, обобщению и использованию полученной информации [8].

Познавательные универсальные учебные действия включают в себя: общеучебные, логические, а также УУД постановки и решения проблемы.

К универсальным общеучебным действиям относятся:

– самостоятельная формулировка и выделение познавательной цели;

– отбор и выделение нужной информации; использование способов поиска информации с помощью компьютера;

– структурирование и обобщение знаний;

– осмысленное и произвольное создание речевого выражения в устной и письменной форме;

– подбор более результативных методов решения, которые зависят от определенных условий;

– установление главной и второстепенной информации; независимая направленность и восприятие текстов художественного, научного, публицистического и официально - делового стилей;

– установка и определение задач, самостоятельное формирование алгоритмов работы при изучении проблем креативного и поискового характера [16].

Важно выделить такое универсальное общеучебное действие как рефлексия - самоанализ учениками собственных операций. Рефлексия подразумевает понимание ими абсолютно всех частей учебной деятельности.

Особую категорию учебных универсальных действий составляют знаково-символические действия:

– моделирование – это видоизменение предмета из чувственной формы в модель, где выделены значительные свойства предмета (пространственно-графическая или знаково-символическая);

– видоизменение модели с целью раскрыть общие законы, определяющие данную предметную область [10].

Логические универсальные действия:

– анализ объектов с целью выделения признаков (существенных, несущественных);

– синтез – составление целого из частей, в том числе самостоятельное достраивание с восполнением недостающих компонентов;

– выбор оснований и критериев для сравнения, сериации, классификации объектов;

– подведение под понятие, выведение следствий;

– установление причинно-следственных связей;

– построение логической цепи рассуждений;

– доказательство;

– выдвижение гипотез и их обоснование.

Постановка и решение проблемы:

– формирование проблемы;

– самостоятельное создание способов решения проблем творческого и поискового характера.

Следует помнить, что при формировании познавательных УУД необходимо обращать внимание на установление связей между вводимыми учителем понятиями и прошлым опытом детей, в этом случае ученику легче увидеть, воспринять и осмыслить учебный материал [20].

Предполагается, что результатом формирования познавательных универсальных учебных действий будут являться умения:

–выделять и формулировать познавательную цель с помощью учителя;

– самостоятельно выделять и формулировать познавательную цель;

– произвольно и осознанно владеть общим приемом решения задач;

– осуществлять поиск необходимой информации для выполнения учебных заданий;

– использовать знаково-символические средства, в том числе модели и схемы для решения учебных задач;

– ориентироваться на разнообразие способов решения задач;

–учиться основам смыслового чтения художественных и познавательных текстов; выделять существенную информацию из текстов разных видов;

–осуществлять анализ объектов с выделением существенных и несущественных признаков;

– осуществлять синтез как составление целого из частей;

– осуществлять сравнение, сериацию и классификацию по заданным критериям;

– устанавливать причинно-следственные связи;

– строить рассуждения в форме связи простых суждений об объекте, его строении, свойствах и связях;

– устанавливать аналогии;

– владеть общим приемом решения учебных задач;

– осуществлять расширенный поиск информации с использованием ресурсов библиотеки, образовательного пространства родного края (малой родины);

– создавать и преобразовывать модели и схемы для решения задач;

–осуществлять выбор наиболее эффективных способов решения образовательных задач в зависимости от конкретных условий.

Познавательные универсальные учебные действия, их свойства и качества, наряду с другими видами универсальных учебных действий, определяют эффективность образовательного процесса, в частности усвоение знаний, формирование умений, образа мира и основных видов компетенций учащегося.

Коммуникативные УУД – действия, которые обеспечивают социальную компетентность, учат учитывать позиции других людей в общении или какой-либо деятельности, воспитывают умение слушать других. Можно сказать, в данной сфере УУД развивают умение сотрудничества и умение грамотно вступать в диалог, участвовать в дискуссии, интегрироваться в группу сверстников и строить дружелюбное, взаимовыгодное взаимодействие с окружающими.

Существуют следующие виды коммуникативных действий:

– планирование учебного сотрудничества с учителем и сверстниками;

– определение цели, функций участников, способов взаимодействия;

– постановка вопросов – инициативное сотрудничество в поиске и сборе информации;

– разрешение конфликтов – выявление, идентификация проблемы, поиск и оценка альтернативных способов разрешения конфликта, принятие решения и его реализация;

– управление поведением партнера – контроль, коррекция, оценка действий партнера;

– умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли в соответствии с задачами и условиями коммуникации; владение монологической и диалогической формами речи в соответствии с грамматическими и синтаксическими нормами родного языка.

При подготовке к уроку учитель ставит для себя ряд задач:

– сформулировать цели урока и обеспечить их достижение;

– отобрать учебный материал и провести его дидактическую обработку;

– определить методы и средства обучения;

– организовать собственную деятельность и деятельность учеников;

– сделать так, чтобы взаимодействие всех этих компонентов привело к определенной системе знаний и ценностных ориентаций.

Личностные УУД определяют мотивационную ориентацию, иными словами определяют умение самостоятельно осуществлять свой выбор.

При развитии данного блока УУД происходит:

– формирование осознанной, положительной, адекватной самооценки;

– формирование мотива, который реализует потребность в деятельности, являющейся социально-значимой;

– развитие учебных мотивов, а также познавательных интересов;

– развитие внимательности к окружающим, доброжелательности и доверия;

– развитие умения работать в коллективе.

Просто так данные УУД не формируются. Для этого необходимы некоторые условия: должна быть сформулирована цель урока, проводится беседы с учениками, по типу «Для чего вы изучаете математику? Для чего она вам?». Должна осуществляться работа в парах, группах. И не менее важно – это положительная оценка работы ученика учителем и одноклассников. Только в этом случае, сформируются личностные УУД.

Регулятивные УУД обеспечивают организацию учащимися собственной учебной деятельности и включают в себя:

– целеполагание, которое отвечает за то, чтобы на уроке была поставлена задача, исходя из того, что учащиеся уже усвоили и что им только предстоит;

– планирование-то есть пошаговый план достижения конечной цели, нужного результата, в котором известны цели для каждого последующего шага;

– прогнозирование – предвиденье будущего результата, как будет достигнут и как будет описан;

– контроль, который осуществляется путем сравнения результативности выбранного способа действия и заданного образца. Это делается для выяснения каких-либо нарушений от образца;

– коррекция – включение определенных поправок, изменений в план, если заметно и обнаружено отклонение от образца;

– оценка – определение и понимание тех компонентов, которые уже поняты учащимся, которыми они овладели, а так же понимание, насколько учащиеся ими овладели;

– волевая саморегуляция – готовность в неожиданных, непростых ситуациях справиться с ними.

При развитии данных УУД происходит формирование умения организовать и планировать свою деятельность; развитие умения понимать, выполнять учебные цели. Происходит формирование таких умений, как действовать по плану и алгоритму, например, решение задач; формирование умения спокойно и правильно воспринимать оценки и отметки, поставленные учителем; формирование умений проводить анализ задачи и определение типа задачи.

Основным средством для формирования УУД в курсе изучения математики являются самые разные по формулировке учебные задания. Такие, например, как объясни, оцени, проверь, докажи и так далее. Они помогают нацелить обучающихся на выполнение разнообразных видов деятельности, тем самым обучая учеников действовать, идти к своей поставленной цели. Различные задания, которые даются ученикам для выполнения, дают им возможность научиться анализировать объект с целью выделения признаков как существенных, так и несущественных, учат и побуждают учеников выявлять сходство и различие, проводить сравнение и классификацию по заданным или самостоятельно выделенным признакам, иначе говоря, основаниям, устанавливать причинно-следственные связи, строить рассуждения в форме связи простых суждений об объекте, его структуре, свойствах; обобщать, или другими словами осуществлять генерализацию для целого ряда единичных объектов на основе выделения сущностной связи.

Вариативные учебные задания целенаправленно формируют у детей весь комплекс универсальных учебных действий, который следует рассматривать как целостную систему, так как происхождение и развитие каждого действия определяется его отношением с другими видами учебных действий, что и составляет сущность понятия «умение учиться».

Для того чтобы у ученика формировались любые универсальные учебные действия, в образовательной системе существует путь, который проходит каждый ученик при изучении различных предметов, в том числе математики:

1) при изучении различных учебных предметов у ребят формируется первичный опыт выполнения универсальных учебных действий, формируется мотивация к их самостоятельному выполнению;

2) имея данный опыт, учащийся, приступает к освоению знаний про общий способ выполнения данного универсального учебного действия;

3) после изучения, познания универсального учебного действия, ученик включает его в практику на уроке. Тем самым организуется самоконтроль, а также его коррекция;

4) в конце организуется контроль уровня сформированности этого универсального учебного действия и его системное практическое использование в образовательной практике как на уроках, так и во внеурочной деятельности.

Не менее важным является использование учителем современных образовательных технологий. Учитель должен в совершенстве владеть методиками организации в классе учебного сотрудничества «учитель-ученик», уметь определять свои позиции в рамках взаимодействия с учениками. Одним из самых важных и непременных условий формирования универсальных учебных действий на всех степенях образования является обеспечение преемственности в освоении учащимися универсальных учебных действий. Большая ответственность в этом деле возлагается как на каждого педагога в отдельности, так и на весь педагогический коллектив школ в целом.

Таким образом, целенаправленное, планомерное формирование универсальных учебных действий выступает ключевым условием повышения эффективности образовательного процесса в новых социально-исторических условиях развития общества.

1.3. Приемы, методы и средства формирования универсальных учебных действий на уроках математики

Математика, информатика и другие предметы естественно - научного цикла, позволяют целенаправленно формировать универсальные учебные действия и открывают возможности их систематического использования в различных предметных дисциплинах.

Формирование обобщенных и логических приемов осуществляется непрерывно при изучении всего курса алгебры, начиная с линейных уравнений. Рассмотрим формирование универсальных действий при изучении курса алгебры в 8 и 9 классах при изучении содержательной линии «Квадратные уравнения и неравенства» на примере УМК Мордковича А.Г. и др. В общей сложности на целенаправленное обучение обобщенным и логическим приемам в 8 классе отводится 21 час. Изучение квадратных уравнений происходит в несколько этапов: 1 этап: «Квадратные уравнения» (6 ч), 2 этап: «Рациональные уравнения» (5 ч), 3 этап: «Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций» (5 ч), 4 этап: «Иррациональные уравнения» (5 ч).

В 9 классе изучению квадратных уравнений и неравенств отводится 22 часа. Процесс изучения охватывает следующие темы: «Линейные и квадратные уравнения и их системы» (повторение – 2 ч), «Рациональные неравенства» (5 ч), «Системы рациональных неравенств» (8 ч), «Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций» (5 ч), «Итоговое повторение» (2 ч).

В ходе исследования, исходя из теоретического анализа учебно-методической литературы, в качестве приемов учебной работы при изучении уравнений и неравенств, направленных на формирование *познавательных УУД* были приняты следующие:

Анализ – логический прием мышления, с помощью которого происходят мысленное разделение уравнения или неравенства на смысловые части в определенном порядке, исследование каждой части в отдельности (поиск пути решения).

Схема:

1) разделить уравнение или неравенство на смысловые части (выявить состав уравнения или неравенства); определить, какие алгебраические операции выполняются в уравнении или неравенстве; выявить, какие функции входят в уравнение или неравенство (определить степень уравнения или неравенства, либо степень неизвестного в уравнении или неравенстве); выявить логические структуры уравнения или неравенства;

2) исследовать отдельно каждую смысловую часть (при каких условиях имеет смысл выражение, входящее в уравнение или неравенство, какие следствия можно получить из данного уравнения или неравенства);

3) если нужно, включить уравнение или неравенство в связи и отношения с другими уравнениями или неравенствами, или их системами, с известными теоремами (теоремы равносильности, уравнения-следствия). Например, выполнить по схеме анализ уравнения $\frac{x}{2} - 3 - \frac{2x^2}{7} = 0$.

Анализ:

1) уравнение не содержит неизвестную в знаменателе дроби, следовательно, задано целое рациональное уравнение;

2) неизвестное x во второй степени, следовательно, уравнение сводится к целому рациональному уравнению второй степени.

Синтез – логический прием мышления, характеризующийся соединением результатов исследования смысловой части уравнения или неравенства в единое целое, решение уравнения или неравенства.

Схема:

1) Решить уравнение или неравенство (по плану, полученному при анализе) или выполнить действия, решить уравнение или неравенство по известному алгоритму.

2) Из предполагаемых корней выбрать те числа, которые удовлетворяют условиям существования выражений, входящих в исходное уравнение или неравенство (ОДЗ).

3) Записать ответ.

Например, дано уравнение $x^2 - 9 = 0$.

Синтез: 1) $x^2 - 9 = 0$, $x^2 = 9, x = \pm\sqrt{9},$

Так как под знаком арифметического корня находится неотрицательное число, то оба числа являются корнями уравнения. Ответ: $x_1 = 3, x_2 = -3$.

Обобщение – логический прием мышления, при котором мысленно выделяют (фиксируют) какое-либо общее для нескольких уравнений или неравенств свойство и включают уравнения и неравенства в один класс, обладающий выделенным свойством.

Схема:

1) Проанализировать несколько уравнений или неравенств на предмет существования их общих свойств, сравнить, решить.

2) Выделить какое-либо одно свойство.

3) Объединить уравнения или неравенства, обладающие выделенным свойством, в один класс.

4) Записать обобщенную формулу полученного класса уравнений и неравенств или обобщенную формулу процесса решения класса уравнений или неравенств.

Например, даны неравенства, запишите, если это возможно, обобщенную формулу их записи.

$$x^2 \leq 25, x^2 \leq 49.$$

Обобщение:

1) все заданные неравенства квадратные; характер неравенства одинаков: $(\leq)$, в правой части каждого неравенства положительное число;

2) обобщенная формула записи: $x^2 \leq a, a > 0$.

3) обобщенная формула записи решения:

$x^2 \leq a, a > 0 \ \Leftrightarrow -\sqrt{a} \ \leq x \geq \sqrt{a}.$

Абстрагирование – логический прием мышления, при котором выделяют один признак в уравнении, или неравенстве, или наборе уравнений или неравенств.

Схема:

1. Зафиксировать какой-либо признак (существенное свойство) в уравнении или неравенстве.

2. Не обращая внимания на остальные признаки в уравнении или неравенстве, расчленить уравнение или неравенство на элементы (смысловые части и пр.), решить

уравнение или неравенство. Например, используя схему выполнения логического приема «абстракция», предложите метод решения заданных уравнений

$$x^4 - 3x^2 - 18 = 0,$$

$$(2x + 1)^2 - 3 \cdot (2x + 1) - 18 = 0,$$

$$x - 3\sqrt{x} - 18 = 0.$$

Абстрагирование:

1. В каждом из уравнений есть два слагаемых, отличающихся показателями степеней, после преобразования получаем уравнения, по структуре похожие на квадратные уравнения. Свойство, которое мы зафиксируем как основание абстракции − схожесть структуры со структурой квадратного уравнения.

$$x^4 - 3x^2 - 18 = 0, x^2 = t, t > 0.$$

$$(2x + 1)^2 - 3 \cdot (2x + 1) - 18 = 0, (2x + 1) = t, t \in R, at^2 + bt + c = 0$$

$$x - 3\sqrt{x} - 18 = 0, \sqrt{x} = t, t > 0.$$

Конкретизирование − логический прием мышления, при котором происходит выделение серии уравнений или неравенств, решаемых одним способом, либо переход от более общего класса уравнений к менее общему, единичному виду уравнений или неравенств.

Схема:

1) выделить в серии уравнений или неравенств те, которые имеют общую структуру или общий способ решения;

2) выбрать за основание конкретизации одно из общих свойств;

3) выбрать уравнения или неравенства, обладающие выделенным свойством, в отдельный класс;

4) исследовать как отдельный класс на возможное частное решение.

Например, конкретизировать какой-либо класс неравенств из представленных:

$$x^2 - 4x - 3 > 0,$$

$$x^2 + 4x > 0,$$

$$x^2 - 4 > 0.$$

Конкретезирование.

1) неравенства квадратные (второй степени) $ax^2 + bx + c > 0$;

2) квадратные неравенства решаем по алгоритму.

Обучающий и закрепляющий этапы предполагают обучение школьников приемам учебной работы, составляющим алгоритмические предписания выполнения логических приемов мышления при изучении уравнений и неравенств. Формирование логических приемов мышления проходит в рамках урока как основной формы обучения и в рамках программного материала.

К одному из способов формирования *регулятивных УУД* относится проектная деятельность, организация которой обусловлена необходимостью понимать обучающимися смысл и предназначение своей самостоятельной учебно-познавательной деятельности для получения качественного образования, самостоятельно ставить познавательные цели и задачи, продумывать способы их выполнения, оформлять и презентовать проект. Это способствует умению планировать процесс проведения работ над проектом; осуществлять контроль; производить коррекцию; оценивать полученный результат [17].

Рассмотрим другие способы формирования регулятивных УУД:

1. Критериальные карточки для самоконтроля.

Для организации контроля обучающихся при прохождении новой темы, взаимодействия учителя и обучающегося, а также формирование универсальных учебных действий при изучении квадратных уравнений и неравенств целесообразно использовать критериальные карточки для самоконтроля.

В начале темы каждый учащийся получает карточку индивидуальных достижений, в которой отмечает, какие умения он освоил (на его взгляд).

В качестве средства формирования учебной саморегуляции, при обучении математике могут быть использованы веб-квесты [12].

Алгоритм прохождения:

1) определитесь с видом деятельности (теория, практика, ошибковедение),

2) в зависимости от выбранного вида деятельности выполните задания, согласно разработанным спискам,

3) заполните анкету по анализу собственной деятельности (вопросы анкеты разработаны для всех видов деятельности),

4) подводите итог деятельности [12].

Для повышения эффективности веб-квестов на этапах 3) и 4) данного алгоритма предлагается использовать: сопоставление собственных результатов с образцом и оценивание своей деятельности на каждом этапе действий, решение обратной задачи, выполнение заданий по инструкции. В результате работы с веб-квестами у обучающихся формируются такие РУУД как оценка, контроль, саморегуляция и коррекция.

2. Работа с вопросами.

По мнению профессора психологии Л. М. Веккера «вопрос — есть психическое отображение нераскрытости, непредставленности тех предметных отношений, на выяснение которых направлен весь последующий мыслительный процесс» [5]. Вопрос «запускает» познавательную деятельность, направленную на решение какой-либо проблемы и способствует тому, чтобы определить, сформулировать проблему. Если человек учится и при этом не задает вопросы (имеются в виду свои, самостоятельно сформулированные), он не испытывает состояния незавершенности, которое является основой для любой познавательной деятельности [11]. Следовательно, развитие умения задавать вопросы и отвечать на них предполагает получение метапредметных результатов обучения, формирование универсальных учебных действий, в том числе — регулятивных, таких как целеполагание, мотивация, оценка.

Рассмотрим два приема, направленных на развитие умения задавать вопросы:

а) прием «Толстый и тонкий вопросы».

Обучающимся предлагается записать вопросы в два столбика. В первым столбик записывается «тонкий» вопрос, предполагающий однозначный ответ. Во втором — «толстый» вопрос, предполагающий развернутый, обстоятельный ответ. В этом вопросе допустимо решение задачи или упражнения. Количество вопросов может варьироваться от 1 до 5, в зависимости от отводимого времени. Этот прием может быть использован как для организации беседы в начале урока обобщающего повторения, так и для закрепления изучаемого материала, а также для организации взаимоопроса. Задание может выполняться в парах и группах [8].

б) «Кубик Блума».

На гранях кубика написаны начала вопросов: «Почему», «Объясни», «Назови», «Предложи», «Придумай», «Поделись». Учитель (или ученик) бросает кубик. Необходимо сформулировать вопрос к учебному материалу по той грани, на которую выпадет кубик. Например, вопрос, начинающийся со слова «Назови...» может соответствовать уровню репродукции, то есть простому воспроизведению знаний.

Вопросы, начинающиеся со слов «Почему…» соответствуют так называемым процессуальным знаниям. Ученик в данном случае должен найти причинно-следственные связи, описать процессы, происходящие с определённым предметом или явлением. Отвечая на вопрос «Объясни…», ученик использует понятия и принципы в новых ситуациях, применяет законы, теории в конкретных практических ситуациях, демонстрирует правильное применение метода или процедуры. И, конечно же, задания «Предложи…», «Придумай…», «Поделись…» направлены на активизацию мыслительной деятельности ученика [14].

Целенаправленная работа с такими приемами позволяет развивать регулятивные универсальные учебные действия, такие как целеполагание, мотивация, оценка.

3. Самостоятельная работа.

В соответствии с требованиями ФГОС умение самостоятельно учиться (определять цель, планировать, контролировать и оценивать свою деятельность) должно начать формироваться в школе в процессе овладения универсальными учебными действиями.

4. Алгоритм.

Алгоритм – это правила, инструкции, памятки, определяющие четкую последовательность элементарных для данного объекта операций по решению учебной задачи; система работы по строго определенным правилам, которая после последовательного их выполнения приводит к решению поставленной задачи [13].

Применение алгоритмов позволит обучающемуся научиться действовать по заданному плану, выбирать более эффективные пути решения задач и определять необходимые действия в соответствии с познавательной и учебной задачей, поспособствует совершенствованию составления творческих письменных работ (составление плана, конспекта) и общеучебных интеллектуальных умений (наблюдение, чтение, классификация, самоконтроль, сравнение, конкретизация) [26].

Коммуникативные УУД формируются, когда:

– ученик учится отвечать на вопросы;

–ученик учится задавать вопросы;

– ученик учится вести диалог;

– ученик учится пересказывать сюжет;

– учащихся учат слушать – перед этим учитель обычно говорит: «Слушаем внимательно».

Приемы, обеспечивающие формирование коммуникативных УУД [34]:

1. Отсроченная реакция.

Учитель после заданного вопроса не торопится опрашивать учеников. Выдерживается определённая пауза. Это позволяет “подтянуться” тем сообразительным ребятам, которые в силу своих личных качеств медленнее реагируют на изменившуюся учебную ситуацию.

2. «Лови ошибку!»

1) Объясняя материал, учитель намеренно допускает ошибки.

Сначала ученики заранее предупреждаются об этом. Иногда им можно даже подсказывать "опасные места" интонацией или жестом. Важно научить детей быстро реагировать на ошибки.

2) Ученик получает текст со специально допущенными ошибками – пусть «поработает учителем». Тексты могут быть заранее приготовлены другими учениками.

3. Светофор.

Во многом проблемы повышения эффективности устного опроса решает прием, который назовем: «Светофор». «Светофор» — это всего лишь длинная полоска картона, с одной стороны красная, с другой — зеленая. Способ применения светофора зависит от типа опроса.

При опросе ученики поднимают «светофор» красной или зеленой стороной к учителю, сигнализируя о своей готовности к ответу.

Красный сигнал означает «Я не знаю!» Это — сигнал тревоги. Это ученик как бы сам себе ставит двойку — пусть она и не идет в журнал.

Зеленый сигнал — «Знаю!»

4. Обсуждаем домашнее задание.

Учитель вместе с учащимися обсуждает вопрос: каким должно быть домашнее задание, чтобы новый материал был качественно закреплен? При этом, естественно, изученный материал ещё раз просматривается. Приём при регулярном использовании значительно повышает сознательность выполнения домашнего задания. Приём особенно хорошо работает, когда способы и виды домашнего задания, которые обычно даёт преподаватель, достаточно разнообразны.

5. Резюме.

Ученики письменно отвечают на вопросы, отражающие их отношение к уроку, учебному предмету, учителю.

6. Идеальный опрос.

Ученики сами оценивают степень своей подготовки и сообщают об этом учителю.

7. Организация работы в группах.

Причем группы могут получать как одно и то же, так и разные, но работающие на общий результат задания.

В рамках школьного обучения под логическим мышлением обычно понимается способность и умение учащихся производить простые логические действия (анализ, синтез, сравнение, обобщение и др.), а также составные логические операции (построение отрицания, утверждение и опровержение как построение рассуждения с использованием различных логических схем – индуктивной и дедуктивной).

Номенклатура логических действий включает:

1) сравнение конкретно-чувственных и иных данных (с целью выделения тождеств, различий, определения общих признаков и составления классификации);

2) опознание конкретно-чувственных и иных объектов (с целью их включения в тот или иной класс);

3) анализ—выделение элементов и «единиц» из целого; расчленение целого на части;

4) синтез – составление целого из частей, в том числе самостоятельно достраивая, восполняя недостающие компоненты;

5) сериация – упорядочение объектов по выделенному основанию;

6) классификация - отнесение предмета к группе на основе заданного признака;

7) обобщение – генерализация и выведение общности для целого ряда или класса единичных объектов на основе выделения сущностной связи;

8) доказательство – установление причинно-следственных связей, построение логической цепи рассуждений, доказательство;

9) подведение под понятие – распознавание объектов, выделение существенных признаков и их синтез;

10) вывод следствий;

11) установление аналогий.

В качестве сложного составного логического действия можно рассматривать общий прием решения задач. Большое значение при обучении математике имеет формирование общего приема решения задач. Анализ практики показывает, что основное внимание уделяется ознакомлению со специальными способами решения отдельных типов задач. Это часто приводит к тому, что учащиеся не приобретают умения самостоятельно анализировать и решать различные типы задач. Поэтому проблема овладения общим приемом решения задач продолжает оставаться актуальной и должна разрабатываться в методике обучения математике.

При анализе деятельности учащихся на каждом этапе урока, можно выделить универсальные учебные действия, которые формируются при правильной организации деятельности учащихся, а также те методы, приемы, средства обучения, формы организации деятельности учащихся, которые способствуют формированию УУД. Формируемые универсальные учебные действия на каждом этапе урока, а также методы, средства и приемы, способствующие формированию УУД, представлены в Таблице 1.

Таблица 1 – Формирование универсальных учебных действий на каждом этапе урока

Этапы урока	Результат формирования УУД	Методы, приемы, средства обучения
Мотивация к учебной деятельности	Личностные	Эмоциональный настрой
Актуализация и фиксирование затруднения в пробном учебном действии	Познавательные Коммуникативные Регулятивные Личностные	Постановка проблемного вопроса, описание проблемной ситуации
Определение места и анализ причины затруднения	Познавательные Коммуникативные Регулятивные Личностные	Проблемный диалог, технология проблемного обучения

Продолжение таблицы 1

Построение алгоритма и способов выхода из проблемной ситуации (цель, план, способ, средства)	Регулятивные Коммуникативные Познавательные Личностные	Карта урока, интерактивная доска, презентация проектная деятельность, задания типа: «Сформулируй вопросы, на которые ты знаешь ответы»
Реализация построенного алгоритма решения	Личностные Познавательные Регулятивные Коммуникативные	Проектная деятельность Частично поисковая, исследовательская деятельность Работа с учебником, выполнение тренировочных заданий Применение математической литературы, словарей, справочников, ИКТ – технологий
Закрепление новых знаний	Познавательные Регулятивные Коммуникативные Личностные	Групповая, парная работа Работа с учебником, выполнение тренировочных заданий
Самостоятельная работа с самопроверкой по образцу	Регулятивные Личностные Познавательные	Самоконтроль, Взаимоконтроль
Включение в систему знаний и повторение	Познавательные Коммуникативные Личностные	Групповая, парная работа Взаимопомощь, Работа по памяткам

Продолжение таблицы 1

Рефлексия (итог урока)	Коммуникативные Личностные Познавательные	Самоанализ, Самооценка, Обратная связь

Работу по формированию универсальных учебных действий необходимо проводить на каждом этапе урока. При разработке конспекта урока нужно планировать для формирования каких УУД будут созданы условия в ходе того или иного вида деятельности. Это можно показать на примере разработки технологической карты урока алгебры для учащихся 8 класса на тему «Формулы корней квадратного уравнения» (Приложение А).

Вывод по главе 1.

Федеральный государственный образовательный стандарт определяет метапредметные результаты обучения, среди которых есть овладение обучающимися универсальными учебными действиями, одними из таких действий являются познавательные и регулятивные УУД. Из этого следует, что проблема формирования УУД является актуальной.

В первой главе в результате анализа психолого-педагогической и методической литературы сформулировано понятие универсальных учебных действий, основные характеристики и рекомендации по их формированию.

Также в главе были рассмотрены средства и приемы формирования универсальных учебных действий при изучении математики, а также приведен пример технологической карты урока, где показано, что формирование УУД происходит на каждом этапе урока. Это должен учитывать учитель при построении плана урока и подготовке заданий.

ГЛАВА 2. ФОРМИРОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

2.1. Место темы «Квадратные уравнения и неравенства в школьном курсе математики»

В настоящее время отсутствует системное решение по созданию результативных методик формирования УУД обучающихся 7–9-х классов общеобразовательной школы [9]. Чтобы понять суть проблемы и ответить на вопрос, какой должна быть методика обучения математике обучающихся 7–9-х классов, чтобы она способствовала формированию УУД, проведем анализ некоторых учебно-методических комплексов (далее УМК) на предмет изучения квадратных уравнений и неравенств.

В 8-9 классах обучающиеся знакомятся с квадратными уравнениями, причем во всех рассмотренных УМК по алгебре тема «Квадратные уравнения» представлена достаточно полно, весь материал дается практически одной главой.

Все задачи условно можно поделить на несколько типов:

– задачи на нахождения корня уравнения;

– задачи на определение наличия корней уравнения и их количества;

– задачи на составление уравнения;

– задачи на построение графика уравнения;

– задачи на исследование уравнения.

Большинство заданий в теме «Уравнения» на протяжении всего курса алгебры в основной школе во всех рассмотренных УМК решаются на основании изученного алгоритма и не требуют от обучающихся никакого математического «творчества». Большинство задач не требуют даже глубокого понимания материала, так как задач на доказательство или исследование тождеств сравнительно меньше, чем задач на нахождение корней уравнения, которые сводятся к следованию ранее изученному алгоритму.

Основными способами решения квадратных уравнений являются:

1. Группировка:

Например, $x^2 - 4x + 3 = 0,$

$$x^2 - 4x + 3 = x^2 - x - 3x + 3 = x(x - 1) - 3(x - 1) =$$
$$= (x - 1) \cdot (x - 3),$$
$$\text{т.е. } (x - 1) \cdot (x - 3) = 0.$$

2. Метод выделения полного квадрата: $x^2 - 4x + 3 = 0$,

$$x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 1 = (x - 2)^2 - 1 =$$
$$= \big((x - 2) - 1\big) \cdot \big((x - 2) + 1\big) = (x - 3) \cdot (x - 1).$$

3. Графический:

3.1. Строим график функции $y = x^2 - 4x + 3$ и находим корни (абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox).

3.2. Преобразуем уравнение к виду $x^2 = 4x - 3$ и построим в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = 4x - 3$. Корнями уравнения служат абсциссы точек пересечения графиков функций.

3.3. Преобразуем уравнение к виду $x^2 + 3 = 4x$.

Построим в одной системе координат графики функций $y = x^2 + 3$ и $y = 4x$. Корнями уравнения служат абсциссы точек пересечения графиков.

3.4. Преобразуем выражение к виду

$$x^2 - 4x + 4 - 1 = 0,\ x^2 - 4x + 4 = 1,\ (x - 2)^2 = 1.$$

Построим в одной системе координат параболу $y = (x - 2)^2$ и прямую $y = 1$. Корнями уравнения служат абсциссы их точек пересечения.

Проведем сравнительный анализ УМК по теме «Квадратные уравнения» и представим их в Таблице 2.

Таблица 2 – Сравнительный анализ содержания темы «Квадратные уравнения» в различных учебно-методических комплексах

учебник Ю.Н. Макарычева [18]	учебники А.Г. Мордковича [20]	учебник Ш.А. Алимова [3]	учебник Г.К.Муравин [21]
Освещение темы «Квадратные уравнения» в учебниках 8 класса			
§8. Квадратное уравнение и его корни. 21. Неполные квадратные	§9. Квадратное уравнение и его корни 28. Определение квадратного уравнения. Неполные	§18. Квадратные уравнения. Решение неполных квадратных	Глава 4. 21. Выделение полного квадрата. 22. Решение

уравнения. 22. Формула корней квадратного уравнения. 23. Решение задач с помощью квадратных уравнений. 24. Теорема Виета.	квадратные уравнения 29. Формулы корней квадратного уравнения 30. Уравнения, сводящиеся к квадратным. 31. Решение задач с помощью квадратных уравнений. §10. Свойства корней квадратного уравнения. 32. Теорема Виета 33. Выражения, симметрические относительно корней квадратного уравнения. 34. Разложение квадратного трехчлена на множители.	уравнений §19. Формула корней квадратного уравнения §20. Теорема Виета §21. Квадратный трехчлен §22. Решение уравнений, приводимых к квадратным уравнениям §23. Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций	квадратного уравнения в общем виде. 23. Теорема Виета. 24.Частные случаи квадратных уравнений. 25. Задачи, приводящие к квадратным уравнениям.

Во всех рассмотренных учебно-методических комплексах по алгебре (как базового, так и углубленного уровня) тема «Квадратные уравнения» представлена достаточно полно. Изучение уравнений происходит поэтапно, с постепенным усложнением заданий и в тесной связи с практическим применением уравнений для решения задач иного характера, например, текстовых задач.

При этом достаточно широк спектр формулировок заданий, часть из которых требует «знать», а другая – «уметь» в УМК Мордковича А.Г., Ю.Н.Макарычева и Алимова Ш.А. В УМК Муравина Г.К., на мой взгляд, практические задания рассмотрены недостаточно полно. Рассмотрены примеры заданий одного типа, недостаточно заданий повышенной сложности, требующих от обучающихся дополнительных знаний, умений и логических рассуждений.

Во время изучения темы «Квадратные неравенства» учащиеся сталкиваются с определенным рядом проблем.

А.В. Боровских [6] в своей статье «Предметные и метапредметные проблемы школьного курса математики» в теме «Неравенства» сравнивает задачи с неравенствами с лабиринтом, из которого школьникам очень сложно выбраться. Возникает сразу несколько трудностей, например, переход от чисел к переменным величинам.

Другая проблема заключается в задании «решить» неравенство. У учеников создается устойчивое мнение, что «решить» - значит выполнить действия по определенному алгоритму и прийти к ответу. Но по мере усложнения примеров и задач алгоритмы их решения тоже усложняются и становятся разнообразными, до такой степени, что запомнить их все просто невозможно. Поэтому нужно не только обучать решать неравенства по алгоритму, но и самостоятельно искать новые пути решения.

Ещё одна проблема заключается в том, что правила равносильных преобразований неравенств не всегда очевидны. При изучении свойств и теорем по теме нужно объяснять их наглядно.

Рассмотрим теоретический и задачный материал по теме «Квадратные неравенства» в школьных учебниках.

Квадратным неравенством называется неравенство вида: $ax^2 + bx + +c < 0,$ где a, b, c– некоторые числа и $a \neq 0$ (вместо знака меньше может стоять любой другой знак неравенства) [18].

Существует четыре метода решения квадратных неравенств:

1. Метод решения квадратных неравенств с помощью «схематичного» построения параболы.

Чтобы решить квадратное неравенство с помощью построения параболы нужно сделать схематичный график: определить, куда направлены ветви параболы, а также найти точки пересечения с осью $0x$, если они есть и посмотреть по чертежу, где функция принимает положительные и отрицательные значения, записав в ответ промежуток, удовлетворяющий условию задачи [18].

Например,

$$x^2 - 3x - 10 \geq 0.$$

Графиком функции $y = x^2 - 3x - 10$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Решаем квадратное уравнение

$x^2 - 3x - 10 = 0, D = 49 > 0, x_1 = -2, x_2 = 5$, в точках -2 и 5 парабола пересекает ось $\text{O}x$. Изобразим схематично параболу на рисунке 1:

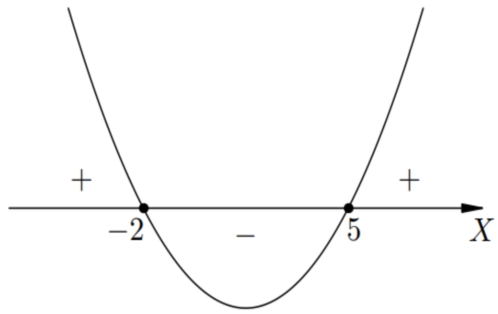


Рисунок 1 – Изображение параболы при наличии корней уравнения

При $x \in (-2; 5)$ значения функции отрицательны (график проходит ниже оси $\text{O}x$). В точках −2 и 5 функция обращается в нуль, а при

$x < -2$ или $x > 5$ значения функции положительны. Согласно знаку исходного неравенства, условие выполняется при $x \in (-\infty; -2] \cup [5; +\infty)$.

$$x^2 + 2x + 4 > 0.$$

Графиком функции $y = x^2 + 2x + 4$ является парабола, ветви которой направлены вверх. $x^2 + 2x + 4 = 0, D = -12 < 0,$ следовательно, уравнение не имеет корней, т.е. нет точек пересечения графика с осью Ox. Данная парабола изображена на рисунке 2.

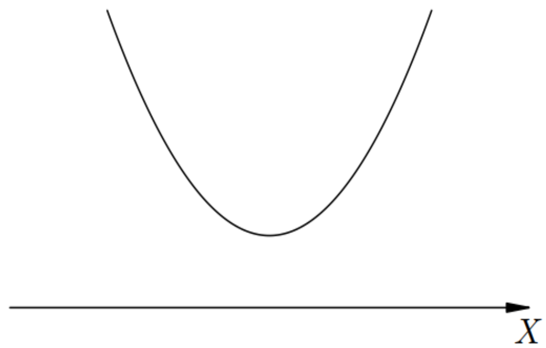


Рисунок 2 – Изображение параболы при отсутствии корней уравнения

Это значит, что значения функции положительны при всех возможных x. То есть решением данного неравенства являются все действительные числа.

Ответ: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Итак, для решения квадратных неравенств с помощью схематичного построения параболы используем следующий алгоритм:

– решаем квадратное уравнение, находим его корни;

– строим схематично график квадратичной функции, через точки пересечения с осью $0x$;

– по графику находим промежутки, на которых функция принимает значение удовлетворяющее знаку исходного неравенства.

2. Решение квадратных неравенств методом интервалов.

Для решения неравенства методом интервалов используем такой алгоритм:

– находим нули функции и отмечаем их на числовой прямой;

– получив числовую прямую разбитую на промежутки, определяем знак функции на каждом из промежутков, подставив числовые значения из интервала (рисунок 3);

– выбираем только те промежутки, в которых функция принимает значение удовлетворяющее знаку неравенства.

Например, $x^2 - 5x + 4 \geq 0$, $x^2 - 5x + 4 = 0$, $D = 9 > 0$,

$$x_1 = 4, x_2 = 1.$$

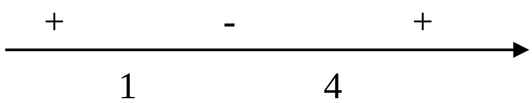


Рисунок 3 – Расстановка знаков интервала

Знаку неравенства удовлетворяет промежуток $x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

3. Решение квадратных неравенств методом выделения полного квадрата.

Для этого нужно выделить полный квадрат из квадратичной функции и проанализировать полученное выражение.

Например, $x^2 + 6x + 11 > 0$.

$$x^2 + 6x + 11 = (x+3)^2 - 9 + 11 = (x+3)^2 + 2.$$

Нам нужно найти значения больше нуля.

Следовательно, $(x+3)^2+2>0$. Проанализировав полученное выражение, можно увидеть, что при любых значениях x будет выполняться неравенств.

Ответ: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Стоит отметить, что в учебниках общеобразовательной школы при изучении темы «Квадратные неравенства» этот метод не рассматривается.

4. Решение квадратных неравенств графическим методом.

При графическом решении квадратных неравенств необходимо построить график квадратичной функции и по графику найти значения, удовлетворяющие условию задачи. Отличительной особенностью этого метода является то, что решать квадратное уравнение не надо, но нужно построить точный график.

Рассмотрим содержание теоретического материала по теме «Квадратные неравенства» в учебниках алгебры 8 и 9 классов. Данные приведены в Таблице 3 [18].

В учебниках Ю.Н. Макарычева [18] тема «Квадратные неравенства» представлена только в 9 классе, в главе II «Уравнения и неравенства с одной переменной». Теме отводится 6 параграф, который разделяется на пункты. Изучение темы начинается сразу с определения неравенств второй степени с одной переменной и рассмотрения метода решения с помощью схематичного построения параболы на трех примерах, после которых выделяется алгоритм решения. В следующем пункте рассматривается решение неравенств методом интервалов, где приводится теоретический материал с примерами.

В учебниках А.Г. Мордковича [20] тема «Квадратные неравенства» затрагивается и в 8, и в 9 классе. В учебнике 8 класса тема входит в главу V «Неравенства», где ей отводится только один параграф, затем идет рассмотрение графика квадратичной функции, с помощью которого объясняется что значит «решить неравенство». Рассмотрев первый пример с помощью метода построения параболы, автор переходит к объяснению метода решения квадратных неравенств с помощью схематичного построения графика и выводит алгоритм решения. Следующий пример решен с помощью метода интервалов, но подробно данный метод не рассматривается.

В 9 классе у А.Г. Мордковича продолжается изучение темы «Квадратные неравенства» в главе I, первом параграфе. Приводится изученный ранее теоретический материал для актуализации знаний. Рассматриваются примеры с решением с помощью схематичного построения параболы и метода интервалов.

В учебнике Ш.А. Алимова [3] за 8 класс теме «Квадратные неравенства» посвящена последняя, VI глава, которая разделена на три параграфа. Изучение темы начинается с мотивирующей задачи, при решении которой составляется квадратное неравенство. Далее приводится определение квадратного неравенства и решения неравенств на примерах. В следующем параграфе подробно разбирается способ решения квадратных неравенств с помощью графика квадратичной функции и представлен алгоритм решения. В заключительном параграфе главы приводится метод интервалов, который поясняется на четырех примерах. В 9 классе учебника Ш.А. Алимова [3] тема «Квадратные неравенства» не рассматривается. В связи с этим, учителю придется использовать дополнительные часы для повторения ранее изученного материала при подготовке учащихся к основному государственному экзамену.

В УМК Г.К.Муравина [21] тему «Квадратные неравенства» начинают изучать в 9 классе. Глава 1 разделена на восемь параграфов, семь из которых посвящены решению линейных неравенств и только в восьмом параграфе уделяется внимание изучению квадратных неравенств методом интервалов. В главе 2 «Квадратичная функция» решение с помощью графика квадратичной функции приведено в очень сжатой форме. В связи с этим учителю необходимы будут дополнительные часы для более детального изучения темы при подготовке учащихся с основному государственному экзамену.

В учебниках А.Г. Мордковича и Ш.А. Алимова теоретический материал изложен подробнее и доступнее для учащихся, чем у Ю.Н. Макарычева. В учебнике Ш.А. Алимова больше графиков и чертежей в теоретической части. На мой взгляд, графики усваиваются учащимися гораздо хуже.

В учебнике Г.К.Муравина теоретического материала по решению квадратных неравенств недостаточно для самостоятельного изучения. В связи с этим данная тема должна будет изучаться на дополнительных занятиях.

У А.Г. Мордковича теоретический и задачный материал разделены, что является удобным, с моей точки зрения, и представлено много примеров с подробным решением. Таким образом, я бы рекомендовала учебник А.Г. Мордковича, так как в нем подробно излагается теория, тема разбирается на конкретных примерах. Рассмотренный материал представлен в Таблице 3.

Таблица 3 – Сравнительный анализ содержания темы «Квадратные неравенства» в различных учебно-методических комплексах

учебник Ю.Н. Макарычева [2], [18]		учебники А.Г. Мордковича [20]		учебник Ш.А. Алимова [3]		учебник Г.К.Муравина [21]	
8 класс	9 класс	8 класс	9 класс	8 класс	9 класс	8 класс	9 класс
Тема							
-	– решение неравенств второй степени с одной переменной; - метод интервалов	решение квадратных неравенств	линейные и квадратные неравенства	–квадратное неравенство и его решение; – решение квадратного неравенства с помощью графика квадратичной функции; – метод интервалов	-	-	– решение квадратного неравенства с помощью графика квадратичной функции; – метод интервалов

Продолжение таблицы 3

Определение квадратного неравенства			
«Неравенства вида $ax^2 + bx + c >$ $(<)0$, где a, b, c– некоторые числа и $a \neq 0$ называют неравенствами второй степени с одной переменной» [18].	«Квадратным неравенством с одной переменной x называют неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$, где a, b, c действительные числа, кроме $a = 0$. (Вместо знака больше может стоять любой другой знак неравенства) [20].	«Если в левой части неравенства стоит квадратный трехчлен, а справа ноль, то такое неравенство называют квадратным» [3].)	Определение отсутствует
Алгоритм решения квадратных неравенств			
«Для решения неравенств вида $ax^2 + bx + c >$ $(<)\ 0$ поступают следующим образом: − находят дискриминант квадратного трехчлена и выясняют, имеет ли трехчлен корни; − если трехчлен имеет корни, то отмечают их на оси Ox и через отмеченные точки проводят схематически параболу, ветви которой	Алгоритм решения различных видов неравенств описан на конкретных примерах. В начале параграфа выделены правила, по которым с помощью элементарных равносильных преобразований можно упростить неравенство и дальше на конкретных примерах приводится алгоритм решения неравенств методом интервалов, графическим способом, решение рациональных неравенств.	«Для решения квадратного неравенства с помощью графика нужно: − определить направление ветвей параболы по знаку первого коэффициента квадратичной функции; − найти действительные корни соответствующего квадратного уравнения или установить, что их нет;	Алгоритм решения не описан

Продолжение таблицы 3

направлены вверх или вниз при $a > 0$ и $a < 0$; − находят на оси x промежутки, для которых точки параболы расположены выше оси Ox, или ниже оси Ox» [2], [18].		− построить эскиз графика квадратичной функции, используя точки пересечения (или касания) с осью Ox, если они есть; − по графику определить промежутки, на которых функция принимает нужные значения» [3].	

Изучение темы «Квадратные неравенства» требует от учащихся проявлять умения сравнивать, анализировать, обобщать и действовать по аналогии, пользуясь алгоритмом. Также учащиеся используют логические законы и правила, перебор случаев и различные схемы метода «от противного». Об этом в своей статье пишет Панкратова Л.В. и иллюстрирует это на примерах. Она приходит к выводу, что: «изучение неравенств нацеливает учащихся на грамотное использование правил логического вывода, демонстрирует способы построения рассуждений и построения умозаключений» [26].

Шестаков С. в статье «Решаем неравенства» подробно рассматривает метод интервалов, приводит алгоритм решения и способы разложения на множители, и группировку при изучении неравенств [33].

А в статье «Решаем неравенства. Часть 2» он рассматривает неравенства с модулем. В статье представлены: метод равносильных преобразований, метод интервалов, метод введения новой переменной, применение геометрического смысла модуля, метод знакотождественных множителей и применение свойств функции. В каждом пункте приведены примеры с решениями.

Для подготовки к основному государственному экзамену можно использовать программу «Обобщающее повторение темы «Решение неравенств и систем неравенств» при подготовке к ОГЭ», разработанную учителем математики, М.Л. Симаньковой [25].

Программа содержит теоретический и практический материал, в который входят упражнения для закрепления знаний и тестовые задания. Также есть тест для определения начального уровня учащихся, который называется «стартовая диагностика».

В учебниках общеобразовательных школ совсем мало внимания уделяется изучению квадратных уравнений и неравенств с параметром.

Например, М.В. Фалилеева подчеркивает, что в школе не выделяется отдельно понятие неравенство с параметром: «Ни в энциклопедии элементарной математики, ни государственном образовательном стандарте нет понятия «неравенство с параметром», не представлены методы их решения. Поскольку параметризировать можно любую математическую задачу, получаем, что все уравнения и неравенства делятся на две группы - без параметров и с параметрами» [29].

В своей статье «Методические аспекты обучения решению уравнений и неравенств с параметрами» она говорит, что решение задач с параметрами является обобщением и систематизацией знаний и опыта учащихся на более высоком уровне деятельности. Именно поэтому задачи с параметрами должны быть в каждой теме, включая квадратные неравенства, с разобранными примерами и системой упражнений.

Этой же проблеме посвящена статья Е.И. Нуну [22] «Квадратные уравнения и неравенства с параметрами», в которой приведен анализ учебников и выделены различные типы задач с параметрами. Автор пишет, что задачи с параметрами относятся к такому классу задач, где алгоритмы отсутствуют или являются неприменимыми. Поэтому эти задачи требуют умений проводить различные самостоятельные логические действия.

В связи с тем, что задания располагаются после изучения основных тем, они не всегда успевают рассматриваться в учебном году. Данные задания еще помечаются звездочкой и являются дополнительными. Но на экзаменах они часто встречаются, и учащиеся за них не берутся, потому что им не рассказывали и не показывали азы их решения. Не всем школьникам данная тема важна, но умения решать такие задачи необходимы для успешной сдачи профильного экзамена. Главное понять основу, на чем строится решение, а дальше логически подумать и начать действовать.

Рассмотрим УМК на предмет изучения уравнений и неравенств с параметром.

В учебниках алгебры для учащихся 7-9 классов под редакцией Мордковича А. Г.

уравнения и неравенства с параметром представлены как задачи с пометкой «повышенной сложности». Определение «параметр» и «уравнение с параметром» приведено в учебнике за 8 класс в главе 4 «Квадратные уравнения» в параграфе 24 «Основные понятия» в таком виде [20]: «При каких значениях параметра pзаданное уравнение является неполным квадратным уравнением? Решите уравнение при найденных значениях параметра: $6x^2 + (p-1)x + 2 - 4p = 0$» [20].

Это квадратное уравнение отличается тем, что коэффициенты не являются конкретными числами, а являются буквенными выражениями. Такие уравнения называются уравнениями с буквенными коэффициентами или уравнениями с параметрами.

В учебнике 9 класса под редакцией Макарычева Ю.Н. задачи с параметрами рассмотрены в разделе «Задачи повышенной трудности». Это задачи на нахождение корней уравнения, а также вот такого типа: «Найдите значение a, при которых один из корней уравнения

$x^2 - 3{,}75x + a^3 = 0$ является квадратом другого» [18].

В учебнике алгебры 7 класса под редакцией Ш.А. Алимова встречаются задания с параметрами при рассмотрении темы: «Системы двух уравнений с двумя неизвестными». Еще есть одно задание в упражнениях на повторение всего курса алгебры 7 класса. Незначительное количество заданий по данной теме встречается в учебниках 8 и 9 класса.

В учебнике алгебры 9 класса под редакцией Г.К. Муравина неравенства с параметром встречаются при изучении темы: «Исследование квадратного трехчлена». Приведен пример и дано несколько заданий для самостоятельного решения.

Сравнительный анализ количества заданий в УМК на решение уравнений и неравенств с параметром приведен в Таблице 4.

Таблица 4 – Количество заданий на решение параметрических уравнений и неравенств

Наименование	УМК Макарычев Ю.Н. и др.			УМК Мордкович А.Г. и др.			УМК Алимов Ш.А. и др.			УМК Г.К.Муравин и др.		
	7 класс	8 класс	9 класс	7 класс	8 класс	9 класс	7 класс	8 класс	9 класс	7 класс	8 класс	9 класс

Общее количество заданий в учебниках	1289	1122	1192	763	917	881	1145	1393	676	1129	1254	868
Количество заданий с параметром (в т.ч. линейные)	13 1%	23 2%	23 2%	11 1%	45 5%	12 1%	13 1%	63 5%	11 2%	-	-	6 2%
Квадратные параметрические уравнения	-	20 87%	15 68%	-	39 87%	9 75%	2 12%	61 97%	1 9%	-	-	2 33%
Системы квадратных параметрических уравнений	-	-	2 9%	-	-	-	-	-	3 27%	-	-	-

Продолжение таблицы 4

Квадратные параметрические неравенства	-	-	-	-	5 11%	2 17%	-	2 3%	5 45%	-	-	4 67%
Квадратные параметрические неравенства	-	-	-	-	5 11%	2 17%	-	2 3%	5 45%	-	-	4 67%
Системы квадратных параметрических неравенств	-	-	-	-	-	-	-	-	2 18%	-	-	-

В учебнике 10 класса по алгебре Мордковича А.Г. продолжается изучение уравнений и неравенств и их систем, а также решение уравнений и неравенств с параметром, но уже в более сложной форме.

Проведя сравнительный анализ УМК, можно увидеть, что теме «Уравнения и неравенства с параметром» уделяется недостаточно внимания.

Мною определено, что содержательно-методическая линия «Уравнения и неравенства с параметрами» и часы, отводимые на её исследование, находится в области «трудных задач», либо «задач высокой трудности», что приводит к «обеднению» школьного курса алгебры.

Можно отметить, что уравнения с параметрами обладают огромной возможностью в формировании исследовательских умений, таких как способность видеть, исследовать, продвигать и обосновывать гипотезу, подводить итог. Данные трудности представляют немаловажную значимость в формирование универсальных учебных действий при изучении квадратных уравнений и неравенств.

К сожалению, в настоящее время организовать работу с обучающимися по решению задач с параметрами в условиях базовой школы на должном уровне невозможно. Для изучения данной темы в школах необходимо проводить дополнительные занятия.

2.2. Организация работы по формированию универсальных учебных действий при изучении квадратных уравнений и неравенств

В предыдущем пункте проведен сравнительный анализ учебных материалов для изучения темы «Квадратные уравнения и неравенства» в основной школе. Анализ показал, что изучение некоторых тем происходит не на должном уровне, а какие-то темы изучаются в необходимом объеме.

Как рассматривалось выше, в процессе обучения у учащихся формируются универсальные учебные действия.

Приведем примеры заданий, направленных на формирование универсальных учебных действий при изучении квадратных уравнений и неравенств.

Пример 1.

Рассмотрим уравнение $x^2 - 4 = 0$. Здесь $b = 0, c \neq 0$. Данное уравнение неполное. Предположим, что данное уравнение имеет два корня.

Формируемые УУД:

Познавательные: осуществлять выбор наиболее эффективных способов решения образовательных задач в зависимости от конкретных условий;

Регулятивные: прогнозирование.

Решение:

Разложим левую часть уравнения на множители по формуле разности квадратов. Получим: $(x - 2) \cdot (x + 2) = 0$.

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю.

Значит, $x_1 = 2, x_2 = -2$.

Пример 2:

Работа осуществляется в парах.

Упростить и решить уравнение: $0{,}01x^2 + 0{,}05x - 0{,}06 = 0$. Проверить решение и полученный ответ друг у друга, сверить решение с алгоритмом.

Формируемые УУД:

Познавательные: самостоятельное создание способов решения проблем творческого и поискового характера;

Коммуникативные: планирование учебного сотрудничества со сверстникам;

Регулятивные: контроль, который осуществляется путем сравнения результативности выбранного способа действия и заданного образца;

Личностные: развитие учебных мотивов, а также познавательных интересов.

Решение:

Видно, что в данном уравнении коэффициенты являются дробными. Работать с такими коэффициентами неудобно. Что можно сделать, чтобы упростить решение задачи.

Коэффициенты – десятичные дроби, поэтому удобнее будет, если умножить обе части уравнения на 100. В результате получаем уравнение $\mathrm{x}^2 + 5\mathrm{x} - 6 = 0$. Решаем уравнение по теореме Виета. $x_1 + x_2 = 5,\ x_1 \cdot x_2 = -6 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -6$. Выполнить проверку можно, подставив полученные корни в исходное уравнение.

Пример 3:

Решить данное уравнение наиболее рациональным способом по алгоритму.

$x^2 - 60x + 500 \leq 0$. Работа осуществляется в парах.

Формируемые УУД:

Познавательные: моделирование и преобразование модели, подбор более результативных методов решения, которые зависят от определенных условий;

Регулятивные: планирование;

Личностные: развитие умения работать в коллективе;

Коммуникативные: управление поведением партнера – контроль, коррекция, оценка действий партнера.

Решение:

Решаем квадратное уравнение $x^2 - 60x + 500 = 0$, сверяем решение по алгоритму.

$D = 1600, > 0, x_1 = 50, x_2 = 10$

Раскладываем на множители: $x^2 - 60x + 500 = (x - 50) \cdot (x - 10)$

Записываем неравенство в виде $(x - 50) \cdot (x - 10) \leq 0$

Корни уравнения делят числовую ось на интервалы. Покажем их на числовой прямой.

Решение неравенства методом интервалов изображено на рисунке 4:

Рисунок 4 – Корни уравнения на числовой прямой.

Получили три интервала $(-\infty; 10), (10; 50), (50; +\infty)$.

Определяем «знаки» на интервалах, делаем это путём подстановки в выражение $(x-50)\cdot(x-10)$ произвольных значений их каждого полученного интервала и смотрим соответствие полученного «знака» знаку в неравенстве $(x-50)\cdot(x-10) \leq 0$. Изображено на рисунке 5.

$$\text{при } x = 2, (x-50)\cdot(x-10) = 384 > 0, \text{неверно}$$

$$\text{при } x = 20, (x-50)\cdot(x-10) = -300 < 0, \text{верно}$$

$$\text{при } x = 60, (x-50)\cdot(x-10) = 500 > 0, \text{неверно}$$

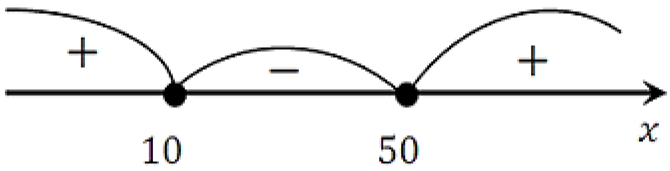


Рисунок 5 – Знаки интервала на числовой прямой.

Определяем интересующий нас интервал. При всех значениях x из этого интервала неравенство будет верным.

При $x = 10$ и $x = 50$ неравенство также будет верно, то есть границы входят в решение.

Ответ: $x \in [10; 50]$.

Итак,

1. Границы интервала входят в решение неравенства тогда, когда в условии стоит знак ≤ или ≥ (нестрогое неравенство). При этом на эскизе принято полученные корни отображать заштрихованным кружком.

2. Границы интервала не входят в решение неравенства тогда, когда в условии стоит знак < или > (строгое неравенство). При этом на эскизе принято корень отображать незаштрихованным кружком.

Пример 4:

Изучим на примере решение квадратного неравенства графически.

$x^2 + 2x - 8 > 0.$

Формируемые УУД:

Познавательные: анализ информации; построение логической цепи рассуждений; самоанализ, рефлексия;

Регулятивные: контроль, коррекция, оценка выделение и осознание учащимися того, что уже усвоено;

Коммуникативные: умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли;

*Личностные***:** самопознание.

Решение:

Весь процесс решения состоит из трёх этапов.

Первый этап:

Решаем уравнение $x^2 + 2x - 8 = 0$

$D = 36, > 0, x_1 = 2, x_2 = -4.$

Второй этап:

Строим параболу $y = x^2 + 2x - 8$ по точкам, указанным в Таблице 5. Полученная парабола изображена на рисунке 6.

Таблица 5 – Построение параболы по точкам

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	7	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7

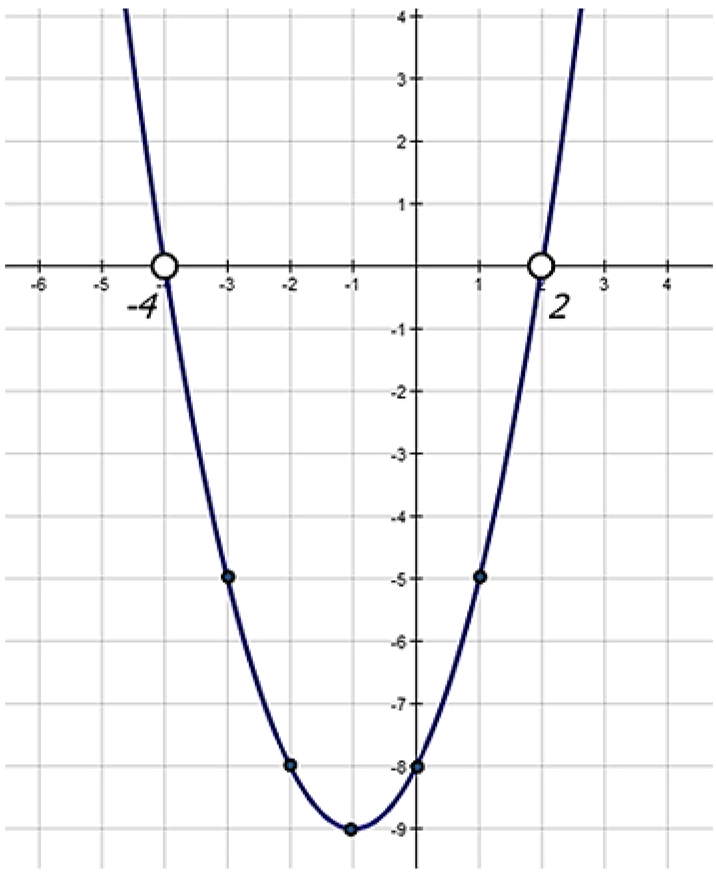


Рисунок 6 – Парабола

Точки (– 4) и 2 — это точки пересечения параболы и оси Ox.

При каких значениях x выражение x^2+2x-8 больше (или меньше) нуля? По графику параболы — это определить несложно, как говорится, всё на виду:

1. При $x<-4$ ветвь параболы лежит выше оси Ox. То есть при указанных х трёхчлен x^2+2x-8 будет положительным.

2. При $-4<x<2$ график ниже оси Ox. При этих x трёхчлен x^2+2x-8 будет отрицательным.

3. При $x>2$ ветви параболы лежат выше оси Ox. При указанных x трёхчлен x^2+2x-8 будет положительным.

Третий этап:

По параболе нам сразу видно, при каких x выражение x^2+2x-8 больше нуля, равно нулю, меньше нуля. В этом заключается суть третьего этапа решения, а именно увидеть и определить положительные и отрицательные области на рисунке. Сопоставляем полученный результат с исходным неравенством и записываем ответ. В нашем примере необходимо определить все значения x при которых выражение x^2+2x-8больше нуля. Мы это сделали во втором этапе.

Ответ: $x\in(-\infty;-4)\cup(2;+\infty)$.

Пример 5:

Необходимо найти множество решений неравенства $3(x-1)\cdot(x+1)<<(x-2)^2+x^2+5$. Один из учеников решает неравенство у доски.

Формируемые УУД:

Познавательные: установка и определение задач, синтез – составление целого из частей, в том числе самостоятельное достраивание с восполнением недостающих компонентов;

Регулятивные: коррекция – включение определенных поправок, изменений в план; оценка – определение и понимание тех компонентов, которые уже поняты учащимся, которыми они овладели, а так же понимание, насколько учащиеся ими овладели; волевая саморегуляция – готовность в неожиданных, непростых ситуациях справиться с ними;

Личностные: развитие внимательности к окружающим, доброжелательности и доверия;

Коммуникативные: умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли в соответствии с задачами и условиями коммуникации.

Решение:

Для решения задачи используем формулы сокращенного умножения. Для этого соберем все слагаемые в левой части неравенства, раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$3(x-1)\cdot(x+1)-(x-2)^2-x^2-5<0,$$

$$3(x^2-1)-(x^2-4x+4)-x^2-5<0,$$

$$3x^2-3-x^2+4x-4-x^2-5<0,$$

$$x^2+4x-12<0.$$

Мы получили равносильное квадратное неравенство, которое можно решить графическим способом, определив дискриминант и точки пересечения с осью x [26].

$D=16\ >0, x_1=-6, x_2=2.$

Построив график, можно увидеть, что множеством решений является интервал $x\in(-6;2)$.

Пример 6:

Формируемые УУД:

Познавательные: самостоятельная формулировка и выделение познавательной цели, структурирование и обобщение знаний, видоизменение модели с целью раскрыть общие законы, определяющие данную предметную область, доказательство, владеть общим приемом решения учебных задач, устанавливать аналогии;

Регулятивные: планирование – то есть пошаговый план достижения конечной цели, нужного результата, в котором известны цели для каждого последующего шага;

Личностные: развитие учебных мотивов, а также познавательных интересов;

Коммуникативные: умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли в соответствии с задачами и условиями коммуникации; владение монологической и диалогической формами речи в соответствии с грамматическими и синтаксическими нормами родного языка;

а) при каких значениях параметра a неравенство верно при любом x : $x^2 + (a-4)x + a^2 - a + 4 > 0$.

Решение:

Графиком функции $y = x^2 + (a-4)x + a^2 - a + 4$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Такая парабола будет всегда положительной, если $D < 0$. Найдём дискриминант:

$$D = (a-4)^2 - 4(a^2 - a + 4) = a^2 - 8a + 16 - 4a^2 + 4a - 16 =$$
$$= -3a^2 - 4a = -3a(a + 43) < 0,$$

Получаем: $a(a+43) > 0 \Rightarrow a < -43 \cup a > 0$,

Ответ: $a \in (-\infty; -43) \cup (0; +\infty)$.

б) при каких значениях параметра a уравнение $(a-2)x^2 - 2ax + a + 3 = 0$ имеет хотя бы один корень, и при этом все корни положительны?

Решение:

Пусть $a = 2$, Тогда уравнение принимает вид $-4x + 5 = 0$,откуда получаем, что $x = \frac{5}{4}$ — положительный корень.

Пусть теперь $a \neq 2$. Получается квадратное уравнение. Определим сначала, при каких значениях параметра a данное уравнение имеет корни. Нужно, чтобы его дискриминант был неотрицателен. То есть: $D = 4a^2 - 4 \cdot (a-2) \cdot (a+3) = -4a + 24 \geq 0 \Rightarrow a \leq 6$

Корни по условию должны быть положительны, следовательно, из теоремы Виета получаем систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2a}{a-2} > 0, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{a+3}{a-2} > 0, \\ a \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty) \\ a \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty) \\ a \in (-\infty; 6] \end{cases} \Rightarrow a \in (-\infty; -3) \cup (2; 6].$$

Объединяем ответы, получаем искомое множество: $a \in (-\infty; -3) \cup [2; 6]$.

Пример 7:

Решить уравнение $\frac{x^2 + (3-a) \cdot x - 3a}{x^2 - x - 12} = 0$.

Анализ (познавательные УУД):

− данные уравнения являются квадратными, так как степень старшего члена равна 2,

— уравнение является приведенным при $a = 1$,

— уравнение $x^2 + (3 - a)x - 3a = 0$ уже приведено к виду

$ax^2 + bx + c = 0$,

— уравнение $x^2 - x - 12 \neq 0$,

— уравнения можно решить по формуле корней или по теореме Виета,

— в результате решения возможно получить ответы: "Корней нет", "Корень один", "Корней два",

— найти значение параметра a.

Составление плана решения *(регулятивные УУД)*. Чтобы решить уравнение необходимо вспомнить, что в дроби числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю, решить уравнения по формуле нахождения дискриминанта и формуле корней, разложить на множители и подобрать значения параметра a, при которых уравнение имеет корни или не имеет решения.

Реализация плана решения.

— решаем уравнение $x^2 + (3 - a)x - 3a = 0$,

—находим дискриминант по формуле: $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (3 - a)^2 - -4(-3a) = a^2 + 6a + 9 = (a + 3)^2$,

— т.к. $D = (a + 3)^2, > 0$, то уравнение имеет два корня,

— находим корни по формуле

$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, x_1 = \frac{-(3-a)+(a+3)}{2} = \frac{2a}{2} = a, x_2 = \frac{-(3-a)-(a+3)}{2} = \frac{-6}{2} = -3$,

— разложим на множители $(x - a) \cdot (x + 3) = 0$,

— решаем уравнение $x^2 - x - 12 \neq 0$,

— находим дискриминант по формуле:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c == (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49,$$

— т.к. $D = 49, > 0$, то уравнение имеет два корня,

— находим корни по формуле $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, x_1 \neq 4, x_2 \neq -3$,

— получаем:

$$x = a, x = 3, x \neq -3, x \neq 4.$$

При $a = -3, a = 4$ уравнение не имеет решений.

При $a \neq -3, a \neq 4$ уравнение имеет единственный корень $x = a$.

Анализ и проверка правильности решения (*регулятивные УУД*).

Требовалось решить уравнение. При подстановке найденных значений, получаем ответ и сверяем полученный ответ с одноклассниками:

При $a = -3, a = 4$ уравнение не имеет решений

При $a \neq -3, a \neq 4$ уравнение имеет единственный корень $x = a$.

УУД: умение самостоятельно планировать пути достижения целей, в том числе альтернативные, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения уравнений. Умение соотносить свои действия с планируемыми результатами, осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией. Владение основами самоконтроля, самооценки, принятия решений и осуществления осознанного выбора в учебной и познавательной деятельности.

Пример 8:

Решить уравнение $x^2 - (2p + 1)x + (p^2 + p - 2) = 0$.

Анализ (познавательные УУД):

– в роли коэффициентов данного уравнения выступают буквенные выражения;

– данное уравнение можно назвать уравнением с буквенными коэффициентами (уравнением с параметром);

– уравнение является квадратным, так как степень старшего члена равна 2;

– уравнение можно решить по формуле корней или по теореме Виета.

– параметр p присутствует у второго коэффициента и у свободного члена.

– в результате решения возможно получить ответы: "Корней нет", "Корень один", "Корней два.

Составление плана решения (регулятивные УУД). Чтобы решить уравнение необходимо выписать коэффициенты:

$a = 1, b = -(2p + 1), c = p^2 + p - 2$ и решить уравнения по формуле нахождения дискриминанта, формуле корней, а также с помощью теоремы обратной тереме Виета.

Реализация плана решения.

– решаем уравнение $x^2 - (2p + 1)x + (p^2 + p - 2) = 0$,

– находим дискриминант по формуле: $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (2p+1)^2 - -4(p^2 + p - 2) = 4p^2 + 4p + 1 - 4p^2 - 4p + +8 = 9,$

– дискриминант (D) равен 9, > 0

– корни $x_1 = \frac{2p+1+3}{2} = p + 2, x_2 = \frac{2p+1-3}{2} = p - 1.$

Ответ: $p + 2, p - 1.$

Анализ и проверка правильности решения (регулятивные УУД).

УУД (познавательные, коммуникативные, регулятивные, личностные): умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы умение самостоятельно планировать пути достижения целей, в том числе альтернативные, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения уравнений. Умение соотносить свои действия с планируемыми результатами, осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата. Контролировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией. Владение основами самоконтроля, самооценки, принятия решений и осуществления осознанного выбора в учебной и познавательной деятельности. Умение задавать вопросы и высказывать свои мысли.

Задание 9:

Решить уравнение $px^2 + (1 - p) \cdot x - 1 = 0.$

Анализ (познавательные УУД):

– в роли коэффициентов данного уравнения выступают буквенные выражения;

– нельзя сразу сказать, что уравнение является квадратным, т.к. может быть $p = 0$;

– если $p = 0$, то $0 \cdot x^2 + (1 - 0)x - 1 = x - 1$, отсюда $x = 1$;

– уравнение можно решить по формуле корней или по теореме Виета в случае если $p \neq 0$;

– параметр p присутствует у второго коэффициента и у свободного члена.

Составление плана решения (регулятивные УУД). Чтобы решить уравнение необходимо выписать коэффициенты:

$a = p\ (p \neq 0), b = (1 + p), c = -1$ и решить уравнения по формуле нахождения дискриминанта, формуле корней.

Реализация плана решения.

Решаем уравнение $px^2 + (1-p)x - 1 = 0$.

− находим дискриминант по формуле:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (1-p)^2 - 4p(-1) = 1 - 2p + p^2 + 4p =$$
$$= p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2,$$

− найдем корни уравнения:

$$x_1 = \frac{-(1-p)+p+1}{2p} = 1, x_2 = \frac{-(1-p)-p-1}{2p} = \frac{-1}{p},$$

− если $p = -1$, то $x = 1$,

Ответ: при $p = 0, x = 1$, при $p \neq 0, x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{p}$.

Анализ и проверка правильности решения (регулятивные УУД).

Требовалось решить уравнение. При подстановке найденных значений, получаем ответ и сверяем полученный ответ с одноклассниками.

Коммуникативные УУД: во время решения задания ученик задает уточняющие вопросы, при проверке задания учится слушать ответы других людей, работать в команде, умеет отстаивать свою точку зрения.

Личностные УУД: ученик понимает для чего ему нужно уметь решать уравнения с параметром.

Задание 10:

Известно, что уравнение $px^2 - (4p+4)x + 3p + 13 = 0$ имеет действительные корни (один или два). При каких значениях параметра p каждый из корней больше 1?

Анализ (познавательные УУД):

− рассмотрим два случая:

1) если $p = 0$, то уравнение принимает вид $-4x + 13 = 0$, откуда $x = \frac{13}{4}$;

2) если $p \neq 0$, то уравнение можно записать в виде

$$x^2 - \frac{4p+4}{p} \cdot x + \frac{3p+13}{p} = 0;$$

− графиком функции $y = x^2 - \frac{4p+4}{p} \cdot x + \frac{3p+13}{p}$ является парабола, ветви которой направлены вверх;

− корни уравнения при $p \neq 0$, будут больше 1 тогда, когда $D \geq 0, f(1) > 0$, ось параболы расположена правее точки с координатами $(1; 0)$;

– решение уравнения сводится к решению неравенств.

Составление плана решения (регулятивные УУД). При решении уравнения нас интересует дискриминант, ось параболы и значение функции $f(1)$. Решение уравнения сводится к решению системы неравенств.

Реализация плана решения.

– находим дискриминант: $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = \frac{4p^2-20p+16}{p^2}$;

– уравнение оси параболы имеет вид $x = -\frac{b}{2a}$, значит, $x = \frac{2p+2}{p}$;

– $f(1) = \frac{9}{p}$;

– учитывая данные условия, приходим к системе неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{4p^2 - 20p + 16}{p^2} \geq 0, \\ \dfrac{2p+2}{p} > 1, \\ \dfrac{9}{p} > 0. \end{cases}$$

После преобразований получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{4(p-1)\cdot(p-4)}{p^2} \geq 0, \\ \dfrac{p+2}{p} > 0, \\ p > 0, \end{cases}$$

$$0 < p \leq 1, p \geq 4.$$

Ответ: $0 \leq p \leq 1, p \geq 4$.

Анализ и проверка правильности решения (регулятивные УУД).

Требовалось решить уравнение. Уравнение решено при помощи системы неравенств. Решением является промежуток, указанный в ответе.

Коммуникативные УУД: во время решения задания ученик задает уточняющие вопросы, при проверке задания учится слушать ответы других людей, работать в команде, умеет отстаивать свою точку зрения, совместно с одноклассниками пытается строить графики уравнений с параметром.

Личностные УУД: ученик понимает для чего ему нужно уметь решать уравнения с параметром, строить графики уравнений с параметром.

Для достижения лучшего усвоения материала обучающимися, мною при проведении уроков, промежуточного и контрольного тестирования используются электронные образовательные ресурсы. А именно, для изучения темы «Квадратных уравнения и неравенства» был создан предмет на образовательной платформе «ЯКласс».

ЯКласс – это одна из немногих платформ, которая поддерживает естественное написание математических символов и формул.

Например, для того, чтобы написать формулу $ax\hat{}2 + bx + c = 0$, $ax^2 + +bx + c > 0$, учащимся необходимо иметь минимальные знания математических символов и написания формул.

Предмет содержит теорию, практику, проверочные и контрольные работы.

Для учащихся в одном месте подобрана информация, которая позволяет изучить теоретические вопросы, потренироваться на практике (есть возможность решать одни и те же задания несколько раз для закрепления материала), выполнить проверочную работу.

Существует возможность решать квадратные уравнения и неравенства графическим способом. Более сложные задания можно создать в Desmos. Данные задания являются интерактивными, т.е. ученик наглядно может видеть, как ведет себя график функции при изменении коэффициентов. Результат выполнения работы отображается у учителя.

Ссылка на проверочные работы высылаются учителем, ученику необходимо их пройти по ссылке, после изучения темы. Завершив работу ученик видит результаты, какие задания выполнены верно, а в каких были допущены ошибки.

Есть возможность решать дополнительные задания. В каждом блоке имеются различные тестовые задания, предназначенные для самопроверки. С их помощью можно подготовиться к проверочным работам, которые назначает учитель. При выполнении каждого задания ученик получает баллы.

Посмотреть ссылку на предмет можно в Приложении Б.

2.3. Курс внеурочной деятельности «Решение квадратных уравнений и неравенств с параметром»

Данный курс проводился в период прохождения производственной практики в апреле-мае 2021г. в 9-х классах МБОУ «СОШ №107 г.Челябинска».

В данной школе при изучении курса алгебры в 7-9 классах используется УМК Г.К.Муравин и др. Рабочей программой не предусмотрено изучение уравнений и неравенств с параметром, поэтому данная тема изучается на дополнительных занятиях по математике в 9 классе. Уроки проводились в соответствии с разработанной системой заданий.

Курс рассчитан на 12 занятий в месяце, 12 часов, то есть, проводится 3 раза в неделю в течение месяца.

Цели курса:

1. Актуализация и систематизация знаний, полученных в период обучения в 8-9 классах по теме «Решение квадратных уравнений и неравенств»;

2. Знакомство учащихся 9 классов с методами решения квадратных уравнений и неравенств с параметром;

3. Подготовка к успешной сдаче Основного государственного экзамена (ОГЭ) и в дальнейшем применение знаний для успешной сдачи Единого государственного экзамена (ЕГЭ) в старших классах;

4. Перейти от простого решения квадратных уравнений и неравенств и задач на их составление к творческому;

5. Умственное развитие учащихся, повышение уровня математической культуры учащихся.

Задачи курса:

1. Обучающие (формирование познавательных и логических УУД):

– восстановление «базы знаний»,

– познакомить с различными способами решения квадратных уравнений и неравенств,

– научить эффективно распределять время, отведенное на выполнения задания,

– подготовить к успешной сдаче ОГЭ по математике.

2. Развивающие (формирование регулятивных УУД):

– умение ставить перед собой цель как постановку учебной задачи на основе сравнения того что уже известно и того что неизвестно,

– планировать свою работу с учетом конечного результата, составление плана и последовательности действия,

– контроль. Проверка способа решения с имеющимся алгоритмом,

– оценка. Осознание учащимися то, что еще не освоено.

3. Воспитательные (формирование коммуникативных и личностных УУД):

– формирование умения слушать и вступать в диалог,

– воспитание ответственности и аккуратности,

– участие в коллективном обсуждении,

– воспитание умения слушать собеседника.

Ожидаемые результаты:

1) ученики умеют определять тип уравнения и неравенства, знают основные методы решения, используют при этом разные способы;

2) умеют самостоятельно добывать информацию и правильно ее использовать при выполнении заданий;

3) приобретают опыт в нахождении правильного и рационального пути решения задач;

4) умеют работать в группе.

Система контроля и критерии оценивания:

1. Промежуточный контроль:

– проверка домашнего задания,

– устный ответ,

– письменные задания по изученному материалу,

– взаимный контроль в группе.

Баллы, полученные на занятиях, заносятся в Таблицу 5.

Таблица 5 – Карточка контроля результатов

Решение квадратных уравнений и неравенств с параметром												
ФИО ученика ________________________________												
Номер занятия	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Полученные балы												
Итого												

2. Итоговый контроль – зачетная работа, которая состоит из заданий.

Учебно-тематический план курса внеурочной деятельности представлен в Таблице 6.

Таблица 6 — Учебно-тематический план курса внеурочной деятельности:

№ Занятия	Содержание учебного материала	Кол-во часов
1	Квадратный трехчлен и его свойства. Понятие об уравнении и неравенстве с параметром. Теорема Виета. Знаки корней квадратного трехчлена.	4
2	Расположение параболы относительно оси абсцисс	1
3	Расположение корней квадратного трехчлена на координатной прямой	1
4	Графические приемы решения квадратных уравнений и неравенств с параметром	2
5	Закрепление темы «Решение квадратных уравнений и неравенств с параметром»	2
6	Зачет	1
7	Работа над ошибками	1

Изучение темы начинается с повторения тем: «Квадратный трехчлен и его свойства», «Теорема Виета», а также с введения понятия «Уравнение с параметром». Конспект урока представлен в Приложении Б.

В рамках изучения данной темы с учащимися разобраны несколько практических заданий, решение которых представлено в пункте 2.2:

1. Решить уравнение $\frac{x^2+(3-a)x-3a}{x^2-x-12}=0$ (страница 59).

2. Решить уравнение $x^2-(2p+1)x+(p^2+p-2)=0$ (страница 60).

3. Решить уравнение $px^2+(1-p)x-1=0$ (страница 62).

4. Известно, что уравнение $px^2-(4p+4)x+3p+13=0$ имеет один или два действительных корня. При каких значениях параметра p каждый из корней больше 1? (страница 63).

Тема занятия: «Расположение параболы относительно оси абсцисс»

Ход урока.

1. Организационный момент. Создание позитивного настроя класса и благоприятной атмосферы

2. Актуализация имеющихся знаний и мотивация изучения нового материала.

Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола. Формула для определения вершины параболы:

$$x = \frac{-b}{2a} \text{ или } x = \frac{-D}{4a}.$$

Ученикам дается задание самостоятельно изобразить все возможные случаи расположения параболы относительно оси Ox. Затем учитель вызывает одного ученика к доске.

Возникают вопросы: Как задать нужное расположение параболы? Какими должны быть коэффициенты квадратного трехчлена, чтобы парабола была определенным образом расположена относительно оси Ox?

Происходит беседа по изображенным рисункам, в результате которой составляется Таблица 7.

Таблица 7 – Расположение параболы относительно оси Ox

Условия	Расположение параболы
$a > 0$, $D < 0$	Выше оси Ox, не пересекая ось, ветви направлены вверх

Продолжение таблицы 7

$a > 0$, $D = 0$	Парабола касается оси, ветви направлены вверх
$a > 0$, $D > 0$	Парабола пересекает ось Ox в двух точках, ветви направлены вверх
$a < 0$, $D < 0$	Ниже оси Ox, не пересекая ось, ветви направлены вниз
$a < 0$, $D = 0$	Парабола касается оси, ветви направлены вниз
$a < 0$, $D > 0$	Парабола пересекает ось Ox в двух точках, ветви направлены вниз

Формируемые УУД:

Познавательные:

– восстановление «базы знаний»,

– произвольно и осознанно владеть общим приемом решения задач,

– использовать знаково-символические средства, в том числе модели и схемы для решения учебных задач,

– строить рассуждения в форме связи простых суждений об объекте, его строении, свойствах и связях;

– осуществлять выбор наиболее эффективных способов решения образовательных задач в зависимости от конкретных условий.

Регулятивные:

– умение ставить перед собой цель как постановку учебной задачи на основе сравнения того что уже известно и того что неизвестно,

– планировать свою работу с учетом конечного результата, составление плана и последовательности действий,

– контроль. Проверка способа решения с имеющимся алгоритмом,

– оценка. Осознание учащимися то, что еще не освоено.

Коммуникативные и личностные:

– формирование умения слушать и вступать в диалог,

– воспитание ответственности и аккуратности,

– участие в коллективном обсуждении.

Тема занятия: Расположение корней квадратного трехчлена на координатной прямой

Рассмотрим условия для существования двух корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

$x_1 < x_2,\ a \neq 0$, $x_0 = \frac{-b}{2a}$ и расположения их относительно некоторых чисел l и m.

Для того чтобы существовало два корня, и они были больше заданного числа l, должно выполняться следующее условие:

$$l < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0; \\ a \cdot f(l) > 0; \\ x_0 > l. \end{cases}$$

Для того чтобы существовало два корня, и они были меньше заданного числа m, должно выполняться следующее условие:

$$x_1 < x_2 < m \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0; \\ a \cdot f(l) > 0; \\ x_0 < m. \end{cases}$$

Для того чтобы существовало два корня, и они были больше заданного числа l и меньше заданного числа m, должно выполняться следующее условие:

$$l < x_1 < x_2 < m \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0; \\ a \cdot f(l) > 0, a \cdot f(m) > 0; \\ l < x_0 < m. \end{cases}$$

Необходимое и достаточное условие того, что корни квадратного уравнения будут на координатной прямой по разные стороны от числа l, следующее:

$$x_1 < l < x_2 \Leftrightarrow\ a \cdot f(l) < 0.$$

Задание 1.

При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ имеет два различных корня, принадлежащих промежутку $(1;\ 5)$?

Анализ (познавательные УУД):

– по условию задачи уравнение должно иметь два различных корня, а это возможно лишь при условии $D > 0$,

– необходимо решить квадратное уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$,

– данное уравнение можно решить по формуле корней или по теореме Виета,

– в результате решения возможно получить ответы: "Корней нет", "Корень один", "Корней два".

Составление плана решения (регулятивные УУД). В результате решения возможно будет определить зависит ли дискриминант от параметра; корни квадратного трехчлена являются нулями функции; если дискриминант не является точным квадратом, то данное уравнение можно решить графически.

Реализация плана решения.

$- x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0,$

– находим дискриминант по формуле: $D = 4a^2 - 4(a^2 - 1) = 4,$

– дискриминант не зависит от параметра $a,$

– т.к. $D = 4, > 0,$ то уравнение имеет два корня при любых значениях параметра,

– находим корни по формуле $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, x_1 = a + 1, x_2 = a - 1,$

– т.к. корни должны быть расположены на промежутке $(1;\ 5)$, то

$\begin{cases} 1 < a + 1 < 5 \\ 1 < a - 1 < 5 \end{cases}$ при сложении получаем $\Leftrightarrow 2 < a < 4,$

Ответ: при $2 < a < 4$ уравнение имеет ровно два корня.

Данное уравнение можно решить графически:

Корни квадратного уравнения являются нулями квадратичной функции, графиком функции является парабола, ветви направлены вверх. Можем построить график функции:

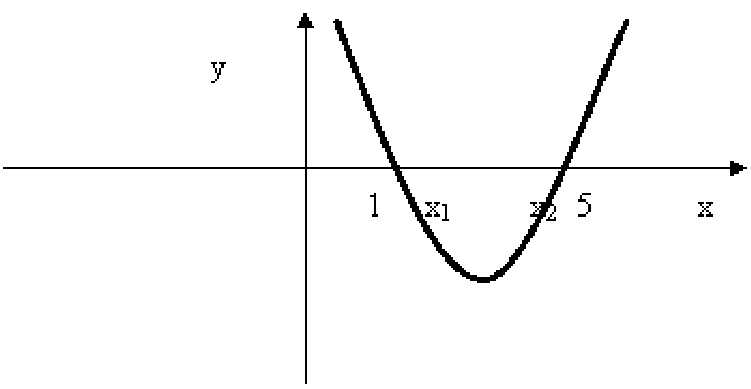


Рисунок 7 – Расположение параболы на координатной плоскости

Заметим, что

– так как парабола имеет две точки пересечения с осью x, то $D > 0,$

– вершина параболы находится между точками $x = 1$ и $x = 5$ следовательно абсцисса вершины параболы x_0 принадлежит промежутку

$(1;\ 5), y(1) > 0, y(5) > 0$.

Переходя от геометрической модели задачи к аналитической, получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{2a}{2} = 1; \\ y(1) = a^2 - 2a; \\ y(5) = 25 - 10a + a^2 - 1 = a^2 - 10a + 24. \end{cases}$$

$$\begin{cases} D > 0; \\ 1 < x_0 < 5; \\ y(1) > 0, y(5) > 0. \end{cases}$$

Решим уравнения: $a^2 - 10a + 24 = 0, D = 4, a_1 = 6, a_2 = 4$.

$$a^2 - 2a = 0, a_1 = 0, a_2 = 2.$$

Ответ: $2 < a < 4$.

Задание №2

При каких значениях параметра a один корень уравнения

$ax^2 + 2x + 2a + 1 = 0$ меньше 1, а другой больше 1?

Анализ (познавательные УУД):

– обозначим левую часть уравнения как $f(x)$,

– по условию $a \neq 0$,

– графиком функции является парабола, которая пересекает ось Ox в точках x_1 и x_2,

– если $a > 0$, то значения функции $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ и $f(x) < 0$ при $x \in (x_1\,; x_2)$,

– если $a < 0$, то значения функции $f(x) > 0$ при $x \in (x_1\,; x_2)$ и $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Составление плана решения (регулятивные УУД). По условию $a \neq 0$ Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх. В этом случае $f(1) < 0$ служит условием того, что корни уравнения расположены по разные стороны от 1. Если же $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз и теперь точка $x = 1$ лежит между корнями в том и только в том случае, если $f(1) > 0$.

Реализация плана решения.

– составим две системы неравенств

$$\begin{cases} a > 0; \\ f(1) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < 0; \\ f(1) > 0; \end{cases}$$

– совокупность данных систем эквивалентна единственному неравенству $a \cdot f(1) < 0$,

– подставим в неравенство данные исходного уравнения и решим неравенство

$$a \cdot (a + 2 + 2a + 1) < 0 \Leftrightarrow a \cdot (3a + 3) < 0 \Leftrightarrow -1 < a < 0,$$

Ответ: $-1 < a < 0$.

УУД: умение самостоятельно планировать пути достижения целей, в том числе альтернативные, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения уравнений. Знать и уметь применять различные способы решения. Умение соотносить свои действия с планируемыми результатами, осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией. Владение основами самоконтроля, самооценки, принятия решений и осуществления осознанного выбора в учебной и познавательной деятельности. Умение выражать свои мысли, отстаивать свое мнение. Умение работать в команде, контактировать с одноклассниками. Отвечать себе на вопрос для чего мне необходимо уметь решать уравнения и неравенства с параметром.

Тема занятия: Графические приемы решения квадратных уравнений и неравенств с параметром

Цель: формирование умения решать квадратные уравнения и неравенства графическими методами.

На предыдущем занятии были выбраны две группы учеников для того, чтобы они объяснили всему классу тему «Графические приемы решения уравнений и неравенств с параметром».

Выступление представителей двух групп (коммуникативные УУД).

Выступление 1 группы: "Алгоритм графического решения уравнений с параметром":

1. Находим область определения уравнения.
2. Выражаем f как функцию от x.
3. В системе координат строим график функции $y = f(x)$ для тех значений x, которые входят в область определения данного уравнения.
4. Находим точки пересечения прямой $y = c$, с графиком функции $y = f(x)$.
5. Если прямая $y = c$ пересекает график $y = f(x)$, то определяем абсциссы точек пересечения. Для этого достаточно решить уравнение $c = f(x)$ относительно x.
6. Записываем ответ.

Данного рода задачи встречаются в заданиях Основного государственного экзамена под номером 22.

Приведем пример:

При каком значении p прямая $y = -2x + p$ имеет с графиком функции $y = x^2 + 2x$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки. Постройте в одной системе координат данный график и прямую при найденном значении p.

Анализ (познавательные УУД):

− графиком функции $y = x^2 + 2x$ является парабола, ветви направлены вверх,

− парабола пересекает ось Ox в точках x_1 и x_2,

− необходимо определить, что парабола получена сдвигом графика функции $y = x^2$,

− строим графики функций и находим точку (точки) их пересечения.

Составление плана решения (регулятивные УУД). По условию $a \neq 0$ Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх. Необходимо выделить полный квадрат, и определить на какое расстояние искомая парабола получена сдвигом графика функции $y = x^2$. После построения графиков функций определяем общую точку при условии, что дискриминант полученного квадратного уравнения равен нулю. Находим искомый параметр.

Реализация плана решения.

− выделим полный квадрат:

$$y = x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x + 1)^2 - 1,$$

– искомая парабола получается сдвигом вершины параболы в точку с координатами $(-1; -1)$,

– найдем общую точку: $x^2 + 2x = -2x + p \Leftrightarrow x^2 + 4x - p = 0$. Графики имеют единственную общую точку при условии, что дискриминант полученного квадратного уравнения равен 0. $D = 16 + +4p, 16 + 4p = 0 \Leftrightarrow p = -4$,

– подставим значение параметра в уравнение $-2x + p = 0$, получим $y = -2x - 4$, при $x = -2$, $y = 0$

– построим графики функций:

$y = -2x - 4$, графиком функции является прямая. Построим график по двум точкам. Для этого занесем координаты точек в Таблицу 8:

Таблица 8 – Координаты точек прямой $y = -2x - 4$

x	- 2	0
y	0	- 4

Графиком функции $y = x^2 + 2x$ является парабола, ветви направлены вверх. Найдем координаты вершины параболы

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1, y_0 = -1.$$

Найдем точки пересечения графика с осью Ox:

$$x^2 + 2x = 0, x_1 = 0, x_2 = -2.$$

Найдем дополнительные точки параболы (Таблица 9) и построим график по данным точкам (рисунок 8).

Таблиц 9 – Координаты точек параболы $y = x^2 + 2x$

x	0	1	-2	-3	2	-4
y	0	3	0	3	8	8

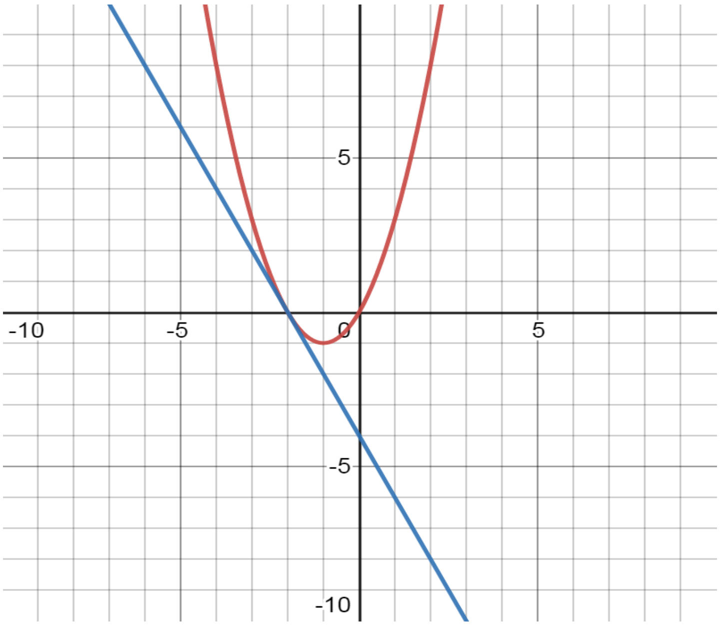


Рисунок 8 – Графики расположения прямой и параболы

− графики функций имеют единственную точку пересечения с координатами $(-2; 0)$,

Ответ: $p = -4,\ A(-2; 0)$.

Выступление 2 группы: «Функционально-графический метод решения квадратных неравенств».

Метод, которым решали ранее неравенства, часто называют аналитическим. Он опирается на использование равносильных преобразований над неравенствами (прибавление одного и того же числа к левой и правой части; умножение на число; приведение подобных; разложение квадратного трехчлена на множители и т. п.)

Основная идея функционально-графического метода при решении неравенств заключается во введении одной или нескольких функций, связанных с алгебраическими выражениями, составляющими неравенство, и использование свойств функций и их графиков в решении.

Важным этапом данного метода в решении уравнений и неравенств является функционально-графическая интерпретация условия задачи. Выделим несколько основных функционально-графических интерпретаций условий задач, связанных с решением неравенств с параметром.

1. Решите неравенство $f(x;\, a) > 0\ (f(x;\, a) < 0)$ с параметром a. Функционально-графическая интерпретация:

Введем функцию у $= f(x;\ a)$, тогда по условию задачи найдем все значения x, при которых график функции у $= f(x;\ a)$ лежит выше (ниже) оси абсцисс.

2. Решите неравенство $f(x;\ a)\ \geq 0\ (f(x;\ a)\ \leq 0)$ с параметром a. Функционально-графическая интерпретация:

Введем функцию у $= f(x;\ a)$, тогда по условию задачи найдем все значения x, при которых график функции у $= f(x;\ a)$ лежит выше (ниже) или на оси абсцисс.

Приведем пример:

Для каждого значения a решите неравенство $x^2 - 2x + 2a > 0$.

Анализ (познавательные УУД):

− данное неравенство является квадратным, так как степень старшего члена равна 2,

− найдем все значения x, при которых значения функции положительны,

− графиком функции является семейство парабол при различных значениях параметра,

− коэффициент при x^2 равен 1, поэтому ветви параболы направлены вверх,

− все параболы получены параллельным переносом графика функции $y = x^2$.

Составление плана решения (регулятивные УУД). По условию $a > 0$, ветви параболы направлены вверх. Введем функцию $y = f(x)$ и рассмотрим несколько частных случаев. Найдем координаты вершины параболы и построим семейство парабол.

Реализация плана решения.

$- y = x^2 - 2x + 2a$,

− вершины парабол имеют координаты $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1, y_0 = 1 - -2 + 2a = -1 + 2a$. Т.е. вершины парабол расположены на прямой $x = 1$, а ординаты зависят от параметра a,

− рассмотрим несколько частных случаев $y_0 = 1, y_0 = 0, y_0 = -2$,

− подставляя эти значения в $y_0 = -1 + 2a$ получим значения параметра $a = 1, a = \frac{1}{2}, a = -\frac{1}{2}$,

− если $a = 1$, то $y = x^2 - 2x + 2$, если $a = \frac{1}{2}$, то $y = x^2 - 2x + 1$, если $a = \frac{-1}{2}$, то $y = x^2 - 2x - 1$.

На основе полученных данных построим семейство парабол (рисунок 9).

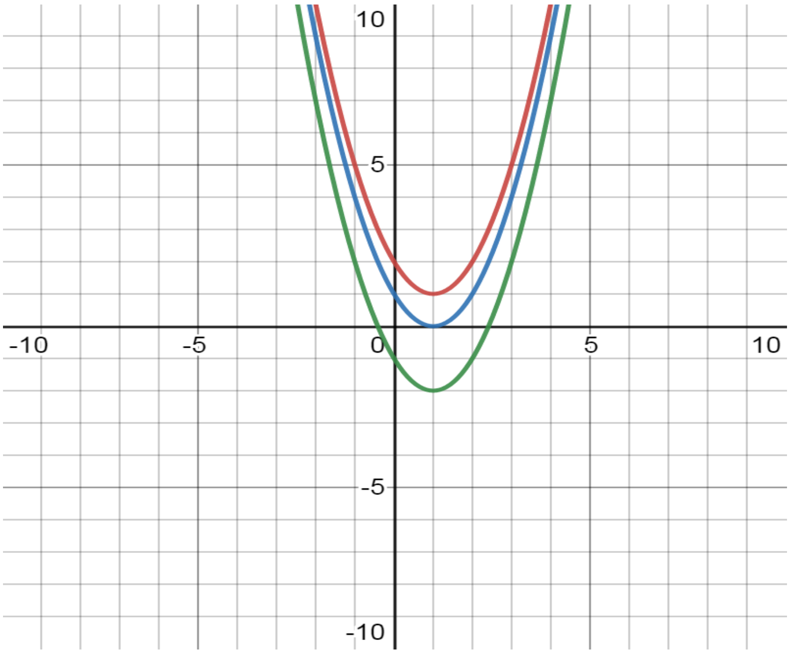


Рисунок 9 – Семейство парабол

В первом случае параболы лежат выше оси Ox (например, $y = x^2 - -2x + 2$), т.к. $x^2 - 2x + 2a = 0$ имеет отрицательный дискриминант, т. е. $D = 4 - 4 \cdot 2a = 4 \cdot (1 - 2a) < 0, a > \frac{1}{2}$.

Во втором случае параболы пересекают ось Ox. . Решение неравенства соответствует участкам графика, лежащим выше оси абсцисс. Например, графики функций $y = x^2 - 2x + 1, y = x^2 - 2x - 1$ касаются или пересекают ось Ox. Они имеют неотрицательный дискриминант. $D = 4 \cdot (1 - 2a) \geq 0$ при $a \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow x_1 = \frac{2+\sqrt{4 \cdot (1-2a)}}{2} = 1 + \sqrt{1 + 2a}, x_2 == 1 - \sqrt{1 + 2a}$. x_1 и x_2 являются нулями функции.

− значения функции $y = x^2 - 2x + 2a$ положительны на промежутках $(-\infty; 1 - \sqrt{1 - 2a})$ и $(1 + \sqrt{1 + 2a}; +\infty)$.

− записываем ответ.

Ответ: при $a \in (-\infty; \frac{1}{2}]$ $x \in (-\infty; 1 - \sqrt{1 - 2a})$ и $(1 + \sqrt{1 + 2a}; +\infty)$.

Закрепление темы «Решение квадратных уравнений и неравенств с параметром» (разные задачи ОГЭ) [24]

Учитель вызывает ученика к доске решать задачу. Помогает ему. Остальные решают задачу в тетради.

Задание 1

Найдите все значения a, при которых неравенство $x^2 + (2a + 4) \cdot x + 8a + 1 \leq 0$ не имеет решений.

Анализ (познавательные учебные УУД):

– графиком функции $y = x^2 + (2a + 4) \cdot x + 8a + 1$ является парабола, ветви направлены вверх;

– данное неравенство не имеет решений только в том случае, если парабола не пересекает ось Ox, т.е. расположена в верхней полуплоскости;

– при выполнении данного условия дискриминант должен быть отрицательным;

– найти промежуток, на котором неравенство не имеет решений.

Составление плана решения (регулятивные УУД). По условию $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх. Проверим, выполняется ли условие, при котором дискриминант отрицателен. Получим квадратный трехчлен относительно параметра a, найдем корни полученного уравнения и найдем промежуток методом интервалов.

Реализация плана решения.

– найдем дискриминант уравнения $x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1 = 0$,

$D = (2a + 4)^2 - 4(8a + 1) = 4a^2 + 16a + 16 - 32a - 4 == 4a^2 - 16a + +12$,

– решим полученное квадратное уравнение относительно параметра a: $4a^2 - 16a + 12 = 0, D = 64 > 0,\ a_1 = 3, a_2 = 1$,

– решив данное неравенство методом интервалов, получили, что при значении параметра от 1 до 3 неравенство $x^2 + (2a + 4) \cdot x + 8a + 1 \leq 0$ не имеет решений.

Ответ: $a \in [1; 3]$.

Задание 2

Найдите все значения a, при каждом из которых один из корней уравнения $x^2 - (2a + 1) \cdot x + a^2 + 2 = 0$ в два раза больше другого.

Анализ (познавательные учебные УУД):

– так как один из корней больше другого, значит, в результате решения получаем два корня;

– дискриминант уравнения больше нуля;

– определим значение параметра a, соответствующее условиям;

– корни уравнения можем найти по формуле корней или по теореме Виета;

– найти значения параметра.

Составление плана решения (регулятивные УУД) Найдем дискриминант исходного уравнения и определим ОДЗ параметра. Пусть корни квадратного уравнения равны y и $2y$. Найдем сумму и произведение корней по теореме Виета и решим систему уравнений. В результате решения найдем параметр, удовлетворяющий условию задачи.

Реализация плана решения.

– найдем дискриминант $D = (2a+1)^2 - 4 \cdot (a^2+2) = 4a^2 + 4a + +1 - 4a^2 - 8 = 4a - 7$;

– дискриминант (D) равен $4a - 7 > 0 \Rightarrow a > \frac{7}{4}$;

– найдем сумму и произведение корней по теореме Виета $\begin{cases} y + 2y = 2a + 1 \\ y \cdot 2y = a^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 2a + 1 \\ 2y^2 = a^2 + 2 \end{cases}$;

– из первого уравнения выразим $y = \frac{2a+1}{3}$;

– подставим полученное значение во второе уравнение и выполним преобразования:

$2\left(\frac{2a+1}{3}\right)^2 = a^2 + 2 \Rightarrow \frac{8a^2+8a+2}{9} = a^2 + 2 \Rightarrow 8a^2 + 8a + 2 = 9a^2 + 18 \Rightarrow\Rightarrow a^2 - 8a + 16 = 0$;

– свернем уравнение $a^2 - 8a + 16 = 0$ по формуле сокращенного умножения и получим $(a-4)^2 = 0 \Rightarrow a = 4$;

– $a = 4$ удовлетворяет ОДЗ $a > \frac{7}{4}$.

Ответ: $a = 4$.

Формируемые УУД:

Познавательные УУД: уметь самостоятельно выбирать наиболее эффективные способы решения уравнений, осуществлять анализ, знать и уметь применять различные способы решения, использовать знаково-символичные средства, делать обобщения, выводы, формулировать проблему и уметь ее решить.

Регулятивные УУД: уметь составлять план решения и реализовывать его, умение соотносить свои действия с планируемыми результатами, осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией. Владение основами самоконтроля, принятия решений и осуществления осознанного выбора в учебной и познавательной деятельности.

Коммуникативные УУД: Уметь взаимодействовать с учителем и одноклассниками, выражать свои мысли, отстаивать свое мнение, уметь работать в команде, дополнять ответы одноклассников, умение корректно задавать вопросы.

Личностные УУД: Владение основами самооценки, адекватное реагирование на трудности и критику, сформированная учебная мотивация, личностная ответственность за результат.

Тема занятия: Зачет

То как учащиеся овладели изученным, новым материалом, выявлено по результатам зачетной работы, которая представлена в Таблице 10.

Таблица 10 – Задания зачетной работы

При каком наименьшем натуральном значении a уравнение $x^2 + 2ax - 3a + 7 = = 2x$ имеет ровно два решения?
При каких значениях параметра уравнение $ax^2 + 2x + 1 = 0$ имеет два различных корня?
При каких значениях a уравнение $(a-2)x^2 + 2x + a - 2 = 0$ имеет единственное решение?
При каких значениях a уравнение $ax^2 - 4x + a + 3 = 0$ имеет более одного корня?
Решить неравенство при всех значениях параметра $x^2 - 2ax > -4$

Решение данных заданий представлено в Приложении В.

Тема занятия: Работа над ошибками, подведение итогов

В начале занятия учитель знакомит учащихся с результатами самостоятельной работы (Таблица 11), разъясняет ошибки, отвечает на вопросы.

Таблица 11 – Результаты самостоятельной работы

Всего выполнявших работу	Получивших оценку «5»	Получивших оценку «4»	Получивших оценку «3»	Получивших оценку «2»
15	3	7	4	1

Учащиеся выступают и рассказывают о составленном в ходе изучения курса представления о решении уравнений и неравенств с параметром, выделяют наиболее интересные темы и задачи, наиболее трудные и легкие для усвоения. Каждый учащийся отмечает «плюсы» и «минусы» данного курса, вносит свои предложения по его изучению.

Учитель обобщает все сказанное учениками.

Выводы к главе 2

Во второй главе были рассмотрены учебно-методические комплексы авторов Мордкович А.Г., Алимов Ш.А., Макарычев Ю.Н., Муравин Г.К. и проведен их сравнительный анализ. В результате анализа можно сделать вывод, что не во всех учебниках рассмотрен необходимый теоретический и практический материал по теме «Квадратные уравнения и неравенства». Особенно мало материала изложено по теме «Квадратные уравнения и неравенства с параметром». Эта тема в исследуемых УМК либо совсем не рассматривается, либо рассматривается не в полном объеме.

Так же во второй главе приведены примеры решений квадратных уравнений и неравенств (в том числе с параметром), в результате решения которых у учащихся формируются универсальные учебные действия.

В дополнение можно сказать, что в последнее время в научных публикациях изучаются вопросы цифровизации образования и ее возможностей для формирования новых образовательных результатов – УУД обучающихся. На сегодняшний день данный вопрос является одним из самых актуальных. Реализуя проект «Образование», его разработчики поставили цель создания современной и безопасной цифровой образовательной среды, обеспечивающей высокое качество и доступность образования всех видов и уровней [19].

О.Г. Ромадина, М.С. Соловьев утверждают, что применение цифровых образовательных ресурсов «меняет подходы к методикам преподавания, расширяет арсенал методических приемов, активизирует деятельность обучающихся в ходе урока, что позволяет достичь новых образовательных результатов» [27].

Г.В. Ахметжанова и А.В. Юрьев отмечают: «В последнее время активно идет процесс создания и использования открытых образовательных, общеразвивающих онлайн-ресурсов, начиная от отдельных заданий и до полных курсов и модулей формирования заданных компетенций» [7]. Можно сделать вывод, что различные цифровые технологии позволяют педагогу отойти от привычного процесса обучения: возможно изменение темпа освоения программы обучающимися, выбор методов и форм обучения [28]. Образовательный процесс обучения становится более эффективным, при этом цифровые технологии носят роль мощного инструмента для структурирования, обобщения и систематизации знаний и умений для формирования УУД [28].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведена исследовательская работа по теме «Формирование универсальных учебных действий при изучении квадратных уравнений и неравенств в основной школе».

В ходе этой работы были решены поставленные задачи исследования.

В ходе решения первой задачи понятие «универсальные учебные действия» было определено как способы познания, которые включают в себя использование навыков познавательной рефлексии, исследовательских действий, включая поиск и обработку информации, с целью получения и обновления знаний, используемых на практике и развития символического, логического и творческого мышлений.

Мною предложены примеры заданий направленных на формирование универсальных учебных действий при изучении квадратных уравнений и неравенств.

Показано, что применение сформулированных примеров обеспечивает формирование универсальных учебных действий школьников. В целом, на данном этапе исследование можно считать завершенным.

В ходе изучения любого учебного предмета, в частности, математики, происходит формирование у учащихся познавательных действий двух видов: специфических и общелогических. Специфическими действиями при изучении математики являются: умения вычислять, составлять и решать уравнения, переводить на язык математики условия текстовых задач, находить их решения и т.д.

Если универсальные действия уже сформированы у учащихся, это находит отражение в высокой эффективности обучения, сознательном и прочном усвоении ими специфического материала. Логические универсальные действия являются средством обобщения и систематизации знаний, а также составляют основу выведения новых знаний из уже имеющихся.

Первоначально логические приемы мышления должны быть усвоены как специальный предмет усвоения. Далее логические приемы мышления выступают как познавательные средства, обеспечивающие успешное усвоение любых учебных предметов, знаний, умений и компетенций. Практика показывает, что если простые логические действия в определенной мере формируются у каждого человека стихийно (хотя очевидно, что специальная методическая работа в этом направлении резко повышает уровень сформированности этих действий), то составные логические операции, имеющие более сложный и комплексный характер, у большинства людей сами по себе не формируются, их развитие требует специальной целенаправленной методической работы.

Таким образом, формирование универсальных действий, т. е. логической грамотности учащихся, происходит во всех учебных предметах. Однако если языковая грамотность в первую очередь формируется на уроках русского языка, то логическая грамотность – в процессе изучения математики. Именно в математике логические формы и отношения проявляются в явной форме как предмет усвоения учащимися. Логические действия, выступая инструментальным базисом математики, позволяют также упорядочить и систематизировать имеющиеся математические знания, вывести и конструировать новые знания.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий: межвузовский сборник научных работ / Уральский государственный педагогический университет – Екатеринбург: 2018. – 314 с.
2. Алгебра. 8 класс: учебник для образовательных учреждений / Ю.Н.Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова. – 21 изд. – Москва: Просвящение, 2014. – 271 с.
3. **Алимов, Ш.А.** Алгебра. 8,9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.В. Сидоров. – 19-е изд. – Москва: Просвещение, 2012. – 255 с.
4. **Асмолов, А. Г.** Программа развития универсальных учебных действий: структура, содержание, ожидаемые результаты / А. Г. Асмолов. – URL: http://nsportal.ru/nachalnaya-shkola /raznoe/2012/12/01 /dlya-molodogo-spetsialista.
5. **Блинова, Т.Л.** Актуальные проблемы образования: формирование представлений о роли математики в современном обществе: монография. / Т.Л.Блинова, И.Н.Семенова, А.В.Слепухин. – Уральский государственный педагогический университет – Екатеринбург: 2018. – 94 с.
6. **Боровских, А.В.** Предметные и метапредметные проблемы школьного курса математики. Тема «Неравенства» / А.В. Боровских, В.Е. Веревкина // Наука и школа. – 2015. – № 5. – С. 77–87.
7. **Ганжа, И.П.** Информатизация образовательного пространства учителя математики / И.П. Ганжа // Педагогический университетский вестник Алтая. – 2006. – № 1. – С. 328–332.
8. **Гельфман, Э. Г.** Формирование универсальных учебных действий при изучении числовых систем в школьном курсе математики. Психодидактика математического образования/ Э. Г. Гельфман, В. Н.

Ксенева // Перспективы развития, возможности и границы: материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Томск: Издательство ТГПУ, 2012. – С.68–75.

9. **Гин, А.А.** Приемы педагогической техники: Свобода выбора. Открытость. Деятельность. Обратная связь. Идеальность: пособие для учителя. – 4-е изд. – Москва: Вита-Пресс, 2002. – 53 с.
10. Структура универсальных учебных действий и условия их формирования / Н.М.Горленко, О.В. Запятая, В.Б.Лебединцев, Т.Ф.Ушева // Народное образование, 2012. – № 4. – С. 153–160.
11. **Дорофеев, Г.В.** Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович.; под ред. Г.В. Дорофеева. – 5-е изд. – Москва : Просвещение, 2010. – 304 с.
12. **Карабанова, О.А.** Что такое универсальные учебные действия и зачем они нужны / О. А. Карабанова // Муниципальное образование: инновации и эксперимент. – 2018. – № 2. – С. 11–12.
13. **Каранова, В.В.** Диагностика и формирование универсальных учебных действий в начальной школе (методические рекомендации) / В.В. Каранова, Ю.Н. Крайкина, Л.Ю. Разгоняева. – Магадан, 2019. – 115 с.
14. **Клинова, М.Н.** Актуальность формирования, развития, оценки познавательных УУД в школе // Сборник научных и методических материалов. Оценка и формирование познавательных универсальных учебных действий в основной школе: опыт образовательных учреждений Пермского края. – 2016. С. 9–18.
15. **Коржевина, Е.К**. Об обучении решению квадратных уравнений без использования формулы корней / Е.К.Коржевина, Т.Н. Матыцина, Н.Л. Марголина // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика, Психология, Социокинетика. – 2017. – № 2. – С.128–130.
16. Примеры формирования познавательных универсальных учебных действий при обучении математике в 5-6-х классах/ Е.Б.Лаврова,

Т.Ю.Лягаева, Л.А.Копытова, Т.В.Привалова [и др.] // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий. Екатеринбург.− 2018. − С. 248−251.

17. **Липатникова, И.Г.** Подготовка будущих учителей математики к формированию у учащихся универсальных учебных действий на основе технологии рефлексивного подхода / И. Г. Липатникова, Е. А. Утюмова // Педагогическое образование в России. − 2014. − № 8. − С. 62−67.
18. Алгебра. 8,9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк К.И. Нешков С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. 19-е изд. − Москва: Просвещение, 2019. − 287 с.
19. **Манвелов, С.Г**. Конструирование современного урока математики / С.Г. Манвелов. - Москва: Просвещение, 2012. − 175 с.
20. **Мордкович, А.Г**. Алгебра 8,9,10 класс / А.Г.Мордкович. − Москва: Мнемозина, 2010. − 405 с.
21. **Муравин, Г.К.** Алгебра 8,9 класс / Г.К.Муравин. – Москва: Дрофа, 2019.− 319 с.
22. **Нуну, Е.И.** Квадратные уравнения и неравенства с параметрами (Электронный ресурс) / Е.И. Нуну // Студенческая наука и XXI век. − 2016. − № 13. − С. 33−35.
23. **Перевощикова, Е.Н.** Специфика формирования универсальных учебных действий при обучении математике в основной школе / Е.Н. Перевощикова // Интеграция образования. − 2019. − № 2. − С.81−91.
24. Сдам ГИА: решу ОГЭ и ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам / Д.Д.Гущин. − Режим доступа: https://sdamgia.ru.
25. **Симанькова, М.Л.** Обобщающее повторение темы «Решение неравенств и систем неравенств» при подготовке к ОГЭ / М.Л. Симанькова. – Санкт-Петербург. − 2016.
26. **Старков, В.Н.** 165 задач с параметрами / В.Н.Старков. − Санкт-Петербург : СПбГУ, − 2004. − 25 с.

27. **Ткачева, О.В.** Самостоятельная работа учащихся на уроках математики как средство формирования универсальных учебных действий // Наука, образование, общество: тенденции и перспективы развития. − 2018. Санкт-Петербург. − С. 102−106.
28. **Алимов, Ш.А**. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразовательных организаций / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров [и др.]. − Москва: Просвещение, − 2012.
29. **Фалилеева, М.В**. Методические аспекты обучения решению уравнений и неравенств с параметрами / М.В. Филеева // Фундаментальные исследования. − 2013. − № 4−5. − С. 1230−1235.
30. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. − Режим доступа: https://минобрнауки.рф/документы/543
31. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли. Система заданий: пособие для учителя / Асмолов А.Г., Бурменская Г.В., Володарская И.А. [и др.]; под ред. А.Г. Асмолова. − Москва: Просвещение, 2019. − 159 с.
32. **Чашечникова, А.С.** Развитие математических способностей учащихся средней школы / А.С. Чашечникова. − Москва: Просвещение, 2014. − 95 с.
33. **Шестаков, С**. ЕГЭ 2018. ЕГЭ 2018. Математика. Неравенства и системы неравенств. Задача 15 (профильный уровень) / С. Шестаков. − Москва: МЦНМО, 2018. − 352 с.

Интернет-ресурсы:

34. https://cyberleninka.ru/article/n/metodicheskaya-model-formirovaniya-regulyativnyh-universalnyh-uchebnyh-deystviy-obuchayuschihsya-7-9-h-klassov-v-protsesse/viewer.

Приложение А

Технологическая карта урока

Учебный предмет: Алгебра

Тема урока: «Формула корней квадратного уравнения»

Класс: 8а

Тема урока	Формула корней квадратного уравнения
Тип урока	Урок усвоения новых знаний
Цель урока	*Образовательная*: изучить формулы корней квадратного уравнения и отработать навыки применения данных формул в ходе решения заданий различного уровня сложности. *Развивающая:* развитие умения видеть и применять изученные закономерности в нестандартных ситуациях; формирование интереса к изучению математики. *Воспитательная:* развитие навыков самостоятельной учебной деятельности, умения общаться, умения оценивать свои достижения.
Задачи	• изучить теоретический материал по теме, закрепить уметь их применять; • учить учащихся планировать свою работу, работу в паре, группе; • совершенствовать навыки работы учащихся с формулами; • вовлечь учащихся в учебную деятельность; • развить навыки общения со сверстниками.
Планируемые результаты обучения	*Предметные:* Решать квадратные уравнения, знать формулу дискриминанта, формулу корней, теорему Виета. Уметь применять теоретические знания для решения основных типов заданий по теме. Научиться работать с математическим текстом *Личностные:* стремление к саморазвитию, формирование самооценки, развитие логического и критического мышлении, развить умение работать в паре или группе. *Метапредметные*: уметь анализировать задачи, извлекать из текста главную информацию, рассуждать, делать выводы, осуществлять самоконтроль.
УУД	*Личностные УУД:* развитие познавательных интересов, учебных мотивов, оценка и самооценка; *Регулятивные УУД:* целеполагание - как способность соотносить то, что уже известно и усвоено, и то, что еще неизвестно; планирование - как определение последовательности промежуточных целей с учетом конечного

	результата; оценка - как выделение и осознание того, что уже освоено и что еще подлежит усвоению; осознание качества и уровня усвоения; *Коммуникативные УУД:* включаемость в коллективное обсуждение вопросов, постановка вопросов, умение слушать и вступать в диалог, инициативное сотрудничество в поиске и сборе информации, умение аргументировать свою точку зрения *Познавательные УУД:* выделение и формулирование познавательной цели, поиск и выделение необходимой информации, выбор способа действия, умение осознанно применять полученные знания на практике, умение осознанно строить речевое высказывание в устной форме.
Основные понятия	Квадратное уравнение, дискриминант, формула корней, теорема Виета, полные и неполные квадратные уравнения
Ресурсы	1. Учебник Алгебра 8 класс Муравин Г.К. 2. Компьютер, проектор 3. Лист самоконтроля

Ход урока

Этапы урока	Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Универсальные учебные действия
1. Организационный момент	Приветствие, проверка подготовленности к учебному занятию, организация внимания детей.	Включаются в деловой ритм урока.	*Личностные:* формируется осознанное, уважительное и доброжелательное отношения к учителю и одноклассникам
2. Мотивация учащихся	Предлагает выполнить устно задания. Эти темы учащимися уже изучены, поэтому сформулировать тему и цели урока учащиеся смогут самостоятельно. $4x^2 - 12 = 0, 3x^2 + 6x = 0,$ $1{,}4x^2 = 0, x^2 - 9 = 0,$ $(x+1) \cdot (x-2) = 0.$ Какие уравнения вы решали? Уравнение какого вида называют квадратным? Какие виды квадратных уравнений вы знаете?	Решают уравнения самостоятельно. Результаты сверяют с одноклассниками. Результат проверки записывают в лист самоконтроля. Отвечают на вопросы учителя.	*Личностные:* формируется ответственное отношение к учению, готовность; *Предметные:* решают квадратные уравнения, распознают квадратные уравнения, классифицируют их. *Регулятивные:* целеполагание, оценивается правильность выполнения действий на уровне оценки; *Познавательные:* ориентируются на разнообразие способов решения задач; *Коммуникативные:* учитываются разные мнения и приходят к общему решению.

	Какой вывод можно сделать? Следовательно, тема нашего урока .... Цели урока следующие:	Формулируют тему урока Формулируют цели: – изучить формулу корней квадратного уравнения; – научиться определять способ решения квадратного уравнения; – научиться решать квадратные уравнения по формуле	
3. Актуализация знаний	Работая в группах, продолжите заполнение модели содержания темы, изучив материал учебника п. 22 главы 4. Определяют алгоритм решения квадратных уравнений.	Читают учебную литературу. Работают в группах. Каждая группа представляет алгоритм. Например, – выписать коэффициенты уравнения – найти дискриминант, определить число корней – найти корни – записать ответ. Обсуждают правильность выбора способа действия. Записывают общий алгоритм.	*Личностные:* готовность к саморазвитию и самообразованию; умеют ясно и точно излагать свои мысли в устной речи, доказывать свою точку зрения; *Предметные:* умеют работать с учебным математическим текстом, составляют план решения и выделяют этапы решения;. *Регулятивные:* планируют свои действия в соответствии с заданием учителя; *Познавательные:* осуществляют поиск и выделение необходимой информации, построение своих высказываний, вывод на основе анализа; *Коммуникативные:* выражают свои мысли, аргументируют свое мнение, относятся уважительно к чужой точки зрения, сотрудничают с учителем и одноклассниками.

4. Творческое применение полученных знаний	Совместная отработка алгоритма решения квадратных уравнений. Выпишите коэффициенты квадратного уравнения: $3x^2 + 5x + 1 = 0,$ $7x^2 - 13x - 2 = 0,$ $6 - 5x^2 + 3x = 0,$ $3x^2 + 4 - 8x = 0,$ $2x^2 - 14 = 0,$ $20x - x^2 = 0,$ $10x^2 = 0.$	Выписывают коэффициенты, проверяют работу	*Личностные:* ответственное отношение к учению; *Регулятивные:* осуществляют контроль по образцу, и вносят необходимые коррективы; *Познавательные:* применяют правила и пользуются инструкциями; *Коммуникативные:* находят общие решения и разрешают конфликты.
	Определите количество корней квадратного уравнения: $x^2 - 2x + 3 = 0,$ $x^2 + 7x - 1 = 0,$ $9x^2 + 6x + 1 = 0,$ $x^2 + 5x - 6 = 0.$ Выполните задание самостоятельно, ответ сверьте со всеми участниками группы, с эталоном.	Вычисляют дискриминант по формуле: $D = \mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}$ и определяют количество корней.	*Личностные:* умеют контролировать процесс и результат математической деятельности; *Регулятивные:* сличается способ действия и его результат с эталоном с целью обнаружения отклонений и отличий от эталона; *Познавательные:* применяются правила и пользуются инструкциями; *Коммуникативные:* слушают партнера, аргументируют и отстаивают свое мнение.
	Решите уравнение из открытого банка ОГЭ $7x^2 - 23x + 16 = 0, \qquad 3x^2 + 3 = 10x$	Решают уравнение у доски: $7x^2 - 23x + 16 = 0,$ $a = 7, b = -23, c = 16,$ $D = b^2 - 4ac = (-23)^2 -$ $-4 \cdot 7 \cdot 16 = 81 > 0,$ Уравнение имеет 2 корня: $x_{1.2} = \frac{b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{23 \pm 9}{14} =$	*Личностные:* умеют контролировать процесс и результат математической деятельности; *Предметные:* решают квадратные уравнения. *Регулятивные:* сличают способ действия и его результат с алгоритмом; *Познавательные:* применяют правила и пользуются инструкциями; *Коммуникативные:* слушают партнера, аргументируют и отстаивают свое мнение.

		$=\frac{16}{7}, 1.$ Ответ: $\frac{16}{7}, 1.$ Обсуждают алгоритм решения уравнения $3x^2 + 3 = 10x$: − привести уравнение к виду $ax^2 + bx + c = 0$, − применить изученный ранее способ. $3x^2 - 10x + 3 = 0$, − найти дискриминант $D = 64 > 0$, 2 корня $p_1 = 3, p_2 = \frac{1}{3}$.	
5. Физкультминутка	Сменить деятельность, обеспечить эмоциональную разгрузку учащихся.	Выполняют гимнастику для глаз	Личностные: формирование ценности здорового образа жизни *Коммуникативные:* умеют работать по заданию
6. Самостоятельная работа учащихся в группах	Предлагает разделиться на 2 группы для выполнения заданий самостоятельной работы <u>1 вариант</u> Выполнить задания №326 (а-г), №333 (1-3), №335 (1-4) <u>2 вариант</u> Выполнить задания №326 (д-з), №333 (4-6), №335 (5-8)	Обсуждают в группах способы решения заданий, решают их.	Личностные: самоопределение *Предметные:* решают квадратные уравнения. *Регулятивные:* контролируют, корректируют, выделяют и осознают то, что уже усвоено и что еще подлежит усвоению, осознание качества и уровня усвоения; *Познавательные:* анализ, синтез, использование общих правил; *Коммуникативные:* управляют своим поведением

	Предлагает выполнить взаимопроверку результатов по вариантам и самопроверку. Помогает выполнить разбор заданий, вызвавший затруднения. № задания 1,2… 1 вариант 2 вариант	Выполняют проверку, обсуждают возможные ошибочные решения, исправляют свои решения.	Умение аргументировать свою точку зрения.
7. Подведение итогов.	Предлагает ответить на вопросы: 1. Все ли было понятно? 2. Какие возникли трудности при выполнении заданий? 3. Почему?	Учащиеся подводят итоги, вспомнив поставленные цели, озвучивают свои успехи и затруднения, которые появлялись в процессе работы.	*Личностные:* позитивная оценка результатам своей учебной деятельности. *Регулятивные:* оценивают собственную деятельность на уроке; *Познавательные:* построение речевого высказывания в устной форме; *Коммуникативные:* умеют выражать свои мысли, аргументировать, планировать учебное сотрудничество
8. Домашнее задание	Учащиеся могут выбирать задание из домашней контрольной работы №5 стр.209 с учётом индивидуальных возможностей. Домашнее задание базового уровня: №1-2 Домашнее задание повышенного уровня: №3-5	Записывают домашнее задание	

Приложение Б

Конспект к курсу внеурочной деятельности «Решение квадратных уравнений и неравенств с параметром»

Тема занятия: «Квадратный трехчлен и его свойства. Понятие об уравнении с параметром. Теорема Виета. Знаки корней квадратного трехчлена»

Ход урока.

1. Организационный момент. Создание позитивного настроя класса и благоприятной атмосферы

2. Учитель напоминает учащимся алгоритм решения квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0,\ \ a \neq 0$.

a) поскольку число корней квадратного уравнения, а значит его решений, зависит от дискриминанта, то сначала целесообразно определить этот дискриминант. Возможно, что уравнение и вовсе не придется решать.

b) итак, вычисляем дискриминант по формуле $D = b^2 - 4ac$. Далее следуем пунктам.

Если $D < 0,$, то квадратное уравнение не имеет корней.

Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет один корень, который находится по формуле $x = \frac{-b}{2a}$

Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня, которые определяются по формулам $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

3. Теорема Виета: если $D \geq 0$, то $ax^2 + bx + c = 0,\ \ a \neq 0$ имеет корни x_1 и x_2, которые удовлетворяют следующим формулам:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

И наоборот, если числа x_1 и x_2 удовлетворяют этим формулам, то они являются корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c = 0,\ \ a \neq 0$.

4. Параметр в уравнении или неравенстве – это неизвестная величина, которая при решении задач принимает любое числовое значение из заданного промежутка.

Пусть задано уравнение $f(x, a) = 0$. Его нужно решить относительно переменной x, а под a понимается любое действительное число. Данное уравнение называют уравнением с неизвестным x и параметром a.

Уравнение с параметром — это краткая запись огромного числа уравнений, каждое из которых получается из данного уравнения с параметром при конкретном значении параметра. Поэтому решить уравнение с параметром $f(x, a) = 0$ - это значит решить семейство уравнений, получающихся из уравнения $f(x, a) = 0$ при любых действительных значениях параметра.

Среди задач с параметрами можно выделить следующие основные типы задач:

1. Уравнения, которые необходимо решить либо для любого значения параметра, либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству. Например, решить уравнения:

$ax = 1, (a - 2) \cdot x = a^2 - 4$.

2. Уравнения, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра. Например, при каких значениях параметра a уравнение $4x^2 - 4ax + 1 = 0$ имеет единственный корень?

3. Уравнения, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения. Например, найти все значения x, удовлетворяющие неравенству $-(1 + 2a) \cdot x^2 - 6x + a^2 + 4a - 5 > 0$ хотя бы при одном значении параметра a, принадлежащем промежутку $(-2; 1)$.

Решить уравнение (неравенство) с параметром – это для каждого допустимого значения параметра найти множество всех решений данного уравнения (неравенства) или доказать что их нет. Способы решения:

– аналитический

– графический

– используя свойства функции (четность, ограниченность…).

5. Знаки корней квадратного трехчлена представлены в Таблице Б.1.

Таблица Б.1 – Знаки корней квадратного трехчлена

Знаки корней	$x_1 > 0,$ $x_2 > 0$	$x_1 \geq 0,$ $x_2 \geq 0$	$x_1 < 0,$ $x_2 < 0$	$x_1 \leq 0,$ $x_2 \leq 0$	$x_1 > 0,$ $x_2 < 0$	$x_1 = 0,$ $x_2 > 0$	$x_1 = 0,$ $x_2 < 0$
Условия	$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 \cdot x_2 \geq 0. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 \cdot x_2 \geq 0. \end{cases}$	$x_1 \cdot x_2 < 0$	$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 \cdot x_2 = 0. \end{cases}$

6. Учитель раздает детям подготовленные уравнения.

Приложение В

Решение задач зачетной работы курса внеурочной деятельности

Задание 1:

При каком наименьшем натуральном значении a уравнение $x^2 + 2ax - 3a + 7 = 2x$ имеет ровно два решения?

Решение:

Перепишем это уравнение в виде $x^2 + (2a - 2)x - 3a + 7 = 0$. Это квадратное уравнение, которое имеет ровно два решения, если его дискриминант строго больше нуля. Вычисляя дискриминант, получаем, что условием наличия ровно двух корней является выполнение неравенства $a^2 + a - 6 > 0$.

Решая неравенство, находим $a < -3$ или $a > 2$. Первое из неравенств, очевидно, решений в натуральных числах не имеет, а наименьшим натуральным решением второго является число 3.

Ответ: $a = 3$.

Задание 2:

При каких значениях параметра уравнение $ax^2 + 2x + 1 = 0$ имеет два различных корня?

Решение:

Данное уравнение является квадратным относительно переменной x и имеет два различных корня, когда $\frac{D}{4} = 1 - a > 0, \text{т. е. при } a < 1$.

Если $a = 0$ уравнение $2x + 1 = 0$ имеет один корень, что противоречит условию задачи.

Таким образом, $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$.

Ответ: $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$.

Задание 3:

При каких значениях a уравнение $(a - 2)x^2 + 2x + a - 2 = 0$ имеет единственное решение?

Решение:

При $a = 2$ уравнение имеет вид $2x = 0$ и, очевидно, имеет единственный корень $x = 0$. Если $a \neq 2$, то данное уравнение является квадратным и имеет единственный корень при тех значениях параметра, при которых дискриминант квадратного трехчлена равен нулю. Приравнивая дискриминант к нулю, получаем уравнение относительно параметра a:

$4a^2 - 16a + 12 = 0, D = 64,$

откуда $a_1 = 1, a_2 = 3.$

Ответ: $a = \{1; 2; 3\}$.

Задание 4:

При каких значениях a уравнение $ax^2 - 4x + a + 3 = 0$ имеет более одного корня?

Решение:

Данное уравнение является квадратным относительно переменной x и имеет более одного корня при $D > 0$.

$$D = 16 - 4a(a + 3) = -4a^2 - 12a + 16,$$

$$-4a^2 - 12a + 16 > 0,$$

$$4(a + 4) \cdot (a - 1) < 0.$$

Решая данное неравенство методом интервалов, получаем ответ

$a \in (-4; 1)$.

Ответ: $a \in (-4; 1)$.

Задание 5:

Решить неравенство при всех значениях параметра $x^2 - 2ax > -4$.

Решение:

Находим дискриминант квадратного трехчлена $x^2 - 2ax + 4 = 0$.

$$D = a^2 - 4.$$

при $D > 0, a_1 < -2, a_2 > 2,$ то $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 4},$

при $D = 0, a = \pm 2,$ то решением являются все x, кроме $x = a,$

при $D < 0$, $-2 < a < 2$, решением являются все x.

Ответ: если $a \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$, то $x \in \left(-\infty; a - \sqrt{a^2 - 4}\right) \cup \left(a + \sqrt{a^2 - 4}; +\infty\right)$, если $a \in (-2; 2)$, то x любое.

Приложение Г

Проект на электронной образовательной платформе ЯКласс

Разработка проекта по изучению квадратных уравнений и неравенств в курсе математики основной школы на образовательной платформе ЯКласс

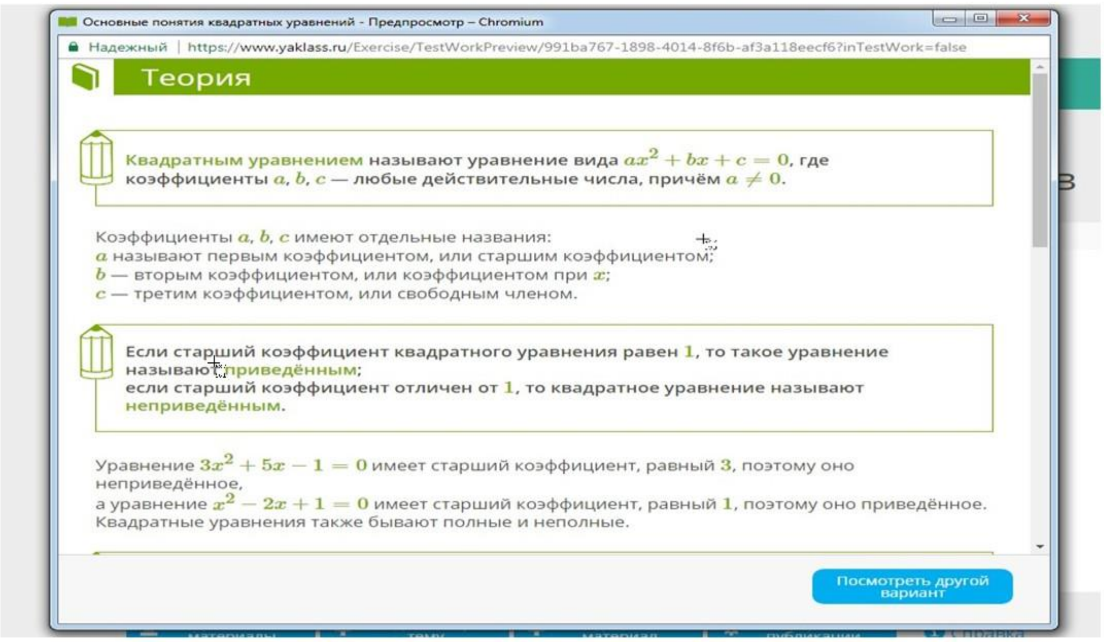
ЯКласс

Для составления проекта использовался собственный профиль в ЯКласс

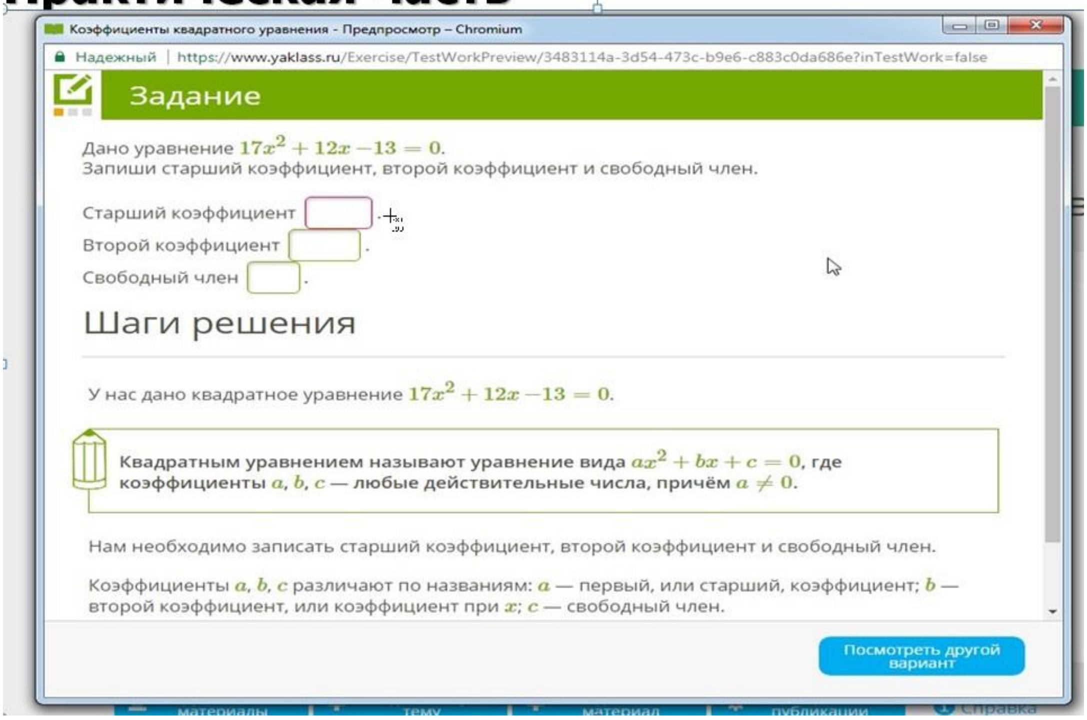
Выбор УМК:

Для создания были использованы УМК: Ю. Н. Макарычев, А. Г. Мордкович, А. Г. Мерзляк, Г.К.Муравин

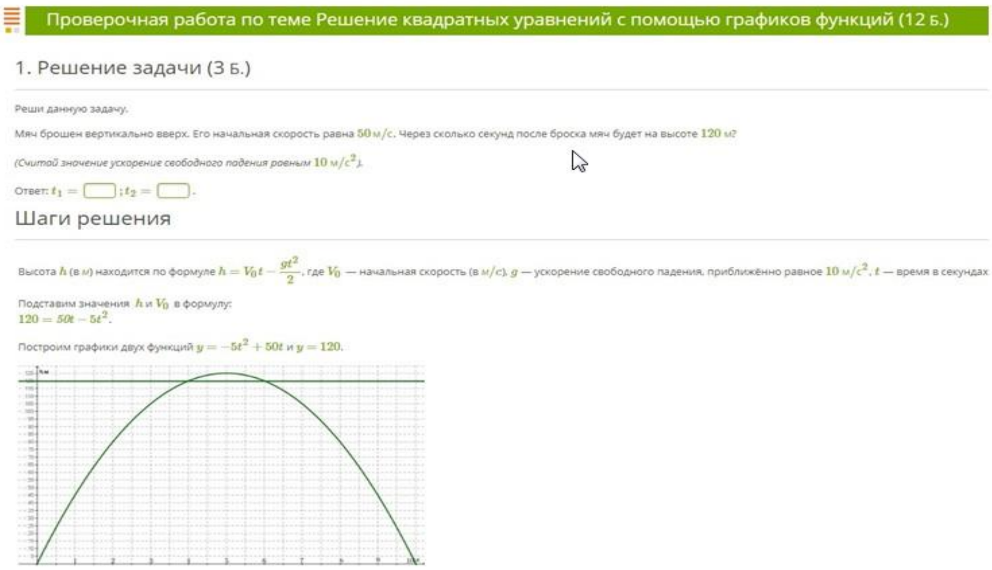
Теоретический материал



Практическая часть



Проверочные контрольные работы



Проверочная работа по теме Решение квадратных уравнений с помощью графиков функций (12 б.)

1. Решение задачи (3 б.)

Реши данную задачу.

Мяч брошен вертикально вверх. Его начальная скорость равна 50 м/с. Через сколько секунд после броска мяч будет на высоте 120 м?

(Считай значение ускорение свободного падения равным 10 м/с^2).

Ответ: $t_1 = \square$; $t_2 = \square$.

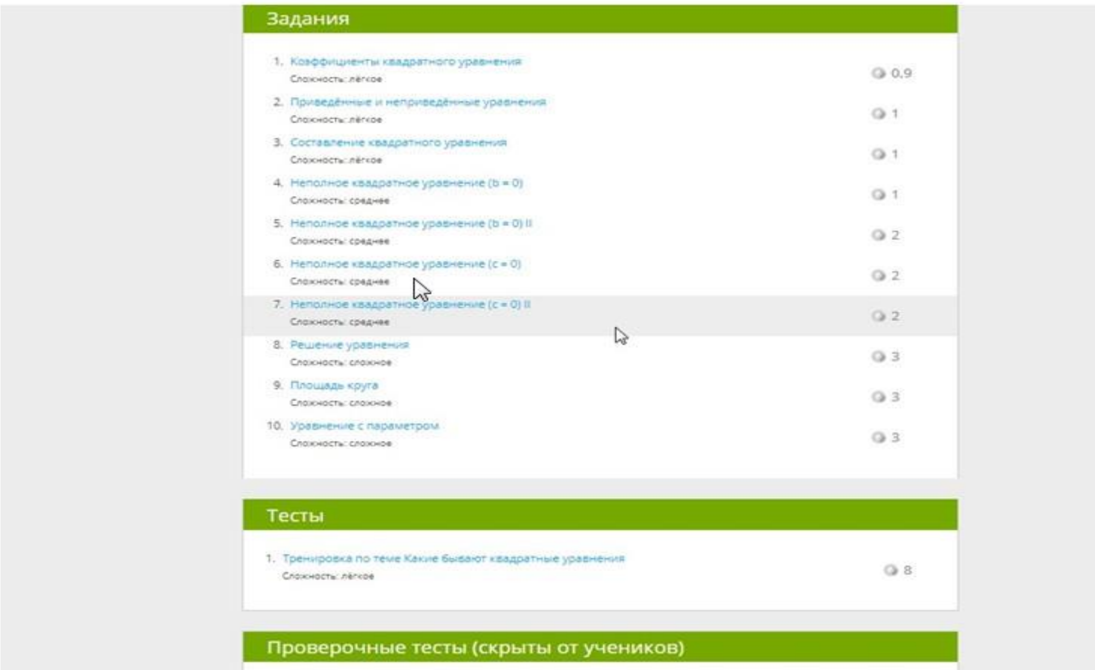
Шаги решения

Высота h (в м) находится по формуле $h = V_0 t - \frac{gt^2}{2}$, где V_0 — начальная скорость (в м/с), g — ускорение свободного падения, приближённо равное 10 м/с^2, t — время в секундах

Подставим значения h и V_0 в формулу:
$120 = 50t - 5t^2$.

Построим графики двух функций $y = -5t^2 + 50t$ и $y = 120$.

Самоконтроль



Задания

1. Коэффициенты квадратного уравнения — Сложность: лёгкое — 0,9
2. Приведённые и неприведённые уравнения — Сложность: лёгкое — 1
3. Составление квадратного уравнения — Сложность: лёгкое — 1
4. Неполное квадратное уравнение (b = 0) — Сложность: среднее — 1
5. Неполное квадратное уравнение (b = 0) II — Сложность: среднее — 2
6. Неполное квадратное уравнение (c = 0) — Сложность: среднее — 2
7. Неполное квадратное уравнение (c = 0) II — Сложность: среднее — 2
8. Решение уравнения — Сложность: сложное — 3
9. Площадь круга — Сложность: сложное — 3
10. Уравнение с параметром — Сложность: сложное — 3

Тесты

1. Тренировка по теме Какие бывают квадратные уравнения — Сложность: лёгкое — 8

Проверочные тесты (скрыты от учеников)