



МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

**Формирование познавательных универсальных учебных действий в
процессе изучения многогранников**

**Выпускная квалификационная работа по направлению
44.04.01 Педагогическое образование**

**Направленность программы магистратуры
«Математическое образование в системе профильной подготовки»
Форма обучения заочная**

Проверка на объем заимствований:
88,7 % авторского текста
Работа рекомендована к защите

«01» 09 2021 г.

зав. кафедрой МиМOM
Сухова Суховиенко Е.А.

Выполнила:
Студентка группы ЗФ-313-131-2-1
Кривошеева Надежда Анатольевна *Наша*

Научный руководитель:
канд. пед. наук, доцент каф. МиМOM
Шульгина Татьяна Александровна

Шульгина

Челябинск

2022

Содержание

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1. Теоретические основы формирования познавательных универсальных учебных действий	7
1.1 Характеристика познавательных универсальных учебных действий	7
1.2 Проблема формирования познавательных универсальных учебных действий.....	14
1.3 Методические условия формирования познавательных УУД в процессе изучения многогранников.....	19
Вывод по Главе 1.....	28
ГЛАВА 2. Методика формирования познавательных универсальных учебных действий в процессе изучения темы «Многогранники»	31
2.1 Анализ учебников геометрии 10 – 11 классов в аспекте развития у школьников познавательных УУД.....	31
2.2 Экспериментальная работа по формированию познавательных УУД у школьников в старших классах.	35
2.3 Анализ результатов проведенной экспериментальной работы....	47
Вывод по Главе 2.....	50
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	52
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	54
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	58

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире к человеку предъявляется множество различных требований. Каждый человек должен творчески мыслить, принимать нестандартные решения и брать ответственность за результаты своего выбора. Появляется потребность совершенствования образовательного процесса, улучшения качества обучения в средней общеобразовательной школе. Существует необходимость развития личности ребенка, который будет способен ориентироваться в обществе, самообучаться и саморазвиваться, а также анализировать, систематизировать и применять на практике полученные теоретические знания.

Эти тенденции образования нашли отражение в федеральном государственном образовательном стандарте среднего общего образования, который установил требования к личностным, метапредметным и предметным результатам освоения школьниками основной образовательной программы. В свою очередь в перечень метапредметных результатов входят регулятивные, познавательные и коммуникативные универсальные учебные действия.

Согласно ФГОС универсальные учебные действия должны стать целью обучения и формироваться в процессе изучения каждой предметной области, каждого предмета, в том числе и математики.

Содержание школьного курса математики имеет все возможности для формирования познавательных УУД в полном объеме. В процессе изучения математики формируются не только математические знания, навыки и умения, но и развивается пространственное мышление школьника, оттачиваются навыки построения логических цепей рассуждений и доказательств, формируется умение критически оценивать и интерпретировать информацию с разных позиций. Вышеперечисленные навыки и являются составляющими познавательных УУД.

Однако современный школьник не всегда может самостоятельно найти и проанализировать необходимую информацию, не способен критически оценить проблемную ситуацию и отыскать рациональные способы её решения.

В связи с этим целесообразно разработать методические материалы к различным разделам и темам школьного курса математики, которые позволят школьнику развивать вышеперечисленные умения.

Актуальность: процесс формирования универсальных учебных действий в старшей школе не достаточно изучен. Это связано с недостаточной проработанностью методического материала и сравнительно небольшим опытом по реализации ФГОС СОО, накопленным в процессе педагогической деятельности.

Таким образом, актуальность исследования определена наличием следующего противоречия: между потенциалом общеобразовательного курса математики в достижении школьниками метапредметных образовательных результатов в форме познавательных универсальных учебных действий и недостаточной проработанностью методических аспектов этого потенциала через процесс решения задач.

Цель исследования: Выявить, теоретически обосновать и экспериментально проверить педагогические условия формирования познавательных универсальных учебных действий на уроках математики при изучении многогранников.

Объект: процесс обучения математике в старших классах.

Предмет: процесс формирования познавательных УУД при изучении многогранников в старших классах.

Гипотеза: формированию познавательных УУД в процессе изучения темы «Многогранники» будут способствовать следующие условия:

1) При проектировании уроков будут разработаны и включены в учебную работу действия обучающихся, адекватные этапам урока и

содержанию материала, направленные на формирование компонентов познавательных УУД.

2) К геометрическим задачам из учебника и дидактических материалов будут поставлены дополнительные задания и вопросы, направленные на формирование компонентов познавательных УУД.

В соответствии с целью и гипотезой, объектом и предметом были определены следующие задачи исследования:

- изучить теоретические основы формирования познавательных УУД;
- осуществить методический анализ учебников по математике (раздел «Многогранники») в контексте формирования познавательных УУД;
- разработать методические материалы (сборник задач прикладной направленности) по формированию познавательных УУД на уроках математики;
- провести экспериментальную работу по формированию УУД в ходе педагогической практики.

Для решения поставленных задач и проверки гипотезы были использованы следующие **методы исследования**: теоретический анализ и обобщение психолого – педагогической литературы по проблеме исследования, наблюдение за образовательным процессом, педагогический эксперимент, статистические методы обработки данных

База исследования: МОАУ СОШ №1 п.Новоорск им.Калачева А.В.

Теоретическая значимость исследования заключается в анализе материалов раздела «Многогранники» учебников по геометрии, а также в систематизации и обобщении информации по проблеме формирования познавательных УУД у школьников.

Практическая значимость заключается в разработанных методических материалах, направленных на формирование

познавательных УУД на уроках геометрии в старших классах, которые могут быть использованы педагогами в практической работе.

В 1 главе изучены основные познавательные универсальные учебные действия, проанализированы проблемы их формирования. Рассмотрены методические условия формирования познавательных УУД в процессе изучения многогранников.

Во 2 главе представлен анализ учебников по геометрии для 10 – 11 классов в аспекте развития у школьников познавательных УУД. Описана проведенная экспериментальная работа по формированию познавательных УУД в процессе изучения многогранников: поставлены задачи и описаны этапы экспериментальной работы, а также охарактеризованы результаты исследования.

ГЛАВА 1. Теоретические основы формирования познавательных универсальных учебных действий

1.1 Характеристика познавательных универсальных учебных действий

Одним из основных положений Концепции федеральных государственных стандартов общего образования является формирование универсальных учебных действий (далее УУД) на уроках математики. Коллектив ученых под руководством А.Г. Асмолова, разработавший концепцию универсальных учебных действий, раскрывает понятие УУД как обобщенных действий, порождающих широкую ориентацию учащихся в различных предметных областях познания и мотивацию к обучению [3]. Авторы акцентируют внимание на зависимости развития универсальных учебных действий и способа построения содержания учебных предметов, а также на необходимости учитывать внутреннюю логику содержания каждого отдельного учебного предмета.

Принято выделять четыре основных вида УУД, которые формируются на уровне среднего общего образования (СОО):

- личностные;
- регулятивные;
- познавательные;
- коммуникативные.[15]

В связи с этим, перед учителями встает проблема подбора системы заданий, которые будут направлены на формирование вышеуказанных видов универсальных учебных действий.

В данном исследовании уделяется особое внимание формированию познавательных УУД при изучении геометрии, так как данный учебный предмет имеет широкий спектр возможностей для формирования данного вида УУД.[31]

Познавательные универсальные учебные действия являются составляющей метапредметных результатов обучения и определяются как способы деятельности, применимые не только в рамках образовательного процесса, но и при решении проблем в реальных жизненных ситуациях, которые осваиваются учащимися на базе одного, двух и более учебных предметов [2].

Место познавательных универсальных учебных действий в структуре требований к метапредметным результатам освоения основной образовательной программы (ООП) по ФГОС отражено на рисунке 1.

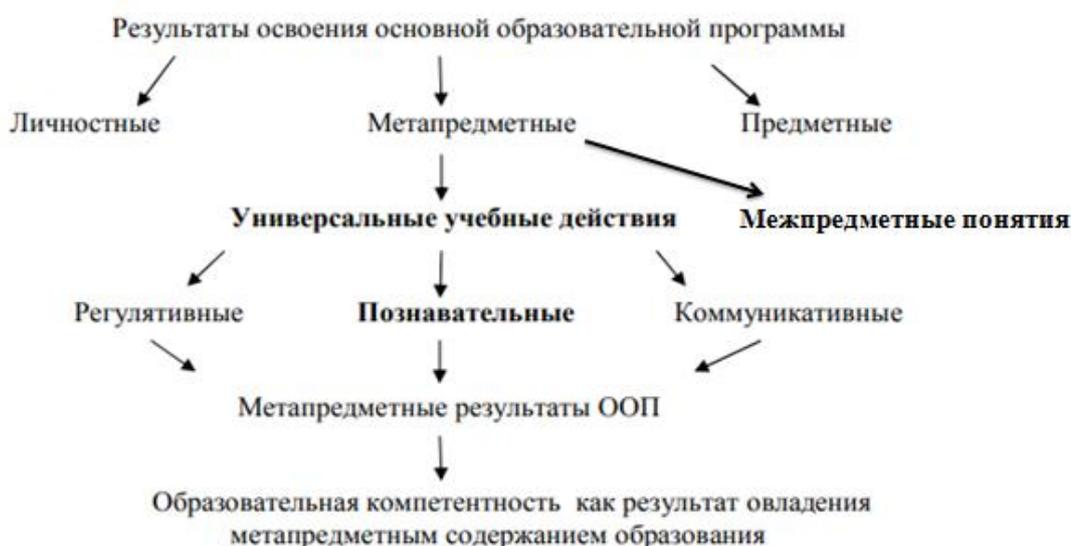


Рисунок 1 – Место познавательных УУД в структуре требований к метапредметным результатам освоения ООП (по ФГОС)

Следует отметить, что в процессе обучения могут одновременно формироваться регулятивные, коммуникативные и познавательные УУД, а их деление является условным в достаточной степени.

Кроме этого, мнение о том, что формирование УУД является отдельным автономным процессом, независимым от обучения, является ошибочным. Универсальные учебные действия формируются и усваиваются в процессе обучения во всех его проявлениях [4].

Познавательные УУД включают в себя умения результативно мыслить, а также работать с информацией в современном мире.

Согласно примерной основной образовательной программе среднего общего образования (ПООП СОО), в рамках формирования познавательных УУД выпускник научится:

- критически оценивать, интерпретировать информацию с различных позиций, распознавать и фиксировать противоречия в информационных источниках;

- искать и находить обобщенные способы решения задач, а также осуществлять развернутый поиск информации и ставить на его основе новые (познавательные или учебные) задачи;

- использовать для представления существенных связей, отношений и противоречий различные модельно-схематические средства;

- находить и приводить критические аргументы по отношению к действиям и суждениям другого человека, разумно и спокойно воспринимать критику в отношении собственного суждения, и рассматривать их как ресурс для собственного развития;

- выходить за рамки учебного процесса и осуществлять целенаправленный поиск возможностей для широкого переноса средств и способов действий;

- выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, при этом учитывая ограничения со стороны остальных участников образовательного процесса, а также ограниченность ресурсов;

- менять и удерживать различные позиции в познавательной деятельности. [27]

Познавательные УУД подразделяются на общеучебные действия (включая знаково-символические), логические действия и действия постановки и решения проблем.

К функциям общеучебных действий относятся управление познавательными процессами, включающими в себя:

- исследовательские действия – самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели, гипотезы и их проверка;

- информационные действия – поиск и выделение нужной информации, в том числе с применением компьютерных технологий, обработка, использование, хранение и защита информации;

- знаково-символические действия – создание, замещение и преобразование модели для выявления общих законов, которые определяют конкретную предметную область, использование моделей при решении задач;

- умения структурировать знания;

- умение осознанно и произвольно выстраивать речевое высказывание, как в устной, так и письменной формах;

- выбор наиболее эффективного способа решения задачи в зависимости от определенных условий;

- личностная и познавательная рефлексия;

- контроль и оценка процесса и результата деятельности;

- смысловое чтение, основанное на осознании цели чтения и выбора вида чтения, извлечение необходимой информации из прослушанных текстов разных жанров, определение главной и второстепенной информации;

- свободная ориентация в художественных, научных, публицистических текстах и текстах официально-делового стиля, а так же их восприятие;

- понимание и адекватная оценка языка, используемого в СМИ;

- умение адекватно, сжато, подробно и выборочно передавать содержание текста;

- умение составлять тексты различных жанров, соблюдая правила построения текста (соответствие жанру, теме, стилю речи и т.п.).

Помимо общеучебных выделяются и универсальные логические действия, основная функция которых заключается в обеспечении инструментальной основы мышления и решения проблемы, в том числе и исследовательской. К таким действиям можно отнести:

- анализ объектов с целью выделения существенных и несущественных признаков;

- синтез – составление целого из его частей, в том числе с самостоятельным достраиванием, восполнением недостающих компонентов;

- выбор оснований и критериев для классификации и сравнения объектов;

- подведение под понятие, вывод следствий;

- установление причинно-следственных связей, построение логической цепочки рассуждения;

- выдвижение гипотезы, её обоснование и доказательство.

Функцию исследования проблемной области, выделение цели как образа желаемого будущего, стратегии и тактики её достижения выполняют действия постановки и решения проблемы [16].

Сформировать вышеперечисленные УУД возможно лишь с учетом определённых функций учебного процесса. Таких как:

- обеспечение возможности обучающегося самостоятельно осуществлять учебную деятельность, ставить цель обучения, искать и использовать необходимые средства и способы её достижения, а также контролировать и оценивать процесс и результат своей деятельности;

- создание условий для гармоничного развития личности, её самореализации, основанных на готовности к непрерывному образованию;

- обеспечение успешного усвоения знаний, формирование умений, навыков и компетентностей в различных предметных областях.

Реализация этих функций основывается на общедидактических принципах обучения.

1. Принцип развивающего обучения.

Данный принцип предполагает направленность обучения на всестороннее развитие личности, а следовательно для формирования УУД необходимо соблюдать меры трудности, преодоления препятствий, опору

на зону ближайшего развития как всего класса, так и отдельно взятого ученика.

2. Принцип воспитывающего обучения.

Обучение должно быть направлено на воспитание эстетических и нравственных УУД, которые будут служить основой для выбора жизненных ценностей и идеалов, социального поведения.

3. Принцип систематичности и последовательности обучения.

Интегрирование УУД в процесс обучения способствовало взаимосвязи между полученными знаниями, возможности перехода от простого к сложному, от конкретного к абстрактному, возвращению к ранее изученному материалу с новой точки зрения.

4. Принцип доступности.

Учебный материал подбирается в соответствии с возрастными особенностями обучающихся, но с допустимой долей трудности, исходя из их возможных ресурсов.

5. Принцип научности.

Интегрирование УУД строится на основе таких методов научного познания как наблюдение, сравнение, эксперимент, анализ, синтез, абстрагирование, конкретизация и других.

6. Принцип индивидуализации.

Процесс формирования УУД должен учитывать психический, интеллектуальный, эмоциональный уровень развития ученика, его интересов, темпа усвоения материала на уроке.

7. Принцип наглядности.

Эффективность интеграции УУД зависит от целесообразного привлечения к восприятию и усвоению учебного материала органов чувств обучающегося.

8. Принцип связи с жизнью.

Интеграция УУД не только на уроках, но и во внеклассной деятельности будет способствовать пониманию учениками значения теории в жизни человека и умению применять теорию на практике [25].

Вышеперечисленные дидактические принципы должны учитываться в процессе интегрирования УУД и соответствовать методическим требованиям, которые предъявляются к ним. Это позволит объективно установить результаты усвоения материала учащимися.

Формирование познавательных УУД у ученика приводит к:

- во-первых, усовершенствованию обучающимися приобретенных навыков работы с информацией и их пополнению;
- во-вторых, приобретению умения работы с текстами, преобразования и интерпретирования информации, которая в них содержится;
- приобретению учениками навыка систематизации [22].

Метапредметные результаты освоения основной образовательной программы среднего общего образования, а именно познавательные УУД, должны отражать умения:

- искать и находить обобщенные способы решения задач, в том числе, осуществлять развернутый информационный поиск и ставить на его основе новые (учебные и познавательные) задачи;
- критически оценивать и интерпретировать информацию с разных позиций, распознавать и фиксировать противоречия в информационных источниках;
- использовать различные модельно-схематические средства для представления существенных связей и отношений, а также противоречий, выявленных в информационных источниках;
- находить и приводить критические аргументы в отношении действий и суждений другого; спокойно и разумно относиться к критическим замечаниям в отношении собственного суждения, рассматривать их как ресурс собственного развития;

– выходить за рамки учебного предмета и осуществлять целенаправленный поиск возможностей для широкого переноса средств и способов действия;

– выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, учитывая ограничения со стороны других участников и ресурсные ограничения;

– менять и удерживать разные позиции в познавательной деятельности.[30]

Достижение результативности сформированных УУД у обучающихся предполагает полноценное освоение учениками всех компонентов учебной деятельности, включая учебные цели, задачи, действия и операции, а также познавательный интерес.

1.2 Проблема формирования познавательных универсальных учебных действий

Формирование и развитие различных видов познавательных УУД происходит не в рамках отдельного учебного предмета, а в совокупности всех предметных областей. Соблюдение определенных условий и организация различного вида деятельности учащихся по решению одного и того же типа задач позволит учителю работать над формированием всех видов УУД.

Условия для формирования познавательных УУД, а также основные задачи и результаты развития УУД представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Условия, основные типы задач и результаты формирования познавательных УУД

Познавательные универсальные учебные действия	
Условия для формирования данного вида УУД	1. Условия, способствующие возникновению вопросов и проблем у учеников. Стимулирование творческого звена мыслительного процесса. 2. Рефлексия мыслительного процесса, достижение высокого уровня понимания решения. 3. Эмоциональное благополучие детей.

Продолжение таблицы 1

	<p>4. Удовлетворение познавательной потребности, в том числе и в межличностном общении.</p> <p>5. Рефлексивная саморегуляция – способность к управлению собственной деятельностью.</p> <p>6. Индивидуализация и дифференциация содержания обучения и помощи учителя ученикам.</p>
<p>Основные типы задач по формированию УУД</p>	<p>1. Задачи и проекты:</p> <ul style="list-style-type: none"> - на построение стратегии поиска решения задач; - на проведение эмпирического исследования; - на проведение теоретического исследования. <p>2. Задачи:</p> <ul style="list-style-type: none"> - на смысловое чтение; - на сравнение, оценивание.
<p>Результаты развития УУД</p>	<p>Умение:</p> <ul style="list-style-type: none"> - видеть проблему; - ставить вопросы; - выдвигать гипотезу; - структурировать текст; - давать определение понятию; - делать выводы и умозаключения - проводить эксперимент; - классифицировать и структурировать материал; - оценивать полученные результаты; - грамотно представлять результаты деятельности.

Универсальные учебные действия являются целостной взаимосвязанной системой, определяемой общей логикой возрастного развития ученика. В связи с этим, система УУД должна формироваться с учётом возрастных особенностей развития обучающихся [24].

Среднее общее образование – это этап, на котором ранее приобретенные компетенции должны быть использованы в полной мере и приобретать характер универсальных. Компетенции, которые формировались в основной школе на предметном содержании, могут быть перенесены на различные жизненные ситуации, которые не относятся к учебному процессу в школе. Главными отличительными особенностями старшего школьного возраста являются: выработка характера и жизненного самоопределения, убеждений и мировоззрения, а также активное формирование чувства взрослости. Процесс обучения должен задавать характеристики и содержание учебной деятельности ученика и, таким образом, определять зону ближайшего развития УУД.

Для наглядного понимания динамики требований к уровню сформированности познавательных УУД у учеников на каждом уровне общего образования данные связи можно представить графически (рисунок 2-4).



Рисунок 2 - Познавательные УУД на уровне начального общего образования.

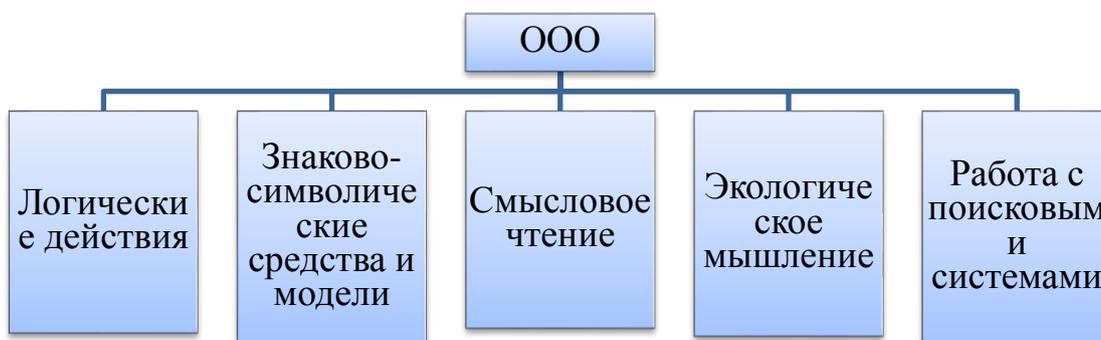


Рисунок 3 - Познавательные УУД на уровне основного общего образования.

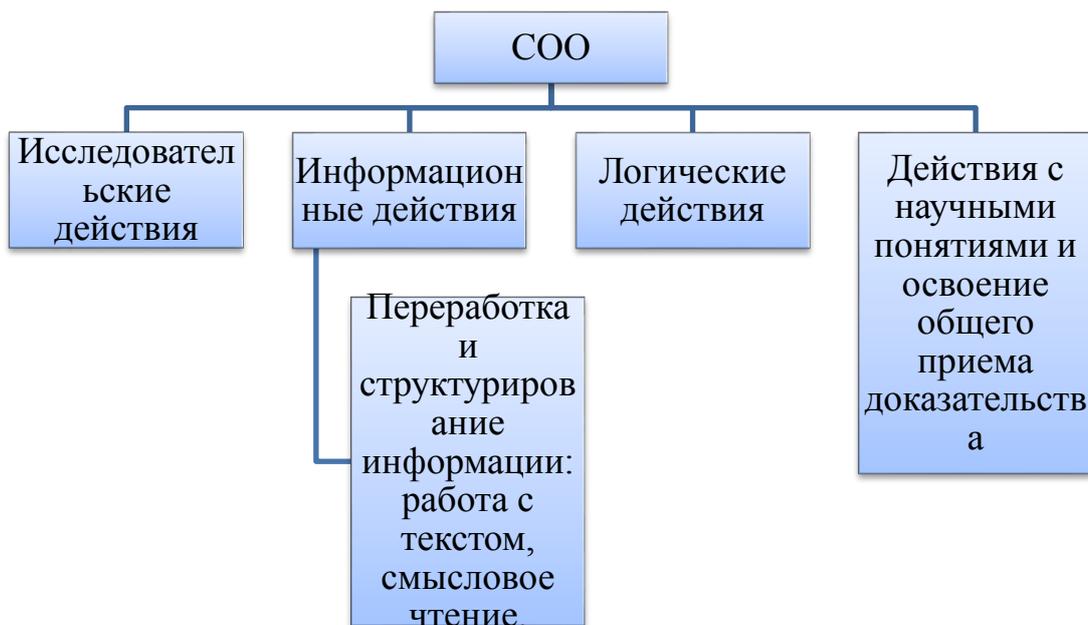


Рисунок 4 - Познавательные УУД на уровне среднего общего образования [19].

Особой проблемой в процессе формирования УУД является оценка их сформированности. Проанализировав учебно-методическую литературу по данной теме, были выделены способы контроля и оценивания сформированности УУД, представленные в таблице 2 [21].

Таблица 2 – Соотношение структурных элементов познавательных УУД и способов контроля и оценивания их сформированности

Познавательные УУД	
Структурные элементы УУД	Способы контроля и оценивания
Умение использовать знаково-символические средства для решения задач.	Текстовые задачи с практическим содержанием.
Умение проводить сравнение, классификацию по заданным критериям.	Задачи на сравнение, классификацию объектов.
Умение проектной, в том числе учебно-исследовательской деятельности.	Учебные проекты, задачи с элементами исследования, учебные исследования.
Умение самостоятельно осуществлять поиск и выделение информации, в том числе с использованием Интернет ресурса.	Проекты, задачи с недостающими или избыточными данными, задачи с элементами исследования.
Умение преобразовать информацию в другие формы.	Тестовые задачи с практическим содержанием.
Умение структурировать тексты, информацию.	Задачи на составление плана доказательства, решение задачи. Задачи на составление конспекта параграфа.
Умение выполнять задания, выходящие за рамки стандартных ситуаций.	Проекты, творческие работы, научно-исследовательские работы, практикумы, конкурсные мероприятия.
Умение использовать современные компьютерные технологии при работе с информацией.	Написание рефератов, докладов. Подготовка проектов.

Таким образом, целью создания и предметом обсуждения программ, формирующих УУД, должны быть:

- познавательные исследовательские действия (например, поиск информации, исследование и т.п.);
- сложные формы опосредования познавательной деятельности ученика;
- переработка и структурирование информации (например, работа с текстом или смысловое чтение);
- формирование элементов комбинаторного мышления;

- работа с научными понятиями и освоение общего приёма доказательства как компонента логического мышления.

Для обеспечения формирования познавательных УУД необходимо использовать практико-ориентированные комплексные задания.

Задачи необходимо сконструировать таким образом, чтобы сформировать у учеников:

- умение объяснять явления и процессы с научной точки зрения;
- способность оценивать научное исследование;
- умение интерпретировать данные и доказательство (т.е. анализ и оценка научной информации), умение понимать аргументы разных представлений и делать соответствующие выводы.

При решении задач на формирование читательской грамотности необходимо сформировывать умения, которые свидетельствуют о полном понимании текста: поиск информации, интерпретация текста, рефлексия на содержание текста, его оценку.

При решении задач на формирование математической грамотности необходимо сформировать такие компетенции как:

- умение распознавать проблемы, возникающие в окружающем мире, которые могут быть решены благодаря математическим средствам;
- умение формулировать вышеуказанные проблемы, используя математический язык;
- умение решать проблемы, используя математические методы;
- умение анализировать использованные в решении методы;
- умение интерпретировать полученные результаты с учетом поставленной проблемы;
- умение формулировать и записывать результаты решения.[18]

Следовательно, при проектировании целенаправленной системы знаний, возможно не только систематическое формирование познавательных УУД, но и оценка уровня их сформированности.

1.3 Методические условия формирования познавательных УУД в процессе изучения многогранников

Для формирования познавательных УУД у учеников на уроках геометрии могут быть использованы разнообразные приёмы и методы работы. Например:

- выполнение чертежа по условию задачи;
- решение задачи с опорой на изученные свойства фигур, их свойств и отношений между ними, применяя дополнительные построения;
- проведение рассуждений доказательства при решении задачи, используя известные теоремы, с поиском возможности для подобного использования.

Решение практически любой математической задачи формирует у учащихся все основные виды познавательных УУД. Рассмотрим примерный алгоритм решения математической задачи:

1. Прочитать текст, изучить содержание задачи.
2. Проанализировать текст задачи (т.е. перевести текст задачи на математический язык).
3. Используя анализ текста, составить план решения задачи (математическую модель) или сформулировать известный план решения задач определенного вида.
4. Решить задачу по составленному плану.
5. Проверить полученное решение (т.е. интерпретировать полученный результат решения к условию задачи).
6. Рассмотреть другие возможные способы решения (при их наличии) и выбрать наиболее рациональный и эффективный способ решения.
7. Записать ответ. [26]

В процессе изучения математики в школе при выполнении заданий на вычисления, измерения и т.п., у учащихся формируются такие основные

мыслительные операции как: анализ и синтез, классификация, сравнение, аналогия, критический взгляд на суждения, объяснение этапов решения задачи, преобразование информации (т.е. ученик использует при решении задач знаковые, предметные, графические модели, диаграммы, таблицы и чертежи, преобразовывая их исходя из содержания задания). Следовательно, формируются познавательные УУД. В таблице 3 представлены типовые задачи и примерные задания для работы на уроке, способствующие формированию познавательных УУД [5].

Таблица 3 – Типовые задачи и примерные задания для работы на уроке, способствующие формированию познавательных УУД

Познавательные УУД	
Типовые задачи и проекты	Примеры заданий для работы на уроке
1. На построение стратегии поиска решения задачи. 2. На сравнение и оценивание. 3. На проведение эмпирического исследования. 4. На проведение теоретического исследования. 5. Задачи на смысловое чтение.	1. Работа с учебником. 2. Решение текстовых задач по алгоритму. 3. Ситуативные, проблемные задачи. 4. Задачи с избыточной информацией (ученику необходимо отделить избыточную информацию от первостепенной). 5. Задачи с недостатком информации (ученик должен определить необходимую и отсутствующую информацию и провести её поиск). 6. Задачи на составление математических проблем. 7. Задачи на доказательство или выдвижение гипотезы.

Для формирования познавательных УУД важно уделять время работе с учебником. Ниже предложены примеры заданий, которые ученики могут выполнить при работе с текстом учебника.

1. Изучить содержание параграфа или его части; выделить все неизвестные или непонятные слова и выражения и выяснить их значение (в справочной информации, сети Интернет).
2. Выделить основные понятия, теоремы, гипотезы, следствия и т.п.
3. Изучить определение понятия, теорему и т.п.
4. Разобрать описанный в тексте пример и придумать аналогичный.
5. Самостоятельно доказать теорему.
6. Изобразить чертёж, схему, рисунок по имеющейся информации.
7. Ответить на вопросы в параграфе или после него, и другие.

В образовательном процессе формирование познавательных УУД определяется тремя взаимодополняющими положениями.

1. Как цель образовательного процесса формирование познавательных УУД определяют его организацию и содержание.

2. Формирование познавательных УУД происходит в процессе усвоения различных предметных дисциплин.

3. Эффективность образовательного процесса, а именно усвоение знаний и умений, формирование мировоззрения и основных компетенций ученика, в том числе социальных и личностных, определяется познавательными УУД, их свойствами и качествами [28].

Принципы формирования познавательных УУД:

- формирование познавательных УУД – это задача, сквозная для всего образовательного процесса, включающего в себя и урочную, и внеурочную деятельность;

- формирование познавательных УУД требует работы с предметным и междисциплинарным содержанием;

- в рамках своей ООП каждая образовательная организация может определять материал для реализации программы по развитию познавательных УУД (в том числе учебную или внеучебную деятельность);

- использование различных социальных практик, проектной и исследовательской деятельности, ИКТ;

- формирование УУД происходит в рамках серии учебных занятий при гибком сочетании урочных и внеурочных форм работы, а также и самостоятельной работы ученика;

- учебный план и расписание необходимо составлять, акцентируя внимание на вариативность, нелинейность, индивидуализацию и наличие элективных составляющих [17].

Формирование познавательных УУД на уровне среднего общего образования происходит благодаря созданию условий для налаживания

межпредметных связей, формирования рефлексии ученика, а также для формирования метапредметных представлений и понятий [6].

Как уже было написано выше, УУД делятся на три группы: регулятивные, коммуникативные, познавательные, однако аналогичного деления диагностирующих и формирующих заданий на данном этапе развития науки не существует. При оценивании уровня сформированности универсальных учебных действий в процессе обучения или по результатам выполнения конкретного задания создается специальная шкала измерений или наблюдений.

Задачи, которые встроены в процесс обучения, классифицируют по двум основаниям:

- по предметному основанию (формирующие, типовые, диагностические);
- по уровню изучения (базовые и углубленные).

С точки зрения познавательных УУД, для учебных предметов, изучаемых на базовом уровне, большое значение имеют три факта:

1. Наличие установок у учеников на системное целостное видение изучаемого предмета, рефлексия на структуру учебной дисциплины, выделение культурных способов и средств внутри данного предмета.
2. Способность обучающихся решать неизвестные предметные и межпредметные задачи с привлечением необходимых информационных источников, при необходимости организуя групповое взаимодействие.
3. Готовность учащихся в условиях нового профессионального целеполагания выстроить программу углубленного изучения учебного предмета [12].

С точки зрения познавательных УУД, для учебных дисциплин, изучаемых углубленно и в определенной степени связанных с профессиональным самоопределением ученика, на главное место в процессе обучения выходят задания творческого, проектного и исследовательского характера.

Для формирования и для диагностики познавательных УУД более предпочтительны предметы, которые изучаются на базовом уровне. Это объясняется тем, что в непрофильных предметах операционально-техническая сторона уходит на задний план, а на передний план встаёт смысловая сторона действий [10]. В старшей школе изучение непрофильных предметов является завершающим этапом изучения, а, следовательно, требует большего количества рефлексии, понимания концептуальных и структурных оснований. В то время как изучение профильной дисциплины – это начало профессионального обучения [23].

Каждая деятельность состоит из внешних и внутренних компонентов. Внутренняя деятельность включает в себя психическую и умственную деятельность и является производной от внешней деятельности, которая так же может называться предметной. Это объясняется тем, что первоначально человек совершает предметные действия, тем самым накапливает опыт, приобретая способность воспроизводить данные действия в уме. Подобные процессы преобразования внешних действий во внутренние называется интериоризацией. Обратный преобразовательный процесс – это экстериоризация. Так же любое действие состоит из сенсорных (чувственных), моторных, мыслительных и двигательных компонентов. В связи с эти выделяются такие основные функции действий как регулирование, исполнение и контроль.

Учителю в современном мире необходимо выстраивать учебный процесс на высоком уровне, осваивать новые информационные технологии и системы, принимать участие в научно-исследовательской работе, иметь собственные идеи и проявлять интерес к разработке и реализации новых учебных программ, а также обладать высоким уровнем научной компетенции. Педагог в школе является организатором учебной и поисковой работы; он консультант и наставник, который имеет хорошую

методическую подготовку, владеет разными методами организации познавательной деятельности учеников. [14]

Следует подробно остановиться на личностных мотивах учащихся. Это объясняется тем, что успешное формирование познавательных УУД находится в прямой зависимости от личностного смысла, который ученик вкладывает в изучение учебного предмета. Развитие познавательного мотива ученика происходит от познавательного мотива в обучении к учебно-познавательным мотивам, и уже затем к мотивам самообразования.

Существует несколько факторов, влияющих на развитие учебной мотивации:

- цели, задачи, характер системы образования, которые отражают особенности организации образовательного процесса;
- индивидуальные особенности учеников, обусловленные возрастом и психологическим состоянием;
- характер взаимоотношений между учеником с близкими родственниками, педагогами, друзьями, сверстниками;
- степень коммуникации и сотрудничества в учебном процессе [11].

В связи с тем, что данное диссертационное исследование направлено на проблему формирования познавательных УУД в старших классах, то особое внимание обращаем на учащихся в возрасте от 14 до 18 лет.

Данный период, характеризующийся выдвиганием на первый план подготовки к профессиональной деятельности и проблемы выбора будущей профессии, называется «ранней юностью» или «старшим школьным возрастом». В связи с этим меняется отношение учеников к учебе, её цели и содержанию. Взросление и обогащение опыта способствует пониманию о предстоящей самостоятельности жизни. Всё это соответственно влияет на рост осознанного отношения к учебному процессу, приобретающему непосредственно важный жизненный смысл для учащихся. Подросток осознает, что наличный фонд навыков и знаний, которые он получит в школе, является необходимым условием для

полноценного и полноправного участия в дальнейшей его будущей жизни в социуме. И немаловажное место здесь занимает способность к саморазвитию, самостоятельному приобретению знаний и умений. Потребность в знаниях и постоянном развитии – это одна из главных и характерных черт современного выпускника школы [29].

Оценивая свою учебу, с точки зрения полезности для его будущего, ученик проявляет избирательное отношение к различным предметам. У учащихся старшей школы могут возникнуть несколько характеристик развития:

1. Повышение самоорганизации учебной деятельности, выражающейся во владении всеми учебными звеньями, а именно:

- постановка учебной задачи;
- осуществление активных предметных преобразований;
- самооценка и самоконтроль.

2. Самостоятельный переход от одного вида деятельности к другому.

3. Наличие учебно-познавательных мотивов, проявляющихся в устойчивой самостоятельной ориентации учеников на способы выполнения и результат деятельности.

4. Наличие ярко выраженных индивидуальных различий учебной деятельности, проявляющейся в построении учащимся иной деятельности, или же в виде сочетаний нескольких видов деятельности; в использовании нового, специально не сформированного способа деятельности.

Формирование познавательных УУД может быть осуществлено с помощью специальной серии заданий. Например, для развития такого УУД как «использование для представления существенных связей, отношений и противоречий различные модельно-схематические средства», могут быть предложены такие задания с использованием разверток:

1. Найти развертку любого многогранника (кроме куба), склейте из бумаги модель этого многогранника и опишите его: название, количество

граней, ребер, вершин, какие многоугольники являются гранями многогранника.

2. Сделать развертку пирамиды, склеить из бумаги модель и описать её.

3. Сделать развертку любого правильного многогранника.

Для формирования познавательного УУД действия постановки и решения проблемы – «умения самостоятельно создавать алгоритмы деятельности при решении проблем творческого и поискового характера» предлагается следующая серия задач:

Задача 1. Разделить поровну (рис. 5).

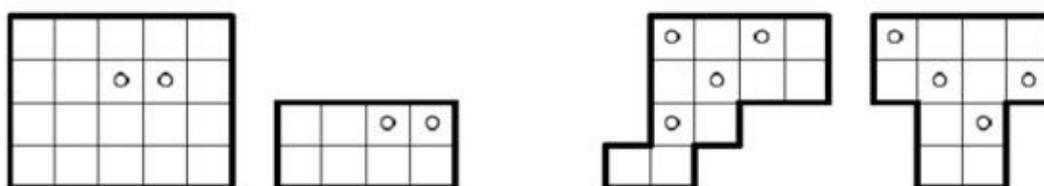


Рисунок 5 - Исходные данные к задаче 1 [13].

Дополнительный вопрос: получившиеся фигуры являются равными? Равносоставленными? Обоснуйте ответ.

Предлагаются заготовки из бумаги, как на рисунке 5.

Необходимо разрезать каждую из фигур на две равные части по линиям сетки, причем в каждой из частей должен быть кружок.

Задача 2. Разрежьте вазу, изображенную на рисунке 6, на три части, из которых можно сложить ромб.

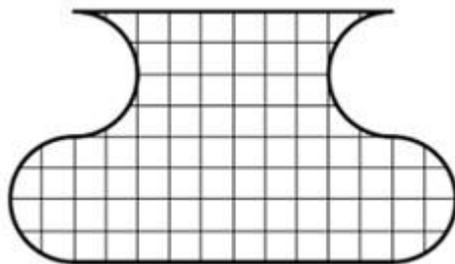


Рисунок 6 - Исходные данные к задаче 2. [9]

Дополнительный вопрос: можно ли из данной фигуры сложить прямоугольник? Если да, то на сколько частей её нужно разделить?

Решение изображено на рисунке 7.

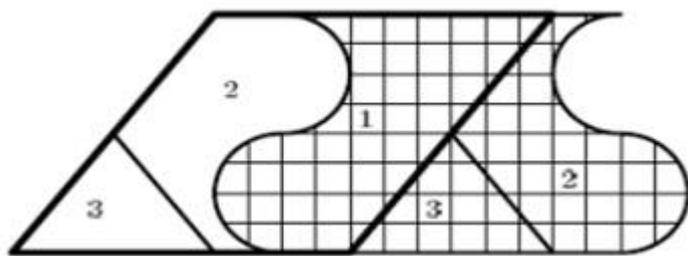


Рисунок 7 - Решение к задаче 2.

Задача 3. Разрежьте букву Е, изображенную на рисунке 8, на пять частей и сложите из них квадрат.

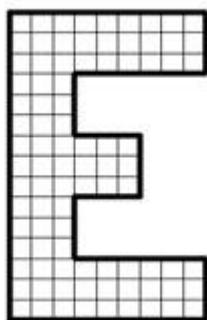


Рисунок 8 - Исходные данные к задаче 3. [1]

Дополнительный вопрос: Найдите площадь получившегося квадрата. Опишите алгоритм решения.

Решение изображено на рисунке 9.

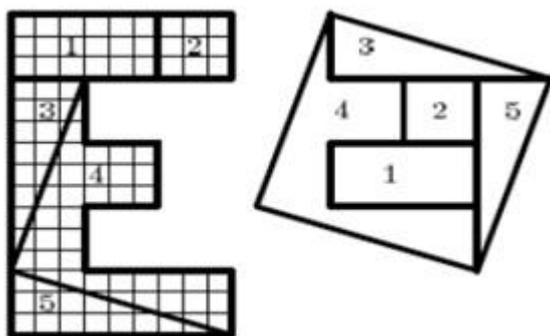


Рисунок 9 - Решение к задаче 3.

Задача 4. Каждое ребро правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$ равно ϕ . Через середины N , K , L ребер проведено сечение пирамиды плоскостью.

1. Докажите, что а) $NK \parallel MDC$; б) $LF \parallel KN$; в) сечение $NKLF$ – равнобедренная трапеция.

2. Вычислите периметр трапеции.

3. Составьте план вычисления площади трапеции.

Задача 5. В правильной n -угольной призме сторона основания равна a и высота равна h . Вычислите площадь боковой и полной поверхностей призмы, если $n=3$ см, $a=10$ см, $h=15$ см.

Дополнительные вопросы: Выберите правильный алгоритм решения и решите задачу.

Задача 6. $DABC$ – правильная треугольная пирамида.

Докажите, что:

1. Скрещивающиеся рёбра DC и AB перпендикулярны.
2. $AB \perp DCK$.
3. Плоскости DAB и DCK перпендикулярны.
4. Перпендикуляр OE из точки O к апофеме DK является перпендикуляром к плоскости DAB .

Дополнительные вопросы: Дополните подробным обоснованием приведенные записи:

1. $AB \perp CO$, $AB \perp DC$.
2. $AB \perp CK$, $AB \perp DK$, $AB \perp DCK$.
3. $AB \perp DCK$, $AB \in DAB$, $DAB \perp DCK$.
4. $OE \perp DK$, $OE \perp AB$, $OE \perp DAB$.

У учеников старшей школы наблюдается рост интереса к содержанию профильных предметов, который они выбрали, и проявляется интерес к самой познавательной деятельности. Это обусловлено социальной ситуацией, в которой обучающиеся оказались, связанной с выбором будущей профессии. Поэтому познавательные и практические (связь предмета и будущей профессии) мотивы становятся для подростков одними из самых значимых.

Вывод по Главе 1

Познавательные универсальные учебные действия – это одна из составляющих метапредметных результатов обучения. Они определяются

как способы деятельности, применимые не только в рамках образовательного процесса, но и при решении проблем в реальных жизненных ситуациях, которые осваиваются учащимися на базе одного, нескольких и более учебных предметов.

Формирование познавательных УУД у обучающихся приводит к совершенствованию приобретенных навыков работы с информацией, приобретению умений работы с текстами, преобразования и интерпретирования информации, приобретению навыка систематизации.

Результат сформированных УУД у обучающихся предполагает полноценное освоение учениками всех компонентов учебной деятельности, включая учебные цели, задачи, действия и операции, а также познавательный интерес.

Среднее общее образование – это этап, на котором ранее приобретенные компетенции должны быть использованы в полной мере и приобретать характер универсальных. Компетенции, которые формировались в основной школе на предметном содержании, могут быть перенесены на различные жизненные ситуации, которые не относятся к учебному процессу в школе. Главными отличительными особенностями старшего школьного возраста являются: выработка характера и жизненного самоопределения, убеждений и мировоззрения, а также активное формирование чувства взрослости. Процесс обучения должен задавать характеристики и содержание учебной деятельности ученика и, таким образом, определять зону ближайшего развития УУД.

Формирование познавательных УУД на уровне среднего общего образования происходит благодаря созданию условий для налаживания межпредметных связей, формирования рефлексии ученика, а также для формирования метапредметных представлений и понятий.

На уровне среднего общего образования для обеспечения формирования познавательных УУД можно рекомендовать организовывать образовательные события, которые смогут вывести

учеников на путь восстановления межпредметных связей и целостной картины мира.

Существует три вида условий, способствующих эффективному формированию познавательных УУД: организационные, содержательные и личностно-ориентированные.

Учителю в современном мире необходимо выстраивать учебный процесс на высоком уровне, осваивать новые информационные технологии и системы, принимать участие в научно-исследовательской работе, иметь собственные идеи и проявлять интерес к разработке и реализации новых учебных программ, а также обладать высоким уровнем научной компетенции. Педагог в старшей школе является организатором учебной и поисковой работы; он консультант и наставник, который имеет хорошую методическую подготовку, владеет разными методами организации познавательной деятельности учеников.

ГЛАВА 2. Методика формирования познавательных универсальных учебных действий в процессе изучения темы «Многогранники»

2.1 Анализ учебников геометрии 10 – 11 классов в аспекте развития у школьников познавательных УУД.

Для анализа были отобраны два учебника: «Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни» под редакцией Л.С.Атанасяна 2012 года и «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 кл.: учеб. для организаций, осуществляющих образовательную деятельность. Базовый и углублённый уровни» под редакцией В.А. Гусева и А.Г. Рубина 2016 года [7] [20].

1. «Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни» под редакцией Л.С. Атанасяна.

Теме «Многогранники» отводится 1 глава, которая содержит 3 основных параграфа: «Понятие многогранника. Призма», «Пирамида» и «Правильные многогранники». Всего 11 пунктов, 3 из которых необязательны при базовом изучении курса. Так же авторы учебника, помимо задач в конце каждого параграфа, предлагают набор практических заданий, вопросов к главе и дополнительные задачи.

В данном учебнике авторы предлагают подробные доказательства следующих теорем и следствий, которые школьники могут изучить в параграфе самостоятельно:

- теорема Эйлера,
- теорема о площади боковой поверхности призмы,
- пространственная теорема Пифагора,
- теорема о площади боковой поверхности правильной пирамиды

Предлагается к самостоятельному доказательству теорема о площади боковой поверхности правильной усеченной пирамиды.

Подобное самостоятельное изучение направлено на формирование следующих познавательных УУД:

- поиск и выделение нужной информации;
- умение структурировать знания;
- смысловое чтение, основанное на осознании цели чтения и выбора вида чтения, извлечение необходимой информации, определение главной и второстепенной информации.

Практические задания в конце главы предлагают школьникам поработать с развертками правильных многогранников, что непосредственно направлено на формирование такого познавательного УУД как создание, замещение и преобразование модели для выявления общих законов, которые определяют конкретную предметную область, использование моделей при решении задач.

Вопросы к главе также направлены на достижение вышеуказанной цели, так как позволяют учащемуся производить развернутый информационный поиск, а также распознавать и фиксировать необходимую информацию.

К каждой теме предложены задачи на построение, на доказательства суждений.

Проанализировав данный учебник можно сказать о том, что в неё содержится недостаточно задач, направленных на формирование познавательных УУД. Очевидно, что для достижения цели данного исследования задания данного учебника необходимо дорабатывать и дополнять.

2. «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 кл. : учеб. для организаций, осуществляющих образовательную деятельность. Базовый и углублённый уровни» под редакцией В.А. Гусева.

Теме «Многогранники» отводится 1 глава, которая содержит 9 параграфов: «Понятие многогранника», «Призмы», «Параллелепипеды», «Поверхности призмы и их площадь» «Пирамиды. Усечённые пирамиды», «Взаимное расположение многогранников и плоскостей. Построение сечений многогранников», «Трёхгранные и многогранные углы и свойства их плоских углов», «Теоремы косинусов и синусов для трёхгранных углов», «Правильные многогранники». В конце главы имеются задачи по каждому параграфу, которые маркированы по трём уровням:

1. Необходимый уровень. Задания, которые должны уметь выполнять все учащиеся. Выполнение этих заданий поможет вам понять, усвоены ли основные понятия и факты, умеете ли вы применять их к решению стандартных задач.

2. Повышенный уровень. Задания, предназначенные для учащихся, которые хотят усовершенствовать свои знания. Эти задания требуют более серьёзного усвоения учебного материала, для их решения, наряду с известными приёмами и идеями, может понадобиться выдвижение некоторой новой идеи. Особое значение эти задания имеют для углублённого уровня обучения.

3. Максимальный уровень. Эти задания выполняют те учащиеся, которые хотят научиться решать более сложные, нестандартные задачи. Работа над ними может потребовать значительных усилий, изобретательности и настойчивости.

Среди заданий необходимого уровня авторы учебника дополнительно выделяют следующие две группы заданий и отмечают их особыми знаками:

† - так обозначается группа задач и вопросов, которые учат делать выводы, т.е. получать следствия из условия задачи. С помощью этих заданий учащиеся могут проверить, усвоен ли ими основной теоретический материал. Уметь справляться с такими заданиями должен каждый ученик.

↑ - так отмечены задания для самоконтроля; в них нужно не только получить следствие из условия задачи, но и выяснить причину появления этого следствия.

Так же в учебнике помимо теоретического описания материала предлагаются вопросы, которые позволяют понять тему и сделать выводы.

В данном учебнике авторы предлагают подробные доказательства следующих теорем и следствий, которые школьники могут изучить в параграфе самостоятельно:

- две теоремы о свойствах диагоналей параллелепипеда,
- обобщенная теорема Пифагора в пространстве,
- теорема о площади боковой поверхности призмы,
- теорема о пирамиде: если пересечь пирамиду плоскостью, параллельной её основанию, то: 1) боковые рёбра и высота пирамиды разделятся на пропорциональные между собой части; 2) сечение есть многоугольник, подобный основанию; 3) отношение площадей сечения и основания равно отношению квадратов их расстояний от вершины пирамиды,
- теорема о площади боковой поверхности правильной пирамиды,
- теорема о площади боковой поверхности правильной усеченной пирамиды,
- две теоремы о трёхгранных углах,
- первая теорема косинусов для трёхгранного угла,
- вторая теорема косинусов для трёхгранного угла,
- теорема синусов для трёхгранного угла.

Если позволить учащимся самостоятельно изучить данные материалы, то можно сформировать такие познавательные УУД как: умение структурировать знания; смысловое чтение, основанное на осознании цели чтения и выбора вида чтения, извлечение необходимой информации, определение главной и второстепенной информации.

В учебнике в отдельные параграфы выделены тема построения сечений многогранников, что непосредственно направлено на формирование познавательных УУД (составление целого из его частей, в том числе с самостоятельным достраиванием, восполнением недостающих компонентов; выбор наиболее эффективного способа решения задачи в зависимости от определенных условий.)

Кроме того, представлены алгоритмы построения правильных многогранников и при описании теоретического материала даны иллюстрации большого количества разверток.

В заключение данного анализа, следует сказать о том, что оба учебника недостаточно насыщены материалами для формирования познавательных УУД. Для успешного формирования познавательных УУД следует дополнять совокупность вопросов и заданий из учебника специально подобранными вопросами и заданиями.

2.2 Экспериментальная работа по формированию познавательных УУД у школьников в старших классах.

Экспериментальная работа осуществлялась на базе муниципального общеобразовательного автономного учреждения «Средняя общеобразовательная школа №1 п.Новоорск им.Калачева А.В.» Новоорского района Оренбургской области., в 10 классах 2019-2020 и 2020-2021 учебных годов в количестве 26 и 23 человека соответственно. Учащиеся 2019-2020 учебного года стали контрольной группой, а ученики 2020-2021 года – экспериментальной. Указанные классы обучаются по учебнику геометрии для 10-11 классов под редакцией Л.С. Атанасяна, анализ которого представлен в параграфе 2.1 данной работы. Изучение учебной документации (классных журналов) показало, что эти классы сопоставимы по уровню учебных достижений по математике.

Цель экспериментальной работы: проверить результативность целенаправленной работы по формированию познавательных УУД в процессе изучения темы «Многогранники».

Исследование состояло из трех этапов:

- подготовительный;
- формирующий;
- подведение итогов, обработка результатов эксперимента.

На первом этапе исследования была проведена диагностика уровня сформированности познавательных УУД у учащихся. Для этого им была дана самостоятельная работа по теме: «Перпендикулярность прямых и плоскостей» (приложение 1). Познавательные УУД, проверяемые в ходе самостоятельной работы, представлены в таблице 4

Таблица 4 – Задания самостоятельной работы и проверяемые познавательные УУД

№	Задания	Познавательные УУД
1	<p>Диагональ куба равна 6 см. Найдите:</p> <p>а) ребро куба;</p> <p>б) косинус угла между диагональю куба и плоскостью одной из его граней.</p>	<p>- выбор наиболее эффективного способа решения задачи в зависимости от определенных условий;</p> <p>- установление причинно-следственных связей, построение логической цепочки рассуждения.</p>
2	<p>Сформулируйте определение перпендикулярности прямой и плоскости. Докажите теорему, выражающую признак перпендикулярности прямой и плоскости.</p>	<p>- умения структурировать знания;</p> <p>- умение осознанно и произвольно выстраивать речевое высказывание;</p> <p>- установление причинно-следственных связей, построение логической цепочки рассуждения.</p>
3	<p>Основанием прямого параллелепипеда служит квадрат, диагональ параллелепипеда равна $2\sqrt{6}$ см, а его измерения относятся как 1:1:2. Найдите:</p> <p>а) измерения параллелепипеда;</p> <p>б) синус угла между диагональю параллелепипеда и плоскостью его основания.</p>	<p>- выбор наиболее эффективного способа решения задачи в зависимости от определенных условий;</p> <p>- установление причинно-следственных связей, построение логической цепочки рассуждения.</p>
4	<p>Сформулируйте определение перпендикулярности двух плоскостей. Докажите теорему, выражающую признак перпендикулярности двух плоскостей.</p>	<p>- умения структурировать знания;</p> <p>- умение осознанно и произвольно выстраивать речевое высказывание;</p> <p>- установление причинно-следственных связей, построение логической цепочки рассуждения.</p>

По результатам самостоятельной работы был сделан следующий вывод: необходимо создавать условия для формирования познавательных универсальных учебных действий. Особое внимание уделить наглядности, целеполаганию, планированию, логическим действиям, действиям постановки и решению проблем.

Второй этап исследования включал в себя проведение 11 уроков в каждом классе по темам главы III «Многогранники». В контрольной группе были проведены уроки в традиционной форме. При подготовке к урокам было использовано учебное пособие «Геометрия. Поурочные разработки. 10—11 классы» под редакцией С.М. Саакян и В.Ф. Бутузова [8]. Данное пособие содержит контрольные и самостоятельные работы, карточки для устного опроса, комментарии и решения к наиболее сложным задачам.

Допущенные обучающимися недочеты на основании выдвинутой гипотезы возможно устранить, изменив организацию проведения урока для улучшения результата обучающихся, освоивших тему на базовом уровне и корректировки возникших проблем у обучающихся, имеющих затруднения в освоении материала. Поэтому для экспериментальной группы были подготовлены конспекты уроков (приложения 2-12), направленные на формирование познавательных УУД.

Уроки были проведены по темам: «Понятие многогранника. Призма», «Пирамида. Правильная пирамида. Усечённая пирамида», «Симметрия в пространстве. Понятие правильного многогранника. Элементы симметрии правильных многогранников», «Теорема Эйлера»; а зачет по теме «Многогранники». При проектировании уроков были определены возможности каждого этапа урока в формировании конкретных познавательных УУД.

А именно:

- 1) На этапе постановки темы (проблемы) урока – самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели; умение критически

оценивать, интерпретировать информацию с различных позиций, распознавать и фиксировать противоречия в информационных источниках.

2) На этапе ознакомления с новым материалом (знакомством с математическими понятиями, доказательством математических утверждений) – поиск и выделение нужной информации; умение осознанно и произвольно выстраивать речевое высказывание, как в устной, так и письменной формах; установление причинно-следственных связей, построение логической цепочки рассуждения; смысловое чтение.

3) На этапе закрепления изученных фактов и формирования умения применять их к решению задач – умение структурировать знания; умение осознанно и произвольно выстраивать речевое высказывание, как в устной, так и в письменной форме; личностная и познавательная рефлексия; контроль и оценка процесса и результата деятельности.

4) Подведение итогов урока - личностная и познавательная рефлексия; контроль и оценка результата деятельности.

5) Постановка домашнего задания – умение выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, при этом учитывая ограниченность ресурсов и умение критически оценивать, интерпретировать информацию с различных позиций; умения использовать для представления существенных связей, отношений и противоречий различные модельно-схематические средства и выходить за рамки учебного процесса и осуществлять целенаправленный поиск возможностей для широкого переноса средств и способов действий; умение искать и находить обобщенные способы решения задач, а так же осуществлять развернутый поиск информации и ставить на его основе новые (познавательные или учебные) задачи.

Ниже представлены фрагменты из конспектов уроков, иллюстрирующие возможности формирования ПУУД на разных этапах урока.

Фрагмент из конспекта урока №1:

«...2. Постановка темы урока, изучение материала:

Попросить учащихся вспомнить уже известные им понятия тетраэдра и параллелепипеда. Подчеркнуть, что каждая из этих поверхностей ограничивает некоторое геометрическое тело, отделяет это тело от остальной части пространства.

Предложить обучающимся самостоятельно построить определение многогранника. Выслушать предложения и совместно сформулировать правильное определение:

Определение: Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело, называется многогранной поверхностью или многогранником...».

Действия, предложенные учащимся в данном фрагменте, формируют такие познавательные УУД как:

- критически оценивать, интерпретировать информацию с различных позиций, распознавать и фиксировать противоречия в информационных источниках;

- находить и приводить критические аргументы по отношению к действиям и суждениям другого человека, разумно и спокойно воспринимать критику в отношении собственного суждения, и рассматривать их как ресурс для собственного развития.

Этап «домашнее задание»:

«...5. Домашнее задание:

1. Прочитать параграф 27, 30 (до площади поверхности призмы); самостоятельно изучить параграфы 28,29,31.

2. Найти развертку любого многогранника (кроме куба), склейте из бумаги модель этого многогранника и опишите его: название, количество граней, ребер, вершин, какие многоугольники являются гранями многогранника.

3. Решить задачи: 220, 227.»

Домашнее задание под пунктом 1 формирует такие познавательные УУД, как умение выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, при этом учитывая ограниченность ресурсов и умение критически оценивать, интерпретировать информацию с различных позиций.

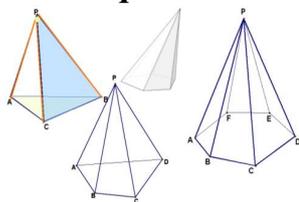
Домашнее задание №2 формирует умения использовать для представления существенных связей, отношений и противоречий различные модельно-схематические средства и выходить за рамки учебного процесса и осуществлять целенаправленный поиск возможностей для широкого переноса средств и способов действий.

Пункт № 3 в домашнем задании направлен на формирование такого УУД как искать и находить обобщенные способы решения задач, а так же осуществлять развернутый поиск информации и ставить на его основе новые (познавательные или учебные) задачи.

Фрагмент из конспекта урока №3:

Этап ознакомления с новым материалом:

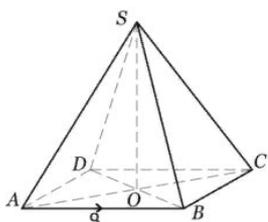
«...**Предложить** учащимся выполнить следующее задание –



описать фигуры, которые они видят на слайде:

- Что объединяет эти тела?
- Как можно назвать эти тела?

Помочь сформулировать определение понятия «Пирамида»...



Предложить ученикам самостоятельно составить определение понятия «высота пирамиды»...

...**Вопрос к ученикам:** какая пирамида, по вашему мнению, может называться правильной?

...**Выслушать ответы** и совместными усилиями дать правильное определение...

...**Объяснить** свойства боковых ребер и боковых граней правильной пирамиды...

Ввести понятие апофема и показать все элементы пирамиды на макете...»

Подобное изучение нового материала способствует формированию следующих познавательных УУД:

- поиск и выделение нужной информации;
- умение осознанно и произвольно выстраивать речевое высказывание, как в устной, так и письменной формах;
- установление причинно-следственных связей, построение логической цепочки рассуждения.

Этап закрепления изученного материала:

«...Попросить учащихся устно ответить на вопросы:

- Какая пирамида называется правильной?
- Являются ли равными боковые ребра правильной пирамиды?
- Чем являются боковые грани правильной пирамиды?
- Что называется апофемой?
- Сколько высот в пирамиде? Сколько апофем в пирамиде?
- Сколько апофем в правильной пирамиде?
- Равны ли апофемы правильной пирамиды друг другу? Почему?

Решение задач:

Задача 1.

В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, а плоский угол при вершине равен ϕ . Найдите высоту этой пирамиды. Какие дополнительные знания требуются для решения данной задачи? (*свойства окружности описанной около треугольника, определение тангенса угла*)...»

Фронтальный опрос на данном этапе направлен на формирование общеучебных действий познавательных УУД: умения структурировать знания; умение осознанно и произвольно выстраивать речевое высказывание в устной форме; познавательная рефлексия; контроль и оценка процесса и результата деятельности.

Решение задач на закрепление изученного материала формирует такие познавательные УУД как выбор наиболее эффективного способа решения задачи в зависимости от определенных условий; установление причинно-следственных связей, построение логической цепочки рассуждения.

Фрагмент из конспекта урока № 9:

Этап подведения итогов урока:

«...Вопросы к ученикам:

1. Какова была цель урока?
2. О каком новом виде симметрии вы узнали?
3. Сколько видов правильных многогранников существует?

Почему?...»

Постановка подобных вопросов в конце урока позволяет формировать личностную и познавательную рефлексию, а также контролировать и оценивать результаты деятельности.

Для проверки второго условия гипотезы были сформулированы дополнительные вопросы и задания к задачам из учебника. В таблице 5 представлены задачи из учебника, которые были доработаны для экспериментальной группы, и познавательные УУД, формируемые в процессе решения данных задач.

Таблица 5 – Задачи и формируемые познавательные УУД

№	Задачи	Познавательные УУД
1	В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 12 см и 5 см. Периметр основания равен 34 см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 45° . Найдите боковое ребро параллелепипеда. Дополнительные вопросы: Какое из исходных данных в задаче лишнее? Каков будет алгоритм решения задачи, если диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 30° ?	<ul style="list-style-type: none"> - критически оценивать, интерпретировать информацию с различных позиций, распознавать и фиксировать противоречия в информационных источниках; - искать и находить обобщенные способы решения задач, а так же осуществлять развернутый поиск информации и ставить на его основе новые задачи; - использовать для представления существенных связей, отношений и противоречий различные модельно-схематические средства.

Продолжение таблицы 5

2	<p>Через два противоположных ребра куба проведено сечение, площадь которого равна $64\sqrt{2}$ см². Найдите ребро куба и его диагональ.</p> <p>Дополнительные вопросы: Устно рассказать алгоритм решения задачи.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - искать и находить обобщенные способы решения задач, а так же осуществлять развернутый поиск информации; - использовать для представления существенных связей, отношений и противоречий различные модельно-схематические средства.
3	<p>Диагональ правильной четырехугольной призмы образует с плоскостью боковой грани угол в 30°. Найдите угол между плоскостью основания и боковой гранью.</p> <p>Дополнительные вопросы: Как по-другому можно назвать правильную четырехугольную призму? Какие теоремы/свойства помогут решить данную задачу? Устно проговорите, как изменится решение, если в условии задачи будет угол 60°, а не 30°.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - искать и находить обобщенные способы решения задач; - использовать для представления существенных связей, отношений и противоречий различные модельно-схематические средства; - находить и приводить критические аргументы по отношению к действиям и суждениям другого человека, разумно и спокойно воспринимать критику в отношении собственного суждения.
4	<p>Основание прямой призмы – треугольник со сторонами 5 см и 3 см и углом в 120° между ними. Наибольшая из площадей боковых граней равна 35см². Найдите площадь боковой поверхности призмы.</p> <p>Дополнительный вопрос: устно расскажите алгоритм нахождения площади полной поверхности для данной задачи.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - искать и находить обобщенные способы решения задач, а так же осуществлять развернутый поиск информации и ставить на его основе новые (познавательные или учебные) задачи; - использовать для представления существенных связей, отношений и противоречий различные модельно-схематические средства; - находить и приводить критические аргументы по отношению к действиям и суждениям другого человека, разумно и спокойно воспринимать критику в отношении собственного суждения, и рассматривать их как ресурс для собственного развития.
5	<p>В правильной n-угольной призме сторона основания равна a и высота равна h. Вычислите площадь боковой и полной поверхностей призмы, если n=3см, a=10см, h=15см.</p> <p>Дополнительные вопросы: Выберите правильный алгоритм решения и решите задачу.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - критически оценивать, интерпретировать информацию с различных позиций, распознавать и фиксировать противоречия; - искать и находить обобщенные способы решения задач, а так же осуществлять развернутый поиск информации; - использовать для представления существенных связей, отношений и противоречий различные модельно-схематические средства;

Продолжение таблицы 5

6	<p>Основание призмы – правильный треугольник ABC. Боковое ребро AA₁ образует равные острые углы со сторонами основания AB и AC. Сторона AB=BC=AC и равны 13 см. Докажите, что а) BC⊥AA₁; б) грань BB₁CC₁ –прямоугольник.</p> <p>Дополнительные вопросы: Есть ли избыточные данные в задаче? (избыточные данные: Сторона AB=BC=AC и равны 13 см.)</p>	<p>- критически оценивать, интерпретировать информацию с различных позиций, распознавать и фиксировать противоречия в информационных источниках;</p> <p>- использовать для представления существенных связей, отношений и противоречий различные модельно-схематические средства.</p>
7	<p>Докажите, что площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро.</p> <p>Дополнительные вопросы: Вопросы перед решением: что такое наклонная призма? Что такое сечение?</p>	<p>- искать и находить обобщенные способы решения задач, а так же осуществлять развернутый поиск информации и ставить на его основе новые задачи;</p> <p>- использовать для представления существенных связей, отношений и противоречий различные модельно-схематические средства.</p>
8	<p>Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна m, а острый угол равен 60°. Через катет, противолежащий этому углу, и противоположную этому катету вершину другого основания проведено сечение, составляющее угол 45° с плоскостью основания.</p> <p>Дополнительные вопросы:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Докажите, что треугольник A₁CB прямоугольный. 2. Укажите различные способы вычисления площадей основания и сечения призмы. 3. Вычислите площадь основания призмы. 4. Вычислите площадь боковой поверхности призмы. 	<p>- искать и находить обобщенные способы решения задач, а так же осуществлять развернутый поиск информации и ставить на его основе новые задачи;</p> <p>- использовать для представления существенных связей, отношений и противоречий различные модельно-схематические средства;</p> <p>- выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, при этом учитывая ограничения со стороны остальных участников образовательного процесса, а так же ограниченность ресурсов.</p>

Продолжение таблицы 5

9	<p>Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, высота призмы равна $1,5a$. Через сторону основания и противоположную вершину другого основания проведено сечение.</p> <p>Найдите:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Площадь боковой поверхности призмы. 2. Высоту основания призмы. <p>Дополнительные вопросы:</p> <ol style="list-style-type: none"> 3. Угол между плоскостями основания и сечения. 4. Отношение площадей основания и сечения призмы. 	<ul style="list-style-type: none"> - искать и находить обобщенные способы решения задач, а так же осуществлять развернутый поиск информации и ставить на его основе новые задачи; - использовать для представления существенных связей, отношений и противоречий различные модельно-схематические средства; - выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, при этом учитывая ограничения со стороны остальных участников образовательного процесса, а так же ограниченность ресурсов.
10	<p>В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, а плоский угол при вершине равен ϕ. Найдите высоту этой пирамиды.</p> <p>Дополнительные вопросы: Какие дополнительные знания требуются для решения данной задачи? (<i>свойства окружности описанной около треугольника, определение тангенса угла</i>).</p>	<ul style="list-style-type: none"> - критически оценивать, интерпретировать информацию с различных позиций, распознавать и фиксировать противоречия в информационных источниках; - искать и находить обобщенные способы решения задач, а так же осуществлять развернутый поиск информации и ставить на его основе новые задачи; - использовать для представления существенных связей, отношений и противоречий различные модельно-схематические средства.
11	<p>В пирамиде сторона основания равна m, а угол при вершине равен α. Найдите: а) высоту пирамиды; б) боковое ребро пирамиды; в) угол между боковой гранью и плоскостью; г) двугранный угол при боковом ребре пирамиды.</p> <p>Дополнительные вопросы: Каких данных не хватает для решения задачи? (<i>вид пирамиды – правильная четырехугольная, вид угла – плоский угол, в пункте в) какая плоскость – плоскость основания.</i>)</p>	<ul style="list-style-type: none"> - критически оценивать, интерпретировать информацию с различных позиций, распознавать и фиксировать противоречия в информационных источниках; - искать и находить обобщенные способы решения задач, а так же осуществлять развернутый поиск информации и ставить на его основе новые задачи; - использовать для представления существенных связей, отношений и противоречий различные модельно-схематические средства.

Продолжение таблицы 5

12	<p>Найдите площадь боковой поверхности правильной пирамиды, если сторона ее основания равна a, площадь боковой грани равна площади сечения, проведенного через вершину пирамиды.</p> <p>Дополнительные вопросы: Каких данных не хватает для решения? (<i>вид пирамиды – шестиугольная; через что проведено сечение - через вершину пирамиды и большую диагональ основания</i>).</p>	<p>- критически оценивать, интерпретировать информацию с различных позиций, распознавать и фиксировать противоречия в информационных источниках;</p> <p>- искать и находить обобщенные способы решения задач, а так же осуществлять развернутый поиск информации и ставить на его основе новые задачи;</p> <p>- использовать для представления существенных связей, отношений и противоречий различные модельно-схематические средства.</p>
13	<p>DABC – правильная треугольная пирамида.</p> <p>Докажите, что:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Скрещивающиеся ребра DC и AB перпендикулярны. 2. $AB \perp DCK$. 3. Плоскости DAB и DCK перпендикулярны. 4. Перпендикуляр OE из точки O к апофеме DK является перпендикуляром к плоскости DAB. <p>Дополнительные вопросы: Дополните подробным обоснованием приведенные записи:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $AB \perp CO$, $AB \perp DC$. 2. $AB \perp CK$, $AB \perp DK$, $AB \perp DCK$. 3. $AB \perp DCK$, $AB \in DAB$, $DAB \perp DCK$. 4. $OE \perp DK$, $OE \perp AB$, $OE \perp DAB$. 	<p>- искать и находить обобщенные способы решения задач, а так же осуществлять развернутый поиск информации и ставить на его основе новые задачи;</p> <p>- использовать для представления существенных связей, отношений и противоречий различные модельно-схематические средства;</p> <p>- выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, при этом учитывая ограничения со стороны остальных участников образовательного процесса, а так же ограниченность ресурсов.</p>
14	<p>Каждое ребро правильной четырехугольной пирамиды MABCD равно ϕ. Через середины N, K, L ребер проведено сечение пирамиды плоскостью.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Докажите, что а) $NK \parallel MDC$; б) $LF \parallel KN$; в) сечение NKLF – равнобедренная трапеция. 2. Вычислите периметр трапеции. <p>Дополнительные вопросы:</p> <ol style="list-style-type: none"> 3. Составьте план вычисления площади трапеции. 	<p>- искать и находить обобщенные способы решения задач, а так же осуществлять развернутый поиск информации и ставить на его основе новые задачи;</p> <p>- использовать для представления существенных связей, отношений и противоречий различные модельно-схематические средства;</p> <p>- выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, при этом учитывая ограничения со стороны остальных участников образовательного процесса, а так же ограниченность ресурсов.</p>

Продолжение таблицы 5

15	<p>Стороны оснований правильной усеченной пирамиды равны 4 дм и 2 дм, а боковое ребро равно 2 дм. Найдите высоту и апофему пирамиды. Дополнительные вопросы: каких данных не хватает? (вид пирамиды – треугольная), что такое апофема?</p>	<p>- критически оценивать, интерпретировать информацию с различных позиций, распознавать и фиксировать противоречия в информационных источниках; - искать и находить обобщенные способы решения задач, а так же осуществлять развернутый поиск информации и ставить на его основе новые (познавательные или учебные) задачи; - использовать для представления существенных связей, отношений и противоречий различные модельно-схематические средства.</p>
----	--	--

По итогам прохождения темы «Многогранники» в контрольной и экспериментальной группе был проведен зачет по двум вариантам, состоящий из 8 заданий (приложение 12). Познавательные УУД, проверяемые в ходе данного зачета, указаны в приложении 13.

2.3 Анализ результатов проведенной экспериментальной работы.

В ходе эксперимента были получены результаты, представленные в таблице 6. Участие в эксперименте принимало участие 49 учащихся из двух 10-х классов. Контрольная группа – 23 человека, экспериментальная группа - 26 человек.

Таблица 6 - Результаты проведенного эксперимента

	До эксперимента		После эксперимента	
	Контрольная группа	Экспериментальная группа	Контрольная группа	Экспериментальная группа
Неудовлетворительно	3	4	4	0
Удовлетворительно	12	13	10	6
Хорошо	5	7	6	11
Отлично	3	2	3	9
ИТОГО	23	26	23	26

Уровни сформированности познавательных УУД (нулевой, низкий, средний, высокий) соответствуют полученным оценкам (неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично) (рисунок 10-11).

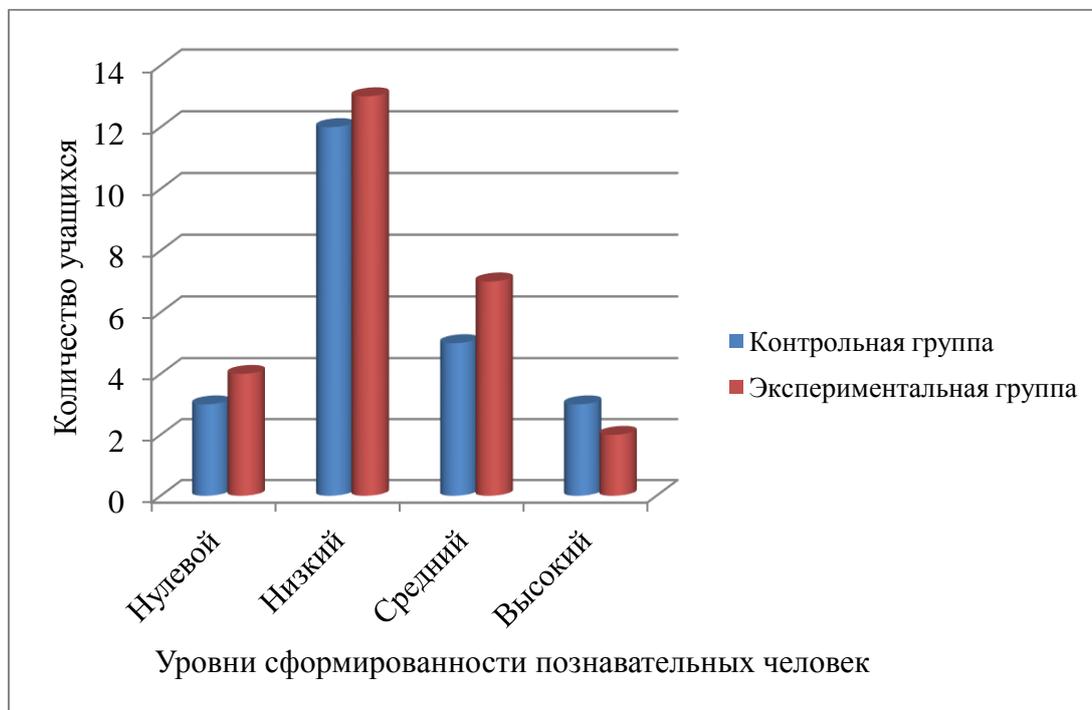


Рисунок 10 – Распределения уровней сформированности познавательных УУД до эксперимента

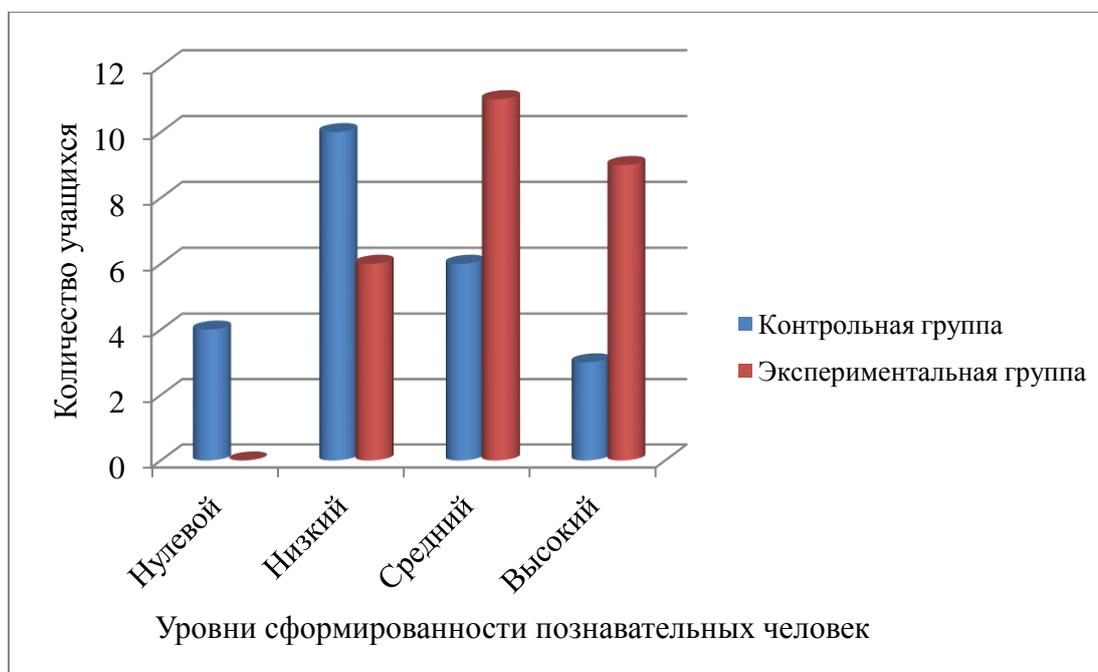


Рисунок 11 – Распределения уровней сформированности познавательных УУД после эксперимента.

Заключение о справедливости поставленной гипотезы было сделано путём использования χ^2 -критерия Пирсона.

Критерий χ^2 Пирсона – это непараметрический метод, позволяющий оценить значимость различий между фактическим количеством исходов (т.е. выявленным в результате исследования) и теоретическим количеством, которое можно ожидать в наблюдаемых группах при справедливости нулевой гипотезы. Таким образом, метод позволяет дать оценку статистической значимости различий двух или нескольких показателей.

Критерий χ^2 -критерия Пирсона:

H_0 : различия в выборках не значительны, гипотеза не доказана, если $\chi^2_{\text{эскп}} < \chi^2_{\text{кр}}$;

H_1 : различия в выборках значительны, гипотеза доказана, если $\chi^2_{\text{эскп}} > \chi^2_{\text{кр}}$.

$$V = (2 - 1) * (4 - 1) = 3 \qquad \chi^2_{\text{кр}} = 7,81$$

Таблица 7 – Расчёт критерия до эксперимента

Оценка	$n_{\text{кон}}$	$n_{\text{экс}}$	$f_{\text{кон}}$	$f_{\text{экс}}$	$(n_{\text{кон}}+n_{\text{экс}})$	$(\frac{f_{\text{кон}}}{n_{\text{кон}}}-\frac{f_{\text{экс}}}{n_{\text{экс}}})$	$1/((n_{\text{кон}}+n_{\text{экс}}) \times (\frac{f_{\text{кон}}}{n_{\text{кон}}}-\frac{f_{\text{экс}}}{n_{\text{экс}}})^2)$
Неудовлетворительно	3	4	0,13	0,154	7	-0,024	0,000082
Удовлетворительно	12	13	0,522	0,5	25	0,022	0,000019
Хорошо	5	7	0,218	0,27	12	-0,052	0,000225
Отлично	3	2	0,13	0,076	5	0,054	0,000583
	23	26	1	1	49		0,000909

$$\chi^2_{\text{эскп}} = n_{\text{кон}} \times n_{\text{экс}} \times \frac{1}{n_{\text{кон}} + n_{\text{экс}}} \times (f_{\text{кон}} - f_{\text{экс}})^2$$

$$\chi^2_{\text{эскп}} = 23 * 26 * 0.000909 = 0,543582 \approx 0,54$$

$\chi^2_{\text{эскп}} < \chi^2_{\text{кр}}$, различия в выборках не значительны.

Таблица 8 – Расчёт критерия после эксперимента

Оценка	$n_{\text{кон}}$	$n_{\text{экс}}$	$f_{\text{кон}}$	$f_{\text{экс}}$	$(n_{\text{кон}}+n_{\text{экс}})$	$(\frac{f_{\text{кон}}}{n_{\text{кон}}}-\frac{f_{\text{экс}}}{n_{\text{экс}}})$	$1/((n_{\text{кон}}+n_{\text{экс}}) \times (\frac{f_{\text{кон}}}{n_{\text{кон}}}-\frac{f_{\text{экс}}}{n_{\text{экс}}})^2)$
Неудовлетворительно	4	0	0,174	0	4	0,174	0,007569
Удовлетворительно	10	6	0,435	0,231	16	0,204	0,002601
Хорошо	6	11	0,261	0,423	17	-0,162	0,001544

Продолжение таблицы 8

Отлично	3	9	0,13	0,346	12	- 0,216	0,003888
	23	26	1	1	49		0,015602

$$x_{\text{экс}}^2 = n_{\text{кон}} \times n_{\text{экс}} \times \frac{1}{n_{\text{кон}} + n_{\text{экс}}} \times (f_{\text{кон}} - f_{\text{экс}})^2$$

$$X_{\text{экс}}^2 = 23 * 26 * 0,015602 = 9,329996 \approx 9,33$$

$X_{\text{экс}}^2 > X_{\text{кр}}^2$, различия в выборках значительны, гипотеза доказана.

Другими словами, статистически было доказано, что уровень сформированности познавательных УУД в контрольной и экспериментальной группах до проведения эксперимента не различался. После эксперимента различие между классами значительно. Следовательно, гипотеза данного исследования подтверждена.

Вывод по Главе 2

В данном исследовании представлен анализ двух учебников для общеобразовательных учреждений по геометрии. В ходе анализа выявлены сходства и различия в подаче информации разными авторами. Можно сделать вывод, что для успешного формирования познавательных УУД следует опираться не на один учебник, а пользоваться несколькими, или же дополнять учебные задачи дополнительными вопросами.

Экспериментальная работа была проведена на базе 10 классов муниципального общеобразовательного автономного учреждения «Средняя общеобразовательная школа №1 п.Новоорск им.Калачева А.В.» Новоорского района Оренбургской области. Были выбраны экспериментальная и контрольная группы. В процессе работы с группами на первом этапе исследования были проведены диагностика уровня сформированности познавательных УУД у учащихся. Второй этап исследования включал в себя проведение 11 уроков в каждом классе по темам главы III «Многогранники».

По итогам прохождения темы «Многогранники» в контрольной и экспериментальной группе был проведен зачет по двум вариантам, состоящий из 8 заданий.

Заключение о справедливости гипотезы, поставленной в исследовании, было сделано путём использования χ^2 -критерия Пирсона. Благодаря расчетам, было доказано, что уровень сформированности познавательных УУД в контрольной и экспериментальной группах до проведения эксперимента не различался. После эксперимента различие между классами значительно. Следовательно, гипотеза данного исследования подтверждена.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одними из составных элементов метапредметных результатов обучения являются познавательные универсальные учебные действия. Под ними понимаются способы деятельности, применимые не только в рамках образовательного процесса, но и при решении проблем в реальных жизненных ситуациях, которые осваиваются учащимися на базе одного, нескольких и более учебных предметов.

Совершенствованию навыков работы с информацией, приобретению умений работы с текстами, преобразования и интерпретирования информации, приобретению навыка систематизации способствует формирование данного вида УУД.

Результат их сформированности у учащихся предполагает полноценное освоение учениками всех компонентов учебной деятельности, включая учебные цели, задачи, действия и операции.

Формирование познавательных УУД на уровне среднего общего образования происходит благодаря созданию условий для налаживания межпредметных связей, формирования рефлексии ученика, а также для формирования метапредметных представлений и понятий.

На уровне среднего общего образования для обеспечения формирования познавательных УУД можно рекомендовать организовывать образовательные события, которые смогут вывести учеников на путь восстановления межпредметных связей и целостной картины мира.

В данном исследовании представлен анализ двух учебников для общеобразовательных учреждений по геометрии. В ходе анализа выявлены сходства и различия в подаче информации разными авторами. Можно сделать вывод, что для успешного формирования познавательных УУД следует опираться не на один учебник, а пользоваться несколькими, или же дополнять учебные задачи дополнительными вопросами.

Экспериментальная работа была проведена на базе 10 классов муниципального общеобразовательного автономного учреждения «Средняя общеобразовательная школа №1 п.Новоорск им.Калачева А.В.» Новоорского района Оренбургской области. Были выбраны экспериментальная и контрольная группы. В процессе работы с группами на первом этапе исследования были проведены диагностика уровня сформированности познавательных УУД у учащихся. Второй этап исследования включал в себя проведение 11 уроков в каждом классе по темам главы III «Многогранники».

По итогам прохождения темы «Многогранники» в контрольной и экспериментальной группе был проведен зачет по двум вариантам, состоящий из 8 заданий.

Заключение о справедливости гипотезы, поставленной в исследовании, было сделано путём использования χ^2 -критерия Пирсона. Благодаря расчетам, было доказано, что уровень сформированности познавательных УУД в контрольной и экспериментальной группах до проведения эксперимента не различался. После эксперимента различие между классами значительно. Следовательно, гипотеза данного исследования подтверждена.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. 520 головоломок [Электронный ресурс]: Сост. и ред. амер. изд. М. Гарднер. Пер. с англ. Ю. Н. Сударева. М. - Режим доступа: <http://matica.narod.ru/520golovolomok/Predisl.html>. - Загл. с экрана.
2. Асмолов А.Г. Проектирование универсальных учебных действия в старшей школе [Текст] / А.Г. Асмолов, Г.В. Бурменская, И.А. Володарская, О.А. Карабанова, С.В. Молчанов, Н.Г. Салмина // Национальный психологический журнал. - 2011. - №1(5) - С.104-110.
3. Асмолов, А.Г. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли. Система заданий [Текст]: пособие для учителя / А.Г. Асмолов, Г.В. Бурменская, И.А. Володарская - М.: Просвещение, 2010 - 217с.
4. Белуцкая А.К., Львовский В.А., Ушакова Е.Г. Программа развития универсальных учебных действий в примерной основной образовательной программе среднего общего образования. 2015. [Электронный ресурс] - Режим доступа: <http://edu.crowdexpert.ru/news/news-4696>.
5. Боженкова Л.И. Методика формирования универсальных учебных действий при обучении геометрии [Текст] / Л.И. Боженкова. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. - 205 с.
6. Газейкина А.В. Диагностика сформированности познавательных универсальных учебных действий обучающихся основной школы [Текст] / А.В. Газейкина, Ю.О. Казакова // Педагогическое образование в России. – 2016. - №7. – с. 161 – 168.
7. Геометрия. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. - 18-е изд. - М.: Просвещение, 2012. - 255 с.

8. Геометрия. Поурочные разработки. 10-11 классы [Текст] / С. М. Саакян, В. Ф. Бутузов. - М. : Просвещение, 2015. - 240 с. : ил. - (МГУ - школе). - ISBN 978-5- 09-028058-7.
9. Головоломки [Электронный ресурс]: Задачи на разрезание. - Режим доступа: <https://zadacha.uanet.biz/uploads/92/cc/92cc73f08520adf365b9ccb9fc4d4230/ZADACHI-NA-RAZREZANIE-1.pdf>. - Загл. с экрана.
10. Гордиенко, Е.И. Формирование познавательных универсальных учебных действий в курсе геометрии основной школы [Текст] / Е.И. Гордиенко, Е.В. Позднякова. - М: Материалы I Всероссийской очно-заочной научно-практической конференции «Проблемы и перспективы современного физико-математического, информационного и технологического образования» , 2017. - С. 6.
11. Горленко Н.М. Структура универсальных учебных действий и условия их формирования [Текст] / Н.М. Горленко // Народное образование. – 2012. - №4. - С. 41
12. Готман, Э.Г. Стереометрические задачи и методы их решения [Текст] / Э.Г. Готман // М.: МЦНМО. - 2007. - 160 с.
13. Екимова, М.А. Задачи на разрезание [Текст] / М.А. Екимова, Г.П. Кукин. - М: МЦНМО, 2002. - с. 120.
14. Зверева, Г. Ю. Развитие у школьников мотивации к учению [Электронный ресурс] / Г. Ю. Зверева. // Молодой ученый. - 2015. - № 22 (102). - С. 787-792. - Режим доступа: <https://moluch.ru/archive/102/23112/>.
15. Инфоурок: библиотека материалов [Электронный ресурс]: что такое УУД, и каково их значение в образовании и воспитании. - Режим доступа: <https://infourok.ru/chto-takoe-uud-i-kakovo-ih-znachenie-v-obrazovanii-ivospitanii-1060958.html> . - Загл. с экрана.
16. Карабанова О.А. Что такое универсальные учебные действия и зачем они нужны [Текст] / О.А. Карабанова // Муниципальное образование: инновации и эксперимент. - 2010. - №2. - С.11-12.

17. Кривошеева Н.А., Шульгина Т.А. Методические условия формирования познавательных УУД в процессе изучения многогранников. // Студенческий вестник: электрон. научн. журн. - 2021. - № 45(190). - Режим доступа: <https://studvestnik.ru/journal/stud/herald/190>.

18. Кривошеева Н.А., Шульгина Т.А. Проблема формирования познавательных УУД // Студенческий вестник: электрон. научн. журн. - 2021. - № 45(190). - Режим доступа: <https://studvestnik.ru/journal/stud/herald/190>.

19. Кунаш М.А. Формирование и развитие УУД у старшеклассников на уроках и во внеурочной деятельности: методические рекомендации для педагогических работников общеобразовательных организаций [Текст] / М.А. Кунаш // Мурманск: ГАУДПО МО «ИРО». - 2017. - 50 с.

20. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 кл. [Текст]: учеб. для организаций, осуществляющих образовательную деятельность. Базовый и углублённый уровни / В.А. Гусев, А.Г. Рубин. // М. : Баласс. - 2016.

21. Научно-методический журнал «Концепт» [Электронный ресурс]: развитие универсальных учебных действий учащихся в условиях реализации ФГОС основных общеобразовательных программ. - Москва [2015]. - Режим доступа: http://www.irbruo.ru/dsfgsG/distanc_rmo/rus_yaz/2.pdf. - Загл. с экрана.

22. Нестерова И.А. Формирование познавательных универсальных учебных действий [Электронный ресурс] // Энциклопедия Нестеровых - Режим доступа: <https://odiplom.ru/lab/formirovanie-poznavatelnyh-universalnyh-uchebnyh-deistvii.html>

23. Обуховская А.С. Методология формирования единой оценочной системы метапредметных результатов обучающихся разных ступеней обучения [Текст] / А.С. Обуховская // М.: Сборник методических материалов. - 2020. - 244 с.

24. Познавательные УУД [Электронный ресурс]: Пионицина, И. В. - Режим доступа: <https://multiurok.ru/pionitsinairina/blog/poznavatiel-nyie-uud-1.html>
25. Попова, Н.Е. Интеграция универсальных учебных действий учащихся в соответствии с требованиями ФГОС СОО [Текст] / Н.Е. Попова, О.А. Еремина. Е.И. - М.: Педагогическое образование в России. - 2015. - №12. - С. 1 - 6.
26. Проектирование урока с позиции формирования универсальных учебных действий. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://www.ug.ru/method/article/260>. - Загл. с экрана.
27. Реестр примерных основных общеобразовательных программ [Электронный ресурс]: примерная основная образовательная программа среднего общего образования. - Режим доступа: <https://fgosreestr.ru/poop/primernaya-osnovnaya-obrazovatel'naya-programma-srednego-obshhego-obrazovaniya>. - Загл. с экрана.
28. Смагулова, Ш. Ж. Многогранники в геометрии [Текст]: методические указания по математике / Ш.Ж. Смагулова // Павлодар. – 2008. – 35 с.
29. Собинова Л.А. Факторы развития мотивации учебной деятельности [Текст] / Л.А. Собинова // Современные исследования социальных проблем. – 2010. – №4. – С. 5.
30. ФГОС [Электронный ресурс]: федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования (ФГОС СОО). - Режим доступа: <https://fgos.ru/>. - Загл. с экрана.
31. Чуланова, Н. А. Нормативный контекст определения «познавательные универсальные учебные действия» [Текст]: методические указания по математике / Н.А. Чуланова // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – С. 2.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Самостоятельная работа по теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей»

Вариант 1

1. Диагональ куба равна 6 см. Найдите:
 - а) ребро куба;
 - б) косинус угла между диагональю куба и плоскостью одной из его граней.
2. Сформулируйте определение перпендикулярности прямой и плоскости. Докажите теорему, выражающую признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Вариант 2

1. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат, диагональ параллелепипеда равна $2\sqrt{6}$ см, а его измерения относятся как 1:1:2. Найдите:
 - а) измерения параллелепипеда;
 - б) синус угла между диагональю параллелепипеда и плоскостью его основания.
2. Сформулируйте определение перпендикулярности двух плоскостей. Докажите теорему, выражающую признак перпендикулярности двух плоскостей.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Конспект урока №1.

Тема: «Понятие многогранника. Призма»

Цели урока: ввести понятие многогранника, призмы и их элементов; рассмотреть виды призмы.

Задачи:

- изучить многогранник на примере параллелепипеда и его элементы, познакомиться с призмой и её элементами,
- рассмотреть виды призм;
- развивать у учащихся логическое мышление, смысловую память и внимание;
- организовать деятельность учащихся по самостоятельному применению знаний и умений;

создать условия для формирования следующих познавательных УУД:

- самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели;
- поиск и выделение нужной информации;
- использование моделей при решении задач;
- умение осознанно и произвольно выстраивать речевое высказывание, как в устной, так и письменной формах;
- выбор наиболее эффективного способа решения задачи в зависимости от определенных условий;
- смысловое чтение, основанное на осознании цели чтения и выбора вида чтения, извлечение необходимой информации, определение главной и второстепенной информации;
- анализ объектов с целью выделения существенных и несущественных признаков;

- синтез – составление целого из его частей, в том числе с самостоятельным достраиванием, восполнением недостающих компонентов;

- установление причинно-следственных связей, построение логической цепочки рассуждения.

Тип урока: изучение нового материала.

Оборудование: классная доска, экран, компьютер, проектор, развертки и макеты многогранников.

Ход урока

1. Организационный этап:

- приветствие учащихся, проверка посещаемости.

2. Постановка темы урока, изучение материала:

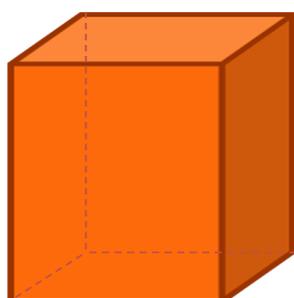
Попросить учащихся вспомнить уже известные им понятия тетраэдра и параллелепипеда. Подчеркнуть, что каждая из этих поверхностей ограничивает некоторое геометрическое тело, отделяет это тело от остальной части пространства.

Предложить учащимся самостоятельно построить определение многогранника. Выслушать предложения и совместно сформулировать правильное определение:

Определение: Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело, называется многогранной поверхностью или многогранником.

Многие строения в окружающем нас мире, в частности, пирамида Хеопса, имеют форму многогранников. Поэтому для лучшей эксплуатации и моделирования зданий нужно изучить свойства многогранников.

Рассмотрим элементы на примере макета параллелепипеда.



Основные элементы:

- **Грани** – многоугольники, образующие поверхность многогранника.

- **Ребра** – стороны граней.

- **Вершины** - концы ребер.

- **Диагональ** - отрезок, соединяющий 2 вершины, не принадлежащие одной грани.

Предложить учащимся ответить на вопросы:

- Из чего состоит поверхность многогранника? (из многоугольников)

- Многоугольники – это..... (грани)

- Что такое рёбра? (стороны граней - отрезки)

- Вершины? (концы рёбер)

Используя модели многогранников (куба, параллелепипеда, тетраэдра, призмы и др.), **попросить учащихся** назвать их элементы: грани, рёбра, вершины, диагонали граней и диагонали многогранника.

С помощью рисунков 70—72 учебника **ввести понятия** выпуклого и невыпуклого многогранников.

Некоторым многогранникам, как и многоугольникам, можно дать определенное название, т.е. разделить множество многогранников на подмножества. Сегодня на уроке мы познакомимся с особым многогранником – призмой.

Вопросы к ученикам:

1. Анализируя чертеж на слайде, попробуйте построить определение призмы.

2. Какие элементы можно выделить у призмы?

Составить определение призмы и её элементов. Ввести понятия наклонной и прямой призмы:

- **Призма** - многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов.

- Многоугольники $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ называются **основаниями**, а параллелограммы - **боковыми гранями призмы**. Отрезки A_1B_1, A_2B_2, A_nB_n называются **боковыми ребрами**.

- Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется **высотой призмы**.

- Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется **прямой**, в противном случае – **наклонной**.

Предложить учащимся самостоятельно составить определение правильной призмы.

Прямая призма называется **правильной**, если ее основания-правильные многоугольники.

3. Закрепление материала. Решение задач:

Попросить учащихся устно ответить на вопросы:

1. Объясните, что такое: а) многогранник; б) поверхность многогранника.

2. Какой многогранник называется выпуклым?

3. Дан выпуклый многогранник. Что называют а) его гранью; б) его ребром; в) его вершиной?

4. Назовите известные вам многогранники.

а) Выпуклым или не выпуклым является каждый из них?

б) Сколько граней, ребер и вершин у каждого?

5. Какое наименьшее число ребер может иметь многогранник?

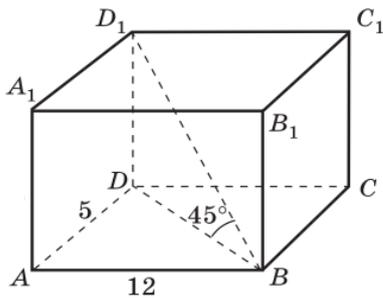
Решение задач:

В процессе решения задач можно применять символическую запись (a, α) — величина угла между прямой a и плоскостью α , (α, β) — величина угла между плоскостями α и β .

Задача 1.

В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 12 см и 5 см. Периметр основания равен 34 см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 45° . Найдите боковое ребро параллелепипеда. **Дополнительные вопросы:** Какое из исходных данных в задаче лишнее? Каков будет алгоритм решения задачи, если диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 30° ?

Запись задачи:



Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ —
прямоугольный параллелепипед, $AB=12$ см,
 $AD=5$ см, $P_{ABCD}=34$ см, $(D_1 B, \wedge ABC)=45^\circ$.

Найти DD_1 .

Решение.

- 1) Из ABD имеем $BD^2=AB^2+AD^2$, $BD^2=144+25=169$, $BD=13$.
- 2) $D_1 D \perp ADC$, BD —проекция диагонали BD_1 на плоскость ADC , поэтому угол $D_1 B D$ — угол между диагональю BD_1 и плоскостью основания: угол $D_1 B D=45^\circ$. Треугольник $D_1 B D$ - прямоугольный и равнобедренный: $D_1 D=BD=13$ см.

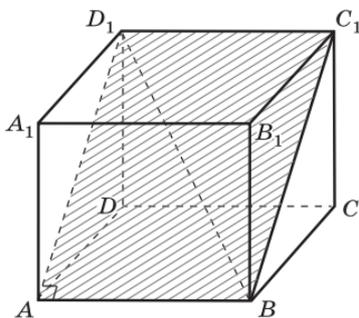
Ответ: 13 см.

Ответы на дополнительные вопросы: лишнее данное – периметр.
Алгоритм решения: в п.2 решения берем боковое ребро за x , составляем квадратное уравнение, используя теорему Пифагора, и решаем его.

Задача 2.

Через два противоположных ребра куба проведено сечение, площадь которого равна $64\sqrt{2}$ см². Найдите ребро куба и его диагональ. Устно рассказать алгоритм решения задачи.

Запись задачи:



Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, через два противоположных ребра которого проведено сечение. S сечения= $64\sqrt{2}$ см².

Найдите ребро куба и его диагональ.

Решение.

- 1) Пусть $AB=BC=a$, тогда $BC_1=a\sqrt{2}$.
- 2) $BA \perp AD$ и $BA \perp AA_1$, следовательно, BA перпендикулярно к плоскости грани $ADD_1 A_1$, и поэтому $BA \perp AD_1$.

Сечение $ABC_1 D_1$ — прямоугольник. $S_{ABC_1 D_1}=AB \cdot BC_1$, т.е. $a \cdot a\sqrt{2}=64\sqrt{2}$, откуда $a^2=64$, $a=8$.

3) $BD_1^2 = 3a^2$ (по теореме о квадрате диагонали прямоугольного параллелепипеда), $BD_1^2 = 3 \cdot 8^2$, $BD_1 = 8\sqrt{3}$.

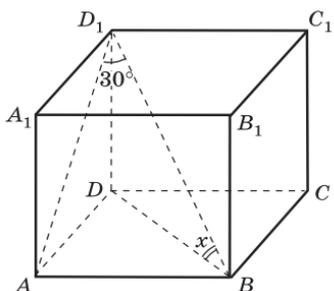
Ответ: $AB = 8$ см, $BD_1 = 8\sqrt{3}$ см.

Задача 3.

Диагональ правильной четырехугольной призмы образует с плоскостью боковой грани угол в 30° . Найдите угол между плоскостью основания и боковой гранью.

Дополнительные вопросы: Как по-другому можно назвать правильную четырехугольную призму? Какие теоремы/свойства помогут решить данную задачу? Устно проговорите, как изменится решение, если в условии задачи будет угол 60° , а не 30° .

Запись задачи:



Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — правильная четырехугольная призма, $(BD_1, \text{пл. } ADD_1) = 30^\circ$.

Найти $(BD_1, \text{пл. } ABC)$.

Решение.

1) $AB \perp \text{пл. } ADD_1$, следовательно, AD_1 — проекция диагонали BD_1 на плоскость грани $ADD_1 A_1$, поэтому угол $AD_1 B$ — угол между диагональю BD_1 и плоскостью этой грани. Угол $BD_1 A = 30^\circ$.

2) Отрезок BD — проекция диагонали BD_1 на плоскость основания призмы, поэтому угол $D_1 B D = x$ — искомый угол между диагональю призмы и плоскостью основания.

3) Пусть $AB = a$, тогда $BD = a\sqrt{2}$. Из $\triangle ABD_1$ получаем $BD_1 = 2a$ (по свойству катета, лежащего против угла 30°).

4) Из $\triangle D_1 D B$ имеем $\cos x = \frac{BD}{BD_1} = \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = 45^\circ$.

Ответ: 45° .

Ответы на дополнительные вопросы: прямоугольный параллелепипед; теорема Пифагора, свойство катета, лежащего против угла 30° , определение косинуса угла; необходимо рассмотреть треугольник

ABD_1 и с помощью теоремы Пифагора через квадратное уравнение найти BD_1 .

4. Подведение итогов урока:

Вопросы к ученикам:

1. Какие темы мы изучили на уроке?
2. Какие задачи стояли перед нами на уроке?
3. Смогли ли мы реализовать эти задачи?
4. Что было самым трудным на уроке?
5. Интересно ли вам было на уроке?
6. Есть ли вопросы? Что-то осталось непонятным?

5. Домашнее задание:

1. Прочитать параграф 27, 30 (до площади поверхности призмы); самостоятельно изучить параграфы 28,29,31.

2. Найти развертку любого многогранника (кроме куба), склейте из бумаги модель этого многогранника и опишите его: название, количество граней, ребер, вершин, какие многоугольники являются гранями многогранника.

3. Решить задачи: 220, 227.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Конспект урока №2.

Тема: «Площадь поверхности призмы»

Цели урока: доказать теорему о площади боковой поверхности прямой призмы, выработать навыки решения задач на вычисление площадей полной и боковой поверхностей призмы.

Задачи:

- познакомиться с формулами вычисления площади поверхности призмы;
- сформировать умение учащихся применять теоретический материал к решению задач;
- развивать пространственное и конструктивное мышление;
- формировать умение брать ответственность за выбор и проявлять самостоятельность при решении возникших проблем;
- воспитывать аккуратность в чертежах, четкое оформление решений задач, положительный интерес к изучению математики, самостоятельности, инициативности учащихся на уроке;
- создать условия для формирования следующих познавательных УУД:
 - самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели, гипотезы и их проверка;
 - использование моделей при решении задач;
 - умение осознанно и произвольно выстраивать речевое высказывание, как в устной, так и письменной формах;
 - выбор наиболее эффективного способа решения задачи в зависимости от определенных условий;
 - установление причинно-следственных связей, построение логической цепочки рассуждения.

Тип урока: изучение нового материала, систематизация знаний и умений учащихся.

Оборудование: классная доска; модели призм; компьютер, проектор, экран.

Ход урока

1. Организационный этап:

- приветствие учащихся, проверка посещаемости.

2. Проверка домашнего задания:

Два ученика на доске записывают решения домашних номеров. У остальных проверяются наличие моделей многогранников с описанием.

Пока ученики записывают решения домашних номеров, с остальными учащимися проводится опрос:

1. Что такое многогранник?
2. Какие элементы содержит многогранник?
3. Что такое поверхность многогранника?
4. Что значит Эйлера характеристика?
5. Какой угол называется плоским?
6. Чему равна сумма всех плоских углов в многограннике?

3. Постановка темы урока, изучение материала:

Предложить учащимся самостоятельно сформулировать определение понятий «площадь боковой поверхности призмы» и «площадь полной поверхности призмы». Выслушать версии и помочь с правильной формулировкой.

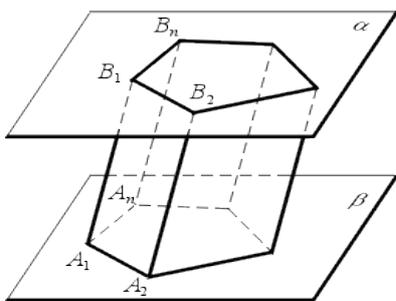
Площадью боковой поверхности призмы называется сумма площадей её боковых граней. $S_{бок} = S_1 + S_2 + \dots + S_n$

Площадью полной поверхности призмы – сумма площадей её боковых граней и двух площадей оснований. $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$

Теорема: Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту.

Предложить учащимся доказать данную теорему и вызвать желающего ученика к доске.

Доказательство:



Боковые грани прямой призмы - прямоугольники, основания которых - стороны основания призмы, а высоты равны высоте h призмы. Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей указанных прямоугольников, т.е. равна сумме произведений сторон основания на высоту h . Вынося множитель h за скобки, получим в скобках сумму сторон основания призмы, т.е. его периметр P . Итак, $S_{бок} = P \cdot h$. Теорема доказана.

Основные моменты мы с вами рассмотрели, а теперь давайте перейдём к практической части занятия.

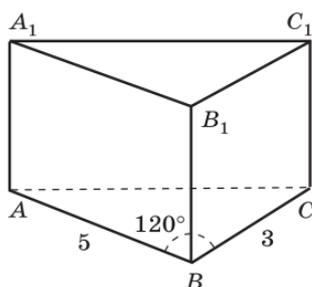
4. Закрепление материала. Решение задач:

Задача 1.

Основание прямой призмы – треугольник со сторонами 5 см и 3 см и углом в 120° между ними. Наибольшая из площадей боковых граней равна 35см^2 . Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Дополнительный вопрос: устно расскажите алгоритм нахождения площади полной поверхности для данной задачи.

Запись задачи:



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, $AB=5\text{см}$, $BC=3\text{см}$, угол $ABC=120^\circ$. Наибольшая из площадей боковых граней равна 35см^2 .

Найти $S_{бок}$.

Решение

1) Из $\triangle ABC$ находим ребро AC по теореме косинусов:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ$, $AC^2 = 25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot (-1/2) = 49$, $AC = 7\text{см}$.

2) Отрезок AC — большая сторона треугольника ABC , следовательно, ACC_1A_1 — большая боковая грань призмы.

Поэтому $AC \cdot CC_1 = 35$, или $7 \cdot h = 35$, откуда $h = 5$.

$$3) S_{\text{бок}} = P \cdot h, S_{\text{бок}} = (5 + 3 + 7) \cdot 5 = 75.$$

Ответ: 75 см².

Задача 2.

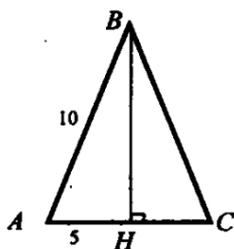
В правильной n-угольной призме сторона основания равна a и высота равна h. Вычислите площадь боковой и полной поверхностей призмы, если n=3, a=10см, h=15см. Выберите правильный алгоритм решения и решите задачу.

Алгоритм 1 (правильный).

1. Вычисляем сначала периметр основания, затем находим площадь

боковой поверхности. ($P_{\text{осн}} = 3 \cdot 10 = 30 \text{ см}$;

$$S_{\text{бок}} = 30 \cdot 15 = 450 \text{ см}^2).$$



2. Рассматриваем треугольник, лежащий в основании призмы. Проводим высоту (она же биссектриса и медиана). Вычисляем значение высоты

треугольника. ($BH = \sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{3} \text{ см}$).

3. Находим площадь основания по формуле $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$. ($S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot$

$$10 \cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

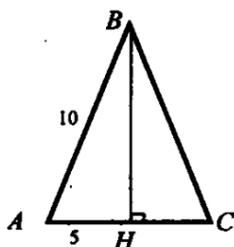
4. Находим площадь полной поверхности.

$$S_{\text{полн}} = 450 + 25\sqrt{3} + 25\sqrt{3} = (450 + 50\sqrt{3}) \text{ см}^2.$$

Алгоритм 2.

1. Вычисляем сначала периметр основания, затем находим площадь

боковой поверхности.



2. Рассматриваем треугольник, лежащий в основании призмы. Проводим высоту (она же биссектриса и медиана). Вычисляем значение высоты треугольника.

3. Находим площадь основания по формуле: $S_{\text{осн}} = a \cdot h$.

4. Находим площадь полной поверхности.

5. Подведение итогов урока:

Попросить учеников пройти тестирование по вариантам (на 5

минут):

1 вариант.

1). Призма – это выпуклый многогранник, который состоит из:

- а) многоугольника и нескольких параллелограммов
- б) двух равных многоугольников и нескольких параллелограммов
- в) двух равных многоугольников, лежащих в параллельных плоскостях, и n параллелограммов

2). В основании призмы лежит:

- а) любой выпуклый многоугольник
- б) только правильный многоугольник
- в) любой многоугольник или окружность

3). Призма является прямой, если:

- а) боковые ребра перпендикулярны основаниям
- б) основания – правильные многоугольники
- в) некоторые боковые грани – квадраты

4). Призма является правильной, если:

- а) в основании лежит правильный многоугольник
- б) боковые грани перпендикулярны основаниям
- в) она прямая и в основании лежит правильный многоугольник

5). Высотой прямой призмы можно считать:

- а) ребро основания
- б) боковое ребро
- в) любой отрезок, перпендикулярный основанию

6). Площадь боковой поверхности призмы – это:

- а) сумма площадей всех боковых граней
- б) сумма площадей двух оснований
- в) сумма площадей всех её граней

7). Площадь полной поверхности призмы – это:

- а) сумма площадей всех боковых граней
- б) сумма площадей двух оснований

в) сумма площадей всех её граней

8). Площадь боковой поверхности прямой призмы можно найти по формуле:

а) $S_{бок} = S_{осн} \cdot h$

б) $S_{бок} = a \cdot h$, где a – сторона основания

в) $S_{бок} = P_{осн} \cdot h$

9). Площадь полной поверхности прямой призмы можно найти по формуле:

а) $S_{полн} = S_{осн} + S_{бок}$

б) $S_{полн} = 2S_{осн} + S_{бок}$

в) $S_{полн} = 2P_{осн} + S_{бок}$

2 вариант.

1). Призма является прямой, если:

а) некоторые боковые грани – квадраты

б) боковые ребра перпендикулярны основаниям

в) основания – правильные многоугольники

2). Призма является правильной, если:

а) в основании лежит правильный многоугольник

б) она прямая и в основании лежит правильный многоугольник

в) боковые грани перпендикулярны основаниям

3). Призма – это выпуклый многогранник, который состоит из:

а) двух равных многоугольников, лежащих в параллельных плоскостях,

и n параллелограммов

б) двух равных многоугольников и нескольких параллелограммов

в) многоугольника и нескольких параллелограммов

4). В основании призмы лежит:

а) только правильный многоугольник

б) любой многоугольник или окружность

в) любой выпуклый многоугольник

5). Площадь полной поверхности прямой призмы можно найти по формуле:

а) $S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$

б) $S_{\text{полн}} = 2P_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$

в) $S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$

б). Площадь полной поверхности призмы – это:

а) сумма площадей всех боковых граней

б) сумма площадей всех её граней

в) сумма площадей двух оснований

7). Высотой прямой призмы можно считать:

а) боковое ребро

б) любой отрезок, перпендикулярный основанию

в) ребро основания

8). Площадь боковой поверхности призмы – это:

а) сумма площадей всех её граней

б) сумма площадей двух оснований

в) сумма площадей всех боковых граней

9). Площадь боковой поверхности прямой призмы можно найти по формуле:

а) $S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot h$

б) $S_{\text{бок}} = S_{\text{осн}} \cdot h$

в) $S_{\text{бок}} = a \cdot h$, где a – сторона основания

Вопросы к ученикам:

1. Интересно ли вам было на уроке?

2. Есть ли вопросы? Что-то осталось непонятным?

6. Домашнее задание:

1. Повторить параграфы 27-31.

2. Решить задачи по вариантам: 229 (б,в).

3. Придумать задачу на нахождение полной и боковой поверхности призмы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Конспект урока №3.

Тема: «Повторение теории, решение задач на вычисление площади поверхности призмы»

Цели урока: Повторить определения призмы, её элементов, вывод формулы площади боковой поверхности прямой призмы, продолжить формирование навыков решения задач.

Задачи:

- 1) продолжить формирование навыков решения задач по теме;
- 2) проверить навыки решения основных типов задач;
- 3) обеспечить в ходе урока воспитание целеустремленности, настойчивости, самостоятельности в поисках и выборе пути решения задач;
- 4) развивать творческие способности учащихся, их познавательную активность;
- 5) создать условия для формирования следующих познавательных УУД:
 - использование моделей при решении задач;
 - выбор наиболее эффективного способа решения задачи в зависимости от определенных условий;
 - установление причинно-следственных связей, построение логической цепочки рассуждения.

Тип урока: систематизация знаний и умений учащихся, проверка уровня усвоения знаний.

Оборудование: классная доска; компьютер, проектор, экран.

Ход урока

1. Организационный этап:

- приветствие учащихся, проверка посещаемости.

2. Решение задач:

Предложить ученикам решать задачи со слайдов. Желающие решают

задачи на доске.

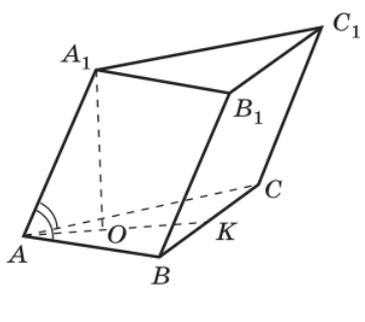
Задача 1.

Основание призмы – правильный треугольник ABC . Боковое ребро AA_1 образует равные острые углы со сторонами основания AB и AC . Сторона $AB=BC=AC$ и равны 13 см. Докажите, что а) $BC \perp AA_1$; б) грань BB_1CC_1 – прямоугольник. Есть ли избыточные данные в задаче? (избыточные данные: Сторона $AB=BC=AC$ и равны 13 см.)

Решение.

а) Так как AA_1 образует равные острые углы со сторонами AB и AC , то проекцией ребра AA_1 на плоскость ABC является отрезок AO биссектрисы угла BAC . $BC \perp AO$, следовательно, $BC \perp AA_1$ по теореме о трёх перпендикулярах.

б) $BC \perp AA_1$, $AA_1 \parallel BB_1$, поэтому $BC \perp BB_1$.



Задача 2.

Докажите, что площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро.

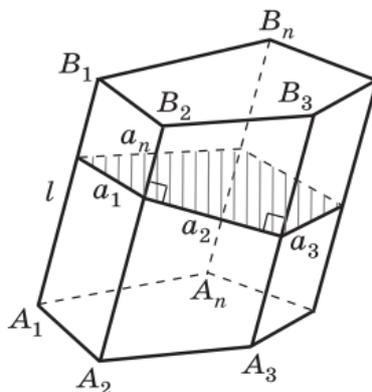
Вопросы перед решением: что такое наклонная призма? Что такое сечение?

Доказательство.

Плоскость перпендикулярного сечения призмы перпендикулярна к боковым рёбрам, поэтому стороны перпендикулярного сечения призмы являются высотами параллелограммов.

$$S_{\text{бок}} = a_1 l + a_2 l + \dots + a_n l,$$

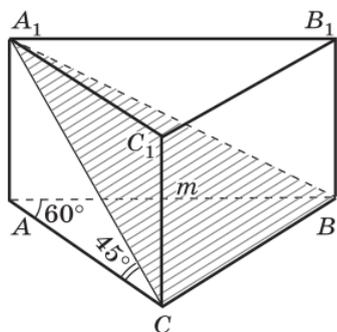
$$S_{\text{бок}} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) l, \quad S_{\text{бок}} = P_{\perp} \cdot l.$$



Задача 3.

Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна m , а острый угол равен 60° . Через катет, противолежащий этому углу, и противоположную этому катету вершину другого основания проведено сечение, составляющее угол 45° с плоскостью основания.

1. Докажите, что треугольник A_1CB прямоугольный.
2. Укажите различные способы вычисления площадей основания и сечения призмы.
3. Вычислите площадь основания призмы.
4. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.



Ответ: 3. $\frac{m^2\sqrt{3}}{8}$ см; 4. $\frac{m^2(3+\sqrt{3})}{4}$ см².

3. Подведение итогов урока:

Вопросы к ученикам:

1. Какие задачи являлись самыми трудными?
2. Есть ли вопросы? Что-то осталось непонятным?

4. Домашнее задание:

1. Решить задачи №226,227,228.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Конспект урока №4.

Тема: «Повторение теории, решение задач на вычисление площади поверхности призмы»

Цели урока: Повторить определения призмы, её элементов, вывод формулы площади боковой поверхности прямой призмы, продолжить формирование навыков решения задач.

Задачи:

1) продолжить формирование навыков решения задач по теме;
2) проверить навыки решения основных типов задач;
3) обеспечить в ходе урока воспитание целеустремленности, настойчивости, самостоятельности в поисках и выборе пути решения задач;

4) развивать творческие способности учащихся, их познавательную активность.

5) создать условия для формирования следующих познавательных УУД:

- использование моделей при решении задач;
- выбор наиболее эффективного способа решения задачи в зависимости от определенных условий;
- умения структурировать знания;
- контроль и оценка процесса и результата деятельности;
- установление причинно-следственных связей, построение логической цепочки рассуждения.

Тип урока: систематизация знаний и умений учащихся, проверка уровня усвоения знаний.

Оборудование: классная доска; компьютер, проектор, экран.

Ход урока

1. Организационный этап:

- приветствие учащихся, проверка посещаемости.

2. Решение задач:

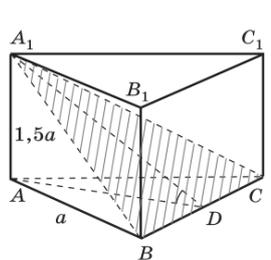
Предложить ученикам решать задачи со слайдов. Желающие решают задачи на доске.

Задача 1.

Сторона основания правильной треугольной призмы равна a , высота призмы равна $1,5a$. Через сторону основания и противоположную вершину другого основания проведено сечение.

Найдите:

1. Площадь боковой поверхности призмы.
2. Высоту основания призмы.
3. Угол между плоскостями основания и сечения.
4. Отношение площадей основания и сечения призмы.



Ответ: 1) $4,5a^2 \text{ см}^2$; 2) $\frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ см}$; 3) 60° ; 4) $\frac{1}{2}$.

3. Самостоятельная работа:

Ученикам предлагается выполнить самостоятельную работу по вариантам.

Вариант 1

Сторона основания правильной четырёхугольной призмы равна a , диагональ призмы образует с плоскостью основания угол 45° . Найдите:

- а) диагональ призмы;
- б) угол между диагональю призмы и плоскостью боковой грани;
- в) площадь боковой поверхности призмы;
- г) площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания.

Вариант 2

Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна a и образует с плоскостью боковой грани угол 30° . Найдите:

- а) сторону основания призмы;
- б) угол между диагональю призмы и плоскостью основания;
- в) площадь боковой поверхности призмы;
- г) площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через диагональ основания параллельно диагонали призмы.

Ответы:

Вариант 1. а) $2a$; б) 30° ; в) $4a^2\sqrt{2}$; г) $a^2\sqrt{3}$.

Вариант 2. а) $\frac{a}{2}$; б) 45° ; в) $a^2\sqrt{2}$; г) $\frac{a^2\sqrt{2}}{8}$.

В то время как учащиеся решают самостоятельную работу, выборочно провести проверку домашнего задания.

4. Подведение итогов урока:

Вопросы к ученикам:

1. Какие задачи являлись самыми трудными?
2. Есть ли вопросы? Что-то осталось непонятным?

5. Домашнее задание:

1. Решить задачи №236,238.

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Конспект урока №5

Тема: «Пирамида. Правильная пирамида»

Цели урока: ввести понятие пирамиды, доказать теорему о площади боковой поверхности правильной пирамиды, рассмотреть задачи, связанные с пирамидой.

Задачи:

- сформулировать понятия «пирамида», «правильная пирамида», «усеченная пирамида»;
- овладеть стандартной классификацией пирамид;
- научить учащихся изображать пирамиду от руки и с применением простых чертежных инструментов;
- развивать у учащихся логическое мышление, смысловую память и внимание;
- обучить учеников уметь находить площади боковой и полной поверхности пирамиды, используя основные формулы;
- создать условия для формирования следующих познавательных УУД:
 - поиск и выделение нужной информации;
 - использование моделей при решении задач;
 - умение осознанно и произвольно выстраивать речевое высказывание, как в устной, так и письменной формах;
 - выбор наиболее эффективного способа решения задачи в зависимости от определенных условий;
 - смысловое чтение, основанное на осознании цели чтения и выбора вида чтения, извлечение необходимой информации, определение главной и второстепенной информации;
 - анализ объектов с целью выделения существенных и несущественных признаков;

- синтез – составление целого из его частей, в том числе с самостоятельным достраиванием, восполнением недостающих компонентов;

- установление причинно-следственных связей, построение логической цепочки рассуждения.

Тип урока: изучение нового материала.

Оборудование: классная доска, экран, компьютер, проектор, развертки и макеты пирамиды.

Ход урока

1. Организационный этап:

- приветствие учащихся, проверка посещаемости.

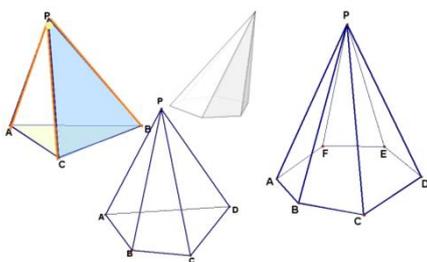
2. Постановка темы урока, изучение материала:

Термин «пирамида» заимствован из греческого «пирамис» или «пирамидос». Греки в свою очередь позаимствовали это слово из египетского языка. В папирусе Ахмеса встречается слово «пирамис» в смысле ребра правильной пирамиды. Другие считают, что термин берет свое начало от формы хлебцев в Древней Греции («пирос» - рожь). В связи с тем, что форма пламени напоминает образ пирамиды, некоторые ученые считали, что термин происходит от греческого слова «пир» - огонь.

Мы с вами рассмотрим пирамиду с математической точки зрения.

Что мы можем узнать о пирамиде? Познакомиться с понятием пирамида, ее видами, элементами, свойствами, решить простейшие задачи.

Цель урока - изучить новый вид многогранников – пирамиды. Рассмотреть задачи, связанные с пирамидой.



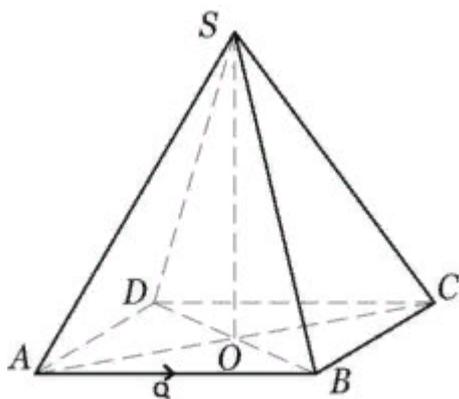
Предложить учащимся выполнить следующее задание – описать фигуры, которые они видят на слайде:

- Что объединяет эти тела?
- Как можно назвать эти тела?

Помочь сформулировать определение понятия «Пирамида»:

пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника – основание пирамиды; точки, не лежащей в плоскости основания – вершины пирамиды и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания – боковыми ребрами.

Предложить ученикам самостоятельно составить определение понятия «высота пирамиды».



Высотой пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

Вопрос к ученикам: какая пирамида, по вашему мнению, может называться правильной?

Выслушать ответы и совместными усилиями дать правильное определение: пирамида называется правильной, если её основание – правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является её высотой.

Объяснить свойства боковых ребер и боковых граней правильной пирамиды: все боковые ребра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.

Ввести понятие апофема и показать все элементы пирамиды на макете.

Апофема — высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная к ребру ее основания.

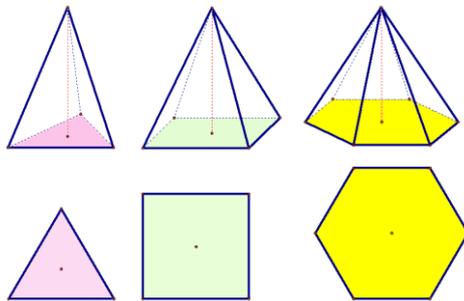
Попросить учеников составить формулы нахождения площади поверхности и площади боковой поверхности пирамиды.

Площадь поверхности пирамиды — это сумма площадей всех её граней.

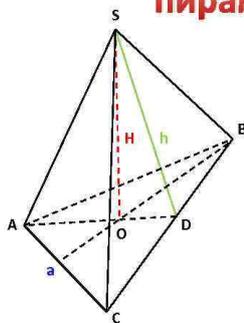
Площадь боковой поверхности пирамиды — это сумма площадей всех её боковых граней.

Вопрос к ученикам: Какие пирамиды могут быть правильными?

- треугольная пирамида,
- четырехугольная пирамида,
- шестиугольная пирамида.



Правильная треугольная пирамида



H – высота **h** – апофема

$AB = BC = AC = a$

$DO = \frac{1}{3} \cdot AD$	$AO = \frac{2}{3} \cdot AD$
$S_{бок.} = \frac{3}{2} \cdot a \cdot h$	
$S_{п.п.} = \frac{3}{2} \cdot a \cdot h + \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$	

Правильная четырехугольная пирамида

H – высота, **h** – апофема, **a** – сторона основания

$AB = BC = CD = DA = a$ (в основании – квадрат)

K – середина DC

$OK = \frac{1}{2} \cdot a$	$BD = a \cdot \sqrt{2}$
$S_{бок.} = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot h = 2 \cdot a \cdot h$	
$S_{п.п.} = a^2 + 2 \cdot a \cdot h$	
$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H$	

3. Закрепление материала. Решение задач:

Попросить учащихся устно ответить на вопросы:

- Какая пирамида называется правильной?
- Являются ли равными боковые ребра правильной пирамиды?
- Чем являются боковые грани правильной пирамиды?
- Что называется апофемой?
- Сколько высот в пирамиде? Сколько апофем в пирамиде?
- Сколько апофем в правильной пирамиде?

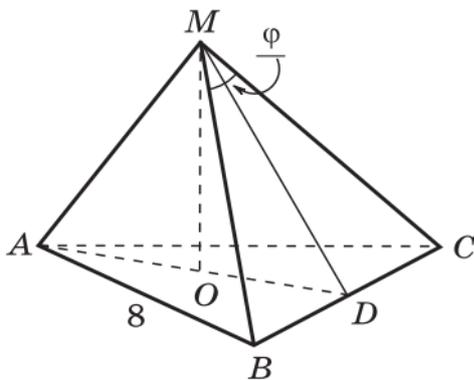
- Равны ли апофемы правильной пирамиды друг другу? Почему?

Решение задач:

Задача 1.

В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, а плоский угол при вершине равен ϕ . Найдите высоту этой пирамиды. Какие дополнительные знания требуются для решения данной задачи? (*свойства окружности описанной около треугольника, определение тангенса угла*).

Запись задачи:



Дано: MABC — правильная треугольная пирамида, $AB=8$ см, угол $BMC=\phi$, MO—высота пирамиды.

Найти: MO

Решение:

1) Основание высоты MO (точка O)— центр окружности, описанной около треугольника ABC, $AO=R$ — радиус этой окружности.

$$AB=R\sqrt{3}, R = AO = \frac{8}{\sqrt{3}}, OD = \frac{AO}{2} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

2) Из $\triangle MBD$ имеем $\frac{BD}{MD} = \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}, MD = \frac{4}{\operatorname{tg} \frac{\phi}{2}}.$

3) Из $\triangle MOD$ получаем:

$$MO = \sqrt{MD^2 - OD^2} = \sqrt{\frac{16}{\operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2}} - \frac{16}{3}} = 4 \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2}} - \frac{1}{3}} = \frac{4}{\operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2}}$$

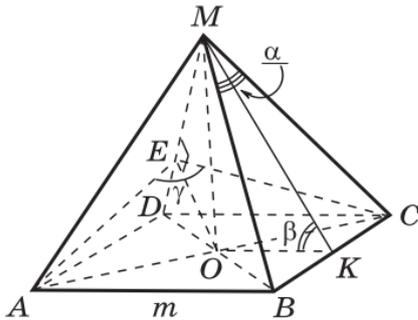
Ответ: $\frac{4}{\operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2}}$

Задача 256.

В пирамиде сторона основания равна m , а угол при вершине равен α . Найдите: а) высоту пирамиды; б) боковое ребро пирамиды; в) угол между боковой гранью и плоскостью; г) двугранный угол при боковом ребре пирамиды. Каких данных не хватает для решения задачи? (*вид пирамиды –*

правильная четырехугольная, вид угла – плоский угол, в пункте в) какая плоскость – плоскость основания.)

Запись задачи:



Дано: $MABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, $AB = m$, угол $BMC = \alpha$.

Найти:

- а) MO (высоту пирамиды); б) MB
 в) $(MBC, \wedge ABC)$; г) $(AMD, \wedge CMD)$.

Решение.

а) $ABCD$ — квадрат. $OK = BK = \frac{m}{2}$. Из $\triangle MBK$ имеем $\frac{BK}{MK} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $MK = \frac{m}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$ (рис. 3.6). Из $\triangle MOK$ получаем

$$MO = \sqrt{MK^2 - OK^2},$$

$$MO = \sqrt{\frac{m^2}{4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{m^2}{4}} = \frac{m}{2} \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - 1} = \frac{m \sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

б) Из $\triangle MBK$ имеем $\frac{BK}{MB} = \sin \frac{\alpha}{2}$, $MB = \frac{m}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$.

в) $OK \perp BC$, $MK \perp BC$, поэтому $\angle OKM$ — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями боковой грани MBC и основания пирамиды. Пусть $\angle OKM = \beta$, тогда $\cos \beta = \frac{OK}{MK} = \frac{m}{2} : \frac{m}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $\beta = \arccos \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)$.

г) Проведём $OE \perp MD$. Так как $MD \perp OE$ и $MD \perp AC$, то $MD \perp ACE$, и, следовательно, $\angle AEC$ — линейный угол двугранного угла при боковом ребре MD . Пусть $\angle AEC = \gamma$. Из $\triangle MEC$ имеем $\angle EMC = \alpha$, $\frac{EC}{MC} = \sin \alpha$, $EC = \frac{m}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin \alpha = m \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$.

Из $\triangle OEC$ получаем $\frac{OC}{EC} = \sin \frac{\gamma}{2}$, $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{m \sqrt{2}}{2} : m \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$, $\frac{\gamma}{2} = \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \right)$, $\gamma = 2 \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \right)$.

Ответ: а) $\frac{m \sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$; б) $\frac{m}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$; в) $\arccos \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)$;

г) $2 \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \right)$.

4. Подведение итогов урока:

Вопросы к ученикам:

1. Какие темы мы изучили на уроке?
2. Какие задачи стояли перед нами на уроке?
3. Смогли ли мы реализовать эти задачи?
4. Что было самым трудным на уроке?
5. Интересно ли вам было на уроке?
6. Есть ли вопросы? Что-то осталось непонятным?

5. Домашнее задание:

1. Прочитать параграф 32,33.
2. Сделать развертку пирамиды, склеить из бумаги модель и описать её.
3. Решить задачи: 257, 258.

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

Конспект урока 6.

Тема: «Повторение теории, решение задач на правильную пирамиду»

Цели урока: Повторить доказательство теоремы о площади боковой поверхности правильной пирамиды, продолжить выработку навыков решения задач на правильную пирамиду.

Задачи:

- 1) продолжить формирование навыков решения задач по теме;
- 2) проверить навыки решения основных типов задач;
- 3) обеспечить в ходе урока воспитание целеустремленности, настойчивости, самостоятельности в поисках и выборе пути решения задач;
- 4) развивать творческие способности учащихся, их познавательную активность;
- 5) создать условия для формирования следующих познавательных УУД:
 - использование моделей при решении задач;
 - выбор наиболее эффективного способа решения задачи в зависимости от определенных условий;
 - установление причинно-следственных связей, построение логической цепочки рассуждения.

Тип урока: систематизация знаний и умений учащихся, проверка уровня усвоения знаний.

Оборудование: классная доска; компьютер, проектор, экран.

Ход урока

1. Организационный этап:

- приветствие учащихся, проверка посещаемости;
- повторение теоремы о площади боковой поверхности правильной пирамиды.

2. Решение задач:

Задача 1.

Найдите площадь боковой поверхности правильной пирамиды, если сторона ее основания равна a , а площадь боковой грани равна площади сечения, проведенного через вершину пирамиды. Каких данных не хватает для решения? (вид пирамиды – шестиугольная; через что проведено сечение - через вершину пирамиды и большую диагональ основания).

Решение:

$$AB = a, AD = 2a. S_{гр} = \frac{1}{2} AB \cdot MK, S_{MAD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot MO$$

(рис. 3.7). По условию задачи $\frac{1}{2} a \cdot MK = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot MO$, откуда

$MK = 2MO$, и, следовательно, $\angle MKO = 30^\circ$. Из $\triangle AOK$ имеем $OK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Из $\triangle MOK$ получаем

$$MK = \frac{OK}{\cos 30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = a.$$

Таким образом,

$$S_{бок} = 6 \cdot \frac{1}{2} a \cdot a = 3a^2.$$

Ответ: $3a^2$.

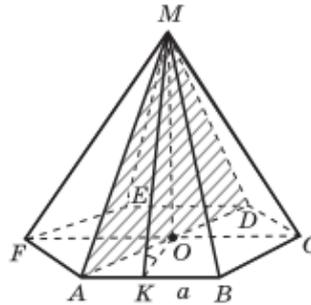
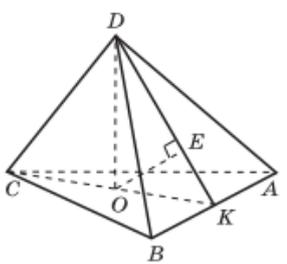


Рис. 3.7

Предложить учащимся самостоятельно решить задачи со слайдов.

Выборочно проверить.

Задача 2. DABC – правильная треугольная пирамида.



Докажите, что:

1. Скрещивающиеся рёбра DC и AB перпендикулярны.

2. $AB \perp DCK$.

3. Плоскости DAB и DCK

перпендикулярны.

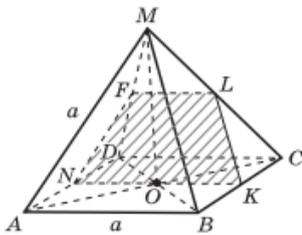
4. Перпендикуляр OE из точки O к апофеме DK является перпендикуляром к плоскости DAB.

Дополните подробным обоснованием приведенные записи:

1. $AB \perp CO$, $AB \perp DC$.

2. $AB \perp CK$, $AB \perp DK$, $AB \perp DCK$.
3. $AB \perp DCK$, $AB \in DAB$, $DAB \perp DCK$.
4. $OE \perp DK$, $OE \perp AB$, $OE \perp DAB$.

Задача 3.



Каждое ребро правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$ равно ϕ . Через середины N , K , L ребер проведено сечение пирамиды плоскостью.

1. Докажите, что а) $NK \parallel MDC$; б) $LF \parallel KN$; в) сечение $NKLF$ – равнобедренная трапеция.

2. Вычислите периметр трапеции.
3. Составьте план вычисления площади трапеции.

3. Подведение итогов урока:

Вопросы к ученикам:

1. Какие задачи являлись самыми трудными?
2. Есть ли вопросы? Что-то осталось непонятным?

4 Домашнее задание:

1. Решить задачи №257,265.

ПРИЛОЖЕНИЕ 8

Конспект урока 7.

Тема: «Решение задач по теме «Пирамида»»

Цели урока: Рассмотреть задачи на вычисление площади поверхности произвольной пирамиды..

Задачи:

- 1) продолжить формирование навыков решения задач по теме;
- 2) проверить навыки решения основных типов задач;
- 3) обеспечить в ходе урока воспитание целеустремленности, настойчивости, самостоятельности в поисках и выборе пути решения задач;
- 4) развивать творческие способности учащихся, их познавательную активность;
- 5) создать условия для формирования следующих познавательных УУД:

- использование моделей при решении задач;
- выбор наиболее эффективного способа решения задачи в зависимости от определенных условий;
- умения структурировать знания;
- контроль и оценка процесса и результата деятельности;
- установление причинно-следственных связей, построение логической цепочки рассуждения.

Тип урока: систематизация знаний и умений учащихся, проверка уровня усвоения знаний.

Оборудование: классная доска; компьютер, проектор, экран.

Ход урока

1. Организационный этап:

- приветствие учащихся, проверка посещаемости.

2. Решение задач:

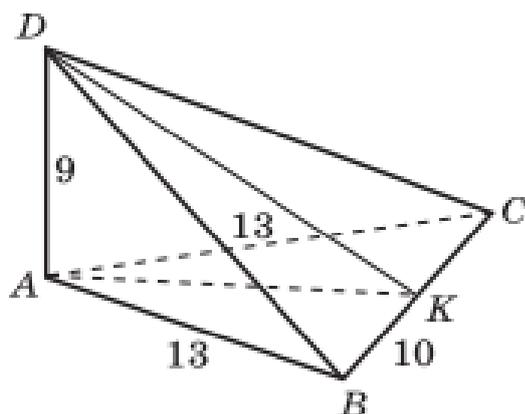


Рис. 3.9

Задача 243. Основанием пирамиды $DABC$ является треугольник ABC , у которого $AB=AC=13$ см, $BC=10$ см, ребро AD перпендикулярно к плоскости основания и равно 9 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение.

1) Проведём $AK \perp BC$, тогда $BC \perp DK$ (по теореме о трёх перпендикулярах), т. е. DK — высота треугольника DBC (рис. 3.9).

2) Из $\triangle ABK$ получаем

$$AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12.$$

3) Из $\triangle DAK$ имеем

$$DK = \sqrt{DA^2 + AK^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15.$$

4) $\triangle ADB = \triangle ADC$ (по двум катетам). $S_{\text{бок}} = 2S_{ADB} + S_{BDC}$, $S_{\text{бок}} = 13 \cdot 9 + 5 \cdot 15 = 117 + 75 = 192$ (см²).

Ответ: 192 см².

Задача 251. Основанием пирамиды $DABC$ является прямоугольный треугольник с гипотенузой BC . Боковые рёбра пирамиды равны друг другу, а её высота равна 12 см. Найдите боковое ребро пирамиды, если $BC=10$ см.

Решение. Пусть DO — высота пирамиды. Тогда треугольники DAO , DBO и DCO равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $OA=OB=OC$, т. е. точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 3.12). Так как треугольник ABC прямоугольный, то центром описанной окружности является середина гипотенузы BC . Из $\triangle DOC$ получаем $OC=5$ см,

$$DC = \sqrt{DO^2 + OC^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \text{ (см)}.$$

Ответ: 13 см.

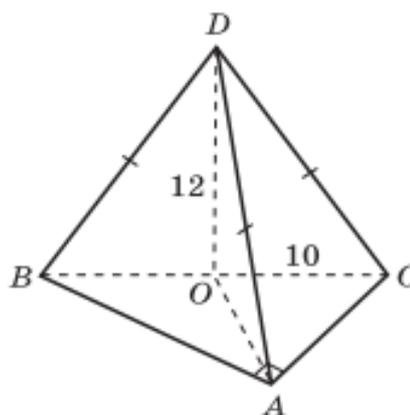


Рис. 3.12

3. Самостоятельная работа:

Вариант 1

Высота правильной треугольной пирамиды равна $a\sqrt{3}$, радиус окружности, описанной около её основания, $2a$.

Найдите:

- а)⁰ апофему пирамиды;
- б)⁰ угол между боковой гранью и основанием;
- в)⁰ площадь боковой поверхности;
- г) плоский угол при вершине пирамиды.

Вариант 2

Апофема правильной четырёхугольной пирамиды равна $2a$, высота пирамиды равна $a\sqrt{2}$. Найдите:

- а)⁰ сторону основания пирамиды;
- б)⁰ угол между боковой гранью и основанием;
- в)⁰ площадь поверхности пирамиды;
- г) расстояние от центра основания пирамиды до плоскости боковой грани.

Ответы:

Вариант 1. а) $2a$; б) 60° ; в) $6a^2\sqrt{3}$; г) $2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Вариант 2. а) $2a\sqrt{2}$; б) 45° ; в) $8a^2(\sqrt{2}+1)$; г) a .

4. Подведение итогов урока:

Вопросы к ученикам:

1. Какие задачи являлись самыми трудными?
2. Есть ли вопросы? Что-то осталось непонятным?

5. Домашнее задание:

1. Решить задачи №248.

ПРИЛОЖЕНИЕ 9

Конспект урока №8.

Тема: «Усеченная пирамида»

Цели урока: ввести понятие усеченной пирамиды и рассмотреть вопрос о вычислении площади её поверхности.

Задачи:

- познакомить учащихся с усеченной пирамидой, с её элементами, помочь вывести формулу боковой поверхности усеченной пирамиды;
- дать понятие усеченной пирамиды и её элементов;
- рассмотреть различные виды усеченных пирамид;
- доказать формулу нахождения площади поверхности усеченной пирамиды; научиться применять полученные знания при решении задач.

- развивать логическое мышление; пространственное воображение учащихся, умение самостоятельно мыслить, делать выводы, поддержание интереса к математике, развитие познавательного интереса к предмету.

- развивать у учащихся навыки самостоятельной работы и работы в парах;

- создать условия для формирования следующих познавательных УУД:

- поиск и выделение нужной информации;
- использование моделей при решении задач;
- умение осознанно и произвольно выстраивать речевое высказывание, как в устной, так и письменной формах;
- выбор наиболее эффективного способа решения задачи в зависимости от определенных условий;
- анализ объектов с целью выделения существенных и несущественных признаков;
- установление причинно-следственных связей, построение логической цепочки рассуждения.

Тип урока: изучение нового материала, систематизация знаний и

умений учащихся.

Оборудование: классная доска; модель усеченной пирамиды; компьютер, проектор, экран.

Ход урока

1. Организационный этап:

- приветствие учащихся, проверка посещаемости.

2. Проверка домашнего задания:

Два ученика на доске записывают решения домашних номеров.

Пока ученики записывают решения домашних номеров, с остальными учащимися проводится опрос:

- Дайте определение пирамиды.
- Назовите элементы пирамиды.
- Какая пирамида называется правильной?
- Как находится площадь боковой поверхности правильной пирамиды?
- Чему равна площадь полной поверхности пирамиды?
- Вспомним определение трапеции
- Какие виды трапеций вам известны?
- Как найти площадь трапеции?

3. Постановка темы урока, изучение материала:

Озвучить тему урока.

Вызвать одного ученика к доске и предложить выполнить задание:

Изобразите произвольную пирамиду $PA_1A_2\dots A_n$. Проведем секущую плоскость α , параллельную плоскости β основания пирамиды и пересекающую боковые ребра в точках B_1, B_2, \dots, B_n .

Плоскость параллельная основанию пирамиды, разбивает её на два многогранника. Один из них является пирамидой, а другой называется усечённой пирамидой.

Усеченная пирамида – это часть полной пирамиды, заключенная между её основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию

данной пирамиды.

Определение. Усечённая пирамида – многогранник, гранями которого являются два n – угольника $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$, расположенные в параллельных плоскостях, и n – четырёхугольников $A_1B_1B_2A_2, A_2B_2B_3A_3, \dots, A_n B_n B_1A_1$.

Разобрать с учащимися элементы усеченной пирамиды:

- Многоугольники $A_1A_2A_3 \dots A_n$ и $B_1B_2B_3 \dots B_n$ - нижнее и верхнее основания усечённой пирамиды.

- Отрезки $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 \dots$ - боковые ребра усечённой пирамиды

- Четырёхугольники $A_1B_1B_2A_2, A_2B_2B_3A_3 \dots$ - боковые грани усечённой пирамиды.

- Отрезок PH – перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки верхнего основания к нижнему основанию – называется высотой усечённой пирамиды.

Предложить ученикам доказать, что боковые грани усечённой пирамиды являются трапециями.

После обсуждения доказательства на доске и в тетрадях записать формулировку и конспект.

Доказательство: Рассмотрим четырехугольник $A_1B_1B_2A_2$.

$$1. \alpha \parallel \beta$$

$$(SA_2A_3) \cap \alpha = A_2A_3$$

$$(SA_2A_3) \cap \beta = B_2B_3$$

$$\text{Значит, } A_2A_3 \parallel B_2B_3$$

$$2. A_2S \cap A_3S = S, \text{ значит } A_2B_2 \parallel A_3B_3$$

Таким образом, $A_1B_1B_2A_2$ – трапеция по определению

Аналогично доказывается и про остальные боковые грани.

Продемонстрировать ученикам модели правильных пирамид и правильных усечённых пирамид.

Вопрос к учащимся: Как вы думаете, какая усечённая пирамида будет правильной? Что лежит в её основаниях?

Определение. Усеченная пирамида называется **правильной**, если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию.

Высота боковой грани называется **апофемой**.

Свойства правильной усеченной пирамиды:

Основания - правильные многоугольники.

Боковые грани – равные равнобедренные трапеции.

Попросить учеников самостоятельно дать определение и вывести формулы полной и боковой поверхности усеченной пирамиды.

Площадью полной поверхности усечённой пирамиды называется сумма площадей всех её граней: оснований и всех боковых граней.

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{верхн. осн.}} + S_{\text{нижн. осн.}}$$

Площадью боковой поверхности усечённой пирамиды называется сумма площадей её боковых граней.

Посмотрим на правильную усечённую пирамиду и поставим перед собой задачу: найти площадь её боковой поверхности.

Вопрос к ученикам: Какими фигурами являются боковые грани правильной n -угольной усечённой пирамиды? (Равнобедренными трапециями)

Найдем площадь одной из граней правильной n -угольной усечённой пирамиды. $S_{\text{грань}} = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot d$

Сколько таких граней? (n)

Так как эта усечённая пирамида правильная, то

$$S_{\text{бок}} = S_{\text{грань}} \cdot n = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot d \cdot n = \frac{a_1 n + a_2 n}{2} \cdot d = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot d$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot d$$

Итак, мы доказали, что

Теорема: Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.

4. Закрепление материала. Решение задач:

Задача 1.

Стороны оснований правильной усеченной пирамиды равны 4 дм и 2 дм, а боковое ребро равно 2 дм. Найдите высоту и апофему пирамиды.

Дополнительные вопросы: каких данных не хватает? (вид пирамиды – треугольная), что такое апофема?

Решение:

Решение. Пусть O и O_1 — центры оснований усеченной пирамиды (рис. 3.13).

1) Из треугольника ABC получаем $AB = R\sqrt{3}$, где $R = AO$, откуда $AO = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $OK = \frac{AO}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

2) Из $\triangle A_1B_1C_1$ находим

$$A_1O_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad O_1M = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3) $EK = OK - OE$, $OE = O_1M$, откуда $EK = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

4) Из $\triangle AA_1F$ имеем $AF = AO - FO$, $FO = A_1O_1$, $AF = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. $A_1F = \sqrt{AA_1^2 - AF^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

5) Из $\triangle MEK$ получаем $MK = \sqrt{ME^2 + EK^2} = \sqrt{\frac{8}{3} + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{9}{3}} = \sqrt{3}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ дм, $\sqrt{3}$ дм.

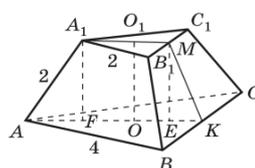
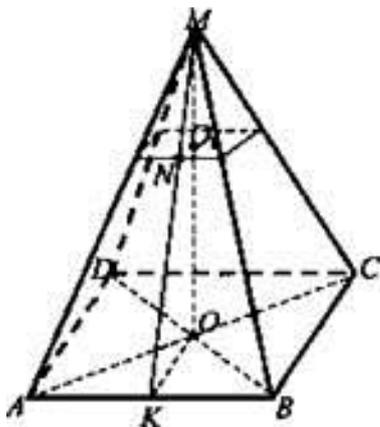


Рис. 3.13

Задача 2.

Плоскость, параллельная плоскости основания правильной четырехугольной пирамиды, делит высоту пирамиды в отношении 1:2, считая от вершины пирамиды. Апофема полученной усеченной пирамиды равна 4 дм, а площадь её полной поверхности равна 186 дм². Найдите высоту усеченной пирамиды.

Запись задачи:



Дано: $MABCD$ - правильная пирамида,
 $A_1B_1C_1 \parallel ABC$, $MO_1: O_1O = 1:3$, NK -апофема,
 $NK = 4$ дм, $S_{\text{ус.пир.}} = 186$ дм²

Найти: OO_1

Решение:

Рассмотрим ΔMKO . Так как $NO_1 \parallel KO$, то $MO_1 : MO = O_1N : OK$, значит, стороны $B_1C_1 : BC = MO_1 : MO$. $B_1C_1 = 1 : 3$.

Пусть $B_1C_1 = x$, $BC = 3x$. Имеем

$$S_{бок} = \frac{1}{2}(4x + 12x) \cdot 4 = 32x;$$

$$S_{осн} = x^2 + 9x^2 = 10x^2$$

$$S_{полн} = 10x^2 + 32x = 186$$

$$5x^2 + 16x - 93 = 0$$

$x_1 = 3$; $x_2 = -6,2$ (не удовлетворяет условию задачи);

$B_1C_1 = 3$ см, $NO = 1,5$ см; $BC = 9$ см, $OK = 4,5$ см; $KF = OK - NO_1 = 3$.

Из ΔKNF по теореме Пифагора $NF = OO_1 = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$.

Ответ: $\sqrt{7}$ дм.

5. Подведение итогов урока:

1. Есть ли вопросы? Что-то осталось непонятным?

6. Домашнее задание:

1. Решить задачу №270.

ПРИЛОЖЕНИЕ 10

Конспект урока №9.

Тема: «Симметрия в пространстве. Понятие правильного многогранника. Элементы симметрии правильных многогранников»

Цели урока: ввести понятие правильного многогранника, рассмотреть все пять видов правильных многогранников.

Задачи:

- изучить определения точек симметричных относительно точки (прямой, плоскости), центра (оси, плоскости) симметрии, определение правильного многогранника, виды правильных многогранников, теорему о том, что «не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные шестиугольники, семиугольники и вообще n -угольники при $n \geq 6$ »;

- научиться выделять элементы симметрии правильных многогранников, решать простейшие задачи, связанные с элементами симметрии правильных многогранников;

- развивать у учащихся логическое мышление, смысловую память и внимание;

- организовать деятельность учащихся по самостоятельному применению знаний и умений;

- создать условия для формирования следующих познавательных УУД:

- поиск и выделение нужной информации;
- умения структурировать знания;
- умение осознанно и произвольно выстраивать речевое высказывание, как в устной, так и письменной формах;
- анализ объектов с целью выделения существенных и несущественных признаков;
- установление причинно-следственных связей, построение логической цепочки рассуждения.

Тип урока: изучение нового материала.

Оборудование: классная доска, экран, компьютер, проектор, развертки и макеты многогранников.

Ход урока

1. Организационный этап:

- приветствие учащихся, проверка посещаемости.

2. Постановка темы урока, изучение материала:

Попросить учащихся дать определение многогранника

Предложить учащимся назвать изображенные на слайде многогранники (правильная призма, наклонная призма, пирамида треугольная, пятиугольная).

Предложить учащимся ответить на вопросы:

- На какие две группы можно разделить эти многогранники? (выпуклые и невыпуклые);

Какие многогранники называют выпуклыми? Определим, какие многогранники будут выпуклыми, а какие невыпуклыми. (Многогранник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани.)

- Что мы знаем о сумме всех плоских углов при каждой вершине выпуклого многогранника? (Сумма всех плоских углов при каждой вершине выпуклого многогранника меньше 360°).

- Чему равна сумма углов в многоугольнике? (Сумма углов в многоугольнике равна $(180^\circ \times (n-2))$).

- Давайте подсчитаем, чему равна сумма всех углов в правильном шестиугольнике? Каждого угла шестиугольника? (Сумма всех углов в правильном шестиугольнике равна 720° . Каждый угол равен 120°).

Это нам сегодня понадобится для изучения новой темы.

С симметрией мы встречаемся в природе, архитектуре, технике, быту. Мы часто видим симметричные творения природы (листья, цветы,

птицы, животные) или творения человека (здания, техника) - все то, что окружает нас каждый день.

Ребята, для начала вспомним такие понятия, как симметрия относительно точки, симметрия относительно прямой, которые мы изучили на плоскости.

Вопросы к ученикам:

1. Какие же точки называются симметричными относительно точки?

Точки A и A_1 называются симметричными относительно точки O , если O - середина отрезка AA_1 . При этом точку O называют центром симметрии.

2. Сформулируйте определение точек симметричных относительно прямой.

Точки A и A_1 называются симметричными относительно прямой a , если прямая a проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к этому отрезку. При этом прямую a называют осью симметрии.

По аналогии с симметрией на плоскости определяются симметрия в пространстве. Симметрия тесно связана с многогранниками.

Мы вспомнили определение точек симметричных относительно точки. **Попробуйте сформулировать** такое определение только для симметричных точек в пространстве.

Вопросы к ученикам:

- Чем будет точка O ? (*Точка O – центр симметрии.*)

- А как формулируется определение точек симметричных относительно прямой в пространстве? (*Точки A и A_1 называются симметричными относительно прямой a , если прямая a проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к этому отрезку.*)

- Чем будет являться прямая a ? (*Прямая a – ось симметрии.*)

- В пространстве существует понятие точек симметричных относительно плоскости. Попробуйте дать определение. (*Точки A и A_1 называются симметричными относительно плоскости α , если плоскости*

α проходит через середину отрезка *AA1* и перпендикулярна к этому отрезку.)

Значит, плоскость α - плоскость симметрии.

Итак, точка (прямая, плоскость) называется центром (осью, плоскостью) симметрии фигуры, если каждая точка фигуры симметрична относительно нее некоторой точке той же фигуры.

Таким образом, в пространстве помимо центральной и осевой симметрии, которые есть на плоскости, добавляется зеркальная симметрия.

Оказывается у некоторых многогранников тоже есть центр, ось и плоскость симметрии, которые называют элементами симметрии этого многогранника.

Рассмотрим два многогранника: куб и параллелепипед. Куб называют правильным многогранником. Давайте выясним почему?

Вопросы ученикам:

- Давайте подсчитаем, сколько ребер сходятся в каждой вершине куба, параллелепипеда. *(По три ребра в каждой вершине.)*

- Чем являются грани этих многогранников? *(Грани куба – квадраты (правильные многоугольники), грани параллелепипеда – прямоугольники (неправильные многоугольники).)*

Особо важно, что все грани куба равны между собой, а у параллелепипеда не все грани равны между собой.

Таким образом, куб будем относить к правильным многогранникам.

Посмотрите на следующий рисунок. Давайте попробуем определить является ли одна из этих пирамид правильным многогранником. Действуем по той же схеме (определяем число ребер сходящихся в каждой вершине, вид граней и их равенство).

Попробуйте дать определение правильного многогранника.

Определение. Выпуклый многогранник называется правильным, если все его грани – равные правильные многоугольники и в каждой его вершине сходятся одно и тоже число ребер.

Возникает вопрос, сколько граней, являющихся правильными многоугольниками, может сходиться в одной вершине, чтобы в результате получился правильный многогранник.

Давайте подсчитаем, а полученные результаты будет сравнивать с 360° , так как по теореме, которую мы вспоминали в начале урока сумма всех плоских углов при каждой вершине выпуклого многогранника меньше 360° .

1. Рассмотрим правильный треугольник. Сколько градусов равен каждый угол? *(Каждый угол в правильном треугольнике равен 60°).*

Подсчитаем сумму плоских углов при вершине треугольника, если:

а) в каждой вершине сходится три грани;

Сумма меньше 360° , значит, такой правильный многогранник может быть. *(Если в каждой вершине сходится три грани, то сумма плоских углов при вершине равна $3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$).*

б) в каждой вершине сходится четыре грани;

Сумма меньше 360° , значит, такой правильный многогранник может быть. *(Если в каждой вершине сходится четыре грани, то сумма плоских углов при вершине равна $4 \cdot 60^\circ = 240^\circ$).*

в) в каждой вершине сходится пять граней;

Сумма меньше 360° , значит, такой правильный многогранник может быть. *(Если в каждой вершине сходится пять граней, то сумма плоских углов при вершине равна $5 \cdot 60^\circ = 300^\circ$).*

г) в каждой вершине сходится шесть граней;

Сумма равна 360° , противоречит теореме. Следовательно, такого многогранника не может быть. *(Если в каждой вершине сходится шесть граней, то сумма плоских углов при вершине равна $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$).*

2. Рассмотрим правильный четырехугольник – квадрат. Сколько градусов равен каждый угол? *(Каждый угол в квадрате равен 90°).*

Подсчитаем сумму плоских углов при вершине квадрата, если:

а) в каждой вершине сходится три грани;

Сумма меньше 360° , значит, такой правильный многогранник может быть. (Если в каждой вершине сходится три грани, то сумма плоских углов при вершине равна $3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$).

б) в каждой вершине сходится четыре грани;

Сумма равна 360° , противоречит теореме. Следовательно, такого многогранника не может быть. (Если в каждой вершине сходится четыре грани, то сумма плоских углов при вершине равна $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$).

3. Рассмотрим правильный пятиугольник. Сколько градусов равен каждый угол? (Каждый угол в правильном пятиугольнике равен 108°).

Подсчитаем сумму плоских углов при вершине квадрата, если:

а) в каждой вершине сходится три грани;

Сумма меньше 360° , значит, такой правильный многогранник может быть. (Если в каждой вершине сходится три грани, то сумма плоских углов при вершине равна $3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$).

б) в каждой вершине сходится четыре грани, очевидно, что сумма равна 360° , противоречит теореме. Следовательно, такого многогранника не может быть.

Если будем рассматривать правильный шестиугольник, то сумма плоских углов при каждой вершине, в которой сходится три грани, будет равна 360° . Это тоже противоречит теореме.

Исходя из наших расчетов, можно сделать предположение, что не существует многогранника, гранями которого являются правильные шестиугольники. Верно ли это предположение?

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема. **Сформулируем и докажем ее.**

Теорема. Не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные шестиугольники, семиугольники и вообще n -угольники при $n \geq 6$.

Доказательство:

Угол правильного n -угольника при $n \geq 6$ не меньше 120° . Почему?

(обратить внимание учеников на подсчеты в начале урока).

При каждой вершине многогранника должно быть не менее трех плоских углов.

Поэтому если бы существовал правильный многогранник, у которого грани – правильные n -угольники при $n \geq 6$, то сумма плоских углов при каждой вершине такого многогранника была бы не меньше чем $120^\circ \cdot 3 = 360^\circ$. Это невозможно. Почему? (так как сумма всех плоских углов при каждой вершине выпуклого многогранника меньше 360°).

Из этого условия сделаем **следующий важный вывод**: каждая вершина правильного многогранника может быть вершиной либо трех, четырех или пяти равносторонних треугольников, либо трех квадратов, либо трех правильных пятиугольников. Других возможностей нет.

В соответствии с этим выводом получаем следующие виды правильных многогранников:

- правильный тетраэдр;
- правильный октаэдр;
- правильный икосаэдр;
- куб;
- правильный додекаэдр.

3. Подведение итогов урока:

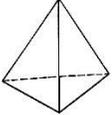
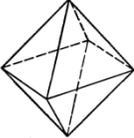
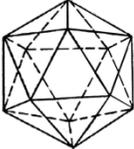
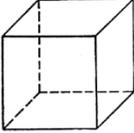
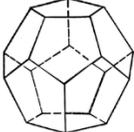
Вопросы к ученикам:

1. Какова была цель урока?
2. О каком новом виде симметрии вы узнали?
3. Сколько видов правильных многогранников существует? Почему?

4. Домашнее задание:

1. Прочитать параграфы 35-37.
2. Сделать развертку любого правильного многогранника.
3. Заполнить таблицу.

Таблица для учеников

Правильный многогранник	Определение	Центр симметрии	Ось симметрии	Плоскость симметрии
				
				
				
				
				

ПРИЛОЖЕНИЕ 11

Конспект урока №10.

Тема: «Теорема Эйлера»

Цели урока: сформулировать теорему Эйлера для выпуклых многогранников, обсудить схему её доказательства.

Задачи:

- изучить теорему Эйлера;
- развивать у учащихся логическое мышление, смысловую память и внимание;

- организовать деятельность учащихся по самостоятельному применению знаний и умений;

- создать условия для формирования следующих познавательных УУД:

- поиск и выделение нужной информации;
- использование моделей при решении задач;
- умения структурировать знания;
- умение осознанно и произвольно выстраивать речевое высказывание, как в устной, так и письменной формах;
- смысловое чтение, основанное на осознании цели чтения и выбора вида чтения, извлечение необходимой информации, определение главной и второстепенной информации;
- установление причинно-следственных связей, построение логической цепочки рассуждения.

Тип урока: изучение нового материала.

Оборудование: классная доска, экран, компьютер, проектор.

Ход урока

1. Организационный этап:

- приветствие учащихся, проверка посещаемости.

2. Постановка темы урока, изучение материала:

Попросить учеников вспомнить определение выпуклого

многогранника.

Сформулировать теорему Эйлера.

Теорема Эйлера. В любом выпуклом многограннике $f + e - k = 2$, где f — число граней, e — число вершин, k — число рёбер многогранника.

Обсудить с учащимися схему доказательства теоремы Эйлера, содержащегося в п. 29. Доказательство этой теоремы проведено с помощью центрального проектирования многогранника на плоскость одной из его граней с последующим подсчётом двумя способами суммы углов всех треугольников, на которые разбивается проекция многогранника.

Доказательство
Рассмотрим произвольный выпуклый многогранник, имеющий e вершин, f граней и k рёбер. Докажем, что $f + e - k = 2$.

Выберем произвольную грань G , отметим какую-нибудь точку M ее внутренней области и проведем из нее луч h , перпендикулярный к плоскости этой грани и лежащий по ту сторону от нее, по которую нет точек многогранника. Если плоскости каких-либо других граней пересекают луч h , то выберем на нем точку O , лежащую между M и ближайшей к M точкой пересечения; в противном случае возьмем в качестве точки O произвольную точку луча h (рис. 74). Тогда точка O окажется лежащей по ту же сторону от плоскости каждой грани многогранника, отличной от G , что и сам многогранник.

Удалим теперь грань G . В результате получим многогранную поверхность F , имеющую те же ребра и вершины, что и исходный многогранник, число граней которой равно $f - 1$. Любой луч с началом O пересекает поверхность F не более чем в одной точке (поскольку после пересечения лучом поверхности F он «уходит» в то полупространство, в котором точек поверхности F нет). Примем точку O за центр проектирования и рассмотрим центральную проекцию поверхности F на плоскость грани G (рис. 75; грань G на этом рисунке изображена в увеличенном масштабе). Она представляет собой грань G , составленную из $f - 1$ вы-

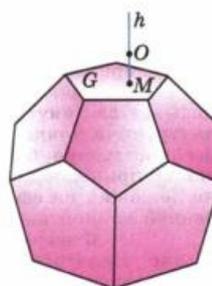


Рис. 74

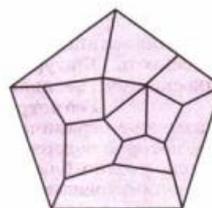


Рис. 75

пуклых многоугольников — проекций остальных граней (докажите, что эти многоугольники — выпуклые). Число вершин этих многоугольников равно e , а число сторон равно k . Если провести диагональ какого-нибудь из них, то число вершин не изменится, число многоугольников увеличится на 1, число сторон также увеличится на 1, поэтому разность числа многоугольников и числа сторон не изменится (см. рис. 75). Следовательно, если каждый многоугольник разделить диагоналями на треугольники, то грань G окажется разделенной на f' треугольников с e' вершинами и k' сторонами, причем

$$f + e' - k' = (f - 1) + e - k.$$

Пусть n — число сторон грани G . Каждый из треугольников имеет три стороны, поэтому число k' меньше числа $3f'$ на число сторон, каждая из которых принадлежит одновременно двум треугольникам, т. е. на $k' - n$:

$$k' = 3f' - (k' - n).$$

Отсюда получаем: $n = 2k' - 3f'$.

Сумма углов всех треугольников, с одной стороны, равна $f' \cdot 180^\circ$, с другой — сумме углов n -угольника G плюс 360° , умноженных на число $e' - n$ вершин, лежащих внутри G :

$$f' \cdot 180^\circ = (n - 2) \cdot 180^\circ + 360^\circ \cdot (e' - n).$$

Отсюда находим

$$f' = 2e' - n - 2 = 2e' - (2k' - 3f') - 2,$$

т. е. $f' + e' - k' = 1$. Но $f' + e' - k' = (f - 1) + e - k$. Следовательно, $f + e - k = 2$. Теорема доказана.

3. Решение задач:

Задача 1. Предложить ученикам для некоторых многогранников (тетраэдр, параллелепипед, n -угольная призма, n -угольная пирамида, правильные многогранники) сосчитать число граней, вершин, рёбер и убедиться с помощью прямого подсчёта в справедливости для них теоремы Эйлера.

Правильный многогранник	Форма грани	Число вершин e	Число граней f	Число рёбер k
Тetraэдр	Треугольник	4	4	6
Гексаэдр	Квадрат	8	6	12
Октаэдр	Треугольник	6	8	12
Додекаэдр	Пятиугольник	20	12	30
Икосаэдр	Треугольник	12	20	30

Задача 2. Рассмотрим усечённый гексаэдр (куб). В кубе срезаны все восемь трёхгранных углов при вершинах (рис. 3.15). Оставшееся тело есть некоторый выпуклый многогранник.

Проверьте справедливость теоремы Эйлера для этого многогранника.

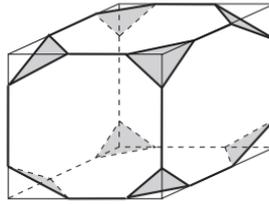


Рис. 3.15

4. Подведение итогов урока:

Вопросы к ученикам:

1. Какова была цель урока?
2. Что интересного вы узнали?
3. Есть ли вопросы?

5. Домашнее задание:

1. Прочитать параграфы 29.
2. Подготовиться к зачету по теме «Многогранники».

ПРИЛОЖЕНИЕ 12

Конспект урока №11.

Тема: «Зачет по теме «Многогранники»»

Цели урока: провести оценку усвоения образовательной программы по разделу «Многогранники».

Задачи:

- оценить способность учащихся применять изученный теоретический материал при выполнении письменной работы;
- оценить уровень сформированности познавательных УУД.

Тип урока: зачёт.

Оборудование: карточки с вариантами.

Ход урока

1. Организационный этап:

- приветствие учащихся, проверка посещаемости.

2. Проведение контрольной работы:

1 вариант.

1. Сформулируйте определение призмы.

Призмой _____ называется _____ многогранник, который _____

_____.

2. Сделайте подобные рисунки в тетрадь, обозначьте вершины призмы и выполните задание.

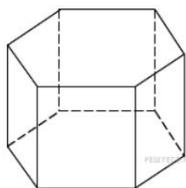


Рисунок А

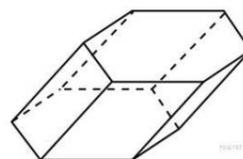


Рисунок б

А) Укажите основания призмы на рисунке а, на рисунке б.

Б) Какое основание призмы, изображённой на рисунке б больше?

Почему?

В) укажите взаимное расположение плоскостей, в которых лежат основания призмы?

Г) Назовите по рисунку а боковые рёбра призмы. Каково их взаимное положение?

Д) определите вид многоугольников, из которых состоит боковая поверхность призмы.

Е) Укажите, какая из призм является прямой, какая наклонной? Какое условие должно выполняться, чтобы призма была прямой? Правильной? Наклонной?

Ж) Проведите и обозначьте на рисунках а и б высоту призмы, диагональ призмы.

Отрезок _____ является высотой призмы на рисунке а, отрезок _____ является высотой призмы на рисунке б.

Отрезок _____ является диагональю призмы на рисунке а, Отрезок _____ является диагональю призмы на рисунке б.

З) Укажите, как определяется полная поверхность призмы.

И) Сделайте рисунки в и г в тетрадь.

Запишите выражение для вычисления площади боковой поверхности призмы, изображённой на рисунке в.

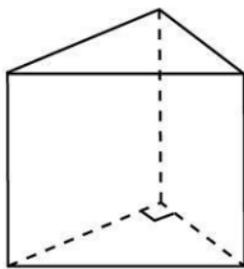


Рисунок в.

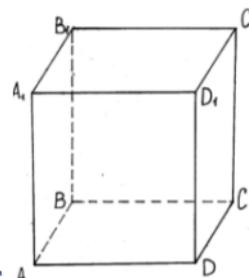


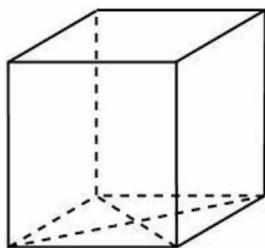
Рисунок г. А

К) Запишите выражение для вычисления площади боковой поверхности призмы, изображённой на рисунке г.

Л) Запишите выражение для вычисления площади полной поверхности призмы, изображённой на рисунках в и г.

3. Сформулируйте определение прямой призмы.
4. Сформулируйте определение наклонной призмы.
5. Сформулируйте определение правильной призмы.
6. Решите задачу.

Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8, и боковым ребром, равным 10.



7. Сделайте рисунок и решите задачу.

В треугольной призме две боковые грани перпендикулярны. Их общее ребро равно 10 и отстоит от других боковых ребер на 6 и 8. Найдите площадь боковой поверхности этой призмы.

8. Задача.

Задача. Основанием пирамиды является ромб. Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания и образуют двугранный угол 150° , а две другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если её высота равна 4 см.

2 вариант.

1. Сформулируйте определение пирамиды.

Пирамидой называется многогранник, который _____

_____.

2. Сделайте подобные рисунки в тетрадь, обозначьте вершину пирамиды и выполните задание.

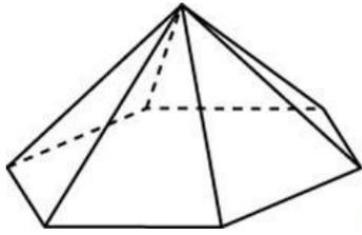


Рисунок А

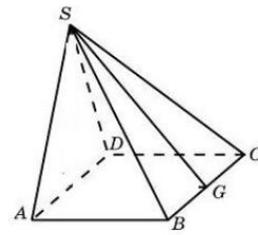


Рисунок б

- А) Укажите основание пирамиды на рисунке а, на рисунке б.
- Б) Чем является точка, не лежащая в плоскости основания пирамиды?
- В) укажите взаимное расположение отрезков, которые являются боковыми рёбрами пирамиды? Назовите по рисунку а боковые рёбра.
- Г) Укажите, какая из пирамид является прямой, какая наклонной? Какое условие должно выполняться, чтобы пирамида была прямой? Правильной? Наклонной?
- Д) Проведите и обозначьте на рисунках а и б высоту пирамиды, диагональ пирамиды. Какого отрезка из названных не существует?
- Отрезок _____ является высотой пирамиды на рисунке а, отрезок _____ является высотой пирамиды на рисунке б.
- Е) на рисунке б проведите апофему боковой грани ASD. Что называют апофемой?
- Ж) Укажите, как определяется полная поверхность пирамиды.
- З) Сделайте рисунки в и г в тетрадь.
- Запишите выражение для вычисления площади боковой поверхности призмы, изображённой на рисунке в.

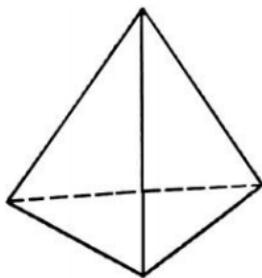


Рисунок в.

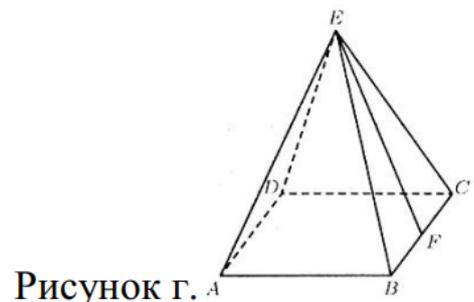


Рисунок г.

- И) Запишите выражение для вычисления площади боковой поверхности пирамиды, изображённой на рисунке г.

К) Запишите выражение для вычисления площади полной поверхности пирамиды, изображённой на рисунках в и г.

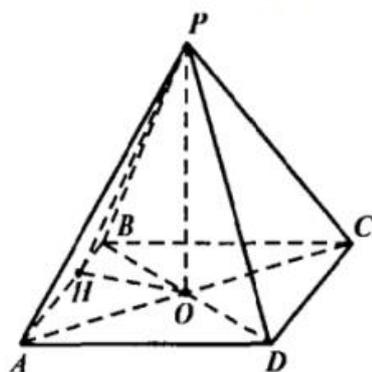
3. Сформулируйте определение прямой пирамиды.

4. Сформулируйте определение наклонной пирамиды.

5. Сформулируйте определение правильной пирамиды.

6. Решите задачу.

Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды образует угол в 60° с плоскостью основания. Найдите площадь поверхности пирамиды, если боковое ребро равно 12 см.



7. Сделайте рисунок и решите задачу.

В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 60° . Найдите боковое ребро пирамиды.

8. Задача:

Задача. Правильная четырёхугольная призма пересечена плоскостью, содержащей две её диагонали. Площадь полученного сечения равна 60 см^2 , а сторона основания равна 6 см. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

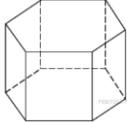
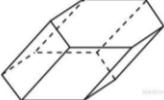
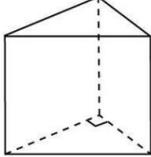
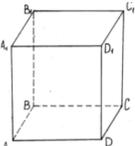
3. Подведение итогов урока:

1. Какие задания оказались для вас самыми сложными?

2. Есть ли необходимость разобрать некоторые задания и вопросы на консультации?

ПРИЛОЖЕНИЕ 13

Задания зачета и проверяемые познавательные УУД

№	Задания	Познавательные УУД
1	1.1. Сформулируйте определение призмы. 2.1. Сформулируйте определение пирамиды.	<ul style="list-style-type: none"> - умения структурировать знания; - умение осознанно и произвольно выстраивать речевое высказывание в письменной форме.
2	1.2. Сделайте подобные рисунки в тетрадь, обозначьте вершины призмы и выполните задание. <div style="text-align: center; margin: 10px 0;">  Рисунок А  Рисунок Б </div> А) Укажите основания призмы на рисунке а, на рисунке б. Б) Какое основание призмы, изображённой на рисунке б больше? Почему? В) Укажите взаимное расположение плоскостей, в которых лежат основания призмы? Г) Назовите по рисунку а боковые рёбра призмы. Каково их взаимное положение? Д) Определите вид многоугольников, из которых состоит боковая поверхность призмы. Е) Укажите, какая из призм является прямой, какая наклонной? Какое условие должно выполняться, чтобы призма была прямой? Правильной? Наклонной? Ж) Проведите и обозначьте на рисунках а и б высоту призмы, диагональ призмы. Отрезок _____ является высотой призмы на рисунке а, отрезок _____ является высотой призмы на рисунке б. Отрезок _____ является диагональю призмы на рисунке а, Отрезок _____ является диагональю призмы на рисунке б. З) Укажите, как определяется полная поверхность призмы. И) Сделайте рисунки в и г в тетрадь. Запишите выражение для вычисления площади боковой поверхности призмы, изображённой на рисунке в. <div style="text-align: center; margin: 10px 0;">  Рисунок в.  Рисунок г.А </div> К) Запишите выражение для вычисления площади боковой поверхности призмы, изображённой на	<ul style="list-style-type: none"> - поиск и выделение нужной информации; - преобразование модели для выявления общих законов, использование моделей при решении задач; - умения структурировать знания; - анализ объектов с целью выделения существенных и несущественных признаков; - синтез – составление целого из его частей, в том числе с самостоятельным достраиванием, восполнением недостающих компонентов.

рисунке г.

Л) Запишите выражение для вычисления площади полной поверхности призмы, изображённой на рисунках в и г.

2.2. Сделайте подобные рисунки в тетрадь, обозначьте вершину пирамиды и выполните задание.

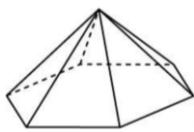


Рисунок А

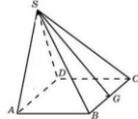


Рисунок б

А) Укажите основание пирамиды на рисунке а, на рисунке б.

Б) Чем является точка, не лежащая в плоскости основания пирамиды?

В) укажите взаимное расположение отрезков, которые являются боковыми рёбрами пирамиды? Назовите по рисунку а боковые рёбра.

Г) Укажите, какая из пирамид является прямой, какая наклонной? Какое условие должно выполняться, чтобы пирамида была прямой? Правильной? Наклонной?

Д) Проведите и обозначьте на рисунках а и б высоту пирамиды, диагональ пирамиды. Какого отрезка из названных не существует?

Отрезок _____ является высотой пирамиды на рисунке а, отрезок _____ является высотой пирамиды на рисунке б.

Е) на рисунке б проведите апофему боковой грани ASD. Что называют апофемой?

Ж) Укажите, как определяется полная поверхность пирамиды.

З) Сделайте рисунки в и г в тетрадь.

Запишите выражение для вычисления площади боковой поверхности призмы, изображённой на рисунке в.

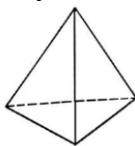


Рисунок в.

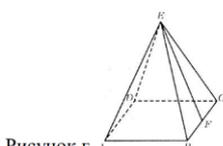


Рисунок г.

И) Запишите выражение для вычисления площади боковой поверхности пирамиды, изображённой на рисунке г.

К) Запишите выражение для вычисления площади полной поверхности пирамиды, изображённой на рисунках в и г.

3

1.3. Сформулируйте определение прямой призмы.

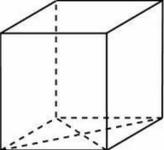
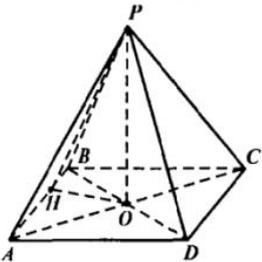
1.4. Сформулируйте определение наклонной призмы.

1.5. Сформулируйте определение правильной призмы.

2.3. Сформулируйте определение прямой

- умения структурировать знания;

- умение осознанно и произвольно выстраивать речевое высказывание в письменной форме.

	<p>пирамиды. 2.4. Сформулируйте определение наклонной пирамиды. 2.5. Сформулируйте определение правильной пирамиды.</p>	
4	<p>1.6. Решите задачу. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8, и боковым ребром, равным 10.</p>  <p>1.7. Сделайте рисунок и решите задачу. В треугольной призме две боковые грани перпендикулярны. Их общее ребро равно 10 и отстоит от других боковых ребер на 6 и 8. Найдите площадь боковой поверхности этой призмы.</p> <p>1.8. Задача. Основанием пирамиды является ромб. Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания и образуют двугранный угол 150°, а две другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если её высота равна 4 см.</p> <p>2.6. Решите задачу. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды образует угол в 60° с плоскостью основания. Найдите площадь поверхности пирамиды, если боковое ребро равно 12 см.</p>  <p>2.7. Сделайте рисунок и решите задачу. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 60°. Найдите боковое ребро пирамиды.</p> <p>2.8. Задача: Правильная четырёхугольная призма пересечена плоскостью, содержащей две её диагонали. Площадь полученного сечения равна 60 см^2, а сторона основания равна 6 см. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - создание, замещение и преобразование модели для выявления общих законов, использование моделей при решении задач; - умения структурировать знания; - выбор наиболее эффективного способа решения задачи в зависимости от определенных условий; - смысловое чтение, основанное на осознании цели чтения и выбора вида чтения, извлечение необходимой информации, определение главной и второстепенной информации; - анализ объектов с целью выделения существенных и несущественных признаков; - синтез – составление целого из его частей, в том числе с самостоятельным достраиванием, восполнением недостающих компонентов; - установление причинно-следственных связей, построение логической цепочки рассуждения.