**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**

**«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)**

**Физико-математический факультет**

**Кафедра математики и методики обучения математике**

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ДЕВЯТОГО КЛАССА

**Выпускная квалификационная работа**
**по направлению 44.03.05 Педагогическое образование**

**Направленность программы бакалавриата**
**«Математика. Экономика»**

Проверка на объем заимствований:
80,36 % авторского текста

Работа рекомендована к защите
« 22 » марта 2018 г.
зав. кафедрой МиМОМ
Суховиенко Е.А.

Выполнил:
Студент группы ОФ-513/086-5-1
Мухтяев Константин Сергеевич

Научный руководитель:
доктор пед. наук, доцент, зав. кафедрой
Суховиенко Е.А.

**Челябинск**
**2018 год**

**СОДЕРЖАНИЕ**

# ВВЕДЕНИЕ

В условиях современного быстро развивающегося общества, научно-технического прогресса вопрос качества школьного образования стоит наиболее остро. Сегодня каждый выпускник должен обладать достаточным запасом знаний, быть грамотным и конкурентоспособным. С ростом значимости качества образования в целом растет и значимость математического школьного образования: наблюдается прямая зависимость между уровнем математического образования населения страны и важнейшими национальными показателями государства.

Основа качественного математического образования – математическая грамотность. Следовательно, для повышения уровня математического образования населения, необходимо развивать математическую грамотность подрастающего поколения – школьников.

Математическая грамотность представляет собой совокупность знаний, умений и навыков, дающих возможность осознавать роль математики в мире, а также применять математические знания для решения тех или иных задач, направленных на удовлетворения потребностей личности и общества.

Важным критерием определения уровня математической грамотности учащегося является его способность распознавать проблемы, возникающие в окружающей действительности, и формулировать эти проблемы на языке математики. А это не что иное, как математическое моделирование.

Актуальность проблемы математического моделирования в школьном курсе математики обусловлена высокой значимостью роли данного метода математического познания в формировании важнейших интеллектуальных качеств личности. Особенно это актуально для учащихся 9-ых классов, поскольку в возрасте 14-16 лет протекает процесс становления личности, выбора жизненного пути, осознание своего интеллектуального потенциала и умственных способностей.

Математическое моделирование – мощный инструмент познания и развития интеллекта, умственных способностей, мышления и логики, в целом, и средство решения математических задач, в частности. Однако, насколько этот метод эффективен, настолько и сложен в использовании. Учащиеся в средней школе сталкиваются с большим количеством трудностей и проблем, связанных с освоением данного метода.

Основная проблема заключена в том, что ученики привыкают к использованию стандартизированных алгоритмов при выполнении определённого рода математических заданий, в противовес логическим рассуждениям: творческому процессу составления модели и ее решения.

Объектом исследования данной работы является процесс обучения математике учеников 9-ых классов.

Предмет исследования – обучение учащихся элементам математического моделирования.

Цель данного исследования – разработка методики обучения математическому моделированию учащихся девятых классов.

Гипотеза заключена в следующем: если в процессе обучения составлению математических моделей использовать вспомогательные упражнения (задания на выделение условия и вопроса задачи, задания на развитие умения выражать изменения величин, задания на перевод текстовых формулировок на математический язык и обратно), а также принцип наглядности (использовать схемы, чертежи и рисунки), то процесс обучения математическому моделированию будет эффективнее.

В соответствии с поставленной целью и гипотезой были выявлены следующие задачи:

1) определить сущность модели и моделирования в целом;
2) дать понятие математической модели, раскрыть суть и виды математического моделирования;
3) определить функции, цели и роль обучения математическому моделированию в школе;

4) проанализировать школьные учебники математики;
5) выявить основные проблемы, связанные с математическим моделированием в школьном курсе и предложить пути их решения;
6) описать методику обучения школьников элементам математического моделирования в алгебре;

Цель и задачи определили структуру квалификационной работы, которая состоит из введения двух глав, заключения и списка использованных источников.

Методы исследования: анализ научной литературы, анализ школьных учебников, анализ образовательных программ.

# Глава 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

## 1.1. Сущность и классификация моделирования. Математическое моделирование

В современной эпохе становления науки и техники моделирование – универсальный инструмент, применяемый в самом широком спектре гуманитарных, точных и прикладных наук.

Изучением моделирования занималось и занимается по сей день большое количество ученых, философов, педагогов и психологов. Известны научные труды А.И. Уемова, И.Б. Новикова, Л.М. Фридмана, Б.А. Глинского, В.А. Штоффа, С.И. Архангельского и других.

«Модель» как научный термин применяется в разнообразных сферах жизни и деятельности человека и, как следствие, имеет множество трактовок и смысловых значений. Однако, везде соблюдается основной принцип моделирования: объект, по которому строится модель называется оригиналом, а объект, который является продуктом моделирования называется моделью.

Само понятие «модель» появилось как результат эмпирического познания окружающего мира. Если же углубиться в этимологию слова «модель», то станет ясно, что оно произошло от слияния латинских слов «modus», «modulus», которые означают образ, меру, прообраз [3].

Ученые по-разному трактуют понятие «модель».

Так, например, В.А. Штофф под моделью понимает «такую мысленно представляемую или материально реализованную систему, которая отображает и воспроизводит объект так, что ее изучение дает новую информацию об этом объекте» [33].

А.И. Уемов определяет модель как «систему, исследование которой служит средством для получения информации о другой системе» [29].

Чарльз Лейв и Джеймс Марч дают такое определение модели: «Модель – это упрощенная картина реального мира. Она обладает некоторыми, но не всеми свойствами реального мира. Она представляет собой множество взаимосвязанных предположений о мире. Модель проще тех явлений, которые она по замыслу отображает или объясняет» [20].

В. А. Поляков считает, что «модель – это идеальное формализованное представление системы и динамики ее поэтапного формирования. Модель должна интегрированно имитировать реальные задачи и ситуации, быть компактной, адекватно передавать смены состояний и должна совпадать с рассматриваемой задачей или ситуацией» [31].

Большинство психологов под «моделью» понимают систему объектов или знаков, воспроизводящую некоторые существенные свойства системы-оригинала. Наличие отношения частичного подобия (гомоморфизм) позволяет использовать модель в качестве заместителя или представителя изучаемой системы.

Иногда под моделью понимают такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные черты.

Вот некоторые примеры моделей:

1) Перед тем как начать строительство спортивного объекта (стадиона), архитектор изготавливает его уменьшенную копию для наглядного изображения будущей постройки. В данном случае уменьшенная копия стадиона – это модель.

2) Художник-маринист изобразил на холсте морские пейзажи. В данном случае, картина, содержащая изображение море будет моделью.

3) Инженер-конструктор для создания нового автомобиля сначала разрабатывает опытный образец, который ограничен в своем функционале, однако, содержит какую-либо общую концепцию будущей машины. Опытный образец – это модель.

«Моделирование – это есть процесс использования моделей (оригинала) для изучения тех или иных свойств оригинала (преобразования оригинала) или замещения оригинала моделями в процессе какой-либо деятельности» (например, для преобразования арифметического выражения можно его компоненты временно обозначить буквами)» [27].

«Моделирование – это опосредованное практическое или теоретическое исследование объекта, при котором непосредственно изучается не сам интересующий нас объект, а некоторая вспомогательная искусственная или естественная система:

1) находящаяся в некотором объективном соответствии с познаваемым объектом;

2) способная замещать его в определенных отношениях;

3) дающая при ее исследовании, в конечном счете, информацию о самом моделируемом объекте» [26].

На основании перечисленного можем выделить следующие цели моделирования:

1) понимание устройства конкретной системы, ее структуры, свойств, законов развития и взаимодействия с окружающим миром;

2) управление системой, определение наилучших способов управления при заданных целях и критериях;

3) прогнозирование прямых и косвенных последствий реализации заданных способов и форм воздействия на систему.

Все три цели подразумевают в той или иной степени наличия механизма обратной связи, то есть необходима возможность не только переноса элементов, свойств и отношений моделируемой системы на моделирующую, но и наоборот.

Моделирование тесно связано с такими категориями, как абстракция, аналогия, гипотеза и др. Процесс моделирования обязательно включает и построение абстракций, и умозаключения по аналогии, и конструирование научных гипотез.

Научной основой моделирования служит теория аналогии, в которой основным понятием является понятие аналогии – сходство объектов по их качественным и количественным признакам. Все эти виды объединяются понятием обобщенной аналогии – абстракцией. Аналогия выражает особого рода соответствие между сопоставляемыми объектами, между моделью и оригиналом [3].

Поскольку моделирование – процесс, применяемый для достижения различных целей на разных этапах исследования, создания или преобразования, то существует некоторое разнообразия форм и типов моделей.

Классификация моделей происходит по наиболее существенным признакам, которыми обладает объект моделирования. Рассмотрим некоторое типы классификаций моделей.

В.А. Штофф предлагает следующую классификацию моделей [33]:

1. по способу их построения (форма модели):
   a. материальные;
      i. образные;
      ii. знаковые;
      iii. смешанные
   b. идеальные;
2. по качественной специфике (содержание модели).

Все модели можно классифицировать либо по способу их построения, то есть по форме модели, либо по качественной специфике, то есть по содержанию модели.

По способу построения выделяют модели материальные и идеальные. Все материальные модели существуют объективно, несмотря на то, что они созданы человеком. Материальные модели обладают важной функцией воспроизведения характера, протекания, сущности, структуры изучаемого объекта, процесса или явления. Идеальные или воображаемые модели представляют собой идеальные конструкции, заключенные в нашем сознании представления об объектах, процессах, явлениях и т.д.

Материальные модели неразрывно связаны с воображаемыми (прежде чем что-либо построить, необходимо иметь теоретическое представление, обоснование). Эти модели остаются мысленными даже в том случае, если они воплощены в какой-либо материальной форме. Большинство этих моделей не претендует на материальное воплощение.

В свою очередь материальные модели по форме делятся на:

· образные (построенные из чувственно наглядных элементов);

· знаковые (в этих моделях элементы отношения и свойства моделируемых явлений выражены при помощи определенных знаков);

· смешанные (сочетающие свойства и образных, и знаковых моделей).

Достоинства данной классификации в том, что она дает хорошую основу для анализа двух основных функций модели:

1) практической (в качестве орудия и средства научного эксперимента);

2) теоретической (в качестве специфического образа действительности, в котором содержатся элементы логического и чувственного, абстрактного и конкретного, общего и единичного).

Как видим, понятие модели в науке и технике имеет множество различных значений, среди ученых нет единой точки зрения на классификацию моделей, в связи с этим невозможно однозначно классифицировать и виды моделирования. Классификацию можно проводить по различным основаниям:

1) по характеру моделей (то есть по средствам моделирования);

2) по характеру моделируемых объектов;

3) по сферам приложения моделирования (моделирование в технике, в физических науках, в химии, моделирование процессов живого, моделирование психики и т. п.)

4) по уровням («глубине») моделирования, начиная, например, с выделения в физике моделирования на микроуровне.

Наиболее известной является классификация по характеру моделей. Согласно ей, различают следующие виды моделирования:

1. Предметное моделирование, при котором модель воспроизводит геометрические, физические, динамические или функциональные характеристики объекта. Например, модель моста, плотины, модель крыла самолета и т.д.

2. Аналоговое моделирование, при котором модель и оригинал описываются единым математическим соотношением. Примером могут служить электрические модели, используемые для изучения механических, гидродинамических и акустических явлений.

3. Знаковое моделирование, при котором моделями служат знаковые образования какого-либо вида: схемы, графики, чертежи, формулы, графы, слова и предложения в некотором алфавите (естественного или искусственного языка)

4. Со знаковым тесно связано мысленное моделирование, при котором модели приобретают мысленно наглядный характер. Примером может в данном случае служить модель атома, предложенная в свое время Бором.

5. Наконец, особым видом моделирования является включение в эксперимент не самого объекта, а его модели, в силу чего последний приобретает характер модельного эксперимента. Этот вид моделирования свидетельствует о том, что нет жесткой грани между методами эмпирического и теоретического познания [5].

Математическое моделирование — частный случай моделирования. Является важнейшим видом знакового моделирования и осуществляется средствами языка математики. Знаковые образования и их элементы всегда рассматриваются вместе с определенными преобразованиями, операциями над ними, которые выполняет человек или машина (преобразования математических, логических, химических формул и т. п.) [28].

Понятия «математическая модель» и «моделирование» широко используются в науке и на производстве. Роль знаковых моделей особенно возросла с расширением масштабов применения ЭВМ при построении знаковых моделей. Современная форма «материальной реализации» знакового (прежде всего, математического) моделирования – это моделирование на цифровых электронных вычислительных машинах, универсальных и специализированных.

Математическая модель – это упрощенный вариант действительности, используемый для изучения ее ключевых свойств. Математическая модель, основанная на некотором упрощении, идеализации, не тождественна объекту, а является его приближенным отражением. Однако благодаря замене реального объекта соответствующей ему моделью появляется возможность сформулировать задачу его изучения как математическую и воспользоваться для анализа универсальным математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы объекта.

Математической моделью, с формальной точки зрения, можно назвать любую совокупность элементов и связывающих их операций. С содержательной точки зрения интересны модели, являющиеся изоморфным отображением реальных или реализуемых объектов, процессов и явлений.

С математическими моделями тесно связан математический метод познания отображаемых моделью объектов – метод математического моделирования.

Математическое моделирование – приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. Это мощный метод познания внешнего мира, а также прогнозирования и управления.

Математическое моделирование расширяет творческие возможности специалиста в решении целого ряда профессиональных задач, существенно изменяет его профессиональную подвижность. Современному специалисту следует «хорошо знать» математику, то есть не просто уметь использовать ее для различных расчетно-вычислительных операций, а понимать математические методы исследования и их возможности. Только понимание сущности математического моделирования позволяет адекватно использовать этот метод в профессиональной деятельности.

## 1.2. Математическое моделирование в рамках школьного курса математики: функции, цели и роль обучения математическому моделированию

Известный математик-методист Н.А. Терешин, в процессе изучения математического моделирования, выделяет следующие дидактические функции [28]:

1. Познавательная функция.

Методической целью этой функции является формирование познавательного образа изучаемого объекта. Это формирование происходит постоянно при переходе от простого к сложному.

Здесь мысль учащегося направляется по кратчайшим и наиболее доступным путям к целостному восприятию объекта. Реализация познавательной функции не предопределяет процесса научного познания, ценность этой функции состоит в ознакомлении учащихся с наиболее кратким и доступным способом осмысления изучаемого материала.

2. Функция управления деятельностью учащихся.

Математическое моделирование предметно и потому облегчает ориентировочные, контрольные и коммуникационные действия. Ориентировочным действием может служить, например, построение чертежа, соответствующего рассматриваемому условию, а также внесение в него дополнительных элементов.

Контролирующие действия направлены на обнаружение ошибок при сравнении выполненного учащимися чертежа (схемы, графика) с помещенными в учебнике или на выяснение тех свойств, которые должны сохранить объект при тех или иных преобразованиях.

Коммуникационные действия отвечают той стадии реализации функции управления деятельностью учащихся, которая соответствует исследованию полученных ими результатов. Выполняя эти действия, учащийся в свете собственного опыта объясняет другим или хотя бы самому себе по построенной модели суть изучаемого явления или факта.

3. Интерпретационная функция.

Известно, что один и тот же объект можно выразить с помощью различных моделей. Например, окружность можно задать с помощью пары объектов (центр и радиус), уравнением относительно осей координат, а также с помощью рисунка или чертежа. В одних случаях можно воспользоваться ее аналитическим выражением, в других – геометрической моделью. Рассмотрение каждой из этих моделей является ее интерпретацией; чем значимей объект, тем желательней дать больше его интерпретаций, раскрывающих познавательный образ с разных сторон.

Можно также говорить об эстетических функциях моделирования, а также о таких, как функция обеспечения целенаправленного внимания учащихся, запоминания и повторения учащимися учебного материала и т. д.

Кроме этих функций можно выделить еще одну – не менее важную – эвристическую. Математическая модель, выступая как выражение количеством качества объекта, позволяет экспериментировать с его количественной стороной, дает возможность определить границы устойчивости, нормальный и оптимальный режимы функционирования, еще глубже проникнуть в качественный аспект объекта — показать его внутренние закономерности. В этом и раскрывается эвристическая функция математического моделирования и его возможности для решения проблем разных наук: биологии, химии, физики, медицины и других.

Применение нескольких функций математической модели способствует наиболее плодотворному мышлению учащегося, так как его внимание легко и своевременно переключается с модели на полученную с ее помощью информацию об объекте и обратно. Такое переключение сводит к минимуму отвлечение умственных усилий учащихся от предмета их деятельности.

В литературных источниках отмечается использование моделирования в обучении математике как средства познания и осмысления нового знания, выделяются его виды, отмечаются условия, необходимые для его формирования (Л.М. Фридман, В.В. Давыдов, С.И. Архангельский, О.Б. Епишева, В.И. Крупич, Л.С. Катаева, Г.А. Балл и др.). Вместе с тем остается недостаточной разработанность вопросов обучения приему моделирования, наиболее эффективной реализации всех его потенциальных возможностей.

Некоторые авторы считают, что в условиях развивающего обучения формирование у учащихся приемов интеллектуальной деятельности является одной из центральных задач (А.К. Артемов, В.В. Давыдов, И.С. Якиманская и другие), ее существенным приемом является моделирование.

Модели упрощают восприятие учащимися какой-либо ситуации и обеспечивают целостность восприятия, развивают компоненты абстрактного мышления (анализ, сравнение, обобщение, абстрагирование и др.), совершенствуют логическое мышление и помогают глубже усвоить учебный материал, так как позволяют изучать свойства объекта в «чистом» виде.

Необходимость овладения математическим моделированием как особым действием диктуется психолого-педагогическими соображениями. Изучение процесса обучения привело к разработке психологической теории учения. Теория поэтапного формирования умственных действий, разработанная советским психологом П.Я. Гальпериным и его сотрудниками, исходит из положения, что процесс обучения – это процесс овладения системой умственных действий. При этом овладение умственным действием происходит в процессе интериоризации (перехода вовнутрь) соответствующего внешнего практического действия [9].

Когда ученика знакомят с каким-либо действием, которым ему нужно овладеть, то согласно данной теории знакомство надо начинать с выполнения этого действия соответствующими материальными предметами. Для того чтобы лучше увидеть общие черты усваиваемого действия, надо отвлечься от ненужных в данном случае свойств предметов. Это значит, что нужно перейти от действия с материальными предметами к действию с их заместителями — моделями, свободными от всех других свойств, кроме нужных в данном случае, то есть перейти на этап материализованного действия. Это может быть какая-то графическая схема, образная или знаковая модель, на которой или с помощью, которой ученик выполняет усваиваемое действие.

Математическое моделирование служит особым видом образно-знаковой идеализации и построения научной предметности. Моделирование позволяет видеть предмет как объект исследования, определять действия с ним задолго до того, как будет получен конечный результат. А это означает, что с самого первого момента конструирования создается образ, который позволит ориентироваться в предмете и анализировать его, служит средством продвижения в содержании.

Таким образом, включение моделирования в учебный процесс рационализирует его и одновременно активизирует познавательную деятельность учащихся. Следовательно, решается не только конкретная учебная задача, но и осуществляется развитие учащихся. Широкое использование моделирования – одно из методических средств развивающего обучения математике. Моделирование отражает преимущественно теоретический стиль мышления, который в большей мере содействует развитию учащихся, приобщает их к научному стилю мышления.

Развитие у учащихся правильных представлений о природе математики и отражении математической наукой явлений и процессов реального мира является программным требованием к обучению математике. Доминирующим средством реализации этой программной цели является метод математического моделирования.

Для моделирования привлекаются различные математические объекты: числовые формулы, числовые таблицы, буквенные формулы, функции, уравнения алгебраические или дифференциальные и их системы, неравенства, системы неравенств (а также неравенств и уравнений), ряды, геометрические фигуры, разнообразные графосхемы, диаграммы Венна, графы.

Математическое моделирование находит применение при решении многих текстовых задач. Уравнение, составленное по условию задачи, является ее алгебраической моделью. Моделированию, особенно алгебраическому и аналитическому, следует уделить в школе должное внимание, так как математические модели используются для решения (или хотя бы облегчения решения) сюжетных задач. Кроме того, при построении модели используется такие операции мышления, как анализ через синтез, сравнение, классификация, обобщение, которые являются операциями мышления, и способствует его развитию. Составление математической модели задачи, перевод задачи на язык математики исподволь готовит учащихся к моделированию реальных процессов и явлений в их будущей деятельности.

При решении сюжетных задач особенно часто используются их алгебраические и аналитические модели. Такой моделью может быть функция, описывающая явление или процесс, уравнение, система уравнений, неравенство, система неравенств, система уравнений и неравенств и др. При составлении модели задача, таким образом, переводится на язык алгебры или математического анализа.

Рассмотрим несколько примеров математических моделей.

**Задача №1.** Два мотоциклиста Иван и Степан одновременно выезжают из города N по направлению в город M. Известно, что расстояние между городами равно 180 км. Иван едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем Степан, и приезжает в город M на 1 час раньше. С какой скоростью ехал Степан?

<u>Решение</u>

В условии данной задачи сказано, что расстояние между городами M и N составляет 180 км, а также нам известно, что из города N одновременно выехали два мотоциклиста Иван и Степан с разными скоростями. Причем, указано, что Иван едет со скоростью на $10$ км/ч большей, чем Степан и приезжает в конечный пункт на 1 час раньше. Поскольку известна разница в скоростях Ивана и Степана, то введем переменную $x$.

Пусть $x$ км/ч – скорость Степана, тогда Иван едет со скоростью $x + 10$ км/ч. Расстояние мотоциклисты преодолевают равное – $180$ км. Время, которое необходимо Ивану, чтобы добраться до города М – $\frac{180}{x+10}$ часов, а Степану – $\frac{180}{x}$ часов. Чтобы установить взаимосвязь между данными показателями времени, обратимся к условию задачи, в котором сказано, что Иван прибыл в город М на 1 час раньше, то есть его показать времени на 1 меньше. Составим уравнение:

$$\frac{180}{x} - \frac{180}{x + 10} = 1.$$

Полученное уравнение является математической моделью данной текстовой задачи.

**Задача №2.** На строительстве выставочного комплекса работало две бригады, причем строительство было поделено на два участка таким образом, чтобы первая бригада выполняла работы на первом участке, а вторая – на втором. Известно, что общий объем работ на втором участке в два раза больше, чем на первом, а в первой строительной бригаде на 4 человека меньше, чем во второй. Две бригады одновременно приступили к выполнению работ, и когда первая бригада завершила постройку на своем участке, вторая продолжала работать. Какое наименьшее число строителей работало в первой бригаде?

Решение

В условии данной задачи сказано, что работало две строительных бригады на двух разных по объему работ участках: объем работ на втором участке в два раза больше, чем на первом, а в первой строительной бригаде на

4 человека меньше, чем во второй. Поскольку известна разница в количественном составе двух бригад, то введем переменные величины $x$ и $y$.

Пусть $x$ – производительность труда одного строителя, тогда $y$ чел – число строителей в первой бригаде. Чтобы найти объем работы, который выполнила первая бригада строителей необходимо перемножить эти показатели, то есть: $xy$. Пусть весь объем работы на первом участке равен 1. Тогда время, которая понадобилось первой бригаде, чтобы закончить работу $\frac{1}{xy}$.

Во второй бригаде работает на 4 строителя больше, значит количество строителей во второй бригаде – $y + 4$, производительность труда каждого строителя такая же, как и у строителей первой бригады – $x$ . Производительность труда всей бригады $x(y + 4)$. Объем работы, который необходимо выполнить второй бригаде в два раза больше, чем на первом участка и равен $1 \cdot 2 = 2$. Тогда второй бригаде потребовалось $\frac{2}{x(y+4)}$.

Так как, когда первая строительная бригада завершила работу, а вторая продолжала работать, то, очевидно, что показатель времени у второй бригады больше. Составим следующее неравенство:

$$\frac{1}{xy} \leq \frac{1}{x(y+4)}.$$

Полученное неравенство является математической моделью данной текстовой задачи.

**Задача №3.** Резервуар наполняется водой с помощью двух труб. Если пустить воду только через первую трубу, то резервуар будет наполняться на 16 минут дольше, чем если пустить воду только через вторую трубу. Если наполнять резервуар через обе трубы, то он заполнится за 50 минут. Сколько времени потребуется, чтобы наполнить резервуар только через первую трубу и только через вторую отдельно?

Решение

В условии данной задачи сказано, что резервуар для хранения воды наполняется через 2 трубы. Известно, что только через первую трубу он наполняется на 16 минут дольше, чем только через вторую. А также известно, что если подключить обе трубы, то резервуар на полнится за 50 минут. Чтобы решить данную задачу, необходимо составить систему уравнений с двумя неизвестными $x$ и $y$.

Пусть $x$ – скорость наполнения резервуара через первую трубу, а $y$ – скорость наполнения резервуара через вторую трубу. Пусть весь объем резервуара равен 1. Тогда, резервуар наполнится только через первую трубу за $\frac{1}{x}$ минут, а только через вторую за $\frac{1}{y}$ минут. Известно, что через первую трубу наполняется на 16 минут дольше, то есть: $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 16$.

Чтобы посчитать скорость наполнения резервуара, когда вода течет по обеим трубам, необходимо: $x + y$. Тогда, для того, чтобы найти время наполнения через обе трубы одновременно, необходимо: $\frac{1}{x+y}$, а по условию это значение равно 50 минутам, то есть: $\frac{1}{x+y} = 50$.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 16 \\ \frac{1}{x+y} = 50. \end{cases}$$

Данная система уравнений является математической моделью текстовой задачи.

Отметим, что в общем случае процесс моделирования состоит из следующих этапов:

1 этап. Постановка задачи и определение свойств оригинала, подлежащих исследованию.

2 этап. Констатация затруднительности или невозможности исследования оригинала.

3 этап. Выбор модели, достаточно хорошо фиксирующей существенные свойства оригинала и легко поддающейся исследованию.

4 этап. Исследование модели в соответствии с поставленной задачей.

5 этап. Перенос результатов исследования модели на оригинал.

6 этап. Проверка этих результатов.

На сегодняшний день наиболее распространенной является трехэтапная схема процесса математического моделирования:

1) перевод предложенной задачи с естественного языка на язык математических терминов, то есть построение математической модели задачи (формализация);

2) решение задачи в рамках математической теории (решение внутри модели);

3) перевод полученного результата (математического решения) на язык, на котором была сформулирована исходная задача (интерпретация полученного решения).

Наиболее ответственным и сложным является первый этап – само построение математической модели. Оно осуществляется логическим путем на основе глубокого анализа изучаемого явления (процесса) и требует умения описать явление (процесс) на языке математики.

В свою очередь, в процессе построения модели можно выделить несколько шагов.

Первый шаг – индуктивный: это отбор наблюдений, относящихся к тому процессу, который предстоит моделировать. Этот этап состоит в формулировке проблемы, то есть в принятии решения относительно того, что следует принимать во внимание, а чем можно пренебречь.

Второй шаг заключается в переходе от определения проблемы к собственно построению неформальной модели. Неформальная модель – это такое описание процесса, которое способно объяснить отобранные нами наблюдения, но при этом определено недостаточно строго, и нельзя с точностью проверить степень логической взаимосвязанности в нем свойств.

На этой стадии рассматриваются целый ряд наборов неформальных допущений, способных объяснить одни и те же данные; тем самым рассматриваются несколько потенциальных моделей и решается, какая из этих моделей лучше всего отображает изучаемый процесс. Иначе говоря, ищутся различные способы установления логического соответствия между моделью и реальным миром.

Третий шаг – это перевод неформальной модели в математическую модель. Такой перевод включает в себя рассмотрение словесного описания неформальной модели и поиск подходящей математической структуры, способной отобразить изучаемые процессы. Это самый сложный этап во всем процессе моделирования. Стадия перевода может таить в себе две опасности. Во-первых, неформальные модели имеют тенденцию быть неоднозначными, и обычно существует несколько способов перевода неформальной модели в математическую (при этом альтернативные математические модели могут иметь совершенно различный смысл). На самом деле это одна из главных причин, изначально толкающих к применению математических моделей: язык математики лишен двусмысленностей и более точен, чем естественный язык, он позволяет исследовать скрытый смысл тончайших различий в формулировках, который плохо доступен исследованию посредством естественного языка.

Следующий этап – этап решения задачи в рамках математической теории – можно еще назвать этапом математической обработки формальной модели. Он является решающим в математическом моделировании. Именно здесь применяется весь арсенал математических методов – логических, алгебраических, геометрических и т. д. – для формального вывода нетривиальных следствий из исходных допущений модели. На стадии математической обработки обычно – вне зависимости от сути задачи – имеют дело с чистыми абстракциями и используют одинаковые математические средства. Этот этап представляет собой дедуктивное ядро моделирования.

На последнем этапе моделирования полученные выводы проходят через еще один процесс перевода – на сей раз с языка математики обратно на естественный язык [9].

Учителю следует добиться от учащихся четкого понимания значения и содержания каждого из выше описанных этапов процесса математического моделирования. Это нужно для того, чтобы школьники усвоили, что они решают не просто математическую задачу, а конкретную жизненную ситуацию математическими методами. Тогда учащиеся смогут увидеть в математике практическое значение, и не будут воспринимать ее как абстрактную науку.

## 1.3. Проблемы, возникающие при обучении моделированию, и пути их решения

Выделим основные трудности, возникающие в процессе обучения математическому моделированию учеников 9-ых классов и предложим возможные пути решения проблем.

Наиболее важная проблема в математическом моделировании, – анализ текстовых задач. В школьном курсе математики инструменты моделирования чаще всего применяются в процессе решения текстовых задач. Данная проблема носит обобщающий характер и включает в себя:

1. затруднения, связанные с внимательным прочтением текста задачи;
2. затруднения, связанные с проведением первичного анализа текста задачи, то есть выделение условия и вопроса;
3. затруднения, связанные с акцентированием внимания на тех качествах и свойствах объекта (субъекта), которые важны для составления верной модели.

Причина данной проблемы связана с недостаточной внимательностью и концентрацией. Сам процесс обсуждения задачи проходит крайне быстро –

ученики стараются сразу перейти к этапу ее решения (особенно в 9-11 классах). По личным наблюдениям около 30-50% учеников класса не успевает должным образом проанализировать текст и выделить важные условия.

К способам решения данной проблемы можно отнести следующее:

1. во-первых, учителям необходимо больше времени уделять работе с текстом, проговаривать, что является условием задачи, а что – вопросом;
2. во-вторых, перед решением текстовой задачи, вместе с классом анализировать текст двух-трех задач без дальнейшего решения, для того, чтобы вырабатывать привычку рассуждать и совершать умозаключения.

Другой комплекс проблем, связанных с математическим моделированием – процесс составления модели по тексту задачи. Эта проблема также носит характер общий. После анализа текста (или любых других исходных данных) необходимо определиться с выбором переменной величины, перевести зависимость одних значений от других на язык математики, а также проверить выполнение логических связей между разными величинами и показателями. Здесь возможны несколько вариантов возникновения ошибок и трудностей:

1. ученик затрудняется оформлять краткую запись текста задачи;
2. ученик затрудняется наглядно выполнять чертежи (рисунки) по тексту задачи;
3. ученик не может верно выбрать ту величину, которую необходимо принять за $x$;
4. ученик не может верно установить взаимосвязь между известными и неизвестными величинами и записать ее в виде выражений;
5. ученик не может составить конечное уравнение.

Возможные варианты решения данной проблемы:

1. во-первых, учитель должен максимально наглядно описывать процесс построения математической модели: строить таблицы, схемы, рисунки, в некоторых случаях обращаться к мультимедийным устройствам для использования наглядной анимации;
2. во-вторых, применять комплекс вспомогательных упражнений для ликвидации проблем с переводом текстовых записей на математический язык.

Перечисленные проблемы – основные, которые встречались в процессе обучения учеников 9-ых классов. Естественно, освоение методики математического моделирования сопровождается большим количеством разнообразных проблем. Однако, ключевой момент – переход от алгоритмов к творческой составляющей – свобода в вариантах поиска ответа, в составлении моделей, «открытые» задания с выбором различных путей решения. Необходимо научиться не ограничивать учеников в их творчестве, а направлять к истине.

Стоит отметить, что суть всех проблем, связанных с обучением математическому моделированию заключена в том, что ученики привыкают к использованию стандартизированных алгоритмов при выполнении определённого рода заданий, будь то вычисление значений выражений, сокращение дробей, решение уравнений, неравенств или их системы. Безусловно, выполнение таких заданий развивает математические качества учащихся, но, в определенной степени притупляет сам навык моделирования. Ученики хорошо считают, решают, вычисляют, но плохо анализируют и рассуждают.

# ГЛАВА 2. МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

## 2.1. Анализ школьных учебников и задачников по математике

Тема «Математические модели» встречается в учебниках по математика Г.В. Дорофеева, Л.Г. Петерсона начиная с 5 класса. Содержание данной темы базируется на основных понятиях «математическая модель» и «моделирование» [11,12].

Г.В. Дорофеев и Л.Г. Петерсон вводят понятие «математической модели» через две текстовые задачи, в которых описываются совершенно разные по смыслу обстоятельства. Однако, авторы показывают, что данные задачи можно проиллюстрировать одним и тем же уравнением – математической моделью. В учебнике ставится акцент на процессе переформулирования текста задачи с русского языка на язык математики [11,12].

После того, как ученики усвоили перевод текста на математический язык, авторы предлагают ряд упражнений на оттачивание навыков работы с математическими моделями.

В учебниках по математике Г.В. Дорофеева, Л.Г. Петерсона для 6 класса особое внимание уделяется этапам математического моделирование. Изучаются основные этапы решения сюжетных задач алгебраическим методом [13,14,15].

Сравним учебники данных авторов с учебниками для 5 – 6 классов Н.Я. Виленкина, И.Ф. Шарыгина, И.И. Зубаревой и А.Г. Мордковича и оценим значимость, которую авторы вкладывают в математическое моделирование [16,17].

Один из самых скудных учебников по математике для 5 – 6 классов на предмет моделирования – пособие Н.Я. Виленкина: в нем не раскрываются термины «модель» и «моделирование», а также отсутствуют задания на их понимание [6,7].

Учебник И.Ф. Шарыгина содержит скромный объем теоретических и практических заданий, посвященных методу математического моделирования, но уже на страницах учебника по математике И.И. Зубаревой, А.Г. Мордковича можем встретить такие важные темы в освоении математического моделирования как «Математический язык», «Математическая модель». По аналогии с учебником Г.В. Дорофеева и Л.Г. Петерсона изложение данной темы проводится через решение текстовых задач разных по смысловому содержанию, но описывающихся одним и тем же уравнением – моделью [21,22, 26].

Проанализируем учебники по алгебре для учеников 7-9 классов автора А.Г. Мордковича.

В учебниках А.Г. Мордковича основой для развития умения построения математических моделей служат понятия математического языка и модели. По мнению автора, для начала необходимо закрепить основные понятия в форме беседы, а затем прорешивать задачи для отработки перевода условий на математический язык и обратно. А.Г. Мордкович на данной ступени обучения выделяет три основных этапа математического моделирования, предлагает задачи по трем направлениям: переход от реальной ситуации к математической модели; по заданной математической модели описать словами адекватную реальную ситуацию; решить задачу, выделив три этапа математического моделирования.

Элементы математического моделирования изложены в таких темах как «Умножение многочлена на одночлен», «Линейная функция», «Системы двух линейных уравнений с двумя переменными», «Алгебраические дроби», «Рациональные уравнения», «Системы неравенств», «Системы уравнений», «Прогрессии». Причем, каждая тема содержит большое количество заданий, с подробными решениями и выделением трех этапов математического моделирования.

При объяснении решения текстовых задач даны объяснения метода выбора переменных, хода рассуждений, даны различные виды вспомогательных моделей. Для развития навыков по решению текстовых задач предложено большое количество задач с различными фабулами и различной степени сложности. Все задачи предлагается решить с выделением трех этапов математического моделирования.

Проанализируем учебники по алгебре для учеников 7-9 классов авторов Г.К. Муравина, К.С. Муравина, и Г.В. Дорофеева.

В учебниках Г.К. Муравина, К.С. Муравина и Г.В. Дорофеева основой для развития умения построения математических моделей служат понятия математического языка и модели, но основной акцент ставится на практических заданиях в ущерб теоретической базе. Также в учебниках приведено достаточное количество примеров различного уровня сложности, с описанием решения. Однако, сам ход рассуждений подробно не изложен

Проанализируем учебники по алгебре для учеников 7-9 классов авторов Ш.А. Алимова и др. и Ю.Н. Макарычев и др. [1].

Учебники данных авторов не делают акцент на понятии «Математическая модель» при изучении решения текстовых. В конкретных темах все основное внимание уделяется видам математических моделей. Почти все базовые термины вводятся при решении текстовых задач. Теоретическая база также полна разнообразными задачами с подробными решениями, служащими шаблоном возможных действий, без объяснения метода выбора переменных и хода рассуждения.

Методически обоснованным и логически продуманным представлен учебник А.Г. Мордковича. Здесь содержится организованная и систематически слаженная работа по освоению, углублению и закреплению терминов математического моделирования. На протяжении всего изучения алгебры основной школы А.Г. Мордкович постоянно уделяет внимание текстовым задачам, подчеркивая важность математического моделирования.

## 2.2. Методика обучения математическому моделированию в курсе алгебры

В рамках данной работы рассмотрим методику обучения математическому моделированию в курсе алгебры.

Широко известны трудности, которые испытывают учащиеся при решении текстовых задач алгебраическим методом.

Все основные проблемы, связанные с моделированием в алгебре можно разделить на три группы.

Первая группа проблем состоит в математизации предложенного текста, т.е. в составлении математической модели, которая может представлять собой уравнение, неравенство или их систему, диаграмму, график, таблицу, функцию и т.д.

Для того, чтобы перевести содержание задачи на математический язык, учащемуся необходимо тщательно изучить и правильно истолковать его, формализовать вопрос задачи, выразив искомые величины через известные величины и введенные переменные.

Вторая группа проблем — составление уравнений и неравенств, связывающих данные величины и переменные, которые вводит учащийся.

Третья группа проблем — это решение полученной системы уравнений или неравенств желательно наиболее рациональным способом.

Г.Г. Левитас, известный методист, сформулировал понятие текстовой задачи, как «нематематическая по фабуле задача, решаемая математически». Например, задача «У Вани и Светы вместе 13 конфет; у Вани на три конфеты меньше. Сколько конфет у каждого из них?» — не математическая по фабуле. Но её можно решить математическим методом, моделируя ситуацию уравнением $x + (x + 3) = 13$.

Для решения текстовой задачи мы переводим её на математический язык, т.е. создаём её математическую модель. Овладение навыками математического моделирования, по мнению Г.Г Левитас, — едва ли не самое важное, чему мы учим детей на уроках математики. Одна из причин неуспеха, как пишет Г.Г Левитас, состоит в неправильном порядке обучения методу алгебраического решения текстовых задач, а именно в неправильном порядке их перевода на язык математики [9].

Ведь как вообще совершается перевод с одного языка на другой? Иногда он идёт синхронно. Вы читаете лёгкий для перевода текст и тут же излагаете его на другом языке. Именно так переводит учитель математики лёгкие для него текстовые задачи из школьного курса. Он сразу видит, что именно выгодно принять за x, что нужно выразить через x, каким будет уравнение. И учит детей работать именно в таком порядке. И действительно, лёгкие для школьника задачи он решает именно так.

Но вот встретилась задача потруднее. Что обозначать через $x$? Какие именно неизвестные величины выражать через $x$? Как составлять уравнение?

Рассмотрим, например, такую задачу. «Когда первый из двух шашечных турниров завершился, во втором было сыграно столько же партий, сколько в первом, и осталось сыграть ещё три тура. Известно, что оба турнира игрались в один круг и что число участников во втором туре было чётным. Сколько партий игралось в каждом туре второго турнира?»

Надо выбрать основные неизвестные так, чтобы через них можно было выразить каждую из величин, имеющихся в этой схеме. Если обозначить через $x$ число участников первого турнира, а через $y$ число участников второго турнира, то получим уравнение:

$$\frac{x(x-1)}{2}+\frac{3y}{2}=\frac{y(y-1)}{2}.$$

Описанная последовательность действий и есть тот способ, которым Г.Г. Левитас учит детей решать не получающиеся у них задачи: составь схему уравнения, выбери обозначения, составь уравнение …

Например, если школьнику трудно решить приведённую выше задачу с конфетами, он добивается от него составления такой схемы уравнения:

(число конфет у Вани) + (число конфет у Светы) = 13, и только после этого он занимается поисками, связанными с переводом на математический язык выражений, стоящих в скобках. Понятно, что та же задача допускает и иное истолкование:

(число конфет у Светы) − (число конфет у Вани)= 3,

что приводит к иным обозначениям.

Особенность этого способа заключается в том, что моделирование — перевод на математический язык — проводится в два приёма. Сначала русский текст задачи частично сохраняется и выступает совместно с элементами математического языка: знаками действий и знаком равенства. И только после этого текст задачи полностью заменяется математическим. Именно так, постепенно, переводим мы трудную для нас фразу с одного языка на другой.

С.Л. Рубинштейн, советский психолог и философ, член-корреспондент Академии наук СССР, характеризовал решение задач человеком как процесс их переформулирования [5].

Рассмотрим пример переформулирования задач в процессе анализа и решения.

**Задача 1.** Некоторая коллекция значков была размещена в коробках, каждая из которых имела 10 отделений. В некоторые отделения коробок были положены значки, по одному в отделение, другие отделения были еще пустые. Любые две коробки этой коллекции отличались друг от друга хотя бы наличием или отсутствием значков в одном и том же отделении. Очевидно, что наибольшее число значков в коробке равно 10, а наименьшее — нуль (коробка пустая). Сколько коробок в этой коллекции [5]?

Эта задача, конечно, носит несколько необычный характер. Но вот подобная ей задача, имеющая уже более реальный характер, полученная из задачи 1 с помощью такого переформулирования: каждому отделению коробки, поставим в соответствие электрическую лампочку, тогда наличию или отсутствию в нем значка соответствует одно из возможных состояний лампочки (горит или не горит). В результате получаем такую задачу.

**Задача 2.** В квартире 10 лампочек. Сколько существует различных способов освещения квартиры? Два способа освещения считаются различными, если они отличаются состоянием хотя бы одной лампочки. Каждая лампочка может гореть и не гореть. Случай, когда все лампочки не горят, — это тоже способ освещения [8].

Хотя эта задача более реальная и явление, в ней описанное, более наглядное, но и ее решение не очевидно. Чтобы легче подсчитать все различные способы освещения квартиры (или число коробок), изобразим каждую лампочку (каждое отделение) в виде квадрата, а ее состояние будем отмечать знаком "+", если лампочка горит (значок имеется), и знаком "−" в противном случае. Тогда каждому способу освещения квартиры (каждой коробке) будет соответствовать строка из десяти квадратиков со знаком "+" или "−". Число же таких строк в таблице и есть искомое число различных способов освещения квартиры (число коробок). Получаем такую задачу.

**Задача 3.** Имеется прямоугольная таблица, содержащая 10 столбцов. В каждой клеточке этой таблицы поставлен знак "+" или "−". Любые две строки таблицы отличаются знаком в клеточках, стоящих хотя бы в одном и том же столбце. Какое наибольшее число строк имеет эта таблица [8]?

Если решение и этой задачи вам не очевидно, то можно построить еще более прозрачную задачу следующим образом. Будем рассматривать каждую строку таблицы, о которой идет речь в предыдущей задаче, как десятизначное число, составленное из цифр 1 и 0 (цифра 1 соответствует знаку "+" в клеточке, а цифра 0 — знаку "−"). Тогда задача 3 переформулируется в такую.

**Задача 4.** Сколько различных десятизначных чисел можно образовать из цифр 0 и 1? При этом числа, в записи которых стоят слева одни нули (например, 0100001101, или 000000001, или даже 00000000001), также рассматриваются [9].

Решение этой последней задачи уже очевидно. На каждом месте в записи десятизначного числа могут стоять лишь цифры 1 или 0. Поэтому имеется всего лишь две комбинации цифр на каждом месте. Эти комбинации независимы друг от друга, ибо проставление цифры на данном месте в записи числа не зависит от того, какие цифры стоят на других местах. Поэтому общее число комбинаций или возможных десятизначных различных чисел равно

$$2^{10} = 1024.$$

Итак, общее число коробок из задачи $1$, число способов освещения квартиры из задачи $2$, число строк в таблице из задачи $3$ и число десятизначных чисел из задачи 4 равно $1024$.

Задачи $2-4$ были получены из задачи $1$ с помощью ее переформулирования. Чем же они являются для нее? Оказывается, что все они являются ее моделями, следовательно, переформулирование задачи 1 явилось способом ее моделирования, построения ее моделей.

Покажем еще на одном примере применение моделирования при решении задач.

**Задача 5** (задача Ньютона)

Трава на лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что $70$ коров поели бы ее за $24$ дня, а $30$ коров — за $60$ дней. Сколько коров поели бы всю траву за $96$ дней [10]?

<u>Решение.</u> Эта задача практическая, текстовая. Для того чтобы ее решить, надо составить уравнение или систему уравнений, которые представляют собой модель данной задачи.

Заданные в задаче величины — количество коров и число дней — не связаны непосредственно, поэтому введем следующие вспомогательные неизвестные — параметры для установления связи между основными величинами. Пусть на лугу первоначально было " a " единиц травы, и ежедневно на нем, вырастает "$b$" единиц травы. Пусть каждая корова за $1$ день съедает "$c$" единиц травы. Тогда в соответствии с условием получаем.

За $24$ дня всего вырастет $(a + 24b)$ единиц травы, которую за это время съедают $70$ коров. Они съедают $24 \cdot 70c = 1680c$, следовательно

$$a + 24b = 1680c \ (1).$$

По условию, что $30$ коров съедают всю траву за $60$ дней, получаем:

$$a + 60b = 1800c \ (2).$$

За 96 дней на лугу вырастет всего $a + 96b$ единиц травы, которую съедят искомое $x$ число коров, они съедят всего $96x \cdot c$ единиц травы, следовательно, получим такое уравнение:

$$a + 96b = 96x \cdot c \ (3).$$

Уравнения (1), (2) и (3) образуют систему, которая и есть модель исходной задачи:

$$\begin{cases} a + 24b = 1680c \\ a + 60b = 1800c \\ a + 96b = 96x \cdot c \end{cases}$$

Эту систему нам нужно решить относительно искомого х. Вычтем почленно из уравнения (2) уравнение (1), получим:

$$36b = 120c.$$

Отсюда

$$c = 0{,}3b. \ (4)$$

Подставим полученное значение с в уравнение (1):

$$a + 24b = 504b,$$

отсюда

$$a = 480b. \ (5)$$

Подставим выражения "с" и "а" из (4) и (5) в (3), получим:

$$480b + 96b = 28{,}8x * b$$

или $576b = 28{,}8x \cdot b,$

отсюда, сократив предварительно на "$b$", найдем: $x = 20.$

Ответ: 20 коров.

## 2.3 Применение вспомогательных упражнений и методических рекомендаций для ликвидации проблем в процессе обучения математическому моделированию в курсе алгебры

Для повышения эффективности обучения математическому моделированию при решении текстовых задач необходимо выполнять следующие типы вспомогательных упражнений:

1. задания на выделение условия и вопроса задачи;
2. задания на развитие умения выражать изменения величин;
3. задания на перевод текстовых формулировок на математический язык и обратно.

Рассмотрим методику выполнения данных упражнений на уроках математики в форме диалога между учителем и учеником.

К заданиям первого типа (задания на выделения условия и вопроса задачи) относятся упражнения, носящий устный характер. Суть данных упражнений заключена в повышении навыков смыслового чтения и умения проводить первичный анализ текста задачи. Принцип упражнений следующий:

1. учитель демонстрирует текст сюжетной задачи, применяя мультимедийные технологии, либо используя учебники и сборники;
2. учитель дает определенное количество времени (1-3 минуты) на прочтение текста задачи и осмысление прочитанного материала;
3. учитель задает ряд вопросов (фронтально), связанных с содержанием задачи:
   a. «Перескажите, о чем говорится в тексте задачи»;
   b. «Выделите основные объекты задачи»;
   c. «Какими характеристиками обладают данные объекты?»;
   d. «Сформулируйте кратко условие задачи»;
   e. «Сформулируйте кратко вопрос задачи».

**Пример №1**

<u>Задача</u>

Коля и Петя отправляются из школы в парк. Они двигаются по одному и тому же маршруту. Скорость Коли – 2,1 км/ч, а скорость Пети – 2,6 км/ч. Дойдя до опушки, Петя, вспоминает, что забыл в школе портфель и возвращается обратно по тому же маршруту и с той же скоростью. Через некоторое время. Коля и Петя встретились. На каком расстоянии от школы произойдет их встреча, если расстояние от школы до парка – 6,5 км.

Выполнение упражнения

Учитель: «Перед вами текст задачи, внимательно его прочитайте».

Ученики читают и анализируют текст задачи.

Учитель: «Перескажите своими словами, о чем говорится в тексте задачи кратко».

Ученик: «В тексте задачи идет речь о двух школьниках, которые двигаются из школы в парк с разной скоростью, но по одному маршруту».

Учитель: «Какие основные объекты можно выделить в сюжете задачи?».

Ученик: «Два основных объекта – Коля и Петя».

Учитель: «Какими характеристиками обладают данные объекты?»

Ученик: «Известно, что скорость Коли – 2,1 км/ч, а скорость Пети – 2,6 км/ч. А также известно, что расстояние от школы до парка 6,5 км».

Учитель: «Изобразим схематично условие задачи»

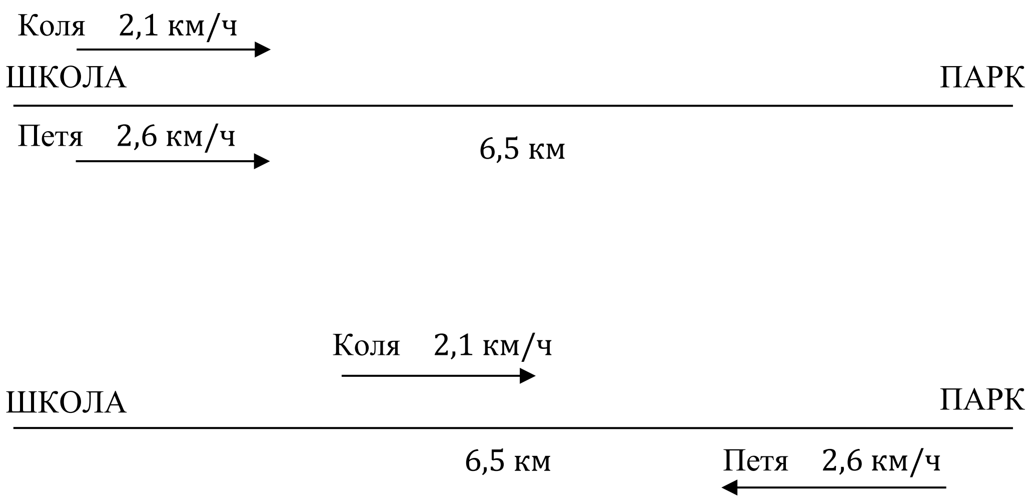


Рисунок 2.1 – Схематическое изображения условия задачи

Учитель: «Сформулируйте кратко условие задачи».

Ученик: «Коля и Петя отправляются из школы в парк, расстояние между которыми 6,5 км, со скоростями 2,1 км/ч и 2,6 км/ч соответственно. Известно, что первым до парка дошел Петя, затем начал движение в обратном направлении и встретился с Колей».

Учитель: «Сформулируйте кратко вопрос задачи».

Ученик: «Найдите расстояние от школы до места встречи Коли и Пети».

**Пример №2**

Задача

Двое маляров, работая вместе, за 1 час могут оштукатурить 9 м$^2$ стены. Если они будут работать отдельно друг от друга, то второй маляр оштукатурит участок стены площадью 13 м$^2$ на 2 часа быстрее, чем это сделает первый. Сколько часов уйдет у первого маляра на то, чтобы оштукатурить участок стены площадью 18 м$^2$.

Выполнение упражнения

Учитель: «Перед вами текст задачи, внимательно его прочитайте».

Ученики читают и анализируют текст задачи.

Учитель: «Перескажите своими словами, о чем говорится в тексте задачи кратко».

Ученик: «В тексте задачи идет речь о двух малярах, которые занимаются оштукатуриванием стен».

Учитель: «Какие основные объекты следует выделить в сюжете задачи?».

Ученик: «Основные объекты – маляры, причем рассматривается как их совместная работа, так и работа по отдельности».

Учитель: «Какими характеристиками обладают данные объекты?»

Ученик: «Известна их совместная производительность – 9 м$^2$ в час, а также известна разность в производительности труда каждого маляра, если он работает отдельно: второй оштукатурит 13 м$^2$ на 2 часа быстрее чем первый».

Учитель: «Сформулируйте кратко условие задачи».

Ученик: «Совместная производительность труда двух маляров – 9 м$^2$ в час, а второй, работая отдельно, оштукатуривает 13 м$^2$ на 2 часа быстрее чем первый».

Учитель: «Сформулируйте кратко вопрос задачи».

Ученик: «За сколько первый маляр оштукатурит 18 м$^2$ ?»

**Пример №3**

Задача

Теплоход плывет 40 минут против течения реки и 20 минут по озеру. Найдите скорость течения реки, если известно, что собственная скорость теплохода постоянна и равна 17 км/ч, а средняя скорость его движения за весь промежуток времени составила 14 км/ч.

Выполнение упражнения

Учитель: «Перед вами текст задачи, внимательно его прочитайте».

Ученики читают и анализируют текст задачи.

Учитель: «Перескажите своими словами, о чем говорится в тексте задачи кратко».

Ученик: «В тексте задачи идет речь о теплоходе, который преодолевает расстояние против течения реки и в стоячей воде».

Учитель: «Какие основные объекты можно выделить в сюжете задачи?».

Ученик: «Основной объект – теплоход».

Учитель: «Какими характеристиками обладают данные объекты?»

Ученик: «Известно собственная скорость теплохода – 17 км/ч, а также средняя скорость прохождения всего маршрута – 14 км/ч, помимо этого известно время, за которое были преодолены участки пути против течения реки (40 минут) и в стоячей воде (20 минут)».

Учитель: «Изобразим схематично условие задачи».

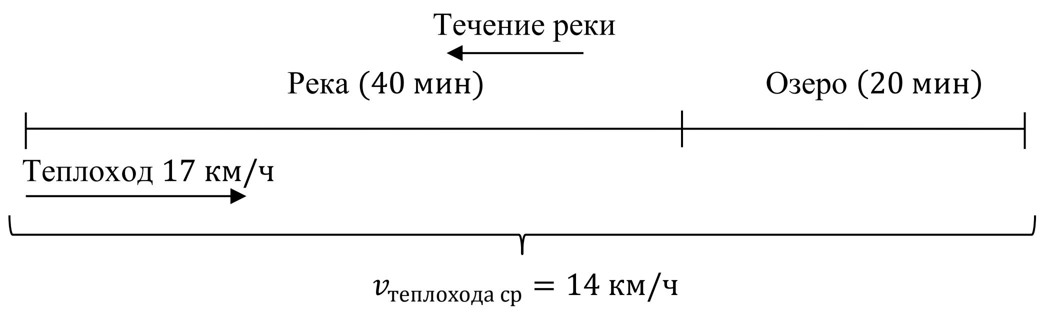


Рисунок 2.2 – Схематическое изображения условия задачи

Учитель: «Сформулируйте кратко условие задачи».

Ученик: «Теплоход, средняя скорость на протяжении всего пути которого 14 км/ч, плывет 40 минут против течения реки и 20 минут по озеру, с собственной скоростью 17 км/ч».

Учитель: «Сформулируйте кратко вопрос задачи».

Ученик: «Какова скорость течения реки?».

Упражнения второго типа (задания на развитие умения выражать изменения величин) представляют собой простейшие текстовые задачи, в которых необходимо с помощью математических символов и арифметических операций представить зависимость одних величин от других. Алгоритм работы с данным вспомогательным упражнением следующий:

1. учитель демонстрирует текст сюжетной задачи, применяя мультимедийные технологии, либо используя учебники и сборники;
2. за 1-2 минуты ученики читают текстовую задачи, определяют зависимость одних выражений от других;
3. ученики записывают зависимость с помощью символов и арифметических операций.

**Пример №1**

<u>Задача</u>

Отец старше дочери в 4 раза. Брат младше сестры на 5 лет и в 9 раз младше матери. Сколько лет всем членам семьи вместе, если дочери $x$ лет?

<u>Выполнение упражнения</u>

Учитель: «Перед вами текст задачи, внимательно его прочитайте».

Ученики читают и анализируют текст задачи.

Учитель: «С чьим возрастом связаны возраста остальных членов семьи?»

Ученик: «Возраст отца сравнивается с возрастом дочери, возраст брата также сравнивается с возрастом дочери (сестры), а также с возрастом матери, следовательно, возраст матери также сравнивается с возрастом дочери. Таким образом возраст каждого члена семьи и, как следствие, возраст всех членов семьи в сумме можно выразить через возраст дочери, который равен $x$ лет».

Учитель: «Если возраст дочери $x$ лет, чему равен возраст отца?».

Ученик: «Так как возраст дочери $x$ лет, а отца в 4 раза больше, то для того, чтобы найти возраст отца необходимо умножить $x$ на $4$, то есть возраст отца равен $4x$ лет».

Учитель: «Чему равен возраст брата?».

Ученик: «Брат младше сестры на 5 лет, тогда, если сестре $x$ лет, то брату $x - 5$ лет».

Учитель: «Как выразить возраст матери через возраст дочери?».

Ученик: «Известно, что сын в 9 раз младше матери, то есть, если сыну $x - 5$ лет, то матери в 9 раз больше – $9 \cdot (x - 5)$ лет».

Учитель: «Сколько лет всем членам семьи вместе?».

Ученик: «Возраст всех членов семьи есть сумма возрастов каждого, то есть: $x + 4x + (x - 5) + 9 \cdot (x - 5)$. После преобразований получим, что сумма всех членов семьи это $15x - 50$».

Примечание: в качестве дополнительного задания, можно определить какой наименьший возраст должна иметь девочка, чтобы не нарушалась логика модели и сюжетной задачи, либо посчитать возраст всех членов семьи, если возраст девочки 9 лет, то есть $x = 9$.

**Пример №2**

Задача

В бригаде поваров столовой работает 4 человека. Первый повар может приготовить фирменное блюдо столовой за $t$ часов. Второй повар тратит на $20\%$ больше времени на приготовление этого же блюда чем первый. Третьему повару необходимо в 2 раза меньше времени, чем тратят на это блюда первый и второй повара в сумме (работая отдельно). А четвертому повару понадобится на $15$ минут больше, чем третьему. Сколько времени затрачивает каждый повар на приготовление фирменного блюда?

Выполнение упражнения

Учитель: «Перед вами текст задачи, внимательно его прочитайте».

Ученики читают и анализируют текст задачи.

Учитель: «С временем приготовления какого повара связаны значения времени всех остальных поваров?»

Ученик: «Известно, что первый повар тратит $t$ часов. Время приготовления блюда вторым поваром зависит от первого. Время приготовления третьим поваром зависит от первого и от второго. А время приготовления четвертым поваром связано с третьим. Таким образом, получаем цепочку, в которой ключевое звено – время приготовление фирменного блюда первым поваром».

Учитель: «Если первый повар готовит за $t$ часов, сколько времени необходимо второму?».

Ученик: «Так как первый готовит за $t$ часов, а второй на $20\%$ дольше, то необходимо найти $20\%$ от $t$ и на столько увеличить время первого, то есть: $0{,}2t + t = 1{,}2t$».

Учитель: «Сколько времени необходимо третьему повару?».

Ученик: «Третьему повару необходимо в 2 раза меньше чем первому и второму в сумме (работают отдельно). Первому необходимо $t$ часов, второму – $1{,}2t$, следовательно, в сумме это – $t + 1{,}2t = 2{,}2t$, в $2$ раза меньше – $\frac{2{,}2t}{2} = 1{,}1t$.».

Учитель: «Как выразить время приготовления четвертым поваром?».

Ученик: «Известно, что четвертому повару необходимо затратить время на $15$ минут больше, чем третьеме. Вспомним, что $15$ минут = $0{,}25$ часа, тогда получим, что четвертый успеет выполнить заказ за $1{,}1t + 0{,}25$».

**Пример №3**

Задача

На должность директора школы претендовали три кандидата: А, Б, В. Кандидат А получил в 1,6 раза больше голосов, чем кандидат Б. А кандидат В получил в 1,3 раза меньше голосов, чем кандидаты А и Б вместе. Сколько набрал голосов каждый кандидат, если у Б было $m$ голосов.

Выполнение упражнения

Учитель: «Перед вами текст задачи, внимательно его прочитайте».

Ученики читают и анализируют текст задачи.

Учитель: «С каким кандидатом связано количество голосов каждого другого?»

Ученик: «Известно, что кандидат Б получил $m$ голосов. Кандидат А получил в 1,6 раза больше голосов, чем кандидат Б. А кандидат В получил в 1,3 раза меньше голосов, чем кандидаты А и Б вместе».

Учитель: «Если кандидат Б получил $m$ голосов, то сколько набрал кандидат А?».

Ученик: «Так как кандидат А набрал в 1,6 раза больше, то кандидат А набрал $1{,}6m$».

Учитель: «Сколько голосов набрал кандидат В?».

Ученик: «Кандидат В набрал голосов в 1,3 раза меньше, чем кандидаты Б и А вместе, то есть $\frac{m+1{,}6m}{1{,}3} = \frac{2{,}6m}{1{,}3} = 2m$».

К заданиям третьего типа (задания на перевод текстовых формулировок на математический язык и обратно) относят упражнения двух видов:

1. по заданной текстовой задаче построить модель (прямое упражнение);
2. проиллюстрировать готовую математическую модель сюжетной задачи (обратное упражнение).

Данное задание особенно эффективно, когда мы используем обратное упражнение. Выполняем его по следующему алгоритму:

1. учитель записывает на доске (применяет мультимедийную технику) уравнения с одной или несколькими переменными;
2. ученики должны по данной модели составить текстовую задачу, не нарушая математическую логику выражений;

3. учитель делает акцент на том факте, что одну и ту же математическую модель может иллюстрировать бесконечно много разных сюжетных задач.

**Пример №1**

Упражнение

$$4 \cdot (x + 3) + 5 \cdot (x - 3) = 114.$$

Задание: составить текстовую задачу по заданной модели.

Выполнение упражнения

Учитель: «Посмотрите внимательно на это уравнение и постарайтесь ответить на вопрос: к какому типу задач подходит данная модель?»

Ученик: «Данная модель может описывать задачу на движение, возможно, на работу».

Учитель: «Давайте для начала попробуем составить текстовую задачу на движение. Напомните основную формулу задач на движение».

Ученик: «Расстояние есть произведение скорости и времени, $S = vt$».

Учитель: «Если мы поменяем слагаемые местами и запишем: $vt = S$, то несложно заметить, что справа в уравнении получим значение равное расстоянию».

Ученик: «Допустим, расстояние равно $114$ км, тогда в левой части должно быть произведение скорости и времени, а здесь мы видим сумму. Скорее всего путь длинною в $114$ км состоит из двух частей или этапов»

Учитель: «Если каждое из слагаемых $4 \cdot (x + 3)$ и $5 \cdot (x - 3)$ представляет из себя части пути, то для этих частей также применима формула расстояние $vt = S$».

Ученик: «Заметим, что в каждом из этих слагаемых есть переменная $x$ и $3$, причем сначала записанные в виде суммы $(x + 3)$, а затем в виде разности $(x - 3)$. Это наводит на мысль о том, что к данной модели подойдет задача на движение по реке, где $(x + 3)$ – это скорость катера по течение реки, а $(x - 3)$ – скорость против движения реки. Скорость течения реки равна 3 км/ч».

Учитель: «Еще остались значения $4$ и $5$. Что он обозначают?»

Ученик: «Это значения времени, часы. В конечном итоге, катер двигался 4 часа по течению реки и 5 часов против течения. Нетрудно догадаться, что за $x$ – обозначим собственную скорость катера. Можно записать текст задачи:

*«Катер проплыл 114 км. Сначала он 4 часа плыл по течению реки, а затем 5 часов против течения. Какова скорость катера, если скорость течения реки 3 км/ч.»*»

Таким образом, можно составлять текстовые задачи для разных моделей – простых, сложных, для уравнений с одной переменной или для систем с двумя неизвестными. Ниже представлены возможные варианты моделей с готовым решением.

**Пример №2**

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + 4 = \frac{1}{y}; \\ \frac{5}{x+y} = 24. \end{cases}$$

Возможный вариант текстовой задачи: «Одна из дорожных бригад может заасфальтировать некоторый участок дороги на 4 часа быстрее, чем другая. За сколько часов может заасфальтировать участок каждая бригада, если известно, что за 24 часа совместной работы они заасфальтировали 5 таких участков.»

**Пример №3**

$$0{,}07x = 140 \cdot 0{,}02.$$

Возможный вариант текстовой задачи: «Собрали 140 кг грибов, влажность которых составляла 98%. После подсушивания их влажность снизилась до 93%. Какова стала масса грибов после подсушивания?»

**Пример №4**

$$\frac{0{,}75x + 0{,}9(200 - x)}{200} = 0{,}81.$$

Возможный вариант текстовой задачи: «Имеется два слитка сплава серебра и олова. Первый слиток содержит 360 г серебра и 40 г олова, а второй слиток – 450 г серебра и 150 г олова. От каждого слитка взяли по куску, сплавили их и получили 200 г сплава, в котором оказалось 81% серебра. Определите массу (в граммах) куска, взятого от второго слитка.»

**Пример №5**

$$\begin{cases} \dfrac{y}{12} + \dfrac{x-y}{8} = 1; \\ \dfrac{x-y}{15} + \dfrac{y}{12} = \dfrac{46}{60}. \end{cases}$$

Возможный вариант текстовой задачи: «Путь от поселка до озера идет сначала горизонтально, а затем в гору. Велосипедист, добираясь до озера и обратно, на горизонтальном участке пути ехал со скоростью 12км/ч, на подъеме – со скоростью 8 км/ч, а на спуске со скоростью 15 км\ч. Путь от поселка до озера у него занял 1 час, а обратный путь – 46 минут. Найдите расстояние от поселка до озера.»

Очень важный инструмент для решения проблем, связанных с построением математической модели – использование принципа наглядности. Он заключен в изложении основных условий, которые необходимы для решения задачи, в виде наглядных таблиц или схем.

Представим алгоритм для составления таблицы по условиям задачи:

1. читаем задачу целиком, чтобы обозначить сюжет и основной вопрос, определяем тип задачи;
2. рисуем таблицу, заполняем название столбцов и строк в соответствии с типом задачи;
3. делим текст на смысловые части;
4. читаем первую смысловую часть текста – заполняем первую строку таблицы и т.д.;
5. в каждой строке одна величина неизвестна (переменная величина), вторая – взята из условия задачи, третья – находится по формуле;
6. находим дополнительную информацию в задаче, которая уравнивает условия в разных строках (или в разных колонках) имеющихся в таблице;
7. составляем уравнение (или систему);

8. решаем уравнение;
9. читаем основной вопрос задачи и отвечаем на него.

**Пример №1**

Задача

Расстояние от города до озера составляет 210 км. Две семьи на двух автомобилях одновременно выехали из города к озеру. Спустя 2 часа, автомобиль первой семьи проехал на 20 км больше, чем автомобиль второй семьи. Какая скорость была у каждого автомобиля, если первый автомобиль на весь путь затратил на 30 минут меньше, чем второй?

Решение

В тексте задачи говорится о двух семьях, которые выехали на двух разных автомобилях одновременно из города к озеру. Причем, известно, что расстояние между городом и озером 210 км, а спустя 2 часа первый автомобиль проехал на 20 км больше, чем второй. К тому же, в задаче сказано, что первый автомобиль приехал на 30 минут раньше, чем второй. Необходимо найти скорость каждого автомобиля. Для повышения наглядности удобно изобразить условие задачи в виде схемы.

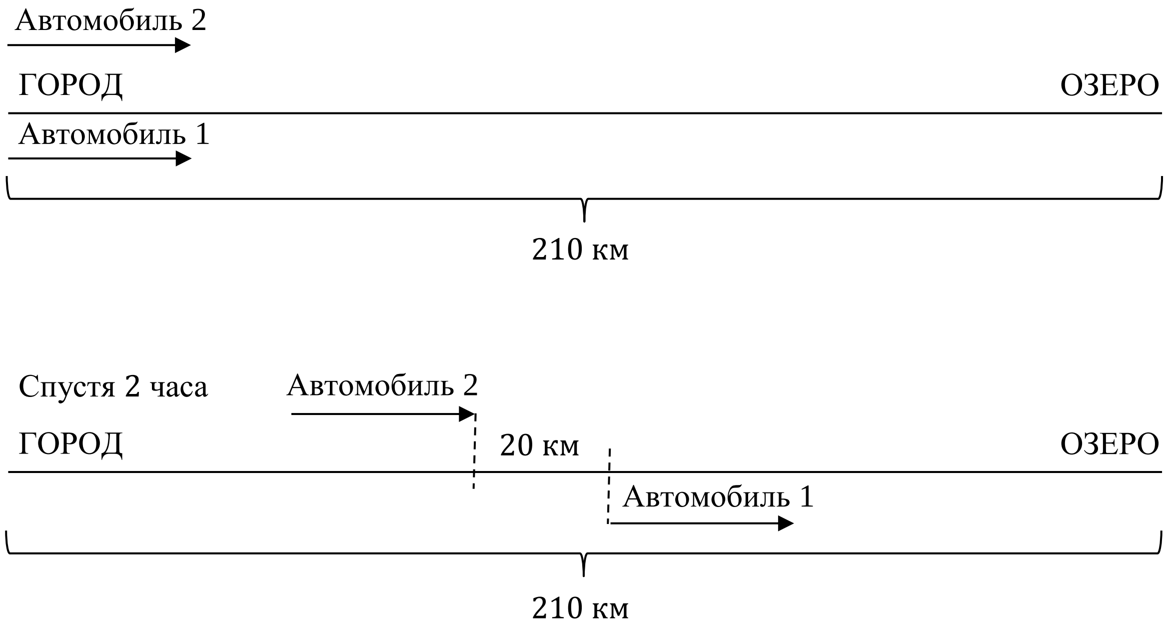


Рисунок 2.3 – Схематическое изображения условия задачи

Данная текстовая задача относится к типу задач на движение по прямой. Существует основная формула всех задач этого типа, а именно формула расстояния: $S = vt$. Так как нам необходимо найти скорость, то запишем формулу скорости: $v = \frac{S}{t}$.

| | $\boldsymbol{S}$ | $\boldsymbol{v}$ | $\boldsymbol{t}$ |
|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{I}$ | $2x + 20$ | $x + 10$ | $2$ |
| $\boldsymbol{II}$ | $2x$ | $x$ | $2$ |
| $\boldsymbol{I}$ | $210$ | $x + 10$ | $\frac{210}{x + 10}$ |
| $\boldsymbol{II}$ | $210$ | $x$ | $\frac{210}{x}$ |

Рисунок 2.4 – Вспомогательная таблица для составления математической модели

Читаем текст задачи и параллельно заполняем вспомогательную таблицу.

Шаг 1. Для начала выберем неизвестную величину, которую примем за $x$. Как правило, в качестве неизвестной величины выбирают наименьшее из зависимых величин значение. Пусть $x$ км/ч – скорость второго автомобиля.

Шаг 2. Прочитаем второе предложение задачи. В нем сказано, что первый автомобиль за 2 часа проехал расстояние на 20 км больше. Тогда, узнаем, сколько проехал за 2 часа второй автомобиль. Поэтому в таблицу в колонку времени занесем время второго автомобиля – 2 часа.

Шаг 3. Чтобы найти расстояние, которое проехал второй автомобиль за 2 часа со скоростью $x$ км/ч, обратимся к формуле: $S = vt$; $S = 2x$.

Шаг 4. Заполняем первую строку – вводим данные первого автомобиля. Время первого автомобиля – 2 часа.

Шаг 5. Теперь найдем, какое расстояние проехал первый автомобиль за 2 часа. Так как за 2 часа первый автомобиль проехал на $20$ км больше, чем второй, то нам необходимо к расстоянию второго – $2x$ прибавить $20$ км. Получим – $2x + 20$.

Шаг 6. Осталась последняя пустая клетка в первой строке – скорость. Скорость первого автомобиля мы найдем по формуле $v = \frac{S}{t}$.

Получим: $\frac{2x+20}{2} = x + 10$ км/ч.

Шаг 7. Заполним следующие две строки. Известно, что скорость второго автомобиля $x$ км/ч. Все расстояние между городом и озером составляет $210$ км.

Шаг 8. Так как нам известно расстояние между городом и озером и скорость автомобиля, то можем найти время второго автомобиля по формуле $t = \frac{S}{v}$. Тогда время второго автомобиля равно $\frac{210}{x}$ часов.

Шаг 9. Скорость первого автомобиля не изменилась и составляет $x + 10$ км/ч. Расстояние, которое преодолел первый автомобиль также $210$ км.

Шаг 10. Чтобы посчитать время первого автомобиля необходимо применить формулу $t = \frac{S}{v}$. Получим, что время первого равно $\frac{210}{x+10}$ часов.

Помимо условий, которые мы записали в таблицу, есть и те, которые в таблицу не входят, а служат для взаимосвязи значений. К такой информации относится тот факт, что первый автомобиль приехал на $30$ минут раньше, чем второй автомобиль. Для начала переведем минуты в часы $30$ минут = 0,5 часа. Поскольку мы видим, что уравнивать мы будем временем, то для составления уравнения используем только колонку времени. Таким образом, разница между временем второго автомобиля и первого равна 0,5.

Составляем уравнение: $\frac{210}{x} - \frac{210}{x+10} = 0{,}5$.

Решаем уравнение:

$$\frac{210(x+10) - 210x}{x(x+10)} = 0{,}5; \qquad x \neq 0, x \neq -10$$

$$\frac{(210x + 2100 - 210x)}{x(x + 10)} = 0{,}5;$$

$$\frac{2100}{x^2 + 10x} = \frac{1}{2};$$

$$x^2 + 10x = 4200;$$

$$x^2 + 10x - 4200 = 0;$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4200) = 100 + 16800 = 16900 = 130^2;$$

$$x_1 = \frac{-10 + 130}{2 \cdot 1} = 60;$$

$$x_2 = \frac{-10 - 130}{2 \cdot 1} = -70.$$

Второй корень не удовлетворяет смыслу задачи, так как скорость не может принимать отрицательные значения.

Решение этого уравнения дает нам следующее значение скорости второго автомобиля: $v = 60$ км/ч.

Скорость первого автомобиля на 10 км/ч больше, то есть равна 70 км/ч.

Задача решена.

**Пример №2**

Задача

В поле работают два комбайнера. Первый комбайнер убирает урожай ржи на 48 ч быстрее, чем второй. Когда два комбайнера работают совместно, то они заканчивают уборку урожая ржи за 70 часов. За какое количество времени каждый из комбайнеров, работая отдельно, уберет весь урожай?

Решение

В данной задаче идет речь о работе двух комбайнеров. Причем известно, что первый комбайнер убирает урожай ржи на 48 ч быстрее, чем второй, а также, что два комбайнера, работая совместно, заканчивают уборку урожая ржи за 70 часов. Необходимо узнать, за какое количество времени каждый из комбайнеров, работая отдельно, уберет весь урожай?

Данная текстовая задача относится к типу задач на совместную работу. Существует основная формула всех задач этого типа, а именно формула работы: А $=pt$. Так как нам необходимо найти время работы, то запишем формулу времени: $t=\frac{A}{p}$.

Читаем текст задачи и параллельно заполняем вспомогательную таблицу.

| | $\boldsymbol{A}$ | $\boldsymbol{p}$ | $\boldsymbol{t}$ |
|---|---|---|---|
| **1** | 1 | $\frac{1}{x}$ | $x$ |
| **2** | 1 | $\frac{1}{x+48}$ | $x+48$ |
| **1** и **2** вместе | 1 | $\frac{1}{70}$ | 70 |

Рисунок 2.5 – Вспомогательная таблица для составления математической модели

Шаг 1. Для начала выберем неизвестную величину, которую примем за $x$. Как правило, в качестве неизвестной величины выбирают наименьшее из зависимых величин значение. Пусть $x$ – время работы первого комбайнера. Заполняем колонку времени в первой строке.

Шаг 2. Поскольку нам неизвестен весь объем работы, то примем его за 1. Таким образом, объем работы будем находить в частях. Заполняем колонку работы в первой строке.

Шаг 3. Зная основную формулу производительности труда, найдем производительность первого комбайнера: $p=\frac{1}{x}$. Заполняем колонку производительности в первой строке.

Шаг 4. Переходим ко второй строке – ко второму комбайнеру. Время работы второго комбайнера: $x+48$ часов. Заполняем колонку времени во второй строке.

Шаг 5. Поскольку нам неизвестен весь объем работы, то примем его за 1. Таким образом, объем работы будем находить в частях. Заполняем колонку работы во второй строке.

Шаг 6. Зная основную формулу производительности труда, найдем производительность второго комбайнера: $p = \frac{1}{x+48}$. Заполняем колонку производительности во второй строке.

Шаг 7. Читаем третье предложение задачи, в котором говорится, что время совместного выполнения всего объема работы – 70 часов. Заполняем колонку времени в третьей строке (совместная работа).

Шаг 8. Поскольку нам неизвестен весь объем работы, то примем его за 1. Таким образом, объем работы будем находить в частях. Заполняем колонку работы в третьей строке (совместная работа).

Шаг 9. Зная объем работы и время выполнения работы, можем найти совместную производительность труда: $p = \frac{1}{70}$. Заполняем колонку производительности в третьей строке (совместная работа).

Помимо условий, которые мы записали в таблицу, есть и те, которые в таблицу не входят, а служат для взаимосвязи значений. К такой информации относится тот факт, что вся работа выполняется совместно за 70 часов. В совместной работе участвует совместная производительность – это сумма производительностей труда каждого из комбайнеров. Таким образом, мы должны уравнять колонки, в которых даны значения производительности каждого из комбайнеров. Сумма производительностей каждого, есть производительность совместная.

Составляем уравнение: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+48} = \frac{1}{70}$;

Решаем уравнения:

$$\frac{(x+48)+x}{x(x+48)} = \frac{1}{70};$$

$$\frac{2x+48}{x(x+48)} = \frac{1}{70}; \qquad x \neq 0; x \neq -48;$$

$$140x + 3360 = x^2 + 48x;$$

$$x^2 + 48x - 140x - 3360 = 0;$$

$$x^2 - 92x - 3360 = 0;$$

$$D = (-92)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3360) = 8464 + 13440 = 21904 = 148^2;$$

$$x_1 = \frac{92 + 148}{2 \cdot 1} = 120;$$

$$x_2 = \frac{92 - 148}{2 \cdot 1} = -28.$$

Второй корень не удовлетворяет смыслу задачи, так как время не может принимать отрицательные значения.

Решение этого уравнения дает нам следующее значение времени работы первого комбайна: $t = 120$ часов.

Время работы второго комбайна на $48$ часов больше, то есть равна $168$ часов.

Таким образом, первый выполнит всю работу в одиночку за $120$ часов, а второй – за $168$ часов.

Задача решена.

Во время прохождения педагогической практики в 9-ом классе (21 ученик) в МАОУ "Лицей № 97 г. Челябинска" были применены данные вспомогательные упражнения для более эффективного обучения математическому моделированию. При разработке конспектов уроков особое внимание уделялось проблемам, связанным с моделированием в работе с текстовыми задачами, и их комплексному решению. В течение трех недель практически ежедневного применения данных упражнений, устной работы с детьми, использования подробного алгоритма решения текстовых задач были улучшены процентные показатели по решению текстовых задач. Так в начале первой недели, была проведена самостоятельная работа на тему «Решение текстовых задач алгебраическим методом», с которой справились:

1. на оценку «отлично» - 4 человека;
2. на оценку «хорошо» - 7 человек;
3. на оценку «удовлетворительно» - 8 человек;
4. на оценку «неудовлетворительно» - 2 человека.

По окончании работы в классе с использованием предложенных вспомогательных упражнений, развивая принцип наглядности, а вместе с ним и логический аппарат учеников, была повторно проведена работа на решение сложной текстовой задачи алгебраическим методом. Результаты таковы:

1. на оценку «отлично» - 7 человек;
2. на оценку «хорошо» - 10 человек;
3. на оценку «удовлетворительно» - 4 человека;
4. на оценку «неудовлетворительно» - 0 человек.

Таким образом, процент успеваемости в классе возрос с 90,5% до 100%, также значительно увеличилось количество оценок «отлично» и «хорошо», а оценок «удовлетворительно» стало меньше в 2 раза. Данные показатели является подтверждением выдвинутой гипотезы.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе проведенной исследовательской работы были реализованы все поставленные задачи.

Во-первых, была определена и изучена сущность модели, рассмотрены ее виды и представлена классификация, а также даны основы теоретической базы моделирования. Так как объект изучения исследовательской работы – математическое моделирование, то необходимо было дать более общие понятия: «модель», «моделирование».

Во-вторых, раскрыта суть математического моделирования как одного из самых эффективных методов математического познания и развития математических способностей у учеников. Математическое моделирование предполагает использование в качестве специфического средства исследования оригинала его математическую модель, изучение которой дает новую информацию об объекте познания, его закономерностях.

В-третьих, приведены основные функции математического моделирования в школьном курсе математики, а также в соответствии с ними и основная цель. Математическое моделирование служит особым видом образно-знаковой идеализации и построения научной предметности. Моделирование позволяет видеть предмет как объект исследования, определять действия с ним задолго до того, как будет получен конечный результат. А это означает, что с самого первого момента конструирования создается образ, который позволит ориентироваться в предмете и анализировать его, служит средством продвижения в содержании.

В-четвертых, на предмет наличия элементов математического моделирования была проанализирована школьная литература: учебники математики для 5-6 классов авторов: Г.В. Дорофеева, Л.Г. Петерсон, Н.Я. Виленкина, И.Ф. Шарыгина, И.И. Зубаревой и А.Г. Мордковича. А также учебники алгебры для 7-9 классов авторов: Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин, Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова, А.Г. Мордкович, К.С. Муравин, Г.К. Муравин, Г.В. Дорофеев.

В-пятых, были выявлены основные проблемы, которые возникают в результате обучения математическому моделированию в алгебре. Сформулированы наиболее эффективные пути ликвидации трудностей, связанных с обучением математическому моделированию

В-шестых, была изучена методика изучения элементов математического моделирования в рамках школьного курса математики образовательной программы 9 классов. Рассмотрены способы применения математического моделирования в курсе алгебры для решения текстовых задач алгебраическим методом, а также выявлены основные проблемы и предложены пути их решения.

Подводя итоги проделанной работы, можно утверждать, что цели достигнуты. Проведенный анализ эффективности методики обучения решению текстовых задач подтвердил выдвинутую гипотезу.

Таким образом, если в процессе обучения составлению математических моделей использовать вспомогательные упражнения (задания на выделение условия и вопроса задачи, задания на развитие умения выражать изменения величин, задания на перевод текстовых формулировок на математический язык и обратно), а также принцип наглядности (использовать схемы, чертежи и рисунки), то процесс обучения математическому моделированию будет эффективнее.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алгебра: Учебник для 9 кл. сред. шк. [Текст] / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова; Под ред. С. А. Теляковского. – М.: Просвещение, 1990. – 272 с.

2. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 – 11 кл. сред. шк. [Текст] / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др.: Под. Ред. А. Н. Колмогорова. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1991. – 320 с.

3. Алтухов, В.Л. О перестройке мышления: философско-методологические аспекты [Текст] / В. Л. Алтухов, В.Ф. Шапошников. – М.: Просвещение, 1988.

4. Артоболевский, А. Н. Арифметические задачи с производственно-бытовым содержанием [Текст] / А. Н. Артоболевский. – М.: Государственное учебно-педагогическое изд-во Министерства Просвещения РСФСР, 1961.

5. Веников, В.А. Теория подобия и моделирования [Текст] / В. А. Веников. – М.: Высшая школа, 1986. – 480 с.

6. Виленкин Н. Я. Математика, 5 класс. Учебник для 5 кл. общеобразовательных учреждений [Текст] / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбург. / Изд. 6-е. – М.: Сайтком, 2000. – 358 с.

7. Виленкин Н. Я. Математика, 6 класс. Учебник для 6 кл. общеобразовательных учреждений [Текст] / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбург. / 12-е изд., стереотип. – М.: Мнемозина, 2003. – 304 с.

8. Возняк, Г. М. Прикладные задачи в мотивации обучения [Текст]/ Г. М. Возняк // Математика в школе, 1990, №2

9. Горстко, А. Б. Познакомьтесь с математическим моделированием [Текст] / А. Б. Горстко. – М.: Знание, 1991. – 160 с.

10. Грес, П. В. Математика для гуманитариев [Текст] / П. В. Грес. – М.: Логос, 2005.

11. Дорофеев, Г. В. Математика, 5 класс. Часть 1: учебник для 5 кл. [Текст] / Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М.: Баллас, С-инфо, 1996. – 176 с.

12. Дорофеев, Г. В. Математика, 5 класс. Часть 2: учебник для 5 кл. [Текст] / Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М.: Баллас, С-инфо, 1997. – 240 с.

13. Дорофеев, Г. В. Математика, 6 класс. Часть 1: учебник для 6 кл. [Текст] / Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М.: Баласс, С-инфо, 1998. – 112 с.

14. Дорофеев, Г. В. Математика, 6 класс. Часть 2: учебник для 5 кл. [Текст] / Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М.: Баллас, С-инфо, 1999. – 128 с.

15. Дорофеев, Г. В. Математика, 6 класс. Часть 3: учебник для 6 кл. [Текст] / Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М.: Баласс, С-инфо, 2002. – 176 с.

16. Зубарева, И. И. Математика. 5 кл.: Учебник для общеобразоват. Учреждений [Текст] / И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович. – 2-е изд. – М.: Мнемозина, 2003. – 293 с.

17. Зубарева, И. И. Математика. 6 кл.: Учебник для общеобразоват. Учреждений [Текст] / И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович. – 2-е изд. – М.: Мнемозина, 2004. – 281 с.

18. Канин, Е. С. Учебные математические задачи [Текст] / Е.С. Канин. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2004. – 154 с.

19. Крутихина, М. В. Обучение некоторым элементам математического моделирования как средство подготовки к профильному образованию [Текст] / М. В. Крутихина // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Периодический межвузовский сборник научно-методических работ: выпуск 6 – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2004. – с. 246-254.

20. Мангейм, Дж. Б. Политология. Методы исследования [Текст]: Перевод с англ. / Дж. Б. Мангейм, Р. К. Рич. – М.: Весь Мир, 1997. – 544 с.

21. Математика: Учебник для 5 кл. общеобразоват. учреждений [Текст] / Г. В. Дорофеев, И. Ф. Шарыгин, С. Б. Суворова и др.; Под ред. Г. В. Дорофеева, И. Ф. Шарыгина. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1999. – 368 с.

22. Математика: 6 класс: Учебник для общеобразоват. учеб. заведений [Текст] / Г. В. Дорофеев, И. Ф. Шарыгин, С. Б. Суворова и др.; Под ред. Г. В. Дорофеева, И. Ф. Шарыгина. – 2-е изд. – М.: Дрофа, 1995. – 416 с.

23. Математическая энциклопедия. Гл. ред. М. Виноградов. Том 3. Коо - Од. М.: Советская энциклопедия, 1982, 1184 стр., ил.

24. Мышкис, А. Д. О прикладной направленности школьного курса элементов математического анализа [Текст] / А. Д. Мышкис // Математика в школе, 1990, – № 6, с. 7–11.

25. Новик, И. Б. О философских вопросах кибернетического моделирования [Текст] / И. Б. Новик – М., Знание, 1964.

26. Обойщикова, И. Г. Обучение моделированию учащихся 5 – 6 классов при изучении математики [Текст]: Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата педагогических наук / И. Г. Обойщикова. - Саранск, 2002.

27. Сичивица, О. М. Методы и формы научного познания [Текст] / О. М. Сичивица. – М., Высшая школа, 1993.

28. Терешин, Н. А. Прикладная направленность школьного курса математики [Текст] / Н. А. Терешин. – М.: Просвещение, 1990.

29. Уемов, А. И. Логические основы метода моделирования [Текст] / А. И. Уемов. – М.: Просвещение, 1996.

30. Формирование системного мышления в обучении: учеб. пособие для вузов [Текст] / под ред. З. А. Решетовой – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 344с.

31. Фридман, Л. М. Наглядность и моделирование в обучении [Текст] / Л. М. Фридман. – М.: Знание, 1984. – 80 с.

32. Целищева, И. Моделирование в текстовых задачах [Текст] / И. Целищева, С. Зайцева // Приложение к газете «1 сентября». Математика, 2002, №33 – 34

33. Штофф, В. А. Моделирование и философия [Текст] / В. А. Штофф. – М.: Наука, 1966.