В.И. Васильков, Г.Т. Биктуанова, Е.С. Заикина

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ В КУРСЕ «ГЕОМЕТРИЯ-11» А.Д. Александрова

Учебное пособие

Челябинск

2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Челябинский государственный педагогический университет»

В.И. Васильков, Г.Т. Биктуанова, Е.С. Заикина

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ В КУРСЕ «ГЕОМЕТРИЯ-11» А.Д. Александрова

Учебное пособие

Челябинск

2015

УДК 513 (021)
74. 262. 215 э 73

В 19

Васильков В.И. Исследовательские задачи в курсе «Геометрия-11» А.Д. Александрова: учебное пособие / В.И. Васильков, Г.Т. Биктуанова, Е.С. Заикина. – Челябинск: Изд-во Челяб. гос. пед. ун-та, 2015. – 152 с.

ISBN 978-5-906777-26-3

Исследовательские задачи представлены только в курсах геометрии для физико-математических классов, написанных под редакцией академика А.Д. Александрова.

Анкетирование учителей математики 34 восьмых-одиннадцатых математических классов девяти лицеев и гимназий г. Челябинска, проведенное в апреле 2012 г., показало, что более 70 % учителей не решают исследовательские задачи. Главными причинами такого положения учителя называли сложность указанных задач и отсутствие достаточного времени на уроках геометрии. С целью помочь учителям математики в решении исследовательских задач из курса «Геометрия-11» авторы попытались создать данный решебник.

Учебное пособие предназначено для учителей математики физико-математических классов.

ISBN 978-5-906777-26-3

Рецензенты: В.А. Баранова, канд. физ.-мат. наук, доцент

И.И. Клебанов, канд. физ.-мат. наук, доцент

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность данной книги заключается в желательности внедрения исследовательских задач в школьный курс геометрии, хотя бы в физико-математических классах. *«К исследовательским авторы относят те задачи, в условиях которых или в возможном результате есть некая неопределенность, незавершенность, даже неоднозначность, вплоть до отсутствия решения»* [1].

В настоящее время таких задач в традиционных курсах геометрии (Л.С. Атанасяна, А.В. Погорелова) для массовой школы нет. Единственный курс геометрии, предлагающий рассмотрение исследовательских задач в 7–11 классах с углубленным изучением математики, это курс, разработанный авторским коллективом в составе А.Д. Александрова, А.Л. Вернера, В.И. Рыжика под руководством академика РАН А.Д. Александрова. Поэтому и в названии работы, и в самой работе, будем говорить о курсе геометрии А.Д. Александрова.

Тем не менее, реальная практика изучения курса «Геометрия–11» А.Д. Александрова в физико-математических классах показала, что исследовательские задачи либо не решаются совсем, либо решаются от случая к случаю. Этот факт подтверждают результаты анкетирования 34 учителей 8–11 физико-математических классов, проведенного в девяти школах г. Челябинска (в школах № 10, 11, 31, 35, 37, 77, 80, 97, 102). Результаты анкетирования показали, что около 70 % опрошенных учителей математики не решают исследовательские задачи либо из-за сложности этих задач, либо из-за отсутствия времени на уроках геометрии для решения подобных задач.

С целью помочь учителям математики профильных, прежде всего одиннадцатых, физико-математических классов *в данной книге предпринята попытка создать решебник исследовательских задач по темам: «Многогранники», «Объемы», «Поверхности», «Векторы и координаты», «Преобразования» из курса «Геометрия–11» А.Д. Александрова*.

В книге дается сквозная нумерация разбираемых задач (и рисунков к ним), в то же время указывается параграф и номер задачи из учебника «Геометрия-11». Главы I – III написаны В.И. Васильковым и Г.Т. Биктуановой, главы IV и V – В.И. Васильковым и Е.С. Заикиной.

ГЛАВА I. ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «МНОГОГРАННИКИ»

I.1. Исследовательские задачи к параграфу «Многогранник и его элементы»

Задача 1 (№ 21.15). Нарисуйте многогранник, у которого есть грани с нечетным числом сторон. Подсчитайте их число. Проделайте это, пока у вас не появится некоторое предположение. Докажите его.

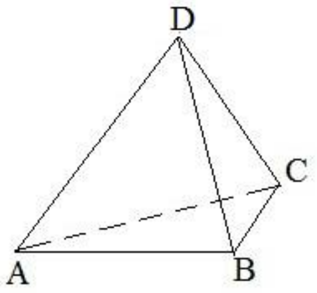


Рис. 1

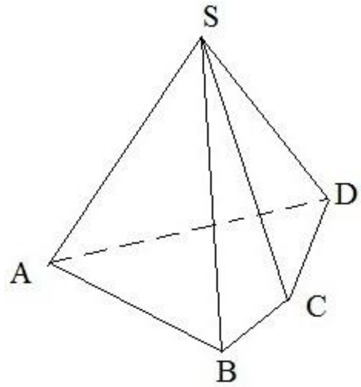


Рис. 2

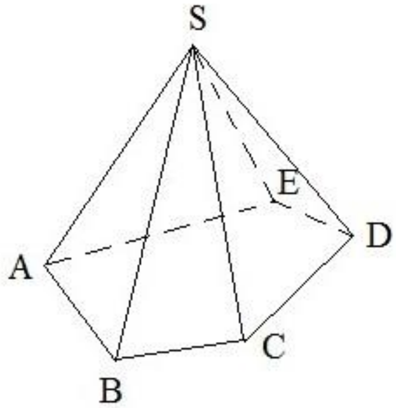


Рис. 3

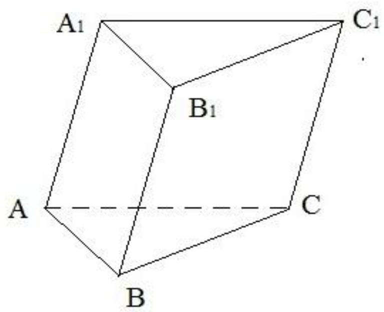


Рис. 4

Решение.

а) $f_n = 4$ – число граней с нечетным числом сторон (рис. 1);

б) $f_n = 4$ (рис. 2);

в) $f_n = 6$ (рис. 3);

г) $f_n = 2$ (рис. 4).

Гипотеза: *если многогранник имеет f_n граней с нечетным числом сторон, то f_n – четное число.*

Доказательство.

1 случай. Пусть F – n-угольная пирамида, в основании n-угольник, в ней n боковых граней – треугольников (с нечетным числом сторон).

1) Если $n = 2k -$ четное число, то основание имеет четное число сторон, а боковых граней – треугольников – будет $f_n = 2k$.

2) Если $n = 2k - 1 -$ нечетное число, то основание имеет нечетное число сторон, а боковых граней – треугольников – будет $2k - 1$, а всего таких граней будет $f_n = (2k - 1) + 1 = 2k -$ четное число.

Итак, для любой пирамиды $f_n -$ четное число.

2 случай. Пусть F – любой многогранник, отличный от пирамиды.

Тогда этот многогранник F можно **триангулировать**, то есть *разбить его на тетраэдры так, что любые 2 тетраэдра либо не имеют общих точек, либо имеют только общую вершину, либо общее ребро, либо целую общую грань* (см. [1], п. 21.3, стр. 12).

При этом от каждого тетраэдра триангуляции можно перейти к другому тетраэдру по цепочке тетраэдров, в которой каждый последующий прилегает к предыдущему по целой грани.

Докажем, что число $f_n -$ четное число ($f_n -$ число граней триангуляции с нечетным числом сторон).

Доказательство проведем МПМИ (методом полной математической индукции) по числу k тетраэдров в триангуляции многогранника F.

1) Пусть $k = 1$, то есть $F = F_1 -$ тетраэдр, тогда $f_n = 4$ и утверждение верно.

2) Допустим, что $F = F_n$ разбит на $k = n$ тетраэдров и $f_n = 2\mathrm{m}$ – четное число.

3) Докажем, что для многогранника $F = F_{n+1}$, разбитого на $(n + 1)$ тетраэдров, $f_n -$ четное число.

Действительно, $(n + 1)$-й тетраэдр T_{n+1} имеет целую общую грань (треугольник) с многогранником F_n, у которого $f_n = 2\mathrm{m}$ – четное число, тогда у тетраэдра T_{n+1} остается 3 новых грани, а у многогранника F_n, $f_n = 2\mathrm{m} - 1$, следовательно, всего получится $f_n' = (2\mathrm{m} - 1) + 3 = 2\mathrm{m} + 2 = 2(\mathrm{m} + 1)$ граней с нечетным числом сторон, то есть четное число.

В силу принципа ПМИ (полной математической индукции) получаем, что f_n (для любого многогранника F) является четным числом, что и требовалось доказать.

Задача 2 (№ 21.16). Нарисуйте многогранник, у которого из некоторых вершин выходит нечетное число ребер. Далее проделайте работу, аналогичную той, что указана в задаче 21.15.

<u>Решение.</u>

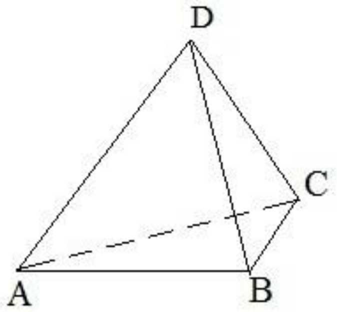


Рис. 5

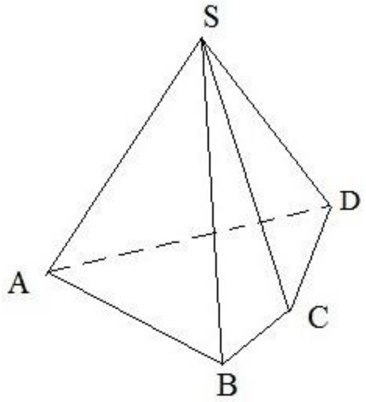


Рис. 6

А. e_n – число вершин, из которых выходит нечетное число ребер, $e_n = 4$) (см. рис. 5).

Б. $e_n = 4$ (см. рис. 6).

Гипотеза: *если у многогранника из некоторых вершин (e_n) выходит нечетное число ребер, то число e_n таких вершин четно, то есть e_n – четное число.*

<u>Доказательство.</u>

1 случай. Пусть F – n-угольная пирамида, в основании n-угольник, из каждой вершины основания выходят по 3 ребра, то есть нечетное число ребер, а из вершины пирамиды выходят n ребер.

1) Если $n = 2k$ – четное число, то из вершин основания всего выходят $(2k) \cdot 3 = 6k$ ребер, то есть $e_n = 6k$ – четное число.

2) Если $n = 2k - 1$ – нечетное число, то из вершин основания всего выходят $(2k - 1) \cdot 3$ ребер, а из вершины пирамиды всего выходят $2k - 1$ ребер, следовательно, всего $f_n = (2k - 1) \cdot 3 + 2k - 1 = (2k - 1)(3 + 1) = 4(2k - 1)$ – четное число.

2 случай. Пусть f – любой многогранник, отличный от пирамиды.

Тогда его можно **триангулировать**, то есть *разбить на тетраэдры так, что любые 2 тетраэдра либо не имеют общих точек, либо имеют только общую вершину, либо имеют общее ребро, либо целую общую грань* (см. [1], п. 21.3, стр. 12).

При этом от каждого тетраэдра триангуляции можно перейти к другому тетраэдру по цепочке тетраэдров, в которой каждый последующий прилегает к предыдущему по целой грани.

Докажем, что число $e_n -$ четное число ($e_n -$ число вершин триангуляции с нечетным числом ребер, выходящих из этих вершин).

Доказательство проведем МПМИ по числу k тетраэдров в триангуляции многогранника F.

1) Пусть $k = 1$, то есть $F = F_1 -$ тетраэдр, тогда $e_n = 4$ и утверждение верно.

2) Допустим, что $F = F_n$ разбит на $k = n$ тетраэдров и $e_n = 2\mathrm{m}$ – четное число.

3) Докажем, что для многогранника $F = F_{n+1}$, разбитого на $(n+1)$ тетраэдров, $e_n -$четное число.

Действительно, $(n+1)$-й тетраэдр T_{n+1} имеет целую общую грань (треугольник) с многогранником F_n, у которого $e_n = 2m -$ четное число. Тогда у тетраэдра T_{n+1} добавится 1 новая вершина с нечетным числом ребер, исходящих из этой вершины, зато у многогранника F_n число $e_n = 2m - 3$, следовательно, всего для $F = F_{n+1}$ $e_n' = 2m - 3 + 1 = 2m - 2 = 2(m-1) -$ четное число.

В силу принципа ПМИ получим, что e_n (для любого многогранника F) является четным числом, что и требовалось доказать.

1.2. Исследовательские задачи к параграфу «Призмы»

Задача 3 (№ 22.16). В треугольной призме проведены сечения через ребро каждого из оснований и противоположную вершину другого основания. Есть ли точка, общая для всех этих сечений?

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – призма, $\alpha = (ABC_1)$, $\alpha_1 = (A_1B_1C)$, $\beta = (BCA_1)$, $\beta_1 = (B_1C_1A)$, $\gamma = (ACB_1)$, $\gamma_1 = (A_1C_1B)$.

Найти: существует ли точка $Q = \alpha \cap \beta \cap \gamma \cap \alpha_1 \cap \beta_1 \cap \gamma_1$?

Решение.

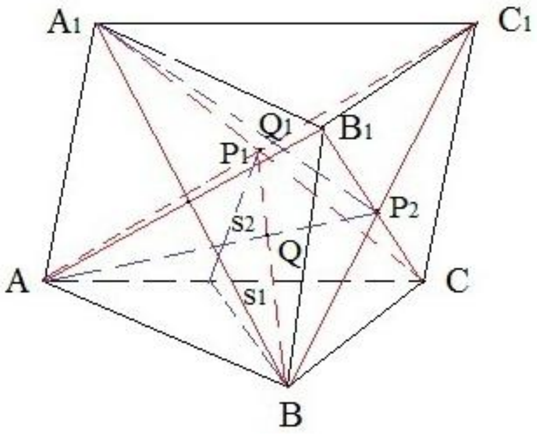


Рис. 7

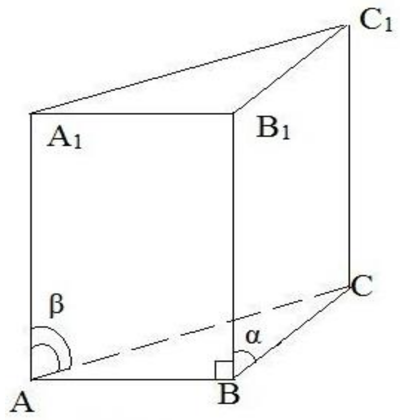


Рис. 8

1) $\alpha \cap \beta = (BAC_1) \cap (BCA_1) = s_1 = (BP_1)$, где $P_1 = (AC_1) \cap (A_1C)$;

2) $\alpha \cap \gamma = (ABC_1) \cap (ACB_1) = s_2 = (AP_2)$, где $P_2 = (BC_1) \cap (B_1C)$;

3) $s_1,\ s_2 \subset (ABC_1), s_1 \nparallel s_2 \Rightarrow s_1 \cap s_2 = Q$, следовательно, $Q = \alpha \cap \beta \cap \gamma$;
$(Q = (BP_1) \cap (AP_2))$;

4) $\alpha_1 \cap \beta_1 = (A_1B_1C) \cap (B_1C_1A) = s_3 = (B_1P_3)$, где $P_3 = (A_1C) \cap (C_1A) = P_1$, то есть $s_3 = (B_1P_1)$;

5) $\alpha_1 \cap \gamma_1 = (A_1B_1C) \cap (A_1C_1B) = s_4 = (A_1P_4)$, где $P_4 = (B_1C) \cap (BC_1) = P_2$, то есть $s_4 = (A_1P_2)$;

6) $s_3,\ s_4 \subset \alpha_1, s_3 \nparallel s_4 \Rightarrow s_3 \cap s_4 = Q_1$; $(Q_1 = (B_1P_1) \cap (A_1P_2))$;
итак, $\alpha_1 \cap \beta_1 \cap \gamma_1 = Q_1$.

7) $Q_1 \neq Q$, следовательно, общей точки у сечений нет.

Задача 4 (№ 22.17). Существует ли треугольная призма, у которой:

а) ровно одна боковая грань – прямоугольник; б) ровно две боковые грани – прямоугольники; в) ровно одна грань перпендикулярна основанию;

г) ровно две грани перпендикулярны основанию; д) боковое ребро перпендикулярно ровно одной стороне основания; е) центр вписанной сферы не совпадает с центром описанной сферы?

<u>Решение.</u>

А. <u>Ответ:</u> да. Например, у призмы $ABCA_1B_1C_1$ грань ABB_1A_1 – прямоугольник (см. рис. 8), но $\alpha = \angle B_1BC < 90°$. Поэтому грани BCC_1B_1 и ACC_1A_1 – параллелограммы.

Б. <u>Ответ:</u> нет. Докажем методом от противного. Допустим, что две боковые грани ABB_1A_1 и BCC_1B_1 – прямоугольники, тогда имеем: $AA_1 \perp AB$, $BB_1 \perp AB$ и $BB_1 \perp BC$, $CC_1 \perp BC$. Так как $\left.\begin{matrix} BB_1 \perp AB \\ BB_1 \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BB_1 \perp (ABC)$, значит, призма – прямая, следовательно, все боковые грани – прямоугольники, что невозможно по условию.

В. <u>Ответ</u>: да. Например, у призмы (см. рис. 9) грань ABB_1A_1 перпендикулярна основанию (ABC), так как $A_1H \subset ABB_1A_1$ и $A_1H \perp (ABC)$. Но грани BCC_1B_1 и ACC_1A_1 – не перпендикулярны основанию, если $\alpha = \angle B_1BC < 90°$, $\beta = \angle A_1AC < 90°$.

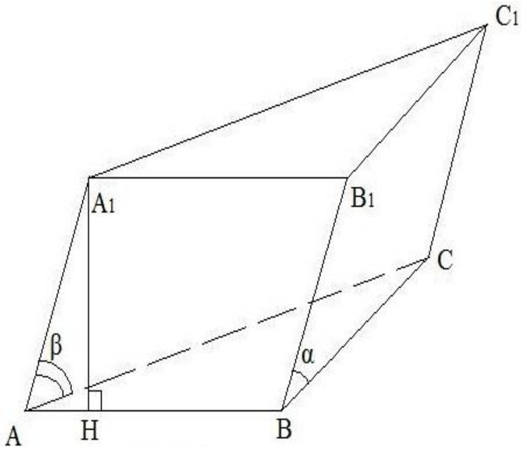


Рис. 9

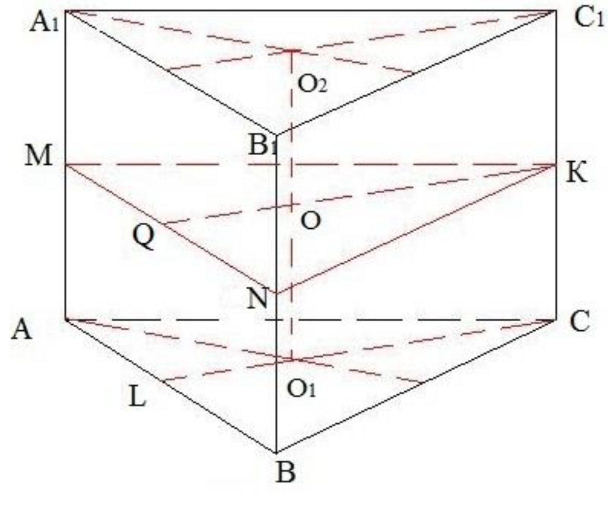


Рис. 10

Г. Ответ: нет. Докажем методом от противного. Пусть $\left.\begin{matrix} ABB_1A_1 \perp (ABC) \\ BCC_1B_1 \perp (ABC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow BB_1 \perp (ABC) \Rightarrow ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма, тогда все боковые грани перпендикулярны основанию.

Д. Ответ: Да. Если у призмы лишь одна боковая грань – прямоугольник (см. случай А). В этом случае $AA_1 \perp AB$, $BB_1 \perp AB$. Кроме того, так как $\left.\begin{matrix} AA_1 \perp AB \\ CC_1 \parallel AA_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow CC_1 \perp AB$.

Е. Если треугольная призма не является правильной, то около нее нельзя описать сферу, так как плоскости оснований призмы пересекают сферу по двум окружностям равных радиусов, а центр описанной сферы должен быть равноудален от вершин призмы.

Итак, пусть $ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма (см. рис. 10), тогда O – центр описанной сферы – середина O_1O_2, где O_1 – центр основания ABC, O_2 – центр основания $A_1B_1C_1$. Ясно, что O – центр среднего сечения MKN призмы. Точка O является и центром вписанной сферы, если $OO_1 = OO_2 = OQ = O_1L$. Если $OO_1 = OO_2 \neq OQ$, то вписать в призму сферу нельзя.

Если же в правильную треугольную призму можно вписать сферу, то ее центр совпадает с центром описанной сферы.

Ответ: Такой треугольной призмы, у которой центры вписанной и описанной сфер не совпадают, не существует.

Задача 5 (№ 22.18). Является ли призма правильной, если: а) все ее ребра равны; б) все ее боковые грани – прямоугольники; в) все диагональные сечения равны; г) около нее можно описать сферу; д) в нее можно вписать сферу; е) существует точка, равноудаленная от ее ребер?

Решение.

А. Ответ: нет. Например, в основании четырехугольной призмы может лежать ромб (его стороны равны), и боковые грани – ромбы, плоскости которых не перпендикулярны плоскости основания. Ясно, что такая призма правильной не является.

Б. <u>Ответ:</u> нет. Боковые грани прямой призмы – прямоугольники, но не всякая прямая призма является правильной; в основании такой призмы не обязательно лежит правильный многоугольник.

В. <u>Ответ:</u> да. Так как все диагональные сечения равны, то: 1) все диагонали оснований призмы равны; 2) все боковые ребра перпендикулярны основаниям призмы. Из 1) следует, что основания призмы – правильные многоугольники. С учетом 2) получаем, что призма – правильная.

Г. <u>Ответ:</u> нет. Например, около прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ можно описать сферу с центром в точке O пересечения его диагоналей и радиусом $R = \frac{1}{2}AC_1$, но прямоугольный параллелепипед не является правильной призмой, если основание $ABCD$ – прямоугольник (не квадрат).

Д. <u>Ответ:</u> нет. Например, около сферы можно описать прямую треугольную призму, в основании которой будет произвольный треугольник; следовательно, эта призма не является правильной.

Е. $O -$ точка, равноудаленная от ребер (см. рис. 11).

1) Точка O равноудалена от боковых ребер призмы, следовательно, точка O равноудалена от вершин того сечения призмы, которое проведено через середины боковых ребер (для прямой призмы). Поэтому точка O – центр окружности, описанной около среднего сечения призмы (то есть $O -$ точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам среднего сечения), ее радиус $R = OA_0$.

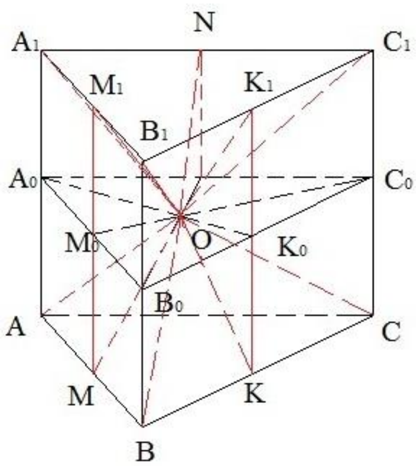


Рис. 11

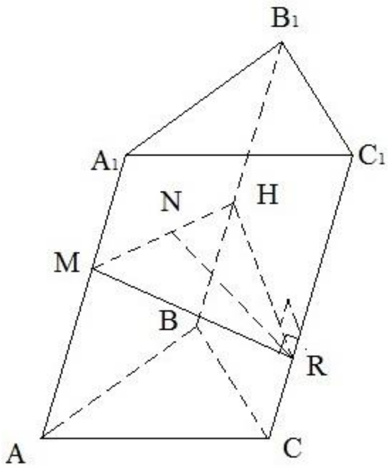


Рис. 12

2) Точка O будет равноудаленной от ребер нижнего основания призмы (на расстояние $R = OA_0$), если $OK = OM$ $(K_0K = M_0M)$, *отсюда* $\Delta OK_0K = \Delta OM_0M \Rightarrow OK_0 = OM_0$, то есть $O -$ центр и вписанной окружности среднего сечения. Следовательно, среднее сечение правильный n-угольник.

3) Тогда из ΔOK_0K $(\angle OK_0K = 90°, K_0K = \frac{1}{2}AA_1)$ имеем: ${OK_0}^2 + K_0K^2 = OK^2$, но $OK = OA_0 = R$, *то есть* $R^2 = {OK_0}^2 + K_0K^2$ (1).

4) В то же время из ΔOK_0B_0 $(\angle O_0K_0B_0 = 90°, B_0K_0 = \frac{1}{2}B_0C_0 = \frac{1}{2}a$, *где* $a -$ *сторона правильного* n-угольника; $OB_0 = OA_0 = R, OK_0 = r -$ радиус вписанной окружности) имеем: $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (OK_0)^2 = R^2$ (2).

5) Из (1) и (2) получаем:

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + {OK_0}^2 = R^2 \\ (K_0K)^2 + (OK_0)^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow (K_0K)^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow K_0K = \frac{a}{2} \Rightarrow AA_1 = 2K_0K = a.$$

6) Итак, призма должна быть не просто правильной, в ней длина бокового ребра должна быть равна стороне основания правильного n-угольника.

Задача 6 (№ 22.19). В наклонной призме перпендикулярное сечение является равносторонним треугольником. Площадь одной ее боковой грани равна S. а) Найдите площади боковых граней. б) Можете ли вы найти расстояние от бокового ребра до плоскости противоположной грани?

в) Можете ли вы найти площадь основания?

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – наклонная треугольная призма, $CC_1 \perp (MHR)$ (см. рис. 12), ΔMHR – правильный треугольник, $S_{A_1C_1CA} = S$.

Определение. Если боковую поверхность призмы пересечь плоскостью, перпендикулярной боковому ребру, то получится многоугольник, который называется *перпендикулярным сечением.*

Решение.

А. $S_{A_1C_1CA} = MR \cdot C_1C$ $(MR \perp C_1C)$, $S_{A_1C_1CA} = S_{B_1C_1CB} = S$, *так как* $S_{B_1C_1CB} =$

$= CC_1 \cdot HR$ $(HR \perp CC_1;\ HR = MR)$, $\left.\begin{matrix} C_1C \perp (MHR) \\ C_1C \parallel A_1A \parallel B_1B \end{matrix}\right\} \Rightarrow B_1B \perp (MHR) \Rightarrow$

$\Rightarrow B_1B \perp MH$. $S_{A_1B_1BA} = MH \cdot C_1C = S$.

Б. $\left.\begin{matrix} A_1A \parallel B_1B \parallel C_1C \\ A_1A \perp (MHR) \\ B_1B \perp (MHR) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (A_1B_1BA) \perp (MHR), RN \perp MH$ в ΔMHR, поэтому

$RN \perp (A_1B_1BA)$, $RN -$ высота в ΔMHR ($\Delta MHR -$ равносторонний).

1) Если возьмем сторону ΔMHR за a, то $RN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ или $RN = \frac{MH\cdot\sqrt{3}}{2}$.

2) Если будет известно боковое ребро, то можно будет вычислить

$MR = \frac{S}{C_1C}$, тогда $RN = \frac{S}{C_1C} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}S}{2C_1C}$. Так как длина бокового ребра не дана, то искомое расстояние RN найти нельзя.

В. $V_{пр.} = \frac{1}{2} S_{AA_1B_1B} \cdot NR = \frac{1}{2} S \cdot \frac{\sqrt{3}S}{2C_1C} = \frac{\sqrt{3}S^2}{4C_1C}$; с другой стороны,

$V_{пр.} = S_{\Delta ABC} \cdot H = S_{осн.} \cdot H$, следовательно, $\frac{\sqrt{3}S^2}{4C_1C} = S_{осн.} \cdot H \Rightarrow S_{осн.} = \frac{\sqrt{3}S^2}{4H\cdot C_1C}$.

Но C_1C и $H -$ не даны, следовательно, $S_{осн.}$ найти нельзя.

Задача 7 (№ 22.20). Сколько граней, являющихся прямоугольниками, может быть в параллелепипеде?

Ответ:

1) 6 граней, если параллелепипед прямоугольный;

2) 4 грани, если параллелепипед прямой, но в основании – параллелограмм;

3) 2 грани, если параллелепипед наклонный, но в основании лежит прямоугольник.

Задача 8 (№ 22.21). Установите вид параллелепипеда, если: а) все его грани равны; б) все его грани равновелики; в) все его диагонали равны; г) два диагональных сечения перпендикулярны основанию; д) две его смежные грани – квадраты; е) перпендикулярное сечение к каждому ребру является прямоугольником; ж) около него можно описать сферу; з) в него можно вписать сферу (диагональное сечение параллелепипеда и вообще призмы проходит через соответствующие параллельные диагонали оснований призмы).

<u>Решение.</u>

А. Пусть $F_a = ABCDA_1B_1C_1D_1 -$ параллелепипед, у которого все грани равны.

1) Противоположные грани у F_a равны: $ABB_1A_1{=}DCC_1D_1,$ $ADD_1A_1{=}BCC_1B_1,$ $ABCD{=}A_1B_1C_1D_1.$

2) По условию, кроме того, $ABCD{=}ABB_1A_1$ (1), $ABCD{=}ADD_1A_1$ (2), $ABB_1A_1{=}ADD_1A_1$ (3).

3) Из (1) следует, что $BC = BB_1, AD = AA_1$ (4), поэтому 2 грани BCC_1B_1, $ADD_1A_1 -$ ромбы.

4) Из (2) следует, что $ABCD = AA_1D_1D \Rightarrow AB = AA_1$, поэтому грани ABB_1A_1, $DCC_1D_1 -$ ромбы.

5) Из (3) следует, что $AB = AD$, поэтому грани $ABCD$ *и* $A_1B_1C_1D_1 -$ ромбы.

Итак, если все грани параллелепипеда F_a равны, то эти грани – равные ромбы (в частности, этот параллелепипед может быть кубом).

Б. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1 -$ искомый параллелепипед, $S_{ABB_1A_1} = S_{DCC_1D_1} =$ $= S_{BCC_1B_1} = S_{ADD_1A_1} = S_{ABCD} = S_{A_1B_1C_1D_1} = S$ (см. рис. 13).

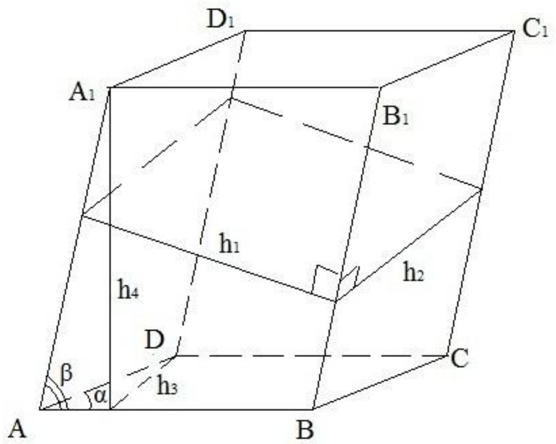


Рис. 13

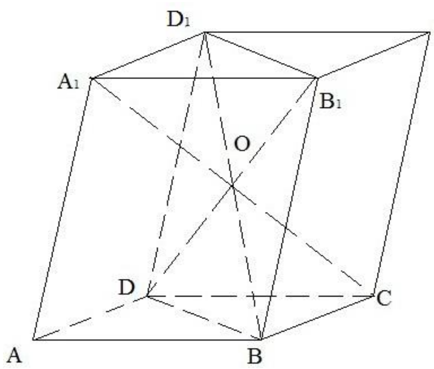


Рис. 14

Так как все боковые ребра равны ($AA_1 = = BB_1 = CC_1 = DD_1$), то из равенства площадей боковых граней следует, что расстояния между соседними боковыми ребрами равны. Но тогда и отрезки AB, BC, CD, DA будут равны, то есть $ABCD -$ ромб. В то же время $S_{ABCD} = S_{ABB_1A_1} = S$, то есть $AB \cdot AD \cdot \sin\alpha =$ $= AB \cdot\ AA_1 \cdot \sin\beta = S$, отсюда $AD \cdot \sin\alpha = AA_1 \cdot \sin\beta$.

Частный случай.

$AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 \perp (ABCD)$.

Тогда $ABCD$ – ромб, $S_{осн.} = AB^2 \cdot \sin\alpha$, параллелепипед – прямой, $S_{ABB_1A_1} =$
$= AB \cdot AA_1$; $S_{осн.} = S_{ABB_1A_1} \Rightarrow AB^2 \cdot \sin\alpha = AB \cdot AA_1 \Rightarrow AB \cdot \sin\alpha = AA_1$. Итак, $AA_1 = AB \cdot \sin\alpha$.

Если $\alpha = 90°$, то $AA_1 = AB$, тогда $ABCD$ – квадрат, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб.

В. Пусть $F_в = ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, у которого все его диагонали равны, т.е. $AC_1 = A_1C = BD_1 = B_1D$ (см. рис. 14).

1) Рассмотрим четырехугольник BDD_1B_1, это параллелограмм ($BB_1 \parallel DD_1$, $BB_1 = DD_1$), и кроме того, $BD_1 = DB_1$, следовательно, BDD_1B_1 – прямоугольник, отсюда $BB_1 \perp BD$ (1).

2) Аналогично доказывается, что ACC_1A_1 – прямоугольник, от*сюда* $AA_1 \perp AC$ (2).

3) $BB_1 \parallel AA_1,\ AA_1 \perp AC \Rightarrow BB_1 \perp AC$ (3).

4) $\left.\begin{matrix} BB_1 \perp BD, BB_1 \perp AC \\ BD \cap AC = O_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow BB_1 \perp ABD$. Тогда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед.

5) Четырехугольник BCD_1A_1 – параллелограмм ($BC \parallel A_1D_1, BC = A_1D_1$), и кроме того, $BD_1 = CA_1$, поэтому BCD_1A_1 – прямоугольник, т.е. $BC \perp BA_1$; кроме того, $BC \perp BB_1$, поэтому $BC \perp (ABB_1A_1)$, отсюда $BC \perp AB$, следовательно, и $ABCD$ – прямоугольник.

6) Итак, если все диагонали параллелепипеда $F_в$ равны, то он является прямоугольным параллелепипедом.

Г. $F_г = ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, у которого два диагональных сечения перпендикулярны основанию (см. рис. 15).

1) $\left.\begin{matrix} (ACC_1A_1) \perp (ABCD) \\ (BDD_1B_1) \perp (ABCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow OO_1 \perp (ABCD)$ (1), где $OO_1 = ACC_1A_1 \cap BDD_1B_1$.

2) Но $O = AC \cap BD, O_1 = A_1C_1 \cap B_1D_1$, т.е. O, O_1 – центры оснований параллелепипеда, поэтому $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 \parallel OO_1$, тогда из (1) получим, что все боковые параллелепипеда перпендикулярны основанию.

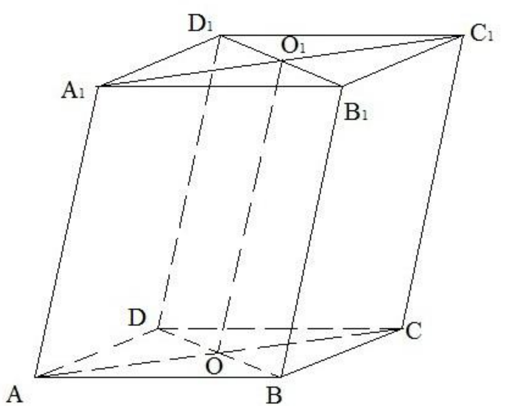


Рис. 15

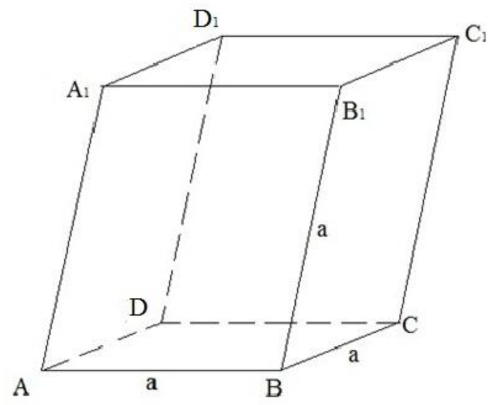


Рис. 16

Итак, если у параллелепипеда $F_{г}$ два диагональных сечения перпендикулярны основанию, то $F_{г}$ – прямой параллелепипед.

Д. Пусть $F_{д} = ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, у которого две его смежные грани квадраты (см. рис. 16), например, ABB_1A_1 *и* BCC_1C_1 – квадраты, тогда $AB = BC = BB_1 = a$. Тогда все боковые грани такого параллелепипеда – квадраты, а в основании лежит ромб $ABCD$.

<u>Частный случай.</u>

Если $ABCD$ и BCC_1B_1 – квадраты, тогда $F_{д}$ – куб, у которого любые две смежные грани – квадраты.

Е. 1. Пусть $F_{е} = ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, у которого перпендикулярное сечение к каждому ребру является прямоугольником, пусть $MNPQ$ – такое сечение, то есть $MNPQ \perp AA_1$ (BB_1, CC_1, DD_1) (см. рис. 17).

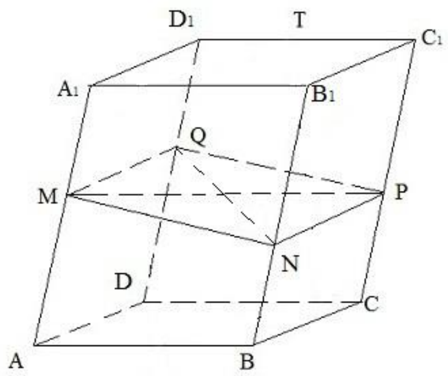


Рис. 17

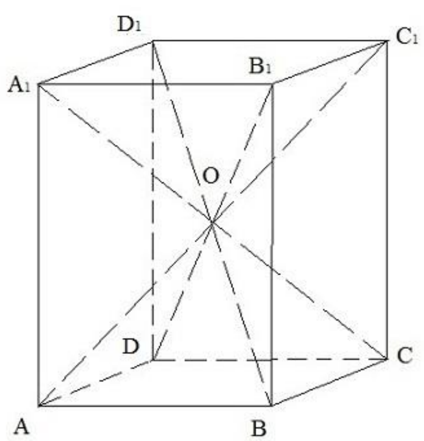


Рис. 18

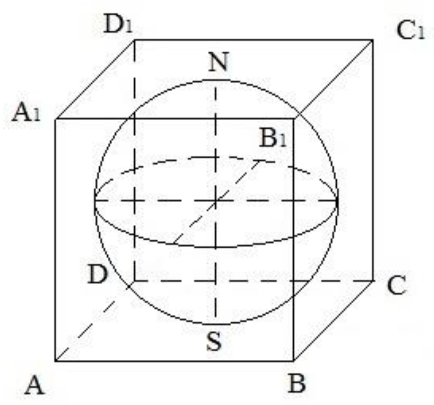


Рис. 19

2. Но тогда $\left.\begin{matrix} AA_1 \perp MP \\ CC_1 \perp MP \\ AA_1 \parallel CC_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \rho(AA_1, CC_1) = MP$ (1).

3. Далее, $\left.\begin{matrix} BB_1 \perp QN \\ DD_1 \perp QN \\ BB_1 \parallel DD_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \rho(BB_1, DD_1) = QN$ (2).

4. Но в прямоугольнике $MNPQ$ диагонали MP и QN равны, то есть $MP = QN$, тогда из (1) и (2) получаем: $\rho(AA_1, CC_1) = \rho(BB_1, DD_1)$ (3), то есть расстояния между противоположными параллельными ребрами равны.

5. Рассматривая сечение плоскостью, перпендикулярной параллельным ребрам A_1B_1, AB, CD, C_1D_1 (по аналогии с рассмотренным), получим, что $\rho(AB, C_1D_1) = \rho(CD, A_1B_1)$, то есть расстояния между параллельными противоположными ребрами равны.

6. Наконец, рассматривая сечение плоскостью, перпендикулярной параллельным ребрам AD, BC, A_1D_1, B_1C_1 (по аналогии), получим, что $\rho(AD, B_1C_1) = \rho(BC, A_1D_1)$, то есть расстояния между противоположными параллельными ребрами равны.

<u>Общий вывод:</u> в данном параллелепипеде расстояния между противоположными параллельными ребрами равны.

7. $V_{пар.} = AB \cdot S_1 = AD \cdot S_2 = AA_1 \cdot S_3$ (*), где S_1, S_2, S_3 − площади перпендикулярных сечений соответственно ребрам AB, AD, AA_1.

Из (*) следует, что $\frac{S_1}{S_2} = \frac{AD}{AB}, \frac{S_1}{S_3} = \frac{AA_1}{AB}, \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{AB} : \frac{1}{AD}, \frac{S_1}{S_3} = \frac{1}{AB} : \frac{1}{AA_1}$, следовательно, $S_1 : S_2 : S_3 = \frac{1}{AB} : \frac{1}{AD} : \frac{1}{AA_1}$, то есть площади перпендикулярных сечений обратно пропорциональны длинам соответствующих ребер.

Ж. Пусть $F_{ж} = ABCDA_1B_1C_1D_1$ − параллелепипед, вокруг которого можно описать сферу $\omega(O; R)$ (см. рис. 18). Тогда $OA = OB = OC = OD = OA_1 = OB_1 = OC_1 = OD_1$, отсюда $AC_1 = CA_1 = BD_1 = DB_1$; тогда имеем случай **В**, то есть $F_{ж}$ − прямоугольный параллелепипед.

З. Пусть $F_{з} = ABCDA_1C_1D_1$ − параллелепипед, в который можно вписать сферу $\omega(O; r)$ (см. рис. 19), N, S − точки касания оснований параллелепипеда; тогда точка O равноудалена от всех граней параллелепипеда, следовательно, расстояние между любыми двумя параллельными гранями одно и то же. Это верно для куба.

Задача 9 (№ 22.22). Докажите, что углы, которые диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с его ребрами, выходящими из той же вершины, дают в сумме меньше, чем $180°$. Можно ли улучшить эту оценку? Как изменятся полученные данные, если вместо ребер взять диагонали граней, имеющие с данной диагональю общую вершину?

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед (см. рис. 20), $AB = a, BC = b, BB_1 = c, BD_1 -$ диагональ, $\alpha = \angle ABD_1, \beta = \angle CBD_1$,
$\gamma = \angle B_1BD_1$.

Доказать: $\alpha + \beta + \gamma < 180°$.

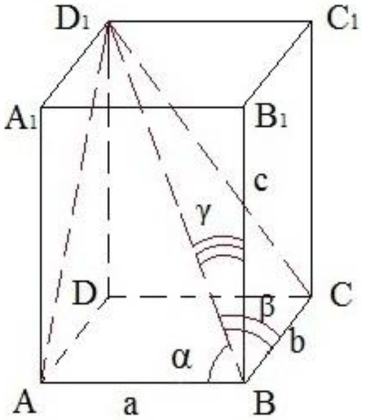


Рис. 20

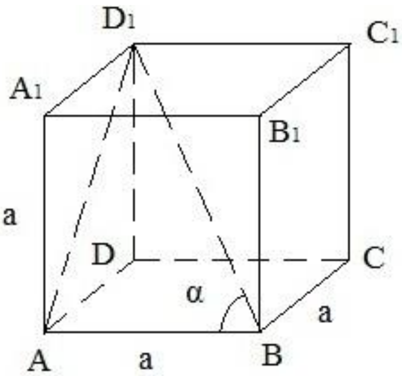


Рис. 21

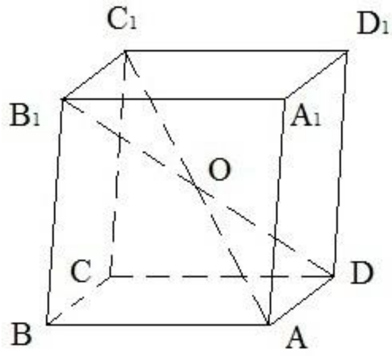


Рис. 22

Доказательство.

Допустим противное, что $\alpha + \beta + \gamma \geq 180°$. Если это верно для прямоугольного параллелепипеда, то верно и для куба (см. рис. 21), в котором
$\alpha = \beta = \gamma$ ($\Delta D_1AB = \Delta D_1CB = \Delta D_1BB_1 -$ как прямоугольные треугольники с общей гипотенузой DB_1 и равными катетами $AB = BC = BB_1$); поэтому
$3\alpha \geq 180° \Rightarrow \alpha \geq 60°$ (1).

С другой стороны, из ΔD_1AB ($\angle D_1AB = 90°$) $\mathrm{t}g\,\alpha = \frac{D_1A}{AB} = \frac{\sqrt{a^2+a^2}}{a} = \sqrt{2},$

но $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$ $и$ $\sqrt{3} > \sqrt{2}$, следовательно, $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} 60° \Rightarrow \alpha < 60°$.

Пришли к противоречию с (1). Итак, допущение, что $\alpha + \beta + \gamma \geq 180°$ – неверно, остается, $\alpha + \beta + \gamma < 180°$.

Задача 10 (№ 22.23). Дана четырехугольная призма. Сколько ее диагоналей должны пересечься в одной точке, чтобы эта призма оказалась параллелепипедом?

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – четырехугольная призма, она будет параллелепипедом тогда и только тогда, когда $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ – равные параллелограммы, но $\begin{cases} ABCD = A_1B_1C_1D_1 \\ ABCD,\ A_1B_1C_1D_1 \end{cases}$ – параллелограммы, если и только если

$$\begin{cases} AD = B_1C_1 \\ AD \parallel B_1C_1 \end{cases} \Leftrightarrow (ADC_1B_1 - \text{ параллелограмм}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} B_1C_1 = BC, B_1C_1 \parallel BC \\ AD = A_1D_1, AD \parallel A_1D_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AC_1 \cap DB_1 = O \\ AO = OC_1 \\ B_1O = OD \end{cases}.$$

Итак, призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, если и только если две ее диагонали AC_1 и DB_1 пересекаются в одной точке O и делятся этой точкой пополам.

I.3. Исследовательские задачи к параграфу «Пирамиды»

Задача 11 (№ 23.27). Сколько граней тетраэдра могут быть: а) остроугольными треугольниками; б) прямоугольными треугольниками; в) тупоугольными треугольниками?

Дано: $F = DABC$ – тетраэдр.

Решение.

а) Ответ: все 4 грани.

б) $\angle DAB = \angle DAC = \angle BAC = 90°, \angle BDC \neq 90°$ $(\angle BDC < 90°)$.

Ответ: 3 грани могут быть прямоугольными треугольниками.

в) Ответ: 3 грани могут быть тупоугольными треугольниками.

Задача 12 (№ 23.28). В треугольной пирамиде провели сечение, подобное основанию. Значит ли это, что оно параллельно основанию?

Дано: $SABC$ − пирамида, $\Delta A_1B_1C_1$ − сечение, $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ (см. рис. 23).

Доказать: $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$.

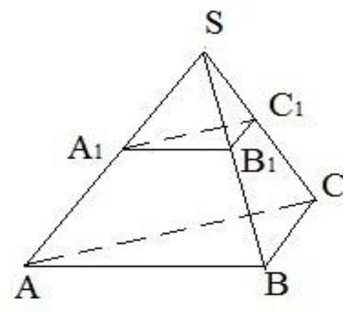


Рис. 23

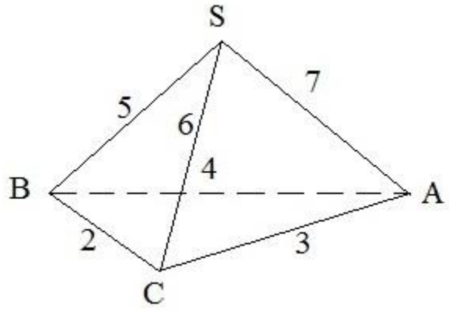


Рис. 24

Доказательство.

1) $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = k$ − коэффициент подобия, отсюда

$$\left.\begin{matrix} A_1B_1 = k \cdot AB \\ B_1C_1 = k \cdot BC \\ C_1A_1 = k \cdot CA \end{matrix}\right\} (1).$$

2) Рассмотрим гомотетию H_S^k $(S - \textit{ее центр}, k - \textit{коэффициент})$,

тогда

$$H_S^k\!: \left.\begin{matrix} A \to A_2 \\ B \to B_2 \\ C \to C_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A_2B_2 = k \cdot AB \\ B_2C_2 = k \cdot BC \\ C_2A_2 = k \cdot CA \end{matrix}\right\} (2),\ (A_2B_2C_2) \parallel (ABC).$$

3) Из (1) и (2) получаем, что $\left.\begin{matrix} A_2B_2 = A_1B_1 \\ B_2C_2 = B_1C_1 \\ C_2A_2 = C_1A_1 \end{matrix}\right\}$, отсюда $\Delta A_2B_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$, но

$(A_2B_2C_2) \parallel (ABC)$, поэтому и $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$.

Задача 13 (№ 23.29). Даны шесть отрезков с длинами 2, 3, 4, 5, 6, 7. Существует ли тетраэдр с такими ребрами?

Дано: $a = 2, b = 3, c = 4, d = 5, e = 6, f = 7$.

Решение.

1) Грани тетраэдра – 4 треугольника, но треугольник со сторонами $x,\ y,\ z$ существует, если и только если $|x - y| < z < x + y$ $(*)$.

2) Первая грань со сторонами $a = 2$, $b = 3$; третьей стороной этой грани может быть лишь сторона $c = 4$. Итак, основание тетраэдра $- \Delta ABC$, в котором

$BC = a = 2,\ AC = b = 3,\ AB = c = 4$ (рис. 24).

3) Вторую грань (ΔSBC) берем со сторонами $BC = a = 2,\ SB = d = 5,$ $SC = e = 6.$

4) Для третьей грани (ΔSAC) две стороны известны, берем $SA = f = 7.$

5) Четвертая грань (ΔBSA) со сторонами 4, 5, 7 также существует.

Итак, тетраэдр с заданными ребрами существует.

Задача 14 (№ 23.30). Сколько высот тетраэдра могут пересекаться в одной и той же точке?

1) Если тетраэдр – правильный, то все 4 высоты тетраэдра пересекаются в одной точке.

2) Если тетраэдр $SABC -$ правильная треугольная пирамида (рис. 25), то есть $AB = BC = CA, SA = SB = SC$, но $SA \neq AB,$ то высота SH к основанию (ΔABC)

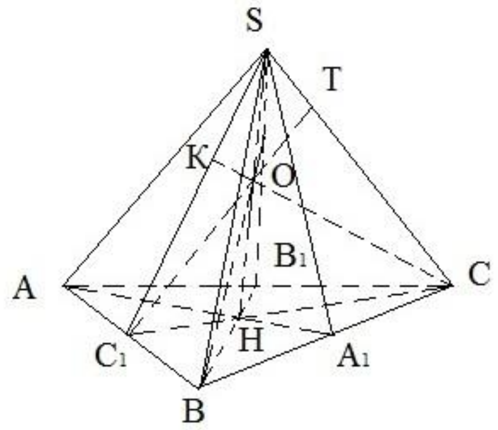


Рис. 25

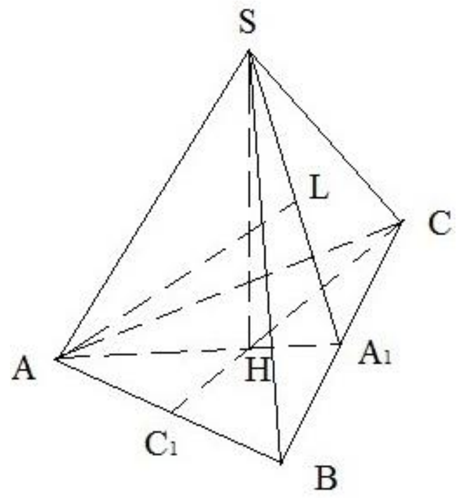


Рис. 26

проходит через точку пересечения высот, медиан ΔABC, тогда и остальные высоты тетраэдра обладают тем же свойством (см. [1], № 23.25), то есть проходят через точки пересечения высот противолежащих граней. Следовательно, $BM \perp (ASC), AL \perp (BSC), CK \perp (ASB), SH \perp (ABC)$. Но $CK, SH \subset (CSC_1) \Rightarrow$ $\Rightarrow CK \cap SH = O.$ Аналогично, $AL, SH \subset (ASS_1) \Rightarrow AL \cap SH = O_1$.

Аналогично, $BM, SH \subset (BSB_1) \Rightarrow BM \cap SH = O_2$. Совпадут ли точки O_1, O_2 и O? Если да, то все 4 высоты пересекаются в одной точке. А если нет? Возможно ли такое? Выясним это.

$\Delta ASA_1 = \Delta CSC_1 = \Delta BSB_1$ $(AS = CS = BS,\ AA_1 = CC_1 = BB_1, SA_1 = SC_1 = SB_1)$. Эти треугольники имеют общую высоту SH $(SH \perp\ AA_1, SH \perp CC_1, SH \perp BB_1)$, каждый из них можно получить посредством поворота вокруг прямой SH на угол $\varphi = 120°$ (против часовой стрелки), а именно:

$$R_{SH}^{+120°}\colon\ \begin{cases} A \to B \to C \to A \\ A_1 \to B_1 \to C_1 \to A_1. \\ S \to S \to S \to S \end{cases}$$

Следовательно, точка O_1 пересечения высот ΔAA_1S перейдет в точку O_2 пересечения высот ΔBB_1S, а она – в точку O пересечения высот ΔCC_1S. Но каждая из этих точек $O_1, O_2, O\ \in\ SH$, и $SH -$ ось поворота, отсюда $O_1 \equiv O_2 \equiv O$. Итак, и в этом случае все 4 высоты тетраэдра пересекаются в одной точке.

3) $SABC -$ произвольный тетраэдр (рис. 26). Тогда высоты SH, AL, BM, CK, вообще говоря, могут быть и отрезками скрещивающихся прямых, если только $SH \perp (ABC)$, но $H -$ не является точкой пересечения высот $\Delta ABC.$ В случае, если $H -$ точка пересечения высот ΔABC и $SH \perp (ABC)$, то тогда по задаче

№ 23.25 остальные высоты AL, BM, CK проходят через точки пересечения высот противоположных граней. В этом частном случае снова все 4 высоты будут проходить через одну точку $O = SH \cap AL$.

Задача 15 (№ 23.31). Какими свойствами обладает тетраэдр, в котором: а) противоположные ребра попарно равны; б) противоположные ребра попарно перпендикулярны; в) противоположные двугранные углы попарно равны; г) при одной вершине сходятся три прямых угла; д) пересекаются в одной и той же точке все высоты?

Дано: $F = DABC -$ тетраэдр.

Решение.

А. $AB = CD, BC = AD, AC = BD -$ противоположные ребра тетраэдра попарно равны (см. рис. 27). Тогда $\Delta ABC = \Delta DCB, \Delta ABC = \Delta BAD, \Delta ABC = \Delta CDA$.

Итак, если противоположные ребра тетраэдра F попарно равны, то все его грани равны, такой тетраэдр называется ***равногранным.***

В свою очередь, равногранный тетраэдр обладает следующими свойствами:

A_1. Сумма плоских углов при каких-либо трех вершинах равна $180°$;

A_2. Центры вписанной и описанной сферы совпадают.

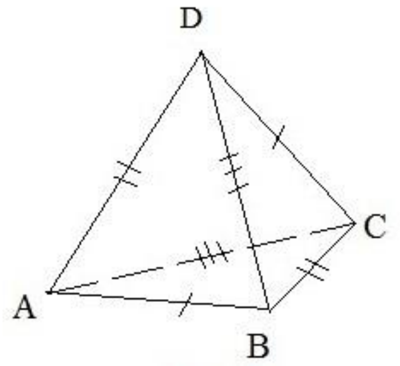


Рис. 27

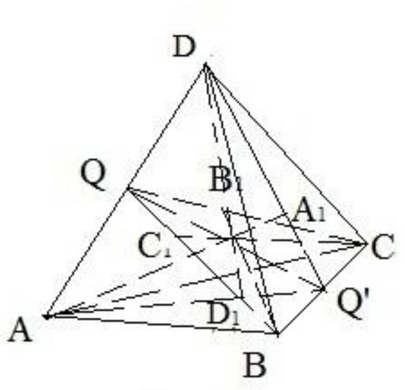


Рис. 28

<u>Доказательство</u>.

A_1. По условию, $\Delta ABC = \Delta DCB = \Delta BAD = \Delta CDA$, отсюда $\angle ADB = \angle BCA, \angle BDC = \angle CAB, \quad \angle CDA = \angle ABC,$ поэтому $\angle ADB + \angle BDC +$ $+\angle CDA = \angle BCA + \angle CAB + \angle ABC = 180°$, то есть сумма плоских углов при вершине D равна $180°$. Аналогично доказывается, что сумма плоских углов при каких-либо еще двух вершинах также равна $180°$.

A_2. Пусть O_1 *и* O_2 $-$ точки касания вписанной сферы с гранями ABC и BDC. Тогда $\Delta O_1BC = \Delta O_2BC$. Из условия задачи следует, что O_1 *и* O_2 $-$ центры описанных окружностей указанных граней. Поэтому $\angle CAB = \frac{\angle BO_1C}{2} = \frac{\angle BO_2C}{2} = \angle BDC$. Аналогичные рассуждения показывают, что каждый из плоских углов при вершине D равен соответствующему углу треугольника ABC, а значит, их сумма равна $180°$. Это утверждение справедливо для всех вершин тетраэдра.

А тогда по задаче 2.32(а) из книги В.В. Прасолова и И.Ф. Шарыгина «Задачи по стереометрии»: все грани тетраэдра равны, то есть он – равногранный.

Б. $AD \perp CB, DC \perp AB, AC \perp BD$ $-$противоположные ребра попарно перпендикулярны (см. рис. 28).

Если в тетраэдре $F = DABC$ противоположные ребра попарно перпендикулярны ($AD \perp CB, DC \perp AB, AC \perp BD$), то все его высоты пересекаются в одной точке (такой тетраэдр называется ***ортоцентрическим***).

Доказательство.

1) Так как $AD \perp BC$, то существует плоскость α, проходящая через BC и перпендикулярная AD. Высота, опущенная из т. B на грань ADC, лежит в плоскости α, $BB_1 \perp ADC$. Аналогично, высота, опущенная из точки C на грань ADB, лежит в плоскости α, $CC_1 \perp ADB$. Следовательно, высоты, опущенные из вершин B *и* C на грани ADC и ADB, пересекаются в одной точке H.

Аналогично, так как $BC \perp AD$, то существует плоскость α', проходящая через AD, и перпендикулярная BC, проходящая через AD, и перпендикулярная BC (на рисунке $\alpha' = (ADQ')$). Аналогично, высоты AA_1, DD_1, опущенные из точек A, D на грани BCD *и* ABC, пересекаются в одной точке H'.

2) Но $\alpha \cap \alpha' = (QQ')$, где $QQ' \perp AD$ и $QQ' \perp BC$, поэтому точки H *и* H' лежат на прямой QQ'.

3) Итак, высоты BB_1, CC_1 *и* AA_1, DD_1 попарно пересекаются. Аналогично, попарно пересекаются и другие пары высот: AA_1, BB_1 *и* CC_1, DD_1, AA_1, CC_1 *и* BB_1, DD_1.

Но если несколько прямых попарно пересекаются, то они лежат в одной плоскости или проходят через одну точку. В одной плоскости высоты тетраэдра лежать не могут, иначе бы в одной плоскости лежали и все вершины тетраэдра, что невозможно. Следовательно, все высоты тетраэдра пересекаются в одной точке.

В свою очередь, если тетраэдр ортоцентрический, то верны свойства:

Б$_1$) отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, равны;

Б$_2$) суммы квадратов противоположных ребер равны;

Б$_3$) углы между противоположными ребрами равны;

Б$_4$) произведения косинусов противоположных двугранных углов равны;

Б$_5$) каждая высота тетраэдра проходит через точку пересечения высот его граней (см. [5; 6]).

В. Противоположные двугранные углы попарно равны, то есть двугранные углы с ребрами AD *и* $BC -$ равны φ, аналогично, двугранные углы с ребрами AB и $DC -$ равны φ_1, двугранные углы с ребрами AC *и* $BD -$ равны φ_2.

Решение.

1) $(BMC) \perp AD \Rightarrow \left.\begin{matrix} AD \perp BM \\ AD \perp CM \end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle BMC = \varphi = (\widehat{ADB, ADC})$;

2) $(ADN) \perp BC \Rightarrow \left.\begin{matrix} BC \perp ND \\ BC \perp NA \end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle AND = \varphi = (\widehat{BCD, BCA})$.

Аналогично верно равенство и для других пар двугранных углов.

В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при ребрах AB и DC равны, равны также двугранные углы при ребрах BC и AD, при ребрах AC и BD. Тогда (см. книгу Прасолова, Шарыгина «Задачи по стереометрии», 1989 г., № 6.26) $AB = DC$, $BC = AD$, $AC = BD$, то есть противоположные ребра тетраэдра попарно равны, поэтому грани тетраэдра равны, то есть тетраэдр – равногранный. А тогда по задаче № 6.25 из этой же книги получаем следующие свойства такого тетраэдра:

1) сумма плоских углов при какой-либо вершине равна $180°$;

2) центры вписанной и описанной сфер совпадают;

3) радиусы описанных окружностей граней равны;

4) центр масс (геометрическая точка, характеризующая движение тела или системы частиц как целого) и центр описанной сферы совпадают.

Замечание (решение задачи № 6.26).

Рассмотрим трехгранные углы при вершинах A и C, они имеют равные двугранне углы (по условию), поэтому по задаче № 5.3 из той же книги эти трехгранные углы равны. Отсюда следует, что равны и их плоские углы, а значит, $\Delta ABC = \Delta CDA$ (сторона $AC -$ общая, $\angle ACB = \angle CAD$, $\angle BAC = \angle DCA -$ по стороне и прилежащим к ней углам), отсюда $AB = CD$. Аналогично доказывается, что $BC = AD$, $AC = BD$.

Г. При одной вершине сходятся три прямых угла, то есть $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 90°$; такой тетраэдр называется ***прямоугольным.***

Тогда верны свойства:

Г$_1$) $\cos C = \sin A \cdot \sin B$;

Г₂) длины отрезков, соединяющих середины его противоположных ребер, равны.

<u>Доказательство.</u>

Γ_1) Пусть $\angle CAD = \alpha, \angle CBD = \beta,\ \angle ACB = \varphi, CD = a.$

1) Из ΔADC $(\angle ADC = 90°, CD = a, \angle CAD = \alpha)$ имеем:

$\sin\alpha = \frac{CD}{AC} = \frac{a}{AC} \Rightarrow AC = \frac{a}{\sin\alpha}.$

2) Из ΔBCD $(\angle BDC = 90°, CD = a, \angle CBD = \beta)$ имеем:

$\sin\beta = \frac{CD}{BC} = \frac{a}{BC} \Rightarrow BC = \frac{a}{\sin\beta}.$

3) Из ΔADC $(\angle ADC = 90°, CD = a, \angle CAD = \alpha)$ имеем:

$tg\ \alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{a}{AD} \Rightarrow AD = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha} = a \cdot ctg\ \alpha.$

4) Из ΔBCD $(\angle BDC = 90°, CD = a, \angle CBD = \beta)$ имеем:

$\operatorname{tg}\beta = \frac{CD}{BD} = \frac{a}{BD} \Rightarrow BD = \frac{a}{\operatorname{tg}\beta} = a \cdot ctg\ \beta.$

5) Из ΔADB $(\angle ADB = 90°, AD = a \cdot ctg\ \alpha, BD = a \cdot ctg\ \beta)$ имеем:

$AB^2 = AD^2 + BD^2 = (a \cdot ctg\ \alpha)^2 + (a \cdot ctg\ \beta)^2 = a^2(ctg\ \alpha^2 + ctg\ \beta^2),$

$AB^2 = a^2(ctg\ \alpha^2 + ctg\ \beta^2)$ (1).

6) Из ΔACB $\left(\angle ACB = \varphi, AC = \frac{a}{\sin\alpha}, BC = \frac{a}{\sin\beta}\right)$ по теореме косинусов получаем: $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cdot \cos\varphi$, то есть

$$AB^2 = \left(\frac{a}{\sin\alpha}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sin\beta}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \frac{a}{\sin\beta} \cdot \cos\varphi \quad (2).$$

Из (1) и (2) получаем:

$a^2(ctg\ \alpha^2 + ctg\ \beta^2) = a^2\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} - \frac{2}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} \cdot \cos\varphi\right),$

отсюда $ctg\ \alpha^2 + ctg\ \beta^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} - \frac{2\cdot\cos\varphi}{\sin\alpha\cdot\sin\beta},$

$\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} - \frac{2\cdot\cos\varphi}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$ (3),

$\frac{1}{\sin^2\alpha}(1 - \cos^2\alpha) + \frac{1}{\sin^2\beta}(1 - \cos^2\beta) = \frac{2\cdot\cos\varphi}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$ или $1 + 1 = \frac{2\cdot\cos\varphi}{\sin\alpha\cdot\sin\beta},$

отсюда $2 \cdot \cos\varphi = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta$, то есть $\cos\varphi = \sin\alpha \cdot \sin\beta$, ч.т.д.

Г$_2$) Рассмотрим прямоугольный параллелепипед, ребра AB, AD *и* AA_1 которого являются ребрами данного тетраэдра. Отрезок, соединяющий середины ребер AB и A_1D, является средней линией треугольника ABD_1 (параллельной BD_1); следовательно, его длина равна $\frac{d}{2}$, где $d-$ длина диагонали параллелепипеда.

Д. Пересекаются в одной и той же точке все высоты тетраэдра, тогда тетраэдр – **ортоцентрический.** Поэтому противоположные стороны такого тетраэдра попарно равны (далее, см. случай **Б**).

Задача 16 (№ 23.32). Дан треугольник. Перегибанием по трем прямым из него хотят получить тетраэдр (см. рис. 29). Любой ли треугольник годится для этого?

Дано: $\Delta ABC, BC = a, AC = b, AB = c.$

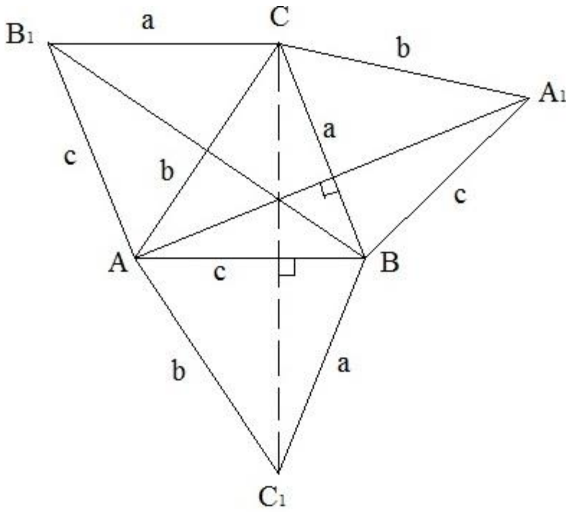


Рис. 29

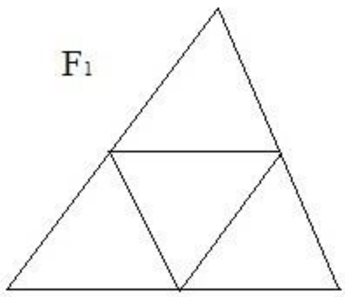


Рис. 30

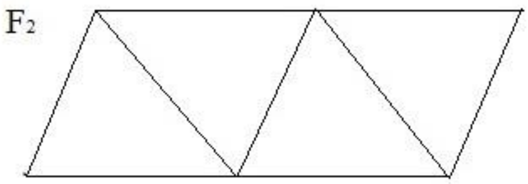


Рис. 31

Решение.

1) $S_{BC}: \Delta ABC \to \Delta A_1BC \Rightarrow \begin{cases} A_1B = AB = c \\ A_1C = AC = b, \end{cases}$

2) $S_{AB}: \Delta CAB \to \Delta C_1AB \Rightarrow \begin{cases} C_1B = CB = a \\ C_1A = CA = b, \end{cases}$

3) .$S_{AC}: \Delta BAC \to \Delta B_1AC \Rightarrow \begin{cases} B_1A = BA = c \\ B_1C = BC = a. \end{cases}$

4) Ясно, что из полученной развертки можно сделать тетраэдр, если $a = b = c$, то есть $\Delta ABC -$ равносторонний.

Ответ: годится только равносторонний треугольник.

Задача 17 (№ 23.33). Дан квадрат. Можно ли провести внутри него отрезки так, чтобы получилась развертка тетраэдра?

Допустим, что это удалось сделать. «Развернем» полученный тетраэдр, то есть построим его развертку. Получим либо фигуру F_1 (рис. 30), либо фигуру F_2 (рис. 31), но не квадрат.

Задача 18 (№ 23.34). Нарисуйте какую-либо развертку тетраэдра. Отметьте на ней две любые точки. Можете ли вы узнать, какое будет между ними расстояние, когда из этой развертки будет сделан тетраэдр?

Дано: $F -$ развертка тетраэдра, $A, B \in F, A \neq B$.

Можно ли найти: $\rho(A, B)$, если из развертки сделан тетраэдр (см. рис. 32 и 33).

Решение.

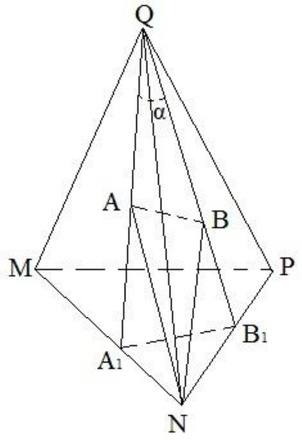


Рис. 32

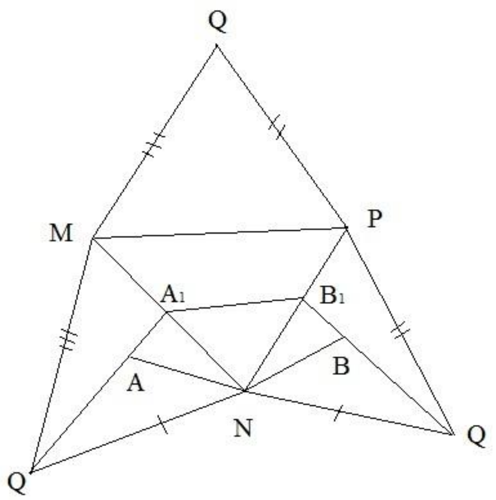


Рис. 33

1) Найдем центральные проекции точек A, B на плоскость основания, получим точки A_1, B_1.

2) В ΔA_1QB_1 (в пространстве) можем узнать длины всех отрезков A_1Q, B_1Q, A_1B_1 (по развертке).

3) Поэтому из ΔA_1QB_1 по теореме косинусов сможем найти угол $\alpha = \angle A_1QB_1$,

${A_1B_1}^2 = {QA_1}^2 + {QB_1}^2 - 2QA_1 \cdot QB_1 \cdot \cos\alpha$, отсюда $\cos\alpha = \frac{{QA_1}^2 + {QB_1}^2 - {A_1B_1}^2}{2QA_1 \cdot QB_1}$ (1).

4) Находя по развертке длины отрезков QA и QB и зная угол $\alpha = \angle AQB$ из ΔAQB, сможем найти и длину отрезка AB:

$AB^2 = QA^2 + QB^2 - 2QA \cdot QB \cdot \cos\alpha$ (2).

Формула (2) с учетом (1) примет вид:

$$AB^2 = QA^2 + QB^2 - 2QA \cdot QB \cdot \frac{{QA_1}^2 + {QB_1}^2 - {A_1B_1}^2}{2QA_1 \cdot QB_1}.$$

Ответ: $\rho(A, B) = \sqrt{AB^2}$ – найти можно, если из развертки сделан тетраэдр.

Задача 19 (№ 23.35). В основании пирамиды лежит квадрат. Вершина пирамиды проектируется в вершину основания. Два боковых ребра пирамиды равны d_1 и d_2 $(d_2 > d_1)$. Можете ли вы найти другие боковые ребра пирамиды?

Дано: $SABCD$ – пирамида, $ABCD$ – квадрат, $SA \perp (ABCD)$. $SB = d_1, SC = d_2$, $d_2 > d_1$ (см. рис. 34).

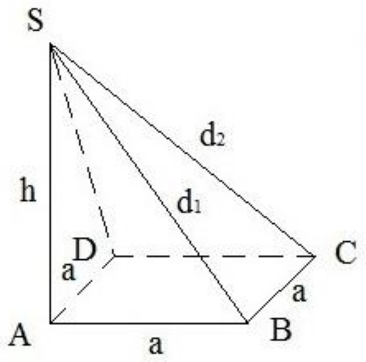


Рис. 34

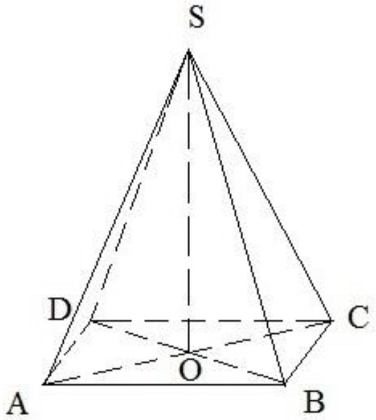


Рис. 35

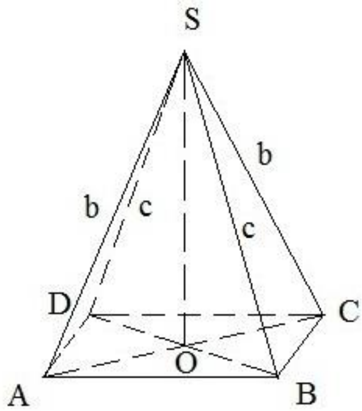


Рис. 36

Решение.

1 способ.

1) $\Delta SAB = \Delta SAD$ ($\angle SAB = \angle SAD = 90°$, SA – общая сторона, $AB = AD = a$), поэтому $SD = SB = d_1$.

2) Из ΔSAB имеем: $h = \sqrt{{d_1}^2 - a^2}$ (1).

3) Из ΔSAC имеем: $h = \sqrt{{d_2}^2 - AC^2} = \sqrt{{d_2}^2 - (a^2 + a^2)} = \sqrt{{d_2}^2 - 2a^2}$ (2).

4) Из (1) и (2) имеем: $\sqrt{{d_1}^2 - a^2} = \sqrt{{d_2}^2 - 2a^2}$, отсюда

$d_1{}^2 - a^2 = d_2{}^2 - 2a^2 \Rightarrow a^2 = d_2{}^2 - \ d_1{}^2 \Rightarrow a = \sqrt{d_2{}^2 - d_1{}^2}$ (3).

5) Из (1) и (3) получаем:

$$h = \sqrt{d_1{}^2 - \left(\sqrt{d_2{}^2 - d_1{}^2}\right)^2} = \sqrt{d_1{}^2 - d_2{}^2 + d_1{}^2} = \sqrt{2d_1{}^2 - d_2{}^2}.$$

2 способ (отыскания a).

1) Из $\Delta\, SBC$ ($\angle\, SBC = 90°$ ($AB \perp BC, AB - \textit{проекция наклонной } SB$),

$SB == d_1, SC = d_2, BC = a$):

$$BC^2 = SC^2 - SB^2 \Rightarrow a^2 = d_2{}^2 - d_1{}^2 \Rightarrow a = \sqrt{d_2{}^2 - d_1{}^2}.$$

Задача 20 (№ 23.36). В основании пирамиды лежит прямоугольник. Ее вершина проектируется в точку пересечения диагоналей основания. Какие свойства этой пирамиды аналогичны свойствам правильной пирамиды? А какие ее свойства отличны от свойств правильной пирамиды? Ответьте на эти же вопросы для аналогичной пирамиды, основанием которой является ромб.

А. Дано: $SABCD -$ пирамида, $ABCD -$ прямоугольник, $SO \perp (ABCD)$, $O = AC \cap BD$ (см. рис. 35).

Решение.

1) $\Delta SOA = \Delta SOB = \Delta SOC = \Delta SOD$ (прямоугольные, $SO -$ общий катет, $OA = OB = OC = OD$), поэтому $SA = SB = SC = SD -$ боковые ребра пирамиды равны (как и у правильной пирамиды).

2) $\Delta ASB = \Delta CSD$ ($AB = CD, AS = CS, BS = DS$); аналогично,

3) $\Delta BSC = \Delta DSA$ ($BC = DA, BS = DS, CS = AS$), то есть противоположные боковые грани равны (у правильной пирамиды все боковые грани равны).

4) Тогда $O -$ центр основания (как и у правильной пирамиды).

5) У данной пирамиды в основании прямоугольник (у правильной пирамиды в основании – квадрат).

6) $\angle\, SAO = \angle\, SBO = \angle\, SCO = \angle\, SDO$ (как и у правильной пирамиды).

Б. Дано: $SABCD -$ пирамида, $ABCD -$ ромб, $SO \perp (ABCD)$,

$O = AC \cap BD$ (рис. 36).

Решение.

1) $\Delta\, SAO = \Delta\, SCO$ ($SO -$ общий катет, $AO = CO, \angle SOA = \angle SOC = 90°$), поэтому $SA = SC$.

2) Аналогично, $\Delta\, SBO = \Delta\, SDO \Rightarrow\ SB = SD$. Следовательно, противоположные боковые ребра равны (у правильной пирамиды все боковые ребра равны).

3) Точка $O -$ центр симметрии ромба (как и у правильной пирамиды – $O -$ центр симметрии квадрата).

4) $\Delta\, ASB = \Delta\, CSB = \Delta\, CSD = \Delta\, ASD$ ($AB = CB = CD = AD = a$; $AS =\ CS = CS = AS; BS = BS = DS = DS$), то есть все боковые грани равны (как и у правильной пирамиды), хотя и не являются равнобедренными треугольниками.

Задача 21 (№ 23.39). Из куска картона в форме квадрата хотят сделать правильную треугольную пирамиду с плоским углом при вершине $30°$. Какую выбрать ее развертку, чтобы получить меньше всего отходов (рис. 37)?

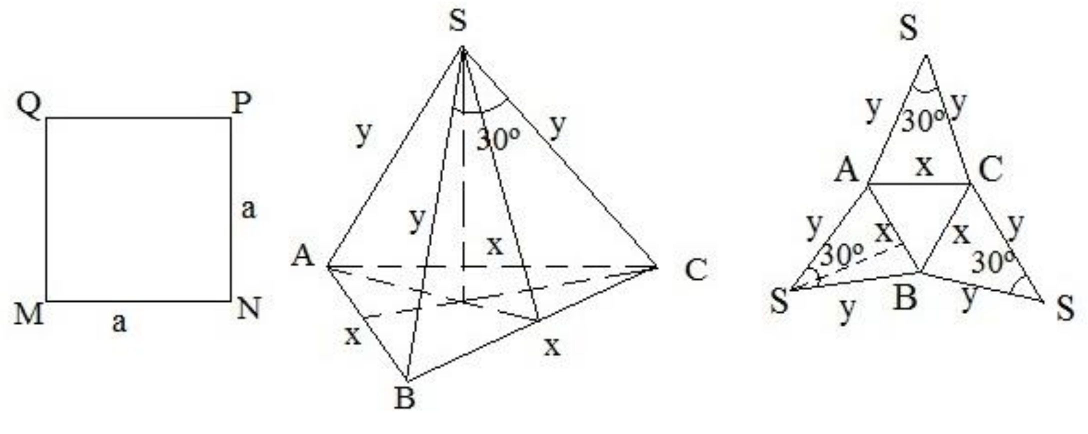


Рис. 37

Решение.

1) $S_{осн.} = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot \sin 60° = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}. S_{\Delta ASB} = \frac{1}{2} \cdot y \cdot y \cdot \sin 30° = \frac{y^2}{4}.$

$S_{бок.} = 3 \cdot S_{\Delta ASB} = \frac{3y^2}{4}. S_{полн.} = S_{бок.} + S_{осн.} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3y^2}{4} = \frac{x^2\sqrt{3}+3y^2}{4}.$

2) Из ΔASB по теореме косинусов имеем: $x^2 = y^2 + y^2 - 2yy \cdot \cos 30°$ или

$x^2 = 2y^2(1 - \cos 30°)$, $x^2 = 2y^2(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$, $x^2 = y^2\left(2 - \sqrt{3}\right)$, отсюда

$x = y\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Тогда $S_{полн.} = \frac{x^2\sqrt{3}+3y^2}{4} = \frac{(y\sqrt{2-\sqrt{3}})^2\sqrt{3}+3y^2}{4} = \frac{y^2(2-\sqrt{3})\sqrt{3}+3y^2}{4} =$

$= \frac{y^2(2\sqrt{3}-3+3)}{4} = \frac{2\sqrt{3}y^2}{4} = \frac{\sqrt{3}y^2}{2}$.

3) $S_{кв.} = a^2$, $S_{о.} = S_{кв.} - S_{полн.} = a^2 - \frac{\sqrt{3}y^2}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}y^2}{2} \leq a^2$, $y^2 \leq \frac{2a^2}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow y \leq \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$.

$$\left.\begin{array}{c} x = y\sqrt{2-\sqrt{3}} \\ y \leq \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow x \leq \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

4) Если $y = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$, $x = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}$, то $y^2 = \frac{2a^2}{\sqrt{3}}$, $x^2 = \frac{2a^2}{\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})$, тогда

$S_{полн.} = \frac{x^2\sqrt{3}+3y^2}{4} = \frac{\frac{2a^2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})+\frac{2a^2}{\sqrt{3}}\cdot 3}{4} = \frac{2a^2\left(2-\sqrt{3}\right)+2a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2a^2(2-\sqrt{3}+\sqrt{3})}{4} = a^2$.

Это в идеале, когда отходов совсем нет.

Итак, $\begin{cases} x \leq \frac{a\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{a\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2-\sqrt{3}})}{\sqrt[4]{3}}, \\ y \leq \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}} \end{cases}$

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}} \approx \frac{1,414}{1,316} \approx 1,074$, $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2-1,732} = \sqrt{0,268} \approx 0,518$,

$x \leq \frac{1,074\ a\cdot 0,517}{1} \approx 0,556a$.

$x \leq 0,556a$, $y \leq 1,074a$. В этом случае площадь развертки $S_{раз.} \approx 0,998a^2$, $S_о = a^2 - 0,998a^2 = 0,002a^2$.

I.4. Исследовательские задачи к параграфу «Выпуклые многогранники»

Задача 22 (№ 24.7). Является ли многогранник выпуклым, если: а) каждое его сечение выпукло; в) вокруг него можно описать сферу; г) в него можно вписать сферу; д) существует сфера, касающаяся всех его ребер?

Дано: $F-$ многогранник.

Решение.

А. Если $F-$ не является выпуклым многогранником, то тогда найдется хотя бы одно сечение $F,$ которое не является выпуклым, но это невозможно по условию. Следовательно, допущение опровергнуто. Значит $F-$ выпуклый многогранник.

В. Так как вокруг F можно описать сферу $\omega(O;R)$, то все вершины F принадлежат сфере, то есть равноудалены от точки O; при этом вершины одной грани F лежат на окружности, по которой плоскость грани пересекают сферу. Отсюда следует, что каждая грань F является выпуклым многоугольником, причем F лежит по одну сторону от плоскости каждой грани, следовательно, $F-$ выпуклый многогранник.

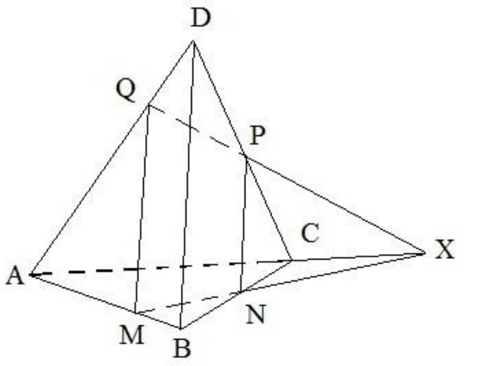
Г. Допустим, что $F-$ не является выпуклым многогранником. Тогда не существует точки $O,$ равноудаленной от всех его граней, т.е. вписать сферу в F нельзя, что противоречит условию. Следовательно, допущение опровергнуто, поэтому $F-$ выпуклый многогранник.

Д. Допустим, что $F-$ не является выпуклым многогранником, тогда не существует сферы, которая касается всех ребер для F, что противоречит условию. Следовательно, допущение опровергнуто, поэтому $F-$ выпуклый многогранник.

Задача 23 (№ 24.8). Существует ли выпуклый многогранник, у которого: а) все сечения – треугольники; б) все проекции – треугольники; в) все грани – квадраты, но не куб?

А. Все сечения многогранника $F-$ треугольники.

Установить: $F-$ выпуклый многогранник?



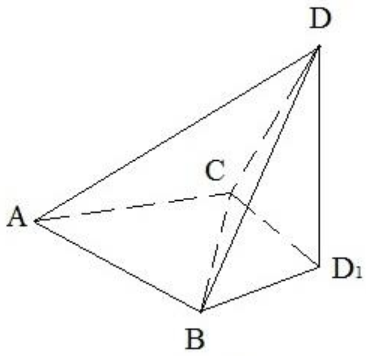


Рис. 38

Рис. 39

Решение.

Нет, так как даже у тетраэдра (простейшего выпуклого многогранника, см. рис. 38) не все сечения – треугольники. Например, для тетраэдра $DABC$ сечением является четырехугольник $MNPQ$.

Б. Все проекции многогранника $F -$ треугольники.

Установить: $F -$ выпуклый многогранник?

Решение.

Нет, так как даже для простейшего выпуклого многогранника – тетраэдра $DABC$ – не все проекции являются треугольниками (см. рис. 39).

Пусть $F = DABC -$ тетраэдр, $\alpha = (ABC)$, $D_1 = пр._\alpha D$, ABD_1C – не треугольник.

В. Все грани многогранника $F -$ квадраты, но $F -$ не куб.

Установить: $F -$ выпуклый многогранник?

Решение.

Нет, так как если $F -$ выпуклый многогранник и его грани – квадраты, причем равные квадраты, то $F -$ правильный многогранник, следовательно, куб, что противоречит условию.

Задача 24 (№ 24.9). В двух параллельных плоскостях лежат два треугольника. Существует ли выпуклый многогранник, вершинами которого являются вершины этих треугольников?

Дано: $\alpha \parallel \beta, A, B, C \in \alpha, A_1, B_1, C_1 \in \beta, C \notin (AB), C_1 \notin (A_1B_1)$ (см. рис. 40).

Решение. $F = ABCA_1B_1C_1 -$ выпуклый многогранник, если $AB \parallel A_1B_1$,

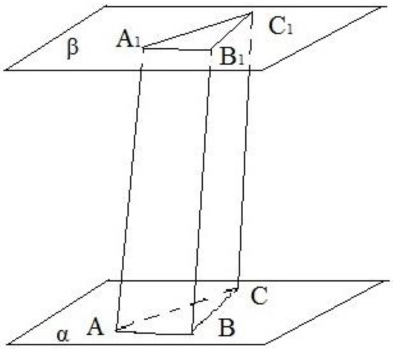


Рис. 40

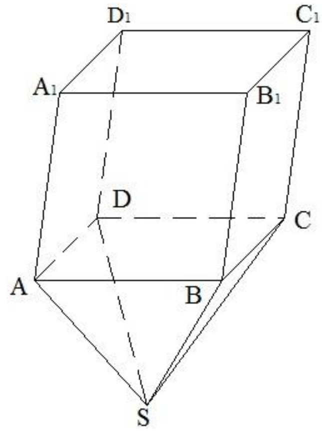


Рис. 41

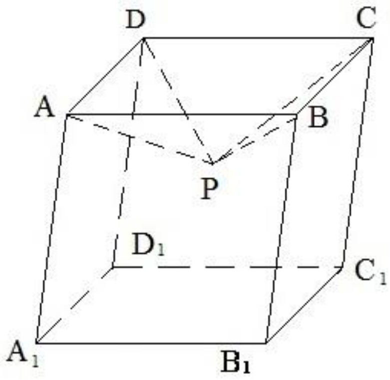


Рис. 42

$BC \parallel B_1C_1,\ AC \parallel A_1C_1,$ так как плоскости боковых граней пересекают параллельные плоскости α и β по параллельным отрезкам (прямым). Следовательно,

1) если $AB \nparallel A_1B_1$ (или $AC \nparallel A_1C_1$, или $BC \nparallel B_1C_1$), то выпуклый многогранник $ABCA_1B_1C_1$ — не существует;

2) если $AB \parallel A_1B_1$, но $AB \neq A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $AC \parallel A_1C_1$, то в этом случае F — усеченная треугольная пирамида, выпуклый многогранник;

3) если $AB \parallel A_1B_1, BC \parallel B_1C_1, AC \parallel A_1C_1$ и $AB = A_1B_1, BC = B_1C_1,\ AC = A_1C_1$, то F — треугольная призма, F — выпуклый многогранник.

I.5. Исследовательские задачи к параграфу «Теорема Эйлера»

Задача 25 (№ 25.3). Дан выпуклый многогранник. К одной из его граней пристраивается пирамида. Она имеет в пересечении с данным многогранником только эту грань, которая является ее основанием. В результате такого пристраивания получается новый многогранник. Как изменяется (в самом общем случае) число вершин, граней и ребер у построенного многогранника по сравнению с исходным? Выполняется ли для построенного многогранника формула из теоремы Эйлера? Какие возможны частные случаи при таком построении?

Дано: F — выпуклый многогранник, F_1 — пирамида, основанием которой служит одна грань F (см. рис. 41).

Найти: как изменится число вершин, граней, ребер у $\bar{F} = F \cup F_1$.

Решение.

Для $F -$ число вершин – e, число граней – f, число ребер – $k.$ Для $\bar{F} -$ число вершин – $(e+1)$, число граней –$(f-1)+s$ ($s -$ число вершин выбранной грани), число ребер – $k+s$. Для F: $e+f-k=2$.

Для $\bar{F}$: $(e+1)+(f-1)+s-(k+s)=e+f-k=2$.

Следовательно, теорема Эйлера для $\bar{F}$ верна.

Задача 26 (№ 25.4). Внутри выпуклого многогранника взяли точку и разбили этот многогранник на пирамиды, вершины которых находятся в данной точке, а основаниями являются грани данного многогранника. Как изменяется число вершин, граней и ребер многогранника, если из него удалить одну из таких пирамид? Выполняется ли для оставшегося многогранника формула из теоремы Эйлера? Не возникает ли у вас идея еще одного доказательства теоремы Эйлера?

Дано: $F -$ выпуклый многогранник, $P -$ внутри F (рис. 42).

F разбили на f пирамид с вершиной P, основания которых – грани F. Одну такую пирамиду $F_1 -$ удаляем, $\bar{F}=F \setminus F_1$. Как изменяются числа e, f и k для $\bar{F}$?

Решение.

Для $F -$ число вершин – e, число граней – f, число ребер – k, $e+f-\ k=2 -$ по теореме Эйлера.

Для $\bar{F} -$ число вершин – $(e+1)$, число граней – $(f-1)+s$ ($s -$ число вершин выбранной грани), число ребер – $k+s$. Тогда

$(e+1)+(f-1)+s-(k+s)=e+f-k=2.$

Следовательно, теорема Эйлера верна.

Идея еще одного доказательства теоремы Эйлера.

Используя процедуру, использованную в задаче 25.4, придем к -угольной пирамиде с вершиной P, в основании которой выпуклый n-угольник (единственная оставшаяся грань для F).

Тогда $e=n+1 -$ число вершин, $f=n+1 -$ число граней, $k=n+n=2n -$ число ребер. Поэтому $e+f-\ k=(n+1)+(n+1)-2n=2$, что и требовалось доказать.

Задача 27 (№ 25.5). Существует ли выпуклый многогранник, у которого в каждой грани больше пяти сторон?

Решение.

Допустим, что такой выпуклый многогранник F существует, то есть в каждой грани число сторон не меньше 6, поэтому сумма всех углов одной грани, равная $180 \cdot (n-2)$, при $n = 6$ будет составлять $720°$, поэтому хотя бы один угол не меньше $120°$. Тогда найдется такая вершина A для F, в которой сходятся 3 ребра, причем каждый из углов $\angle BAC, \angle CAD, \angle BAD$ не меньше $120°$, тогда их сумма будет не меньше $360°$, а это невозможно, так как сумма плоских углов многогранного угла строго меньше $360°$. Допущение опровергнуто, следовательно, указанный выпуклый многогранник F не существует.

Задача 28 (№ 25.6). В выпуклом 300-граннике все грани – пятиугольники, шестиугольники или семиугольники. В каждой вершине сходятся ровно три грани. Пятиугольных граней 100. Можете ли вы вычислить, сколько у него граней другого вида? Сможете ли вы решить задачу, если начнете подсчет с граней другого вида?

Дано: F – выпуклый 300-гранник, его грани 5-, 6- или 7-угольники. В каждой вершине сходятся ровно 3 грани, 5-угольных граней – 100.

1. Можно ли вычислить, сколько граней 6, 7-угольников?

2. Сможете ли вы решить задачу, если начнете подсчет с граней другого вида?

Решение.

1. 1) Пусть x – число 6-угольных граней, y – число 7-угольных граней, тогда $x + y + 100 = 300 \Leftrightarrow x + y = 200$ (1).

2) $6x + 7y + 5 \cdot 100$ – общее число плоских углов, а оно равно $2f + 2e - 4\ (= 2k)$ – результат Декарта [5; 6], где $f -$ число граней, $e -$ число вершин, а $k -$ число ребер многогранника F.

При $f = 300$ получаем $2 \cdot 300 + 2e - 4 = 2e + 596$.

Итак, получаем еще одно уравнение: $6x + 7y + 500 = 2e + 596$ или

$6x + 7y = 96 + 2e$ (2).

3) Из (1) и (2) составим систему:

$$\begin{cases} x+y=200 \\ 6x+7y=96+2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x-6y=-1200 \\ 6x+7y=96+2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=200 \\ y=2e-1104 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1304-2e \\ y=2e-1104 \end{cases} \quad (3).$$

4) Поскольку в каждой вершине сходятся 3 грани (3 ребра), то общее число плоских углов $6x+7y+500$ подсчитано трижды, то есть $\frac{6x+7y+500}{3}=e$ (4).

Равенство (4) с учетом (3) примет вид: $\frac{6(1304-2e)+7(2e-1104)+500}{3}=e$, отсюда $e=596$. Тогда $x=1304-2\cdot 596=112$ – число 6-угольных граней, $y=2\cdot 596-1104=88$ – число 7-угольных граней.

2.1. 1) Пусть в многоугольнике F 112 6-угольных граней, а z – число 5-угольных граней, w – число 7-угольных граней, тогда $z+w+112=300 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow z+w=118$ (5).

2) По аналогии с 1.2 имеем: $6\cdot 112+5z+7w$ – общее число плоских углов, и оно равно $2f+2e-4$, то есть $2e+596$.

Итак, имеем: $5z+7w+672=2e+596$ или $5z+7w=2e-76$ (6).

3) Из (5) и (6) составляем систему:

$$\begin{cases} z+w=118 \\ 5z+7w=2e-76 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5z-5w=-940 \\ 5z+7w=2e-76 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+w=188 \\ 2w=2e-1016 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=696-e \\ w=e-508 \end{cases} \quad (7).$$

4) По аналогии с 1.4 получим: $\frac{5z+7w+672}{3}=e$ (8). Равенство (8) с учетом (7) примет вид:

$\frac{672+5(696-e)+7(e-508)}{3}=e$, отсюда $e=596$.

Тогда $z=696-596=100-$ число 5-угольных граней,

$w=596-508=88$ – число 7-угольных граней.

2.2.1) Пусть в многоугольнике F 88 7-угольных граней, а u – число 5-угольных граней, v – число 6-угольных граней, тогда $u+v+88=300 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u+v=212$ (9).

2) По аналогии с 1.2 имеем:

$5u + 6v + 7 \cdot 88 = 2f + 2e - 4$ или $5u + 6v + 616 = 2e + 596$, или

$5u + 6v = 2e - 20$ (10).

3) Из (9) и (10) составим систему:

$$\begin{cases} u + v = 212 \\ 5u + 6v = 2e - 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5u - 5v = -1060 \\ 5u + 6v = 2e - 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 212 \\ v = 2e - 1080 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 1292 - 2e \\ v = 2e - 1080 \end{cases}$$

4) По аналогии с 1.4 получим:

$\frac{5u+6v+616}{3} = e$ (12).

Равенство (12) с учетом (11) примет вид: $\frac{5(1292-2e)+6(2e-1080)+616}{3} = e$,

отсюда $e = 596$.

Тогда $u = 1292 - 2 \cdot 596 = 100$ – число 5-угольных граней,

$v = 2 \cdot 596 - 1080 = 112$ – число 6-угольных граней.

Итак, ответ на вопрос **2** – да.

Задача 29 (№ 25.7). Для выпуклого многогранника попытайтесь оценить сверху и снизу такие отношения: $\boldsymbol{e : f, e : k, f : k}$. Считая число вершин известным, исходя из полученных границ, найдите наибольшее значение для числа ребер; для числа граней. Постройте соответствующие многогранники. Решите аналогичные задачи, считая известным число ребер; число граней.

Дано: F – выпуклый многогранник, e – число вершин, f – число граней, k – число ребер.

1) Оценить сверху и снизу отношения $\frac{e}{f}, \frac{e}{k}, \frac{f}{k}$.

2) Если e – известно, найти наибольшие значения для чисел k, f.

3) Построить соответствующие многогранники.

Решение.

1. По теореме Эйлера $e + f - k = 2$.

Из книги (Д.О. Шклярский и др. «Избранные задачи и теоремы элементарной математики», ч. III, 1954 г., № 50): *В любом простом многограннике F*:

а) $\frac{3}{2} \leq \frac{k}{f} < 3$; *б)* $\frac{3}{2} \leq \frac{k}{e} < 3$.

Доказательство.

А. Каждая из f граней многогранника F содержит не менее трех ребер, каждое из которых принадлежит двум граням, поэтому $2\,k \geq 3f \;\Rightarrow\; k \geq \frac{3}{2}f$ (1), $f \leq \frac{2}{3}\,k$. Аналогично, каждое ребро соединяет 2 вершины, а каждая вершина принадлежит не менее чем трем ребрам, поэтому $2\,k \geq 3e \Rightarrow \; k \geq \frac{3}{2}e$ (2), $e \leq \frac{2}{3}\,k$. Из формулы Эйлера $e + f - \,k = 2$ (3), в равенстве (3) заменим e на $\frac{2}{3}\,k$, получим $\frac{2}{3}\,k + f - \,k \geq e + f - \,k = 2$ или $f - \frac{k}{3} \geq 2 \Rightarrow 3f - k \geq 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow k - 3f \leq -6 \Rightarrow \; k \leq 3f - 6 \;\; |: f, \;\; (f > 0), \frac{k}{f} \leq 3 - \frac{6}{f} \Rightarrow \frac{k}{f} < 3.$

Из неравенства $2\,k \geq 3f$ имеем: $\frac{k}{f} \geq \frac{3}{2}$. Итак, $\frac{3}{2} \leq \frac{k}{f} < 3$.

Б. Из неравенства $k \geq \frac{3}{2}f \Rightarrow \; f \leq \frac{2}{3}\,k$ и формулы Эйлера $e + f - \,k = 2$ получаем: $e + \frac{2}{3}\,k - \,k \geq e + f - \,k = 2$, отсюда $e - \frac{k}{3} \geq 2 \Rightarrow 3e - \,k \geq 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \; k - 3e \leq -6 \Rightarrow \; k \leq 3e - 6 \;\; |: e, \;\; \frac{k}{e} \leq 3 - \frac{6}{e} < 3.$

Из неравенства $k \geq \frac{3}{2}e \Rightarrow \frac{k}{e} \geq \frac{3}{2}$. Итак, $\frac{3}{2} \leq \frac{k}{e} < 3$.

Из неравенства $\frac{3}{2} \leq \frac{k}{f} < 3$ получаем $\frac{1}{3} < \frac{1}{\frac{k}{f}} \leq \frac{2}{3}$ или $\frac{1}{3} < \frac{f}{k} \leq \frac{2}{3}$ (*).

Из неравенства $\frac{3}{2} \leq \frac{k}{e} < 3$ получаем: $\frac{1}{3} < \frac{1}{\frac{k}{e}} \leq \frac{2}{3}$ или $\frac{1}{3} < \frac{e}{k} \leq \frac{2}{3}$ (**).

Но $\frac{3}{2} \leq \frac{k}{f} < 3$ (***). Из (**) и (***) имеем: $\frac{1}{2} < \frac{e}{f} < 2$.

2. Пусть $e -$ известно, тогда из неравенства $\frac{3}{2} \leq \frac{k}{e} < 3$ получаем:

$\frac{3}{2}e \leq k < 3e$ (I), а из неравенства $\frac{1}{2} < \frac{e}{f} < 2$ получим: $\frac{1}{2} < \frac{f}{e} < 2$, отсюда $\frac{e}{2} < f < 2e$.

По задаче № 8.19 (из книги В.В. Прасолова, И.Ф, Шарыгина «Задачи по стереометрии», 1989 г., стр. 157) для любого выпуклого многоугольника F : $3f \geq k + 6$, $3e \geq 6 + k$, т.е. $k \leq 3(e - 2)$ (II).

Из неравенств (I) и (II) $\frac{3}{2}e \leq k \leq 3e - 6$, отсюда получаем, что

$k_{наиб.} = 3(e-2)$. По формуле Эйлера $e + f_{наиб.} - k_{наиб.} = 2$, или

$e + f_{наиб.} - 3(e-2) = 2$, или $f_{наиб.} = 2e - 4$.

3. Примеры.

1) $e = 4, k_{наиб.} = 6, f_{наиб.} = 6$, $F -$ тетраэдр, $F = DABC$ (рис. 43).

2) $e = 6, k_{наиб.} = 12, f_{наиб.} = 8$, $F -$ октаэдр (рис. 44).

3) $e = 12, k_{наиб.} = 30, f_{наиб.} = 20$, $F -$ икосаэдр.

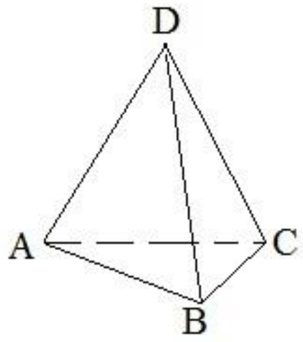


Рис. 43

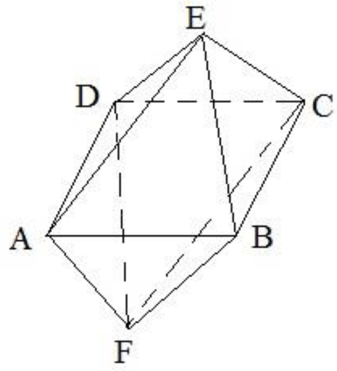


Рис. 44

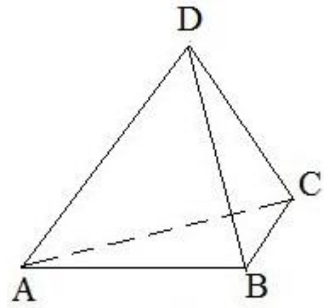


Рис. 45

I.6. Исследовательские задачи к параграфу «Правильные и полуправильные многогранники»

Задача 30 (№ 26.10). Есть ли в правильном тетраэдре такая точка, из которой все ребра одной грани видны под прямым углом.

Дано: $F = DABC -$ правильный тетраэдр (рис. 45).

Установить: есть ли точка M (внутри F), что $\angle AMB = \angle AMC = \angle BMC = 90°$?

Решение.

Известна теорема: *сумма плоских углов граней выпуклого многогранника, сходящихся в одной вершине, меньше* $360°$.

Но $3 \cdot 90° = 270° < 360°$, следовательно, такая правильная треугольная пирамида $MABC$ с основанием ΔABC, что $\angle AMB = \angle AMC = \angle BMC = 90°$, и $M -$ внутри $DABC$, существует.

Задача 31 (№ 26.11). Является ли правильным тетраэдром правильная треугольная пирамида, в которой: а) равны периметры всех граней; б) равны площади всех граней; в) равны все высоты; г) все высоты пересекаются в одной точке; д) совпадают центры вписанной и описанной сфер; е) существует сечение, являющееся квадратом; ж) развертка образует треугольник; з) угол между каждым ребром и гранью один и тот же; и) и все двугранные углы равны?

Дано: $F = SABC -$ пирамида, $AB = BC = CA = a$, $SA = SB = SC = b$ (рис. 46).

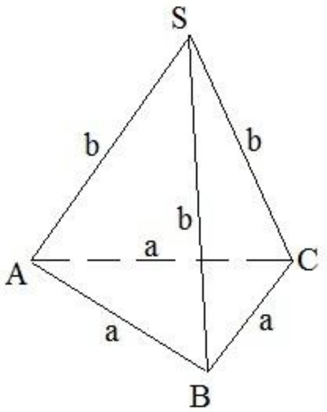


Рис. 46

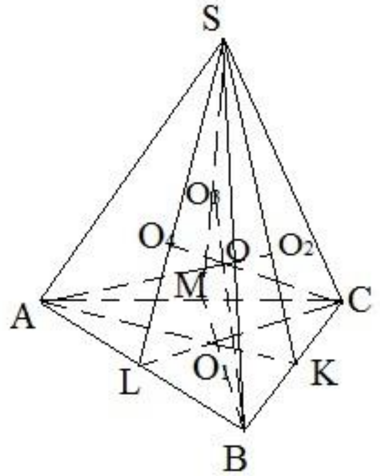


Рис. 47

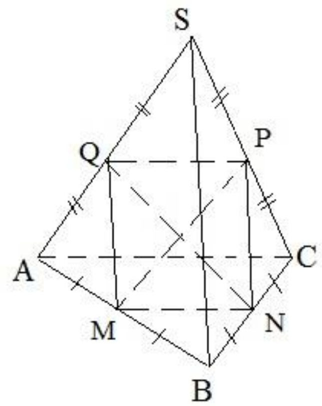


Рис. 48

Решение.

А. $P_{ABC} = P_{SAB} = P_{SAC} = P_{SBC}$. $P_{ABC} = 3a$, $P_{SAB} = a + 2b$, но $P_{ABC} = P_{SAB}$, то есть $3a = a + 2b \Rightarrow 2a = 2b \Rightarrow a = b$, следовательно, $F -$ правильный тетраэдр.

Б. $S_{ABC} = S_{ASB} = S_{BSC} = S_{ASC}$. $S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60° = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$,

$S_{ASB} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-b)}$, где $p = \frac{a+2b}{2}$, $p - a = \frac{a+2b}{2} - a = \frac{2b-a}{2}$, $p - b = \frac{a+2b}{2} - b = \frac{a}{2}$; тогда $S_{ASB} = \sqrt{\frac{a+2b}{2} \cdot \frac{2b-a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{(2b)^2 - a^2}$. Так как $S_{ABC} = S_{ASB}$, то $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{(2b)^2 - a^2}$ или $a\sqrt{3} = \sqrt{4b^2 - a^2}$, отсюда $3a^2 = 4b^2 - a^2 \Rightarrow$ $a^2 = b^2$ $\Rightarrow a = b$, следовательно, $F -$ правильный тетраэдр.

В. $h_1 = h_2 = h_3 = h_4$ (h_1, h_2, h_3, h_4 – высоты пирамиды).

Тогда имеем: $V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot h_1 = \frac{1}{3}S_{BSC} \cdot h_2 = \frac{1}{3}S_{ASC} \cdot h_3 = \frac{1}{3}S_{ASB} \cdot h_4$,

но из равенства высот следует равенство площадей всех граней, а тогда по случаю **Б** F – правильный тетраэдр.

Г. Все высоты пересекаются в одной точке, т.е. $SO_1 \cap AO_2 \cap BO_3 \cap CO_4 = O$ (см. рис. 47), где $SO_1 \perp ABC, AO_2 \perp SBC, BO_3 \perp SAC, CO_4 \perp SAB$.

Следовательно, тетраэдр $SABC$ – ортоцентрический, а он обладает следующими свойствами:

Г₁) противоположные ребра попарно перпендикулярны, т.е. $AS \perp BC$, $AB \perp SC$, $AC \perp BS$.

Г₂) суммы квадратов противоположных ребер равны, то есть $AS^2 + BC^2 = AB^2 + SC^2 = AC^2 + BS^2$.

Известна теорема (из книги Т.Г. Ходот и др. «Задачи по геометрии», 1997 г., № 359): *если в ортоцентрическом тетраэдре F одна грань – правильный треугольник, то* F *– правильная пирамида (но не обязательно правильный тетраэдр).* По этой теореме F не обязательно правильный тетраэдр.

Д. $Q_1 \equiv Q_2$, где Q_1 – центр описанной сферы, а Q_2 – центр вписанной сферы. Тогда по задаче № 6.25 (б) (из книги В.В. Просолова, И.Ф. Шарыгина, «Задачи по стереометрии», стр. 103) все грани тетраэдра $SABC$ равны, т.е. $\Delta ABC = \Delta ASB = \Delta BSC = \Delta CSA$, отсюда тетраэдр $F = SABC$ – правильный.

Е. Существует сечение, являющееся квадратом (см. рис. 48).

Пусть $MNPQ$ – квадрат, тогда $MN = PQ, MN \parallel PQ$, $PN = MQ, PN \parallel MQ$, $MN = MQ, MP = QN$. Но $MN = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a$, $PQ = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a$,

$MQ = PN = \frac{1}{2}SB = \frac{1}{2}b$, так как $MN = MQ$, то $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b \Rightarrow a = b \Rightarrow$

$F = SABC$ – правильный тетраэдр.

Ж. Развертка образует треугольник (см. рис. 49).

В этом случае AB, BC, CA – средние линии, В этом случае AB, BC, CA – средние линии, $AB = BC = CA = a, AB = \frac{1}{2} \cdot 2SC = SC = b$. Итак, $a = b$, поэтому $F -$ правильный тетраэдр.

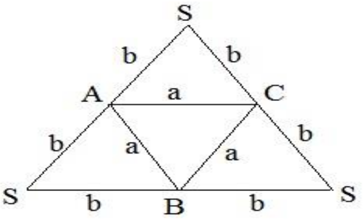


Рис. 49

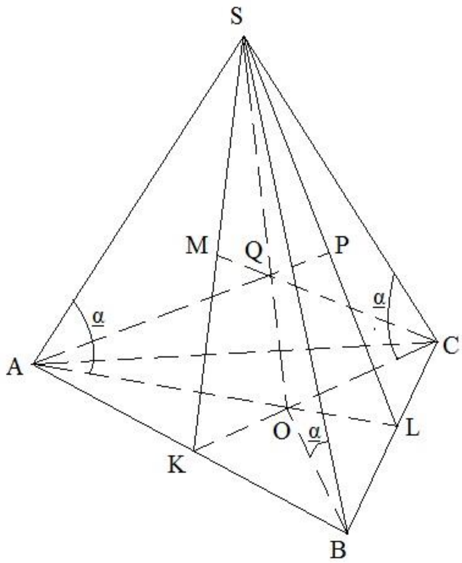


Рис. 50

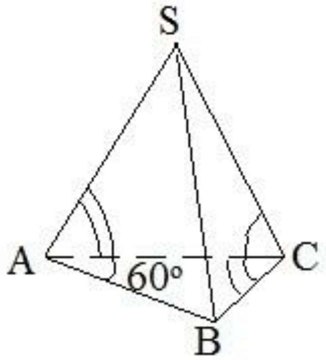


Рис. 51

З. Угол между каждым ребром и гранью один и тот же (см. рис. 50).

По условию, $\angle SCO = \angle SBO = \angle SAO = \alpha$, где $SO \perp (ABC)$; $\angle ASP = \alpha$ $(AP \perp BSC)$, $\angle CSM = \alpha$ $(CM \perp ASB)$, $\angle BSN = \alpha$ $(BN \perp ASC)$. Тогда $\Delta AOS =$ $= \Delta BOS = \Delta COS$ (по гипотенузе и острому углу α). $\Delta SPA = \Delta SMC = \Delta SNB$ (по гипотенузе и острому углу α), при этом $\Delta AOS = \Delta SPA$ ($\angle AOS = \angle SPA = 90°$, $AS = SA, \angle SAO = \angle ASP = \alpha$). Отсюда, $OS = PA, AO = SP$.

Аналогично доказывается, что $SM = BN = PA = OS$. Следовательно, все высоты равны, а тогда по п. **В** $F = SABC -$ правильный тетраэдр.

И. Все двугранные углы равны (см. рис. 51).

По условию, двугранные углы при всех ребрах равны, в том числе при парах противоположных ребер: AB и SC, BC и AS, AC и BS. Тогда $AB = SC$ $(BC =$ $= AS, AC = BC)$. Докажем, что $AB = SC$. Трехгранные углы при вершинах A и C имеют равные двугранные углы, поэтому эти трехгранные углы равны (см. задачу № 5.3 книги В.В. Прасолова, И.Ф. Шарыгина, «Задачи по стереометрии», 1989 г., стр. 52).

Следовательно, равны их плоские углы, поэтому

$\Delta ABC = \Delta CSA$ ($AC = CA, \angle BAC = \angle SCA = 60°, \angle BCA = \angle SAC = 60°$).

Из равенства треугольников получаем, что $AB = CS$, т.е. $a = b$, следовательно, $F = SABC -$ правильный тетраэдр.

Задача 32 (№ 26.12). Является ли кубом прямоугольный параллелепипед, у которого: а) равны диагонали граней, выходящие из одной вершины; б) диагональ составляет одинаковые углы с гранями; в) одна из теней при освещении параллельным пучком света на плоскости, перпендикулярной этому пучку, является правильным шестиугольником?

Дано: $F = ABCDA_1B_1C_1D_1 -$ прямоугольный параллелепипед.

А. $AC = AB_1 = AD_1$ (см. рис. 52).

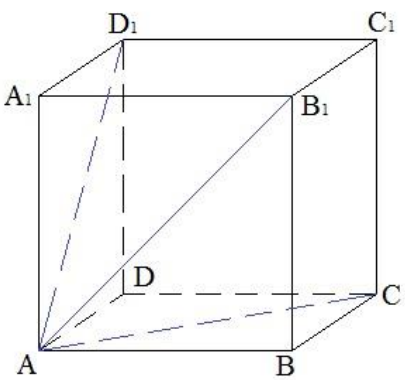


Рис. 52

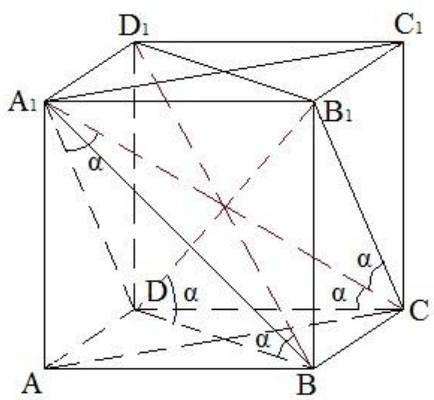


Рис. 53

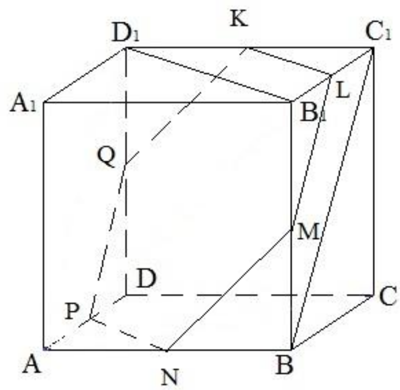


Рис. 54

Решение.

1) $\Delta ABB_1 = \Delta ABC$ ($\angle ABB_1 = \angle ABC = 90°, AB -$ общая, $AB_1 = AC$), отсюда $BB_1 = BC$ (1).

2) $\Delta AA_1D_1 = \Delta B_1BA$ ($\angle AA_1D_1 = \angle B_1BA = 90°$, $AA_1 = B_1B,\ AD_1 = AB_1$), отсюда $A_1D_1 = \ BA$ (2).

Но $A_1D_1 = BC$ (3); из (2) и (3) вытекает, что $BA = BC$, а с учетом (1) получаем, что $BA = BC = BB_1$, то есть все измерения прямоугольного параллелепипеда равны, значит, $F -$ куб.

Б. Дано: $\angle A_1CA = \angle B_1DB = \angle D_1BD = \angle C_1AC = \alpha$; $\angle CA_1C_1 = \angle DB_1D_1 =$

$= \angle CA_1C_1 = \angle AC_1A_1 = \alpha$; $\angle CA_1D = \alpha$ (см. рис. 53).

Решение.

1) $\Delta A_1DC = \Delta BDD_1$ ($\angle A_1DC = \angle BDD_1 = 90°$, $CA_1 = D_1B -$ как диагонали прямоугольного параллелепипеда, $\angle CA_1D = \angle D_1BD = \alpha$), отсюда $DC = DD_1$ (1). Следовательно, и все боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 равны DC. Поэтому грани ABB_1A_1 и DCC_1D_1 — квадраты.

2) Осталось доказать, что $BC = DC$.

$\Delta A_1BC = \Delta A_1DC$ ($\angle A_1BC = \angle A_1DC = 90°$, $A_1C = A_1C$, $\angle CA_1B = \angle CA_1D = \alpha$), отсюда $BC = DC$. Итак, имеем: $BC = DC = DD_1$, то есть все измерения параллелепипеда равны, следовательно, $F -$ куб.

В. 1) Пусть $KLMNPQ -$ правильный шестиугольник – сечение F плоскостью, перпендикулярной диагонали $A_1C, KL = a$ ($= PN = LM = MN = PQ = QK$, точки $K, L, M, N, P, Q -$ середины ребер F (см. рис. 54). Тогда $KL -$ средняя линия $\Delta D_1C_1B_1$, $LM -$ средняя линия ΔC_1B_1B, поэтому $D_1B_1 = C_1B = 2a$.

Аналогично доказывается, что $AB_1 = AD_1 = DC_1 = = BD = 2a$.

2) $\Delta BCD = \Delta BCC_1$ ($\angle BCD = \angle BCC_1 = 90°$, $BC = BC, BD = BC_1$), отсюда $CD = CC_1$, следовательно, грань $DCC_1D_1 -$ квадрат, тогда и $ABB_1A_1 -$ квадрат.

3) $\Delta ABB_1 = \Delta BCC_1$ ($\angle ABB_1 = \angle BCC_1 = 90°, AB_1 = BC_1 = 2a, BB_1 = CC_1$), отсюда $AB = BC$, следовательно, в основании $F -$ квадрат.

Из того, что $AB = BC = BB_1$ ($AB = CD, CD = CC_1 = BB_1$) следует, что $F -$ куб.

Задача 33 (№ 26.17). Центр правильного многогранника спроектировали на все его грани (ребра). Являются ли полученные точки вершинами правильного многогранника?

А. Дано: $F -$ куб, $O -$ его центр.

1) Проекции точки O на 6 граней куба будут центрами граней куба, а они являются вершинами правильного октаэдра (см. рис. 55).

2) Проекции точки O на ребра куба будут серединами 12 ребер куба. Но правильный многогранник с 12-ю вершинами – это правильный икосаэдр, все его грани – равные правильные треугольники. В данном случае, точки $P,\ Q,\ R.$

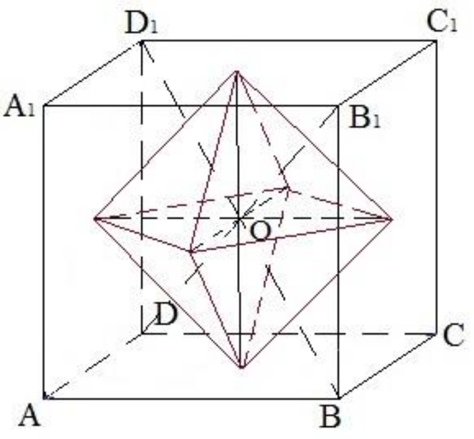


Рис. 55

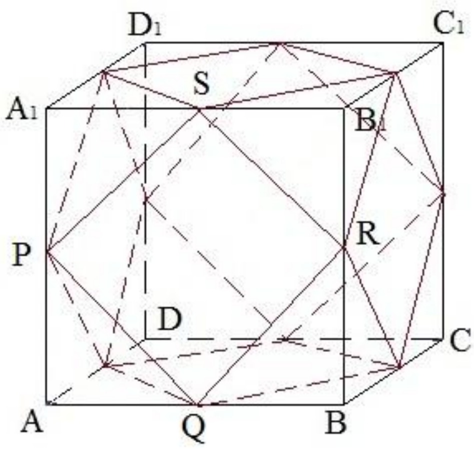


Рис. 56

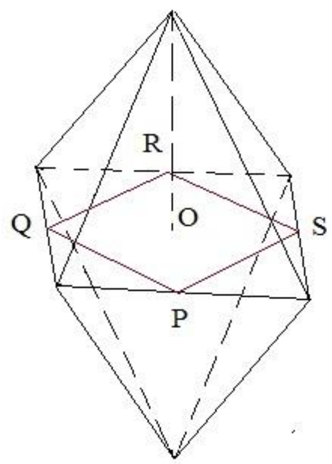


Рис. 57

S – вершины квадрата. Следовательно, полученные 12 точек не являются вершинами правильного многогранника.

Б. Дано: $F -$ правильный октаэдр, $O -$ его центр (см. рис. 57).

1) Проекции точки O на 8 граней правильного октаэдра будут центрами его граней, а они являются вершинами куба.

2) Проекции точки O на ребра правильного октаэдра будут серединами его 12 ребер. Но правильный многогранник с 12-ю вершинами – это правильный икосаэдр, у которого все грани – равные правильные треугольники.

В данном же случае, точки P, Q, R, S образуют квадрат (рис. 57). Следовательно, полученные 12 точек не являются вершинами правильного многогранника.

В. Дано:$F -$ правильный икосаэдр, $O -$ его центр.

1) Проекции точки O на 20 граней правильного икосаэдра – это центры этих граней, а они служат вершинами правильного додекаэдра.

2) Проекции точки O на 30 ребер правильного икосаэдра – это середины этих ребер, но правильных многогранников с 30-ю вершинами нет.

Г. Дано: $F -$ правильный додекаэдр, $O -$ его центр.

1) Проекции точки O на 12 граней правильного додекаэдра – это центры этих граней, а они служат вершинами правильного икосаэдра.

2) Проекции точки O на 30 ребер правильного додекаэдра – это середины этих ребер, но правильных многогранников с 30-ю вершинами нет.

Д. Дано: $F -$ правильный тетраэдр, $O -$ его центр (точка пересечения высот, но O не является центром симметрии для F).

1) Проекции точки O на 4 грани правильного тетраэдра будут центрами его граней, а они служат вершинами правильного тетраэдра (см. рис. 58).

2) Проекции точки O на 6 ребер правильного тетраэдра – это середины этих ребер. Но правильный многогранник с 6-ю вершинами – это правильный октаэдр (см. рис. 59). В данном случае, получается именно он (все ребра равны, образуют 8 равных правильных треугольников, $PQRS -$ квадрат).

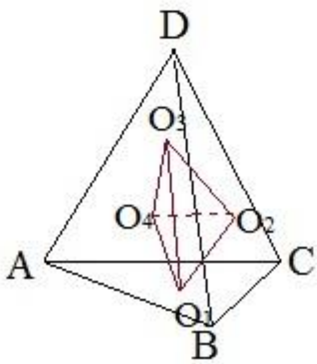


Рис. 58

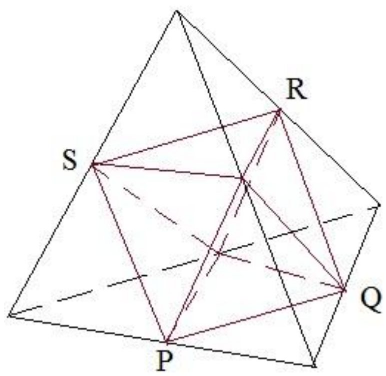


Рис. 59

Общий вывод.

1) Если центр правильного многогранника проецируется на его грани, то полученные точки являются вершинами правильного многогранника, двойственного данному.

2) Если центр правильного тетраэдра проецируется на его ребра, то полученные точки являются вершинами правильного октаэдра. Для остальных правильных многогранников проекции центра на его ребра не являются вершинами правильного многогранника.

Задача 34 (№ 26.18). Из данной точки P проводятся лучи $PA_1, PA_2, \ldots, PA_n$. При этом: а) все углы между проведенными лучами равны; б) все углы между проведенными лучами тупые. Сколько таких лучей можно провести?

А. Отложим на лучах $PA_1, PA_2, \dots, PA_n$ равные отрезки $PB_1 = PB_2 = \dots = PB_n$, тогда получим пирамиду $PB_1B_2 \dots B_n$. В ней все боковые грани равны, так как $PB_1 = PB_2 = \dots = PB_n$, и углы между $PB_1, PB_2, \dots, PB_n$ равны α. Но тогда $B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = B_nB_1$, т.е. основание – правильный n-угольник. Но тогда углы между $PB_1, PB_2, \dots, PB_n$ равны α лишь при $n = 3$. Следовательно, провести таких лучей можно три, при этом $\alpha < 120°$.

б) Если все углы между проведенными лучами тупые, то даже для 4-х лучей PA_1, PA_2, PA_3, PA_4 имеем, что $\alpha + \beta + \gamma + \delta > 360°$. Следовательно, в случае б) можно провести лишь три луча.

Задача 35 (№ 26.21). Оцените сверху и снизу сумму двугранных углов выпуклого четырехгранного угла.

Разрежем данный 4-гранный угол $PA_1A_2A_3A_4$ с вершиной P на 2 трехгранных угла плоскостью PA_1A_3, получим 2 трехгранных угла $PA_1A_2A_3, PA_1A_3A_4$. Тогда сумма двугранных углов 4-гранного угла равна сумме двугранных углов этих трехгранных углов. *А сумма двугранных углов любого 3-гранного угла больше* π. Докажем это для 3-гранного угла $PA_1A_2A_3$ (см. рис. 60). Отложим на ребрах PA_1, PA_2, PA_3 3-гранного угла равные отрезки $PA = PB = PC = a$. Пусть O – это проекция точки P на плоскость ABC, тогда $AO = BO = CO$. Равнобедренные треугольники APB и AOB имеют общее основание AB и $AP > AO$. Следо-

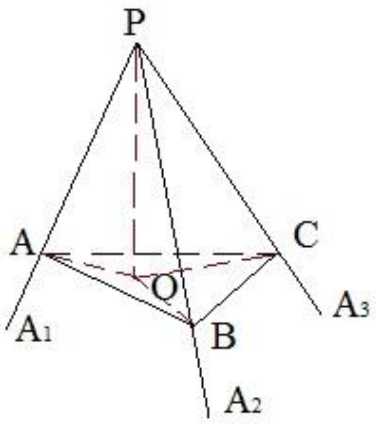


Рис. 60

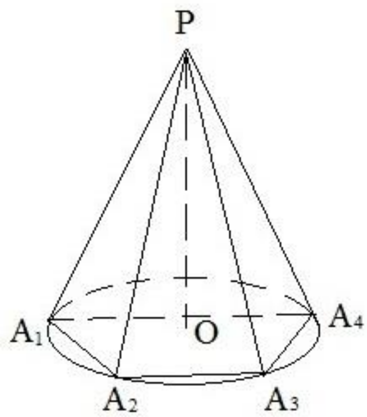


Рис. 61

вательно, $\angle APB < \angle AOB$ (1). Аналогично, $\angle BPC < \angle BOC$ (2), $\angle CPA < \angle COA$ (3). Складывая (1), (2), (3), получим:

$\angle APB + \angle BPC + \angle CPA < \angle AOB + \angle BOC + \angle COA \leq 2\pi$ (строгое неравенство получится, если точка O вне ΔABC). Итак, доказана лемма 1.

Лемма 1. *Сумма плоских углов любого 3-гранного угла меньше* 2π.

Справедлива **теорема А**: *если 3-гранный угол с плоскими углами* α, β, γ *и противолежащими им двугранными углами* $A, B, C,$ *то существует 3-гранный угол с плоскими углами* $\pi - A, \pi - B, \pi - C$ *и двугранными углами* $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$. (В.В. Просолов, И.Ф. Шарыгин, «Задачи по стереометрии», 1989 г., № 5.1, стр. 82).

Применим эту теорему к данному 3-гранному углу с данными двугранными уг лами $\alpha, \beta, \gamma,$ тогда по теореме существует 3-гранный угол с плоскими углам $\pi - \alpha$, $\pi - \beta, \pi - \gamma$. Но по лемме 1: $(\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) < 2\pi$, отсюда $\alpha + \beta + \gamma > \pi$.

Итак, для каждого 3-гранного угла $PA_1A_2A_3, PA_1A_3A_4$ сумма двугранных углов больше π, поэтому сумма двугранных углов выпуклого 4-гранного угла больше 2π. *Таким образом, оценку снизу нашли: искомая сумма больше* 2π.

Найдем оценку сверху.

Лемма 2. *Сумма всех двугранных углов 3-гранного угла меньше 540°* (см. книгу Т.Г. Ходот и др. «Задачи по геометрии», № IX.115, стр. 187).

Лемма 3. *Сумма всех двугранных углов выпуклого 4-гранного угла меньше 720°.*

Доказательство. Так как данный 4-гранный угол выпуклый, то каждый из 4-х двугранных углов меньше $180°$, поэтому сумма всех четырех двугранных углов меньше, чем $4 \cdot 180° = 720°$. Итак, оценка сверху – 720°.

Задача 36 (№ 26.22). Дан выпуклый четырехгранный угол. При каком условии: а) около него можно описать коническую поверхность; б) в него можно вписать коническую поверхность; в) в него можно вписать сферу? Ответьте на эти же вопросы для трехгранного угла; для многогранного угла.

Решение.

А. Перефразируем задачу: при каком условии в конус можно вписать выпуклый 4-гранный угол?

Пусть $PA_1A_2A_3A_4$ – выпуклый вписанный 4-гранный угол (см. рис. 61). Тогда $A_1A_2A_3A_4$ – вписанный выпуклый четырехугольник (в основании конуса). Рассмотрим 3-гранный угол, образованный лучами PA_1, PA_2, PO (рис. 62). В нем двугранные углы при ребрах PA_1 и PA_2 равны. $PO \perp (OA_1A_2)$, $OA_1 = OA_2 = r$ – радиус основания конуса, поэтому $PA_1 = PA_2$, отсюда
$\Delta POA_1 = \Delta POA_2$.

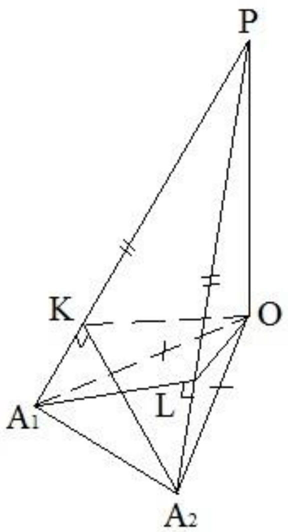


Рис. 62

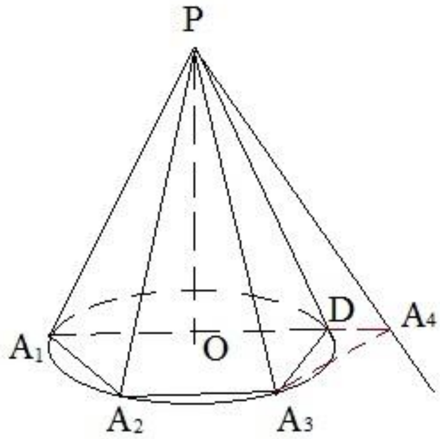


Рис. 63

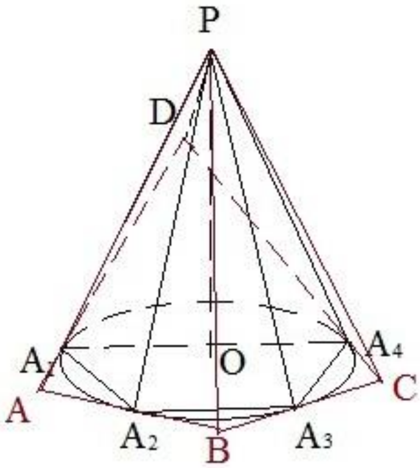


Рис. 64

1) Проведем плоскость α: $A_2O \subset \alpha$, $\alpha \perp PA_1$, пусть $\alpha \cap PA_1 = K$, так как

$$\left.\begin{matrix} PA_1 \perp \alpha \\ OK \subset \alpha \\ A_2K \subset \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} PA_1 \perp KO \\ PA_1 \perp KA_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle OKA_2 \text{ – двугранный угол при ребре } PA_1.$$

2) Проведем плоскость β: $A_1O \subset \beta$, $\beta \perp PA_2$, пусть $\alpha \cap PA_2 = L$, так как

$$\left.\begin{matrix} PA_2 \perp \beta \\ OL \subset \beta \\ A_1L \subset \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} PA_2 \perp LO \\ PA_2 \perp LA_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle OLA_1 \text{ – двугранный угол при ребре } PA_2.$$

3) ΔA_1PA_2 – равнобедренный, поэтому высоты A_2K и A_1L из вершин основания (A_1A_2) равны.

4) В равных треугольниках POA_1 и POA_2 высоты из точки O (OK и OL) также

равны, то есть $OK = OL$.
5) $\Delta OKA_2 = \Delta OLA_1$ ($OA_2 = OA_1, KA_2 = LA_1, OK = OL$), отсюда
$\angle OKA_2 = \angle OLA_1$, что и требовалось доказать.
Аналогично, рассматривая 3-гранный угол PA_3A_4O, получаем, что двугранные углы при ребрах PA_3 и PA_4 равны.
Следовательно, суммы противоположных двугранных углов при ребрах PA_1 и PA_3, PA_2 и PA_4 4-гранного угла $PA_1A_2A_3A_4$ будут равны.
Докажем теперь, что если в выпуклом 4-гранном угле $PA_1A_2A_3A_4$ *суммы противоположных углов равны, то около него можно описать конус.*
Рассмотрим конус с образующими PA_1, PA_2, PA_3 ($PA_1 = PA_2 = PA_3$). Допустим, что луч PA_4 не является образующей конуса (см. рис. 63). Пусть PD – прямая пересечения конуса и плоскости $\alpha = (A_1PA_4)$. Тогда в 4х-гранных углах $PA_1A_2A_3D$ и $PA_1A_2A_3A_4$ суммы противоположных двугранных углов равны. Из этого следует, что для трехгранного угла PA_3A_4D двугранные углы удовлетворяют соотношению $\angle A_4 + \angle D - 180° = \angle A_3$ или
$\angle A_4 + \angle D = \angle A_3 + 180°$.
Это равенство противоречит теореме: *для любого трехгранного угла любой двугранный угол, увеличенный на 180°, больше суммы двух других двугранных углов* (см. Т.Г. Ходот «Задачи по геометрии», № IX.121).
Итак, допущение – луч PA_4 не является образующей конуса – опровергнуто. Следовательно, луч PA_4 – образующая конуса, то есть около 4-гранного угла $PA_1A_2A_3A_4$ при указанном условии можно описать конус.
Б. Перефразируем задачу: при каком условии около конуса можно описать
4-гранный выпуклый угол?
Пусть $PABCD$ – описанный 4-гранный угол, PA_1, PA_2, PA_3, PA_4 – образующие, по которым грани 4-гранного угла касаются конуса (см. рис. 64). Ясно, что четырехугольник $ABCD$ будет описанным около основания конуса, если
$AB + CD = BC + AD$ (1).
В. Пусть $PA_1A_2A_3A_4$ – выпуклый 4-гранный угол, и в него вписана сфера

$\omega(O;r)$ (см. рис. 65). Пусть сфера ω касается граней 4-гранного угла в точках $K,\ L,\ M,\ N$, соответственно $(K \in PA_1A_2,\ L \in PA_2A_3, M \in PA_3A_4, N \in PA_4A_1)$, ребра угла пересекают плоскость $(KLMN)$ в точках A, B, C, D соответственно.

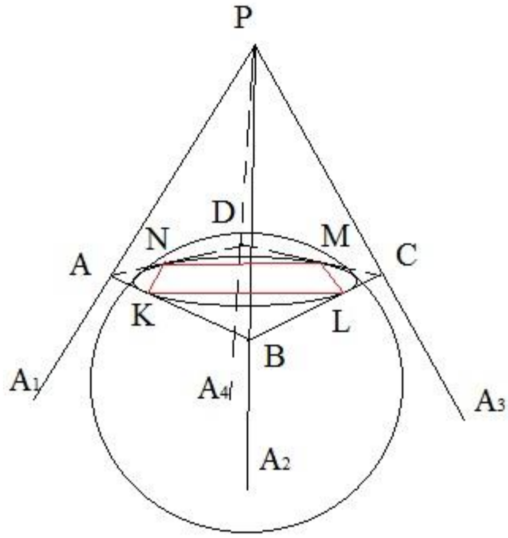


Рис. 65

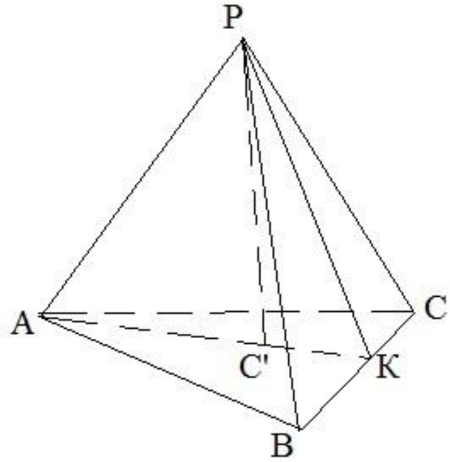


Рис. 66

Тогда $\angle APK = \angle APN, \angle BPK = \angle BPL,\ \angle CPL = \angle CPM, \angle DPM = \angle DPN$. Но $\angle APD = \angle APN + \angle DP, \angle BPC = \angle BPL + \angle CPL$, поэтому $\angle APD + \angle BPC =$
$= (\angle APN + \angle DPN) + (\angle BPL + \angle CPL) = (\angle APK + \angle DPM) + (\angle BPK + \angle CPM) =$
$= (\angle APK + \angle BPK) + (\angle DPM + \angle CPM) = \angle APB + \angle DPC$, то есть
$\angle APD + \angle BPC = \angle APB + \angle DPC.$

Итак, доказали, что если в 4-гранный выпуклый угол можно вписать сферу, то суммы его противоположных плоских углов равны.

Можно доказать и обратное: если в выпуклом 4-гранном угле суммы противоположных плоских углов равны, то в него можно вписать сферу (В.В. Прасолов, И.Ф. Шарыгин «Задачи по стереометрии», 1989 г., № 5.35).

Задача 37 (№ 26.23). Два трехгранных угла имеют общую вершину. Как бы вы определили, что значит: один из них лежит внутри другого? Пусть теперь один из них лежит внутри другого. Сравните плоские и двугранные углы этих углов. Обобщаются ли полученные результаты на четырехгранные углы? На многогранные углы?

Пусть $PABC -$ данный трехгранный угол, а луч PC' лежит внутри трехгранного угла (см. рис. 66). Будем говорить, что 3-гранный угол $PABC'$ лежит внутри 3-гранного угла $PABC$.

<u>Докажем, что:</u>

1) сумма плоских углов 3-гранного угла $PABC$ больше суммы плоских углов 3-гранного угла $PABC'$;

2) сумма двугранных углов 3-гранного угла $PABC$ меньше суммы двугранных углов 3-гранного угла $PA'B'C'$.

<u>Доказательство.</u>

1) Пусть K точка пересечения грани PCB с прямой AC'. Тогда:

$\angle C'PK + \angle KPB > \angle C'PB$ (1) (для любого трехгранного угла сумма двух плоских углов больше третьего плоского угла) и $\angle CPA + \angle CPK > \angle APK$, но $\angle APK = \angle APC' + \angle C'PK$, поэтому $\angle CPA + \angle CPK > \angle APC' + \angle C'PK$ (2). Сложим неравенства (1) и (2), получим:

$\angle C'PK + \angle KPB + \angle CPA + \angle CPK > \angle C'PB + \angle APC' + \angle C'PK$, или

$\angle KPB + \angle CPA + \angle CPK > \angle C'PB + \angle APC'$ (3). Но $\angle KPB + \angle CPK = \angle BPC$, поэтому $\angle CPA + \angle BPC > \angle C'PB + \angle APC'$ (4). Добавим к обеим частям неравенства (4) $\angle APB$, получим $\angle APB + \angle CPA + \angle BPC > \angle APB + \angle C'PB + \angle APC'$, что и требовалось доказать.

2) Известна **теорема А**: *для трехгранного угла с плоскими углами α, β, γ и противолежащими им двугранными углами A, B, C существует трехгранный угол с плоскими углами $\pi - A, \pi - B, \pi - C$ и двугранными углами $\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma$.* (В.В. Прасолов, И.Ф. Шарыгин «Задачи по стереометрии», 1989 г., № 5.1, стр. 82).

Пусть $PA'B'C' -$ трехгранный угол, лежащий внутри трехгранного угла $PABC$, $A', B', C' -$ двугранные углы 1-го, а $A, B, C -$ двугранные углы 2-го.

Докажем, что $A' + B' + C' > A + B + C$. Допустим противное, что

$A' + B' + C' < A + B + C$ (ясно, что $A' + B' + C' \neq A + B + C$). Тогда по теореме А: существуют трехгранные углы с плоскими углами $\pi - A', \pi - B', \pi - C'$ и

$\pi - A, \pi - B, \pi - C$ соответственно, причем первый содержится во втором. Тогда по п. 1) этой задачи получаем, что $(\pi - A') + (\pi - B') + (\pi - C') <$ $< (\pi - A) + (\pi - B) + (\pi - C)$, отсюда $A + B + C < A' + B' + C'$, что противоречит допущению. Допущение: $A' + B' + C' < A + B + C$ опровергнуто, следовательно, остается, что $A' + B' + C' > A + B + C$.

I.7. Исследовательские задаче к главе «Многогранники»

Задача 38 (№ V.19). Является ли треугольная пирамида правильной, если у нее равны углы: а) боковых ребер с основанием; б) боковых ребер с противоположными гранями; в) боковых граней с основанием; г) соседних боковых граней между собой; д) боковых ребер с противоположными ребрами основания? Возьмите также два условия из перечисленных и ответьте на тот же вопрос. Составьте аналогичные вопросы для n-угольной пирамиды.

Случай I.

Дано: $SABC -$ треугольная пирамида, у которой равны углы:

а) боковых ребер с основанием;

б) боковых ребер с противоположными гранями;

в) боковых граней с основанием;

г) соседних боковых граней между собой;

д) боковых ребер с противоположными ребрами основания.

Выяснить: является ли пирамида правильной?

А. Дано: $SABC -$ пирамиды, $SO \perp (ABC)$, $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \alpha$ (рис. 67).

Решение.

1) $\Delta AOS = \Delta BOS = \Delta COS$

($\angle AOS = \angle BOS = \angle COS = 90°$, $SO -$ *общий катет*, $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO =$ $= \alpha$), отсюда $AS = BS = CS$; $AO = BO = CO$, следовательно, $O -$ центр окружности $\gamma(O; R)$, описанной около ΔABC. Можно рассмотреть конус с вершиной S

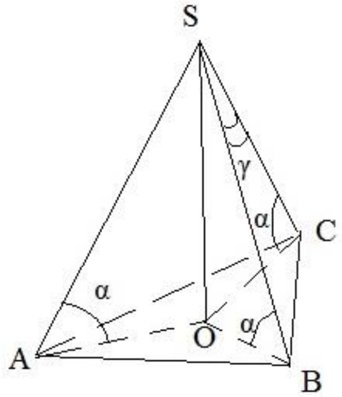


Рис. 67

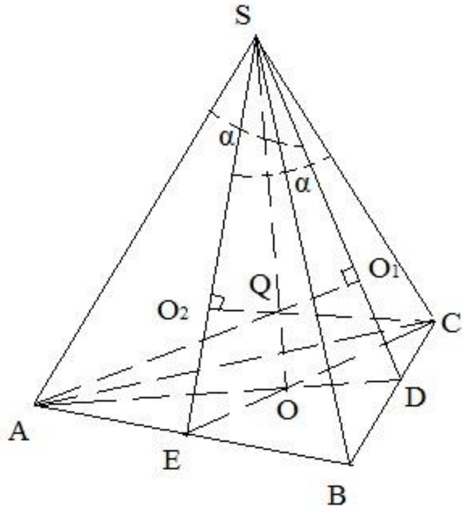


Рис. 68

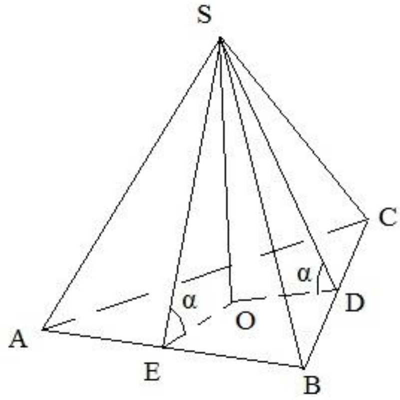


Рис. 69

и основанием γ, для него образующие $SA,\ SB,\ SC$ наклонены к плоскости основания под одним углом α, но ΔABC не обязательно правильный. Следовательно, пирамида $SABC$ не обязательно правильная.

Б. <u>Дано:</u> $SABC -$ пирамида, $\alpha = (\widehat{AS, BSC}) = (\widehat{BS, ASC}) = (\widehat{CS, ASB})$ (рис. 68).

<u>Решение</u>.

1) Проведем плоскость ASD, чтобы $ASD \perp BC$, тогда $\alpha = (\widehat{AS, BSC}) = (\widehat{SA, SD})$.

2) Аналогично проведем плоскость $CSE \perp AB$, тогда $\alpha = (\widehat{CS, ASB}) = (\widehat{SC, SE})$.

3) Проведем плоскость $BSF \perp AC$, тогда $\alpha = (\widehat{BS, ASC}) = (\widehat{SB, SF})$. Пирамида $SABC$, вообще говоря, не обязана быть правильной.

В. <u>Дано:</u> $SABC -$ пирамида,

$\alpha = (\widehat{ASB, ABC}) = (\widehat{BSC, BCA}) = (\widehat{CSA, CAB})$ (рис. 69).

<u>Решение.</u>

1) Проведем $SO \perp (ABC)$, затем $OD \perp BC, OE \perp AB, OF \perp AC$. Тогда $SD \perp BC$, $SE \perp AB$, $SF \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах). Поэтому $\Delta SOD = \Delta SOE = \Delta SOF$ ($\angle SOD = \angle SOE = \angle SOF = 90°$, $SO -$ общий катет, $\angle SDO = \angle SEO = \angle SFO = \alpha$). Отсюда. $OD = OE = OF$ (то есть $O -$ центр вписанной в ΔABC окружности), $SD = SE = SF$. Рассмотрим конус с вершиной S, с основанием – γ (окружность, вписанная в ΔABC), тогда пирамида $SABC$ описана около этого конуса и она не обязана быть правильной.

Г. <u>Дано:</u> $SABC -$ пирамида,

$\alpha = (\widehat{ASB, ASC}) = (\widehat{BSA, BSC}) = (\widehat{CSB, CSA})$ (см. рис. 70).

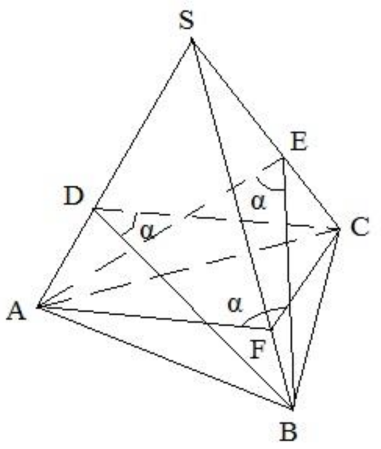


Рис. 70

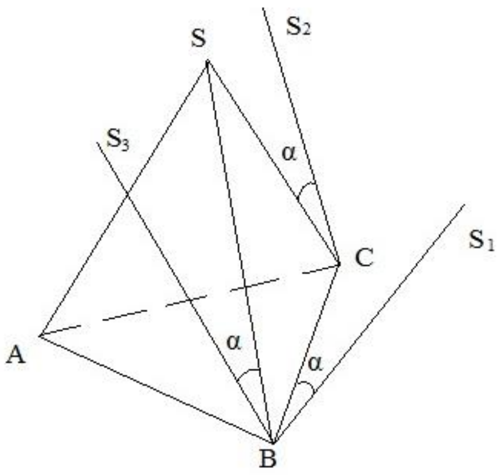


Рис. 71

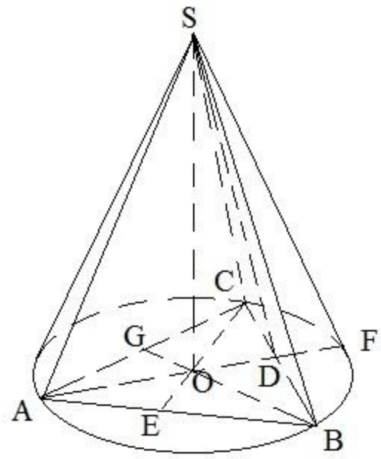


Рис. 72

Решение.

1) Проведем плоскость BDC, чтобы $BDC \perp AS$, тогда $(\widehat{ASB, ASC}) = \angle BDC = \alpha.$

2) Аналогично, $AEB \perp SC, \alpha = \angle BEA, AFC \perp BC, \alpha = \angle AFC.$

3) Известна **теорема B**:

В трехгранном угле против равных двугранных углов лежат равные плоские углы (и наоборот) – см. книгу Т.Г. Ходот «Задачи по геометрии», № IX, стр. 123.

По теореме B получаем, что $\angle ASB = \angle BSC =$

$= \angle CSA = \beta$. Но этого недостаточно, чтобы пирамида $SABC$ была правильной.

Д. Дано: $SABC -$ пирамида, $\alpha = (\widehat{AS, BC}) = (\widehat{BS, AC}) = (\widehat{CS, AB})$ (см. рис. 71).

Решение.

Если бы пирамида $SABC$ была правильной для произвольного угла α, то это было бы верно и при $\alpha = 90°$. Но при $\alpha = 90°$ тетраэдр является лишь ортоцентрическим (то есть все его высоты или их продолжения пересекаются в одной точке) – В.В. Прасолов, И.Ф. Шарыгин, «Задачи по стереометрии», 1989 г., № 6.36 (в). Следовательно, пирамида $SABC$ не является правильной.

Итак, во всех случаях а) – д) пирамида не является правильной.

Случай II. Возьмите какие-нибудь два условия из условий а) – д) и выясните, является ли пирамида $SABC$ правильной.

Рассмотрим условия **а), б)**.

По условию **а)** пирамида $SABC$ вписана в конус с вершиной S, основание которого описано около ΔABC (см. рис. 72). По условию **б)** проведем плоскость ASD, чтобы $ASD \perp BC$ ($AD \perp BC$). Но плоскость ASD должна пройти через высоту SO конуса, следовательно, $AD \subset AF -$ диаметр основания конуса, то есть $AF \perp BC$. Но диаметр, перпендикулярный хорде $BC,$ делит ее пополам, то есть $BD = DC$. Аналогично, если $SCE \perp AB,$ то $CE \perp AB$ и $AE = BE$; если $BSG \perp AC$, то $BG \perp AC$ и $AG = CG$.

Итак, в ΔABC медианы $AD,\ CE,\ CF$ являются и высотами, следовательно, $\Delta\, ABC -$ правильный. Поэтому пирамида $SABC -$ правильная.

Задача 39 (№ V.20). Является ли треугольная пирамида правильной, если: а) около нее можно описать сферу; б) в нее можно вписать сферу; в) возможно и то и другое?

Решение.

А. Нет, так как в сферу можно вписать произвольную треугольную пирамиду;

Б. Нет, так как около сферы можно описать произвольную треугольную пирамиду;

В. Нет (см. п. а, б).

Задача 40 (№ V.21). Для треугольной призмы сформулируйте и докажите утверждение, аналогичное теореме косинусов для треугольника.

Дано: $ABCA_1B_1C_1 -$ треугольная призма (см. рис. 73).

Доказать: утверждение, аналогичное теореме косинусов для треугольника.

Доказательство.

По теореме косинусов для ΔABC имеем: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\alpha$ (1). Умножим обе части равенства (1) на h^2 (где $h -$ высота призмы), получим:

$(ah)^2 = (bh)^2 + (ch)^2 - 2(bh)(ch) \cdot cos\alpha$, но $ah = S_{BCC_1B_1} = S_a$,

$bh = S_{ACC_1A_1} = S_b$, $ch = S_{ABB_1A_1} = S_c$, поэтому получаем:

${S_a}^2 = {S_b}^2 + {S_c}^2 - 2S_b \cdot S_c \cdot cos\alpha,$ то есть *квадрат площади боковой грани треугольной призмы, содержащей одну сторону основания призмы равен сумме квадратов площадей двух других боковых граней без удвоенного произведения* *площадей этих граней на косинус угла, лежащего против выбранной стороны основания призмы.*

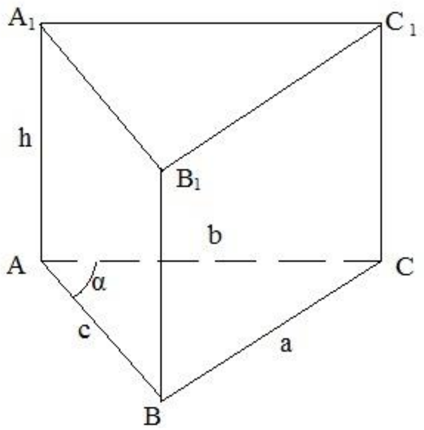


Рис. 73

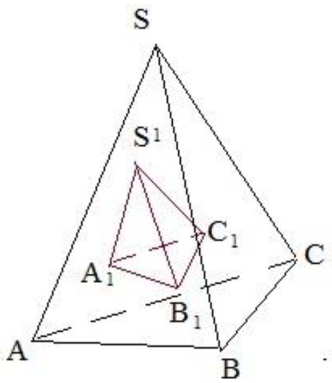


Рис. 74

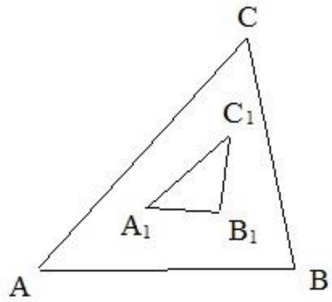


Рис. 75

Задача 41 (№ V.22). Какие (по числу сторон) многоугольники могут получиться в сечении правильной -угольной: а) пирамиды; б) призмы?

а) Пусть $F = SA_1A_2 \dots A_n -$ правильная -угольная пирамида, она содержит $(n+1)$ граней ($n -$ равных равнобедренных треугольников – боковых граней, и основание – правильный -угольник). Если $\alpha -$ секущая плоскость, то в сечении данной пирамиды F и плоскости α могут получиться многоугольники с числом сторон: 3, 4, …, $n+1$.

б) Пусть $F = A_1A_2 \dots A_nA_1'A_2' \dots A_n' -$ правильная -угольная призма, она содержит $(n+2)$ грани (n боковых граней – равных прямоугольников и 2 равных правильных n-угольника – основания призмы). Если $\alpha -$ секущая плоскость, то в сечении данной призмы плоскостью α могут получиться многоугольники с числом сторон 3, 4, …, $n+2$.

Задача 42 (№ V.25). Одна треугольная пирамида находится внутри другой. Может ли сумма длин ребер внутренней пирамиды быть больше, чем сумма длин ребер внешней?

<u>Дано:</u> $SABC -$ пирамида, S_1, $A_1, B_1, C_1 -$ внутренние точки – вершины другой пирамиды (см. рис. 74).

Решение.

Рассмотрим плоский аналог этой задачи: один треугольник $A_1B_1C_1$ находится внутри ΔABC (рис. 75). Может ли сумма длин сторон $\Delta A_1B_1C_1$ быть больше, чем сумма длин сторон ΔABC? Так как $\Delta A_1B_1C_1 \subset \Delta ABC$, то $P_{A_1B_1C_1} < P_{ABC}$.

По аналогии, для пространства получаем, что $P_{S_1A_1B_1C_1} < P_{SABC}$.

Ответ: нет.

Задача 43 (№ V.26). Определите, на сколько частей могут разделить пространство поверхности двух кубов.

Дано: $F = ABCDA_1B_1C_1D_1 -$ куб, $F_1 = MNPQM_1N_1P_1Q_1 -$ куб (см. рис. 76 и 77).

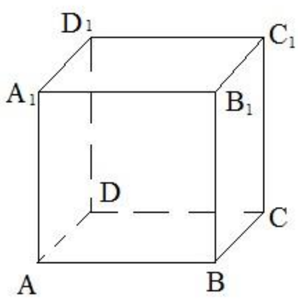


Рис. 76

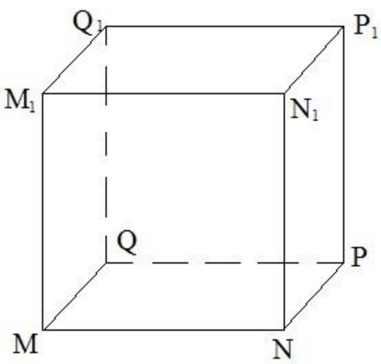


Рис. 77

Найти: на сколько частей разделяют пространство поверхности этих кубов.

Ответ: на 3 (1 – 1-й куб, 2 – 2-й куб, 3 – множество всех точек пространства, внешних по отношению к этим кубам), если кубы не имеют общих точек.

ГЛАВА II. ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «ОБЪЕМЫ»

II.1. Исследовательские задачи к параграфу «Объемы некоторых тел»

Задача 44 (№ 30.54). Пусть $ABCA_1B_1C_1$ – треугольная призма. Ее грань ABB_1A_1 принята за основание параллелепипеда, боковым ребром которого является ребро призмы BC. Сравните объем призмы и объем параллелепипеда. Отсюда получите формулу для вычисления объема призмы через площадь одной из ее боковых граней и расстояние от плоскости этой грани до прямой, проходящей через противоположное ребро призмы. Какие следствия вы можете получить из этой формулы?

Дано: $F_1 = ABCA_1B_1C_1$ – призма, $F_2 = ABB_1A_1DCC_1D_1$ – параллелепипед (рис. 78).

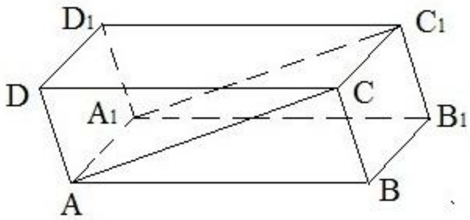


Рис. 78

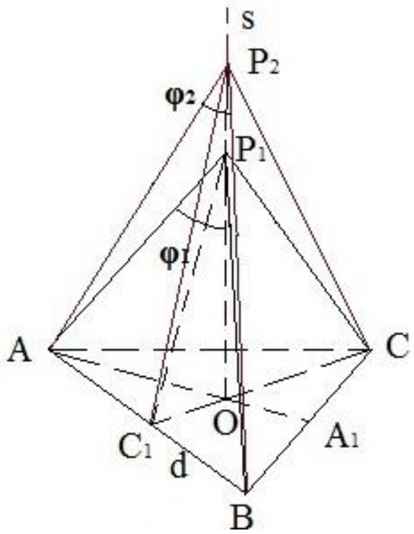


Рис. 79

Решение.

$V_{F_2} = S_{ABB_1A_1} \cdot H,$ где $H = \rho\,(C, ABB_1A_1) = \rho\,(CC_1, ABB_1A_1).$

$V_{F_1} = \frac{1}{2}V_{F_2} = \frac{1}{2}S_{ABB_1A_1} \cdot H,$ что и требовалось.

Следствия:

1. $V_{F_1} = \frac{1}{2}S_{BB_1C_1C} \cdot H_1,$ где $H_1 = \rho\,(AA_1, BB_1C_1C);$

2. $V_{F_1} = \frac{1}{2}S_{ACC_1A_1} \cdot H_2,$ где $H_2 = \rho\,(BB_1, ACC_1A_1).$

Задача 45 (№ 30.56). Треугольник ABC равносторонний со стороной d. Через его центр проведена прямая, перпендикулярная его плоскости. На ней

взяты две точки P_1 и P_2 так, что из точки P_1 все стороны треугольника видны под углом φ_1, а из точки P_2 все стороны треугольника видны под углом φ_2. Объем пирамиды P_1ABC равен V. Сможете ли вы найти объем многогранника с вершинами в точках P_1, P_2, A, B, C?

Дано: ΔABC, $AB = BC = CA = d$, $BA_1 = A_1C$, $AC_1 = C_1B$, $O = AA_1 \cap CC_1$, $O \in s$, $s \perp (ABC)$, $P_1 \in s$, $\angle AP_1B = \angle BP_1C = \angle CP_1A = \varphi_1$; $P_2 \in s$, $\angle AP_2B =$

$= \angle BP_2C = \angle CP_2A = \varphi_2$, $V_{P_1ABC} = V$, $P_1 \,\big|\, P_2O$ (рис. 79).

Найти: $V_{P_1P_2ABC}$ – можно ли найти?

Решение.

1) $V_{P_1P_2ABC} = V_{P_2ABC} - V_{P_1ABC} = V_{P_2ABC} - V$ (1).

Следовательно, задача сводится к поиску V_{P_2ABC}.

2) $V_{P_2ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot P_2O = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} d \cdot d \cdot \sin 60°\right) \cdot P_2O = \frac{1}{6} \cdot d^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot P_2O =$

$= \frac{\sqrt{3}d^2}{12} \cdot P_2O$ (2).

Следовательно, задача сводится к поиску P_2O.

3) Из ΔC_1OP_2 ($\angle C_1OP_2 = 90°$); $P_2O = \sqrt{{C_1P_2}^2 - C_1O^2}$ (3),

$C_1O = \frac{1}{3} CC_1 = \frac{1}{3} \sqrt{d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{d\sqrt{3}}{2} = \frac{d\sqrt{3}}{6}$; $C_1O = \frac{d\sqrt{3}}{6}$ (4).

Из ΔBC_1P_2 $\angle BC_1P_2 = 90°$, так как ΔAP_2B – равнобедренный и P_2C_1 – медиана, а значит, и высота; $\angle BP_2C_1 = \frac{\varphi_2}{2}$): $tg\frac{\varphi_2}{2} = \frac{BC_1}{C_1P_2} = \frac{\frac{d}{2}}{C_1P_2} = \frac{d}{2C_1P_2} \Rightarrow C_1P_2 = \frac{d}{2tg\frac{\varphi_2}{2}}$ (5).

4) Из (3) с учетом (4) и (5) получаем: $P_2O = \sqrt{\left(\frac{d}{2tg\frac{\varphi_2}{2}}\right)^2 - \left(\frac{d\sqrt{3}}{6}\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{d^2}{4tg^2\frac{\varphi_2}{2}} - \frac{3d^2}{36}} = \sqrt{\frac{d^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{tg^2\frac{\varphi_2}{2}} - \frac{1}{3}\right)} = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{3 - tg^2\frac{\varphi_2}{2}}{3tg^2\frac{\varphi_2}{2}}} = \frac{d}{2} \cdot \frac{\sqrt{3 - tg^2\frac{\varphi_2}{2}}}{\sqrt{3}\left|tg\frac{\varphi_2}{2}\right|}$,

$P_2O = \frac{d}{2} \cdot \sqrt{\frac{3 - tg^2\frac{\varphi_2}{2}}{3tg^2\frac{\varphi_2}{2}}}$ (6).

5) Из (2) получаем: $V_{P_2ABC} = \frac{\sqrt{3}d^2}{12} \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{\sqrt{3-tg^2\frac{\varphi_2}{2}}}{\sqrt{3}\left|tg\frac{\varphi_2}{2}\right|} = \frac{d^3}{24} \cdot \frac{\sqrt{3-tg^2\frac{\varphi_2}{2}}}{\left|tg\frac{\varphi_2}{2}\right|}$ (7).

6) Из (1) и (7) получаем:

$V_{P_1P_2ABC} = \frac{d^3}{24} \cdot \frac{\sqrt{3-tg^2\frac{\varphi_2}{2}}}{\left|tg\frac{\varphi_2}{2}\right|} - V$ $(*)$. $V_{P_1P_2ABC}$ – существует, если

$$\begin{cases} 3 - tg^2\frac{\varphi_2}{2} > 0 \Rightarrow tg^2\frac{\varphi_2}{2} < 3 \Rightarrow \\ tg^2\frac{\varphi_2}{2} \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \left|tg\frac{\varphi_2}{2}\right| < \sqrt{3} \Rightarrow 0 < \frac{\varphi_2}{2} < 60°$, то есть $0 < \varphi_2 < 120°$.

Замечание.

В то же время, не забываем, что $P_1 \mid P_2O$ (если $P_2 \mid P_1O$, то $V_{P_1P_2ABC} = V - V_{P_2ABC}$).

Оказывается, что $V_{P_1ABC} = V - \frac{d^3}{24} \cdot \frac{\sqrt{3-tg^2\frac{\varphi_2}{2}}}{\left|tg\frac{\varphi_2}{2}\right|}$.

Задача 46 (№ 30.57). Пусть $ABCD$ – тетраэдр, точки K, L, M, N – середины ребер AC, BC, BD, AD. Расстояние между прямыми AB и CD равно d. Площадь сечения $KLMN$ равна S. Можете ли вы найти объем тетраэдра?

Дано: $DABC$ – тетраэдр, $AK = KC, BL = LC, BM = MD, AN = ND$;

$\rho(AB, CD) = d$; $S_{KLMN} = S$ (рис. 80).

Можно ли найти: V_{DABC}?

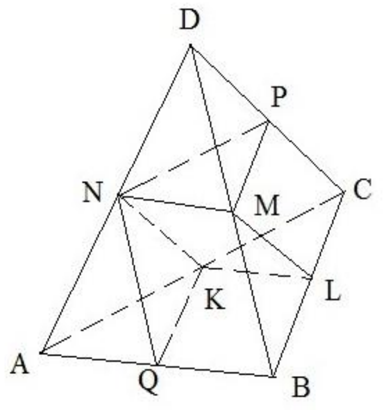


Рис. 80

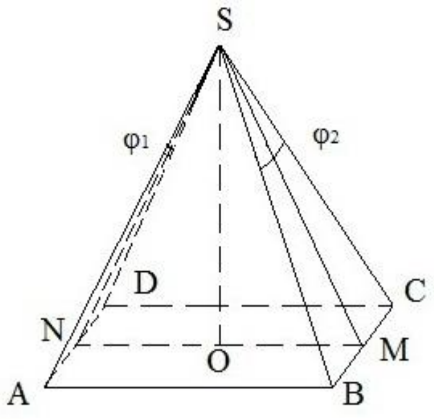


Рис. 81

Решение.

1) $KLMN-$ параллелограмм ($KL = NM, KL \parallel NM-$ как средние линии $\Delta ABC, \Delta ADB$; $ML = NK$, $ML \parallel NK$ как средние линии $\Delta CAD, \Delta CBD$;

$S_{KLMN} = S-$ по условию.

2) Возьмем точку $P-$ середину DC, тогда $ML = PC\left(=\frac{1}{2}CD\right)$, $ML \parallel CP$ поэтому $LCPM$ – параллелограмм; $KLCNMP$ – треугольная призма, ее объем

$V_{KLCNMP} = \frac{1}{2}V_{\text{пар.}}$(с основанием $KLMN$, боковым ребром NP) = $\frac{1}{2}S_{KLMN} \cdot h$, где

$h = \rho(C, KLMN) = \rho(CP, KLMN) = \frac{d}{2}$ (учитывая, что $KL \parallel AB$ и

$CP \parallel ML, \rho(CD, AB) = d$). Тогда $V_{KLCNMP} = \frac{1}{2} \cdot S \cdot \frac{d}{2} = \frac{S \cdot d}{4}$ (1).

3) Возьмем точку Q – середину AB, $QBLK, QBMN-$ параллелограммы, тогда $BLMQKN-$ треугольная призма, $V_{BLMQKN} = \frac{1}{2}V_{\text{пар.}}$(с основанием $KLMN$, боковым ребром MB) = $\frac{1}{2} \cdot S_{KLMN} \cdot h_1$, где $h_1 = \rho(B, KLMN) =$ $V_{KLCNMP} = \frac{1}{2}V_{\text{пар.}}$ (с основанием $KLMN$, боковым ребром NP) = $\frac{1}{2}S_{KLMN} \cdot h$, где

$= \rho(QB, KLMN) = \frac{d}{2}$ (учитывая, что $ML \parallel CD, AB \parallel KL$ и $\rho(CD, AB) = d$). Тогда $V_{BLMQKN} = \frac{1}{2}S \cdot \frac{d}{2} = \frac{d \cdot S}{4}$ (2).

4) $DNMP-$ треугольная пирамида, подобная пирамиде $DABC$, коэффициент подобия $k = \frac{DN}{DA} = \frac{1}{2}$, поэтому $V_{DNMP} = k^3 \cdot V_{DABC} = \frac{1}{8} \cdot V_{DABC}$ (3).

5) Аналогично, $AQKN-$ треугольная пирамида, подобная пирамиде $ABCD$, коэффициент подобия $k_1 = \frac{AN}{AD} = \frac{1}{2}$, поэтому $V_{AQKN} = k_1^3 \cdot V_{ABCD} =$ $\frac{1}{8}V_{ABCD}$ (4).

6) Ясно, что $V_{DABC} = V_{DNMP} + V_{AQKN} + V_{KLCNMP} + V_{BLMQKN}$, с учетом (1) – (4) получаем $V = V_{DABC} = \frac{1}{8}V + \frac{1}{8}V + \frac{d \cdot S}{4} + \frac{d \cdot S}{4}$, $\frac{3}{4}V = \frac{d \cdot S}{2} \Rightarrow V = \frac{2dS}{3}$.

Ответ: можно.

Задача 47 (№ 30.60). В основании пирамиды лежит квадрат со стороной d. Две противоположные ее грани – равнобедренные треугольники, углы при их вершинах равны φ_1 и φ_2. Можете ли вы найти объем пирамиды?

Дано: $SABC-$ пирамида, $ABCD-$ квадрат, $AB = d, \angle ASD = \varphi_1, SA = SD$,

$\angle BSC = \varphi_2, SB = SC$ (рис. 81).

Можно ли найти V_{SABCD}?

Решение.

1) Из условия следует, что $AO = OD$ и $BO = CO$, где $O -$ проекция точки S на плоскость $ABCD$. Следовательно, $O \in MN$, где MN – средняя линия квадрата $(BM = MC, AN = ND), MN = d$.

2) $V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot SO = \frac{1}{3} d^2 \cdot SO$ (1), следовательно, задача сводится к поиску SO.

3) Из ΔSOM ($\angle SOM = 90°$) $SO = \sqrt{SM^2 - OM^2}$.

4) Из ΔSON ($\angle SON = 90°$) $SO = \sqrt{SN^2 - ON^2}$, тогда

$\sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{SN^2 - ON^2}$, отсюда $SM^2 - OM^2 = SN^2 - ON^2$ или

$SM^2 - (d - ON)^2 = SN^2 - ON^2, SM^2 - d^2 + 2d \cdot ON - ON^2 = SN^2 - ON^2,$

$2d \cdot ON = d^2 + SN^2 - SM^2 \Rightarrow ON = \frac{d^2 + SN^2 - SM^2}{2d}$ (2).

Следовательно, нужно найти SN и SM.

5) В ΔBSC ($SB = SC, \angle BSC = \varphi_2, BM -$ медиана, $BC = d$):

$tg\frac{\varphi_2}{2} = \frac{BM}{SM} = \frac{d}{2SM} \Rightarrow SM = \frac{d}{2tg\frac{\varphi_2}{2}}$ (3).

6) Аналогично, в ΔASD ($\angle ASD = \varphi_1, SA = SD, SN -$ медиана, $AD = d$):

$tg\frac{\varphi_1}{2} = \frac{AN}{SN} = \frac{d}{2SN} \Rightarrow SN = \frac{d}{2tg\frac{\varphi_1}{2}}$ (4).

7) Из (2), (3), (4) получаем:

$$ON = \frac{d^2 + \left(\frac{d}{2tg\frac{\varphi_1}{2}}\right)^2 - \left(\frac{d}{2tg\frac{\varphi_2}{2}}\right)^2}{2d} = \frac{d\left(1 + \frac{1}{4tg^2\frac{\varphi_1}{2}} - \frac{1}{4tg^2\frac{\varphi_2}{2}}\right)}{2} \quad (5).$$

8) Из ΔSON ($\angle SON = 90°$) (см. соотношения (4) и (5)):

$$SO^2 = SN^2 - ON^2 = \left(\frac{d}{2tg\frac{\varphi_1}{2}}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{4tg^2\frac{\varphi_1}{2}} - \frac{1}{4tg^2\frac{\varphi_2}{2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{d^2}{4}\left(\frac{1}{tg^2\frac{\varphi_1}{2}} - \left(1 + \frac{1}{4tg^2\frac{\varphi_1}{2}} + \frac{1}{4tg^2\frac{\varphi_2}{2}}\right)^2\right), \; SO^2 = \frac{d^2}{4}\left(\frac{1}{tg^2\frac{\varphi_1}{2}} - \left(1 + \frac{1}{4tg^2\frac{\varphi_1}{2}} + \frac{1}{4tg^2\frac{\varphi_2}{2}}\right)^2\right),$$

отсюда $SO = \frac{d}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{tg^2\frac{\varphi_1}{2}} - \left(1 + \frac{1}{4tg^2\frac{\varphi_1}{2}} + \frac{1}{4tg^2\frac{\varphi_2}{2}}\right)^2\right)}$ (6).

9) Из (1) и (6) получаем:

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3}d^2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{tg^2\frac{\varphi_1}{2}} - \left(1 + \frac{1}{4tg^2\frac{\varphi_1}{2}} + \frac{1}{4tg^2\frac{\varphi_2}{2}}\right)^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{6}d^3 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{tg^2\frac{\varphi_1}{2}} - \left(1 + \frac{1}{4tg^2\frac{\varphi_1}{2}} + \frac{1}{4tg^2\frac{\varphi_2}{2}}\right)^2\right)}.$$

Ответ: можно.

ГЛАВА III. ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «ПОВЕРХНОСТИ »

III.1. Исследовательские задачи к параграфу «Площадь поверхности»

Задача 48 (№ 32.46). В треугольной призме известны расстояния между прямыми, которые проходят через ее боковые ребра, и длина бокового ребра. Можете ли вы по этим данным узнать: а) площадь ее боковой поверхности; б) площадь ее поверхности; в) ее объем?

Дано: $ABCA_1B_1C_1 -$ треугольная призма, $AA_1 = a, \rho(AA_1, BB_1) = b$, $\rho(AA_1, CC_1) = c$, $\rho(BB_1, CC_1) = d$ (рис. 82).

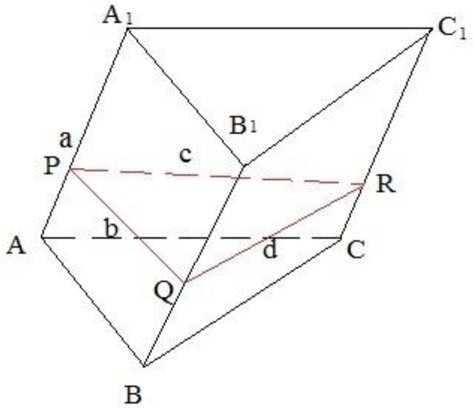


Рис. 82

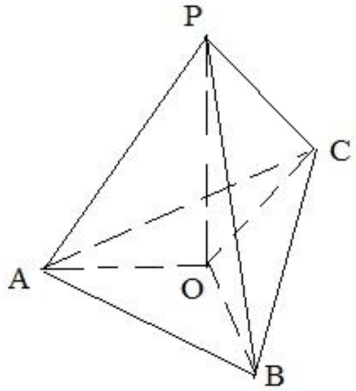


Рис. 83

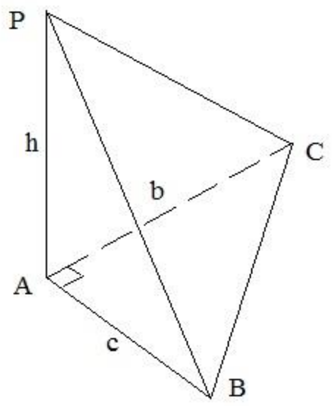


Рис. 84

Можно ли найти:

а) $S_{бок.}$

б) $S_{полн.}$

в) $V_{пр.}$

А. $S_{бок.} = S_{ABB_1A_1} + S_{BCC_1B_1} + S_{CAA_1C_1} = a \cdot b + \ +a \cdot c + a \cdot d = a \cdot (b + c + d)$.

Ответ: можно.

Б. $S_{полн.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}$

Но $S_{осн.} -$ найти нельзя, следовательно, нельзя найти и $S_{полн.}$.

В. $V_{пр.} = S_{PQR} \cdot AA_1 = S_{PQR} \cdot a$, но S_{PQR} найти можно, так как известны все стороны $\Delta\ PQR\ (b, c, d, b = PQ, d = QR, c = PR)$.

Задача 49 (№ 32.47). Известна площадь одной грани тетраэдра. Можно ли, измеряя только углы на его поверхности, найти площадь его поверхности?

Дано: $PABC$ – тетраэдр, $S_{ABC} = S$ (рис. 83).

Можно ли, измеряя только углы на его поверхности, найти S_{PABC}?

Решение.

1) Пусть $\alpha = \angle BAC, \beta = \angle ABC, \gamma = \angle ACB$; тогда:

$S = S_{BAC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\alpha$ (1), $S = S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin\beta$ (2),

$S = S_{ACB} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot CA \cdot \sin\gamma$ (3).

2) По теореме синусов имеем: $\frac{BA}{\sin\alpha} = \frac{BC}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin\gamma} (= 2R)$, где R – радиус описанной окружности. Тогда: $BA = 2R\sin\gamma\ (= c)$, $BC = 2R\sin\alpha\ (= a)$, $AC = 2R\sin\beta\ (= b)$. Из формул (1) – (3) имеем: $AB \cdot AC = \frac{2S}{\sin\alpha}$, $BA \cdot BC = \frac{2S}{\sin\beta}$, $CA \cdot CB = \frac{2S}{\sin\gamma}$ или $b \cdot c = \frac{2S}{\sin\alpha}$, $a \cdot c = \frac{2S}{\sin\beta}$, $a \cdot b = \frac{2S}{\sin\gamma}$.

Но $a = 2R\sin\alpha, b = 2R\sin\beta, c = 2R\sin\gamma$, следовательно,

получаем: $2R\sin\beta \cdot 2R\sin\gamma = \frac{2S}{\sin\alpha}$, $2R\sin\alpha \cdot 2R\sin\gamma = \frac{2S}{\sin\beta}$,

$2R\sin\alpha \cdot 2R\sin\beta = \frac{2S}{\sin\gamma}$, отсюда $R^2 = \frac{2S}{4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2S}}{2\sqrt{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}$.

Тогда $a = \frac{\sqrt{2S}}{2\sqrt{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}} \cdot \sin\alpha = \frac{\sqrt{2S}\cdot\sqrt{\sin\alpha}}{\sqrt{\sin\beta\sin\gamma}}$, аналогично: $b = \frac{\sqrt{2S}\cdot\sqrt{\sin\beta}}{\sqrt{\sin\alpha\sin\gamma}}$,

$c = \frac{\sqrt{2S}\cdot\sqrt{\sin\gamma}}{\sqrt{\sin\beta\sin\alpha}}$.

Итак, знаем все стороны основания тетраэдра.

3) Зная все плоские углы боковых граней APB, BPC, CPA, можно найти по теореме синусов стороны PA, PB, PC, а затем площади боковых граней: S_{APB}, S_{BPC}, S_{CPA}.

4) Следовательно, $S_{полн.} = S_{ABC} + S_{APB} + S_{BPC} + S_{CPA}$ найти можно.

Задача 50 (№ 32.48). Дан прямоугольный тетраэдр. Достаточно ли знать длины трех его ребер, чтобы найти площадь его поверхности?

Дано: $PABC$ – тетраэдр, $PA \perp AB$, $PA \perp AC$, $AB \perp AC$ (рис. 84).

Пусть $PA = h$, $AB = c$, $AC = b$.

Можно ли найти: $S_{полн.}$?

Решение.

1) $S_{полн.} = S_{PAB} + S_{PAC} + S_{PBC} + S_{ABC}$.

2) $S_{PAB} = \frac{1}{2}c \cdot h$, $S_{PAC} = \frac{1}{2}b \cdot h$, $S_{ABC} = \frac{1}{2}b \cdot c$.

3) Найдем S_{PBC}.

$BP = \sqrt{c^2 + h^2}$, $BC = \sqrt{b^2 + c^2}$, $CP = \sqrt{b^2 + h^2}$, следовательно, S_{PBC} найти можно. Итак, $S_{полн.}$ найти можно.

Задача 51 (№ 32.49). Может ли внутри правильной призмы находиться одноименная правильная пирамида с большей площадью поверхности? А произвольная пирамида?

Дано: F_1 – правильная n-угольная призма, F_2 – правильная -угольная пирамида, $F_2 \subset F_1$.

а) Возможно ли, что $S_2 > S_1$, где $S_1 = S_{F_1}$, $S_2 = S_{F_2}$?

б) F_3 – произвольная пирамида, $F_3 \subset F_1$.

Возможно ли, что $S_3 > S_1$?

А. Нет.

Б. Нет, если F_3 – выпуклая пирамида. Да, если F_3 – невыпуклая пирамида.

Аналог – периметр невыпуклого вписанного многоугольника может быть больше периметра правильного описанного многоугольника.

Задача 52 (№ 32.51). Правильная *n*-угольная пирамида с высотой *H* вписана в шар радиусом *R*. Найдите площадь ее поверхности. Докажите, что с ростом n она увеличивается. Будет ли увеличиваться площадь боковой поверхности такой пирамиды, если в основании находится многоугольник одного вида, а увеличивается *H*? А площадь поверхности?

Дано: F –правильная -угольная пирамида, $NO_1 = H$ – высота, $\omega(O; R)$ – описанный шар (рис. 85).

Найти: $S_{полн.}$

Доказать, что с ростом n $S_{полн.}$ увеличивается (и другие вопросы).

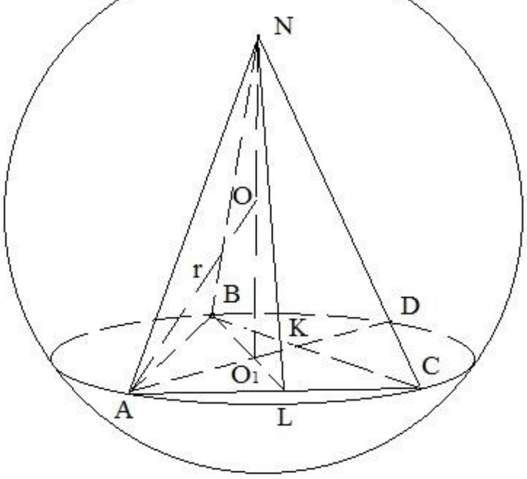


Рис. 85

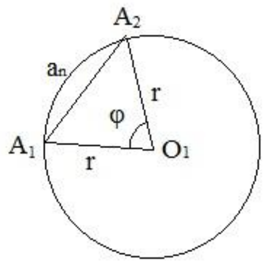


Рис. 86

Решение.

1) $S_{полн.} = S_{осн.} + n \cdot S_{\Delta ACN}$; $S_{осн.} = n \cdot S_{\Delta A_1O_1A_2}$;

$$a_n^2 = r^2 + r^2 - 2rr\cos\frac{2\pi}{n} = 2r^2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right) \Rightarrow a_n = r\sqrt{2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow r = \frac{a_n}{\sqrt{2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)}}$ (1).

2) Из ΔAO_1O ($\angle AO_1O = 90°, AO_1 = r, O_1O = H - R, AO = R$), имеем:
$R^2 = (H-R)^2 + r^2$, отсюда $R^2 = H^2 - 2HR + R^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 2HR - H^2$ (2).
Формула (2) с учетом (1) примет вид:

$\frac{a_n^2}{2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)} = 2HR - H^2 \Rightarrow a_n^2 = (2HR - H^2)2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n = \sqrt{(2HR - H^2)2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)}$.

3) $S_{осн.} = n \cdot S_{\Delta A_1O_1A_2} = n \cdot \frac{1}{2}rr\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{n}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{n}{2}(2HR - H^2)\sin\frac{2\pi}{n}$
(рис. 86).

4) $S_{б.п.} = n(\frac{1}{2} \cdot a_n \cdot NL)$ ($NL -$ апофема боковой грани), $NL^2 = H^2 + r_1^2$, где $r_1 -$ радиус вписанного круга; $S_{осн.} = \frac{1}{2}P \cdot r_1 \Rightarrow r_1 = \frac{2S_{осн.}}{P} = \frac{2S_{осн.}}{n \cdot a_n} =$

$$= \frac{2 \cdot \frac{n}{2}(2HR - H^2)\sin\frac{2\pi}{n}}{n \cdot \sqrt{(2HR - H^2)2(1 - \cos\frac{2\pi}{n})}} = \frac{\sqrt{2HR - H^2} \cdot \sin\frac{2\pi}{n}}{\sqrt{2\left(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right)}}.$$

Тогда $NL^2 = H^2 + r_1^2 = H^2 + + \frac{(2HR-H^2)\sin^2\frac{2\pi}{n}}{2(1-\cos\frac{2\pi}{n})}$; $NL = \sqrt{H^2 + \frac{(2HR-H^2)\sin^2\frac{2\pi}{n}}{2(1-\cos\frac{2\pi}{n})}}$;

$$S_{б.п.} = n \cdot \frac{1}{2} a_n \cdot NL = \frac{n}{2} \cdot \sqrt{(2HR - H^2)\left(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right) \cdot 2} \cdot \sqrt{H^2 + \frac{(2HR-H^2)\sin^2\frac{2\pi}{n}}{2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)}} =$$

$$= \frac{n}{2} \cdot \sqrt{(2HR - H^2)2\left(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right)} \cdot \frac{\sqrt{2H^2(1-\cos\frac{2\pi}{n}) + (2HR-H^2)\sin^2\frac{2\pi}{n}}}{\sqrt{2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)}} =$$

$$= \frac{n}{2}\sqrt{2HR - H^2} \cdot \sqrt{2H^2(1 - \cos\frac{2\pi}{n}) + (2HR - H^2)\sin^2\frac{2\pi}{n}}.$$

5) $S_{п.п.} = S_{осн.} + S_{б.п.} = \frac{n}{2}(2HR - H^2)\sin\frac{2\pi}{n} + \frac{n}{2}\sqrt{2HR - H^2} \times$

$\times \sqrt{2H^2\left(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right) + (2HR - H^2)\sin^2\frac{2\pi}{n}}$,

То есть $S_{п.п.} = \frac{n}{2} \cdot \sqrt{2HR - H^2} \cdot (\sqrt{2HR - H^2} \cdot \sin\frac{2\pi}{n} +$

$+\sqrt{2H^2(1 - \cos\frac{2\pi}{n}) + (2HR - H^2) \cdot \sin^2\frac{2\pi}{n}}$; (*)

Из (*) следует, что при возрастании n $S_{п.п.}$ растет.

Другие вопросы.

$S_{б.п.} = \frac{n}{2}\sqrt{2HR - H^2} \cdot \sqrt{2H^2\left(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right) + (2HR - H^2)\sin^2\frac{2\pi}{n}}$; $(R > \frac{H}{2})$.

Если в основании многоугольник одного вида, а возрастает H, то при постоянном R уменьшаются размеры сторон основания пирамиды, а тем самым уменьшается $S_{осн.}$, а также $S_{б.п.}$, поэтому уменьшается $S_{п.п.}$

Задача 53 (№ 32.52). Можно ли внутри данного шара разместить некоторое число не пересекающихся, равных между собой сфер, суммарная площадь поверхности которых больше любой наперед заданной величины?

Дано: $\omega(O; R)$ − данный шар, $\omega_1(O_1, r), \omega_2(O_2, r) \dots, \omega_k(O_k, r)$ − сферы одного радиуса внутри шара ω, не пересекающиеся; S $= \sum_{i=1}^{k} S_{\omega_i} = k \cdot 4\pi r^2 = 4k\pi r^2$, ($S$ − суммарная площадь поверхности).

Требуем, чтобы $4k\pi r^2 > 4\pi R^2$ − площадь поверхности шара, $4\pi R^2$ − наперед заданная величина, отсюда $kr^2 > R^2 \Rightarrow r^2 > \frac{R^2}{k} \Rightarrow r > \frac{R}{\sqrt{k}}$, поэтому

$r > \frac{R}{\sqrt{k}}$, но $r < R$, поэтому $\frac{R}{\sqrt{k}} < r < R \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{r}{R} < 1 \Rightarrow k \geq 2$.

а) при $k = 4, \frac{1}{2} < \frac{r}{R} < 1 \Rightarrow \frac{R}{2} < r < R$; так разместить 4 равные сферы внутри шара нельзя;

б) при $k = 9, \frac{1}{3} < \frac{r}{R} < 1 \Rightarrow \frac{R}{3} < r < R$; так разместить 9 равных сфер внутри шара нельзя;

в) при $k = 3, \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{r}{R} < 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}R}{3} < r < R$; $3 \cdot (4\pi r^2) = 12\pi r^2$,

$12\pi r^2 > 4\pi R^2 \Rightarrow 3r^2 > R^2 \Rightarrow \sqrt{3}r > R \Rightarrow r > \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}R}{3}$; 3 равные сферы можно разместить внутри шара.

Задача 54 (№ 32.54). Иногда площадь сферы определяют следующим образом. Берут сферу радиусом $\boldsymbol{R}$ и сферу с тем же центром радиусом $\boldsymbol{R} + \Delta\boldsymbol{R}$. Объем тела, заключенного между этими сферами, обозначают $\Delta\boldsymbol{V}$. Тогда площадь поверхности сферы определяют как $\lim_{\Delta R \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta R}$. Каковы соображения, приводящие к такому определению? Каковы его достоинства и недостатки? Можно ли его применить для измерения других площадей?

1) $V_{ш.} = \frac{4}{3}\pi R^3$,

$S_{сф.} = \lim_{\Delta R \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta R} = V' = (\frac{4}{3}\pi R^3)' = \frac{4}{3}\pi \cdot 3R^2 = 4\pi R^2$ − верно.

2) $V_{цил.} = \pi R^2 \cdot H$,

$S_{б.п.} = \lim_{\Delta R \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta R} = V' = (\pi R^2 \cdot H)' = \pi \cdot H \cdot 2R = 2\pi R \cdot H$ − верно.

3) $V_{кон.} = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot H$,

$S_{б.к.} = \lim_{\Delta R \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta R} = V' = (\frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot H)' = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot H \cdot 2R = \frac{2}{3}\pi R \cdot H$ − неверно.

Задача 55 (№ 32.55). Существует ли в данном шаре такой шаровой сектор, у которого: а) площадь его сферической поверхности равна площади его конической поверхности; б) площадь его поверхности равна площади поверхности полушара?

Дано: $\omega(O; R)$ – шар.

Существует ли такой шаровой сектор, чтобы:

а) $S_{сф.сек.} = S_{кон.б}$ (рис. 87);

б) $S_{сек.} = \frac{1}{2} \cdot S_{шара}$.

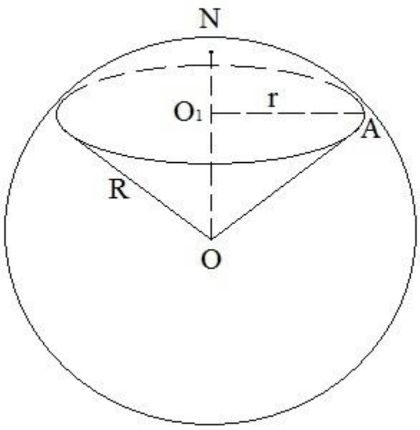


Рис. 87

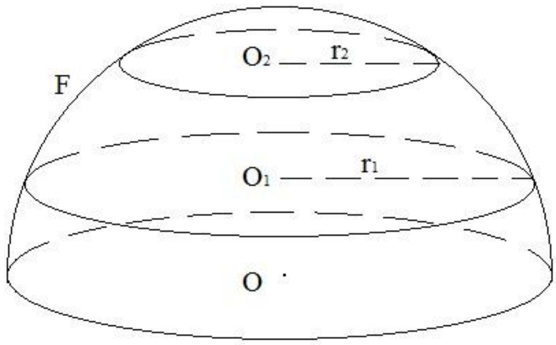


Рис. 88

Решение.

А. $S_{сф.сег.} = 2\pi R \cdot h$, где $h = O_1N$ (рис. 87) [$S_{сф.сег.}$ – площадь кривой поверхности шарового сегмента или площадь сферической поверхности шарового сектора]. $S_{кон.б.} = \pi rl$, где $r = O_1A, l = OA = R. OO_1 = R - h$, из ΔOO_1A ($\angle OO_1A =$
$= 90°, O_1A = r, OA = R, OO_1 = R - h$): $OA^2 = OO_1{}^2 + O_1A^2$ или

$R^2 = (R - h)^2 + r^2$ или $R^2 = R^2 - 2Rh + h^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 2Rh - h^2$,

$r = \sqrt{2Rh - h^2}$ (1).

Но $S_{сф.сег.} = 2\pi R \cdot h, S_{кон.б.} = \pi rl$, поэтому равенство $S_{сф.сег.} = S_{кон.б.}$ примет вид: $2\pi R \cdot h = \pi rR \Rightarrow \Rightarrow r = 2h$ (2).

Из (1) и (2) имеем: $2h = \sqrt{2Rh - h^2}$, отсюда $4h^2 = 2Rh - h^2$ или

$5h^2 = 2Rh \Rightarrow 5h = 2R \Rightarrow h = \frac{2}{5}R$.

Итак, такой шаровой сектор существует.

Б. $S_{сек.} = 2\pi R \cdot h + \pi r l, \frac{1}{2} \cdot S_{шара} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2 = 2\pi R^2$.

По условию, $S_{сек.} = \frac{1}{2} \cdot S_{шара}$, поэтому $2\pi R \cdot h + \pi r l = 2\pi R^2 \ \Big| \ : \pi \Rightarrow$

$\Rightarrow 2R \cdot h + rl = 2R^2$, но $2R \cdot h + rR = 2R^2 \Big| \ : R$, $2h + r = 2R$ (3).

Но из (1): $r = \sqrt{2Rh - h^2}$ (1), поэтому (3) примет вид:

$2h + \sqrt{2Rh - h^2} \ = 2R \ \ \Rightarrow \sqrt{2Rh - h^2} = 2(R - h) \Rightarrow 2Rh - h^2 = 4(R-h)^2$ или $2Rh - h^2 = 4R^2 - 8Rh + 4h^2$, $5h^2 - 10Rh + 4R^2 = 0$,

$h_{1,2} = \frac{5R \pm \sqrt{25R^2 - 20R^2}}{5} = \frac{5R \pm R\sqrt{5}}{5}$;

Б$_1$. При $h_1 = R + \frac{R\sqrt{5}}{5}$, $h_1 > R$, что невозможно.

Б$_2$. $h_2 = R - \frac{R\sqrt{5}}{5} = R(1 - \frac{\sqrt{5}}{5})$, итак, при $h_2 = R\,\frac{5-\sqrt{5}}{5}$ $\ S_{сек.} = \frac{1}{2} \cdot S_{шара}$.

Задача 56 (№ 32.56). Сечение шара разделило его на две части, площади поверхности которых равны S_1 и S_2. Сможете ли вы найти площадь поверхности шара?

Дано: $\omega(O;\ R)$ – шар, R – неизвестно, S_1, S_2 – площади поверхностей двух частей шара.

Можно ли найти: $S_{шара}$?

Решение.

$S_{ш.} = S_1 + S_2 - 2\pi \cdot r^2$, где r – радиус сечения, который мы не знаем. Поэтому найти $S_{шара}$ нельзя.

Задача 57 (№ 32.57). На полусфере взяли два сферических пояса с одинаковой площадью поверхности. Равны ли объемы соответствующих шаровых поясов?

Дано: $F = \omega(O; R)$ – сфера, Π_1, Π_2 – два сферических пояса (рис. 88), $S(\Pi_1) = S(\Pi_2) = S$.

Равны ли $V(\Pi_1)$ и $V(\Pi_2)$ шаровых поясов?

Решение.

1) $S_{сф.пояса} = 2\pi\ RH$ (*),где H – высота пояса (см. № 37.5), R – радиус сферы.

2) По формуле (*) $S(\Pi_1) = 2\pi\, RH_1$ ($H_1 -$ высота 1-го пояса).

$S(\Pi_2) = 2\pi\, RH_2$ ($H_2 -$ высота 2-го пояса).

По условию, $S(\Pi_1) = \ S(\Pi_2)$, то есть $2\pi\, RH_1 = 2\pi\, RH_2 \Rightarrow H_1 = H_2$.

3) $V_{шар.слоя} = \frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}\pi(r_1^2 + r_2^2) \cdot H$, (**) где $r_1, r_2 -$ радиусы оснований шарового слоя (пояса).

По формуле (**) имеем:

$$V(\Pi_1) = \frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}\pi(r_1^2 + r_2^2) \cdot H,$$

$$V(\Pi_2) = \frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}\pi(r_3^2 + r_4^2) \cdot H.$$

($r_3, r_4 -$ радиусы оснований 2-го шарового слоя).

Допустим, что $V(\Pi_1) = \ V(\Pi_2)$, тогда получаем:

$$\frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}\pi(r_1^2 + r_2^2) \cdot H = \frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}\pi(r_3^2 + r_4^2) \cdot H,$$

отсюда $r_1^2 + r_2^2 = r_3^2 + r_4^2$.

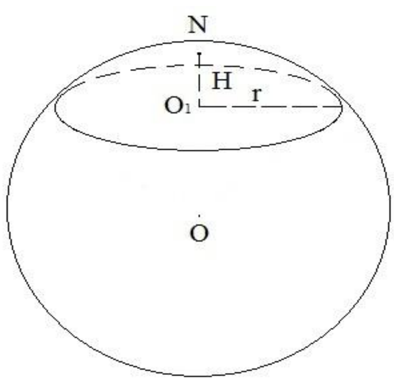
Это равенство верно, если $r_3 = r_1, r_4 = r_2$, то есть шаровые слои (пояса) совпадают. В противном случае, $V(\Pi_1) \ \neq \ V(\Pi_2)$.

Задача 58 (№ 32.58). От шара отсекли сегмент. Известно, какую часть составляет площадь его сферической поверхности от площади сферы. Можно ли узнать, какую часть составляет его объем от объема шара? Можно ли решить обратную задачу? Решите аналогичную задачу для шарового сектора.

<u>Дано</u>: $\omega(O; R) -$ данный шар, $F -$ отрезанный шаровой сегмент (рис. 89), $\frac{S_{сф.сег.}}{S_{сф.}} = \frac{p}{q}$.

<u>Можно ли узнать</u>: $\frac{V_{сф.сег.}}{V_{шара}}$?

<u>Можно ли решить обратную задачу</u>?



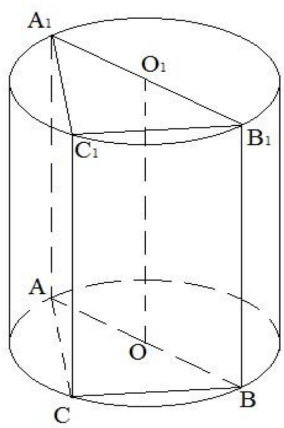


Рис. 89 Рис. 90

Решение.

1) $S_{сф.сег.} = 2\pi\, RH$, где $H = O_1N -$ высота сегмента; $\frac{S_{сф.сег.}}{S_{сф.}} = \frac{2\pi\, RH}{4\pi R^2} = \frac{H}{2R}\left(= \frac{p}{q}\right)$,

отсюда $H = 2R \cdot \frac{p}{q}$. $V_{сф.сег.} = \pi H^2\left(R - \frac{1}{3}H\right) = \pi\left(2R \cdot \frac{p}{q}\right)^2 \cdot \left(R - \frac{1}{3} \cdot 2R \cdot \frac{p}{q}\right) =$

$= \pi \cdot 4R^2 \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^2 \cdot R\left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{q}\right) = \pi \cdot 4R^3 \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{q}\right)$.

$V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3$, поэтому $\frac{V_{сф.сег.}}{V_{шара}} = \frac{\pi \cdot 4R^3 \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{q}\right)}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 3 \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{q}\right) =$

$= 3 \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^3$.

Ответ: Да, отношение $\frac{V_{сф.сег.}}{V_{шара}}$ узнать можно, так как отношение $\frac{p}{q}$ известно.

Обратная задача.

$\frac{V_{сф.сег.}}{V_{шара}} = \frac{m}{n}$. Можно ли найти $\frac{S_{сф.сег.}}{S_{шара}}$?

$V_{сф.сег.} = \pi H^2\left(R - \frac{1}{3}H\right)$, $V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3$, поэтому

$\frac{V_{сф.сег.}}{V_{шара}} = \frac{\pi H^2\left(R - \frac{1}{3}H\right)}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{m}{n}$, отсюда $3\pi H^2\left(R - \frac{1}{3}H\right) = 4\pi R^3 \cdot \frac{m}{n}$, отсюда

$H^2(3R - H) = 4R^3 \cdot \frac{m}{n}$ (*).

Из уравнения (*) выразить H через R нельзя. Следовательно, найти отношение $\frac{S_{сф.сег.}}{S_{шара}} = \frac{2\pi\, RH}{\pi R^2} = \frac{H}{2R}$ нельзя.

Задача 59 (№ 32.60). Можно ли получить площадь поверхности частей шара, следуя схеме, указанной в задаче 32.54?

$V_{шар.сег.} = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right)$, *где* $h -$ высота сегмента;

$$\lim_{\Delta R\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta R} = V' = \left(\pi h^2\left(R-\frac{1}{3}h\right)\right)' = \pi\cdot h^2\cdot\left(R-\frac{1}{3}h\right)' = \pi\cdot h^2 \neq S_{шар.сег.}$$

$(S_{шар.сег.} = 2\pi Rh)$.

Задача 60 (№ 32.62). В цилиндре проведены два взаимно перпендикулярных сечения, параллельные оси. Известны их площади. Можно ли найти: а) площадь боковой поверхности цилиндра; б) площадь поверхности цилиндра; в) объем цилиндра?

Дано: K − цилиндр, $\alpha = ACC_1A_1$, $\beta = BCC_1B_1$, $\alpha,\beta \parallel OO_1$, $\alpha\perp\beta$; $S_{ACC_1A_1} = S_1$, $S_{BCC_1B_1} = S_2$ (рис. 90).

Можно ли найти: а) $S_{б.ц.}$; б) $S_{п.ц.}$; в) $V_{ц.}$?

Решение.

А. 1) $S_1 = AC\cdot H, S_2 = BC\cdot H \;\Rightarrow\; S_1^2 = AC^2\cdot H^2,\; S_2^2 = BC^2\cdot H^2$, тогда $S_1^2+S_2^2 = H^2\cdot(AC^2+BC^2)$ или $S_1^2+S_2^2 = H^2\cdot(2R)^2$,

то есть $4R^2H^2 = S_1^2+S_2^2 \;\Rightarrow 2RH = \sqrt{S_1^2+S_2^2}$.

2) Но $S_{б.} = 2\pi RH$, следовательно, $S_{б.} = \pi\sqrt{S_1^2+S_2^2}$; $S_{б.}$ найти можно.

Б. $S_{п.ц.} = S_{б.} + 2\pi R^2 = \pi\sqrt{S_1^2+S_2^2} + 2\pi R^2 = \pi\left(\sqrt{S_1^2+S_2^2}+2R^2\right)$, следовательно, задача сводится к выражению R^2 через S_1 и S_2. Но этого сделать нельзя, так как в S_1 и S_2 входит еще и H − высота цилиндра, которая неизвестна.

В..$V_{ц.} = \pi R^2\cdot H = \pi\cdot(RH)\cdot R = \pi\cdot\frac{\sqrt{S_1^2+S_2^2}}{2}\cdot R$, отсюда следует, что и $V_{ц.}$ найти нельзя.

Задача 61 (№ 32.63). Равны ли два цилиндра, у которых равны:

а) площади боковых поверхностей и площади поверхностей; б) объемы и площади боковых поверхностей; в) объемы и площади поверхностей?

Дано: K_1, K_2 − два цилиндра.

а) $S'_{б.п.} = S''_{б.п.}, S'_{п.п.} = S''_{п.п.}$;

б) $V'_{ц.} = V''_{ц.}$, $S'_{б.п.} = S''_{б.п.}$;

в) $V'_{ц.} = V''_{ц.}$, $S'_{п.п.} = S''_{п.п.}$.

Равны ли цилиндры?

Решение.

А. $\begin{matrix} S'_{б.п.} = S''_{б.п.} \Rightarrow \\ S'_{п.п.} = S''_{п.п.} \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} 2\pi R_1 H_1 = 2\pi R_2 H_2 \ (1) \\ 2\pi R_1 H_1 + 2\pi {R_1}^2 = 2\pi R_2 H_2 + 2\pi {R_2}^2 \end{cases};$

из системы получаем: $2\pi {R_1}^2 = 2\pi {R_2}^2 \Rightarrow R_1 = R_2$.

Тогда из равенства (1) имеем: $2\pi R_1 H_1 = 2\pi R_2 H_2 \Rightarrow H_1 = H_2$.

Итак, $R_1 = R_2, H_1 = H_2$, отсюда следует, что цилиндры равны.

Б. $S'_{б.п.} = S''_{б.п.} \Rightarrow 2\pi R_1 H_1 = 2\pi R_2 H_2$.

$V'_{ц.} = V''_{ц.} = \pi {R_1}^2 \cdot H_1 = \pi {R_2}^2 \cdot H_2$.

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} R_1 H_1 = R_2 H_2 \ (2) \\ {R_1}^2 \cdot H_1 = {R_2}^2 \cdot H_2 \ (3) \end{cases}.$$

Поделим (3) на (2), получим $R_1 = R_2$.

Тогда из (2) получаем: $R_1 H_1 = R_2 H_2 \Rightarrow H_1 = H_2$. Итак, $R_1 = R_2, H_1 = H_2$, поэтому цилиндры равны.

В. $V'_{ц.} = V''_{ц.} \Rightarrow \pi {R_1}^2 \cdot H_1 = \pi {R_2}^2 \cdot H_2$.

$S'_{п.п.} = S''_{п.п.} \Rightarrow 2\pi R_1 H_1 + 2\pi {R_1}^2 = 2\pi R_2 H_2 + 2\pi {R_2}^2$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} {R_1}^2 \cdot H_1 = {R_2}^2 \cdot H_2 \\ R_1 H_1 + {R_1}^2 = R_2 H_2 + {R_2}^2 \end{cases}.$$

система содержит 4 неизвестных: R_1, H_1, R_2, H_2, решить ее не удается, поэтому цилиндры не равны, вообще говоря.

Задача 62 (№ 32.64). Могут ли цилиндр и шар иметь одинаковые объемы и площади поверхностей?

Дано: K_1 – цилиндр, K_2 – шар.

Могут ли цилиндр и шар иметь одинаковые объемы и площади поверхностей?

Решение.

$V_{K_1} = \pi r^2 h$, $S_{п.ц.} = 2\pi r h + 2\pi r^2$, $V_{K_2} = \frac{4}{3}\pi R^3$, $S_{п.ш.} = 4\pi R^2$.

Допустим, что $V_{K_1} = V_{K_2}$, то есть $\pi r^2 h = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R^3 = \frac{3}{4} r^2 h \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3}{4} r^2 h}$, тогда $R^2 = \sqrt[3]{\frac{9}{16} r^4 h^2} = r\sqrt[3]{\frac{9}{16} r h^2}$.

$S_{п.ш.} = 4\pi R^2 = 4\pi r\sqrt[3]{\frac{9}{16} r h^2} \neq S_{п.ц.}$.

Ответ: не могут.

Задача 63 (№ 32.65). а) Плоскость делит пополам объем конуса. Следует ли из этого, что она делит пополам площадь его поверхности? б) Плоскость делит пополам площадь боковой поверхности конуса. Следует ли из этого, что она делит пополам его объем?

Дано: $K -$ конус.

а) Плоскость делит пополам объем конуса. Следует ли из этого, что она делит пополам площадь его поверхности? **б)** Плоскость делит пополам площадь боковой поверхности конуса. Следует ли из этого, что она делит пополам его объем?

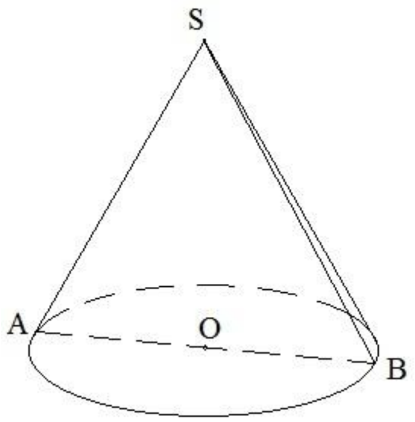


Рис. 91

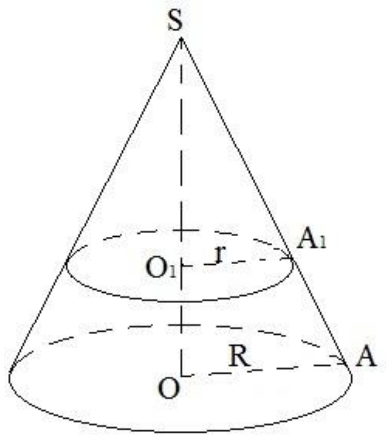


Рис. 92

Решение.

А. 1 случай – $\alpha -$ плоскость осевого сечения конуса ($\alpha = (ASB)$), эта плоскость делит пополам объем конуса (рис. 91).

В этом случае плоскость α делит пополам и площадь его поверхности, так как α делит пополам площадь боковой поверхности конуса и площадь основания.

2 случай – $\alpha -$ не является плоскостью осевого сечения конуса, но α делит пополам объем конуса (рис. 92).

Пусть $\alpha -$ параллельна основанию конуса, $V_{к.} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H$ – объем всего конуса, а объем малого конуса $V_{K.}^{m} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, где $r = O_1A_1$, $h = SO_1 -$ высота малого конуса. По условию, $V_{K.}^{m} = \frac{1}{2}V_{к.}$, то есть

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H \Rightarrow \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{2}R^2 \cdot H \quad (1).$$

$\Delta\, SO_1A_1 \sim \Delta\, SOA$ ($\angle\, SO_1A_1 = \angle\, SOA = 90°, O_1A_1 \parallel OA$), отсюда $\frac{SO_1}{SO} = \frac{O_1A_1}{OA}$, то есть $\frac{h}{H} = \frac{r}{R}$ (2). Но из (1): $\frac{r^2}{R^2} = \frac{H}{2h}$ или $\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{H}{2h}$ (3). Равенство (3) с учетом (2) примет вид: $\left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{H}{2h} \Rightarrow h^3 = \frac{H^3}{2} \Rightarrow h = \frac{H}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow h = \frac{H\cdot\sqrt[3]{4}}{2}$ (*). Тогда из (1) получаем: $r^2 \cdot \frac{H\cdot\sqrt[3]{4}}{2} = \frac{1}{2}R^2 \cdot H \Rightarrow r^2 = R^2 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{R^2\cdot\sqrt[3]{2}}{2} \Rightarrow r = \frac{R\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt[3]{2}} = \frac{R\cdot\sqrt[3]{4}}{2}$.

Итак, $h = \frac{H\cdot\sqrt[3]{4}}{2}, r = \frac{R\cdot\sqrt[3]{4}}{2}$.

В этом случае объем малого конуса равен половине объема самого конуса. Тогда $S_{п.к.} = \pi R \cdot l + \pi R^2$, где $l = SA -$ длина образующей большого конуса, $S_{п.к.}^{м.} = \pi r \cdot l_1 + \pi r^2$, где $l_1 = SA_1 -$ длина образующей малого конуса. Но $\frac{l_1}{l} = \frac{h}{H} = \frac{r}{R} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$, отсюда $l_1 = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}l$, поэтому $S_{п.к.}^{м.} = \pi \cdot \frac{R\cdot\sqrt[3]{4}}{2}\cdot\frac{\sqrt[3]{4}}{2}l + \pi\cdot\left(\frac{R\cdot\sqrt[3]{4}}{2}\right)^2 =$

$= \pi R \cdot l \cdot \frac{2\sqrt[3]{2}}{4} + \pi R^2 \cdot \frac{2\sqrt[3]{2}}{4} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{4}\cdot(\pi R l + \pi R^2) = \frac{2\sqrt[3]{2}}{4}\cdot S_{п.к.}$, отсюда $S_{п.к.}^{м.} \neq \frac{1}{2}S_{п.к.}$.

Следовательно, во втором случае плоскость α не делит пополам площадь его поверхности.

Б. <u>1 случай</u> – $\beta -$ плоскость осевого сечения конуса ($\beta = (ASB)$, рис. 91), она делит пополам площадь его боковой поверхности. Ясно, что β делит пополам и объем конуса.

<u>2 случай</u> – $\beta -$ параллельна плоскости основания конуса (рис. 92), и β делит пополам $S_{б.к.}$, то есть $S_{б.к.}^{м.} = \frac{1}{2}S_{б.к.}$ или $\pi r l_1 = \frac{1}{2}\pi R l$ (4), где $l_1 = OA_1$, $l = OA -$

образующие малого и большого конусов соответственно, r, R – радиусы оснований малого и большого конусов.

Но $\Delta SO_1A_1 \sim \Delta SOA$ ($\angle SO_1A_1 = \angle SOA = 90°, O_1A_1 \parallel OA$), отсюда $\frac{O_1A_1}{OA} = \frac{SA_1}{SA}$ или $\frac{r}{R} = \frac{l_1}{l}$ (5). Из равенства (4) имеем: $\frac{l_1}{l} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{r}$ (6). Из равенств (5) и (6) получаем: $\frac{r}{R} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{r} \Rightarrow r^2 = \frac{1}{2}R^2 \Rightarrow r = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ (7), тогда из (5) получаем:

$\frac{\frac{R\sqrt{2}}{2}}{R} = \frac{l_1}{l} \Rightarrow l_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}l$. Из подобия тех же треугольников следует, что

$\frac{h}{r} = \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}H$. Тогда $V_{к.} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H$,

а $V_{к.}^{м.} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} H = \frac{1}{3}(\pi R^2 H) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = V_{к.} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$, отсюда следует, что $V_{к.}^{м.} \neq \frac{1}{2}V_{к.}$. Следовательно, во втором случае плоскость β не делит пополам объем конуса.

Задача 64 (№ 32.66). Решите для конуса задачу, аналогичную задаче 32.63. Равны ли два конуса, у которых равны: а) площади боковых поверхностей и площади поверхностей; б) объемы и площади боковых поверхностей; в) объемы и площади поверхности.

Дано: K_1, K_2 – два конуса.

а) $S'_{б.п.} = S''_{б.п.}, S'_{п.п.} = S''_{п.п.}$;

б) $V'_{к.} = V''_{к.}$, $S'_{б.п.} = S''_{б.п.}$;

в) $V'_{к.} = V''_{к.}$, $S'_{п.п.} = S''_{п.п.}$.

Равны ли два конуса?

Решение.

А. $\begin{matrix} S'_{б.п.} = S''_{б.п.} \Rightarrow \\ S'_{п.п.} = S''_{п.п.} \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} \pi R_1 l_1 = \pi R_2 l_2 \ (1) \\ \pi R_1 l_1 + \pi {R_1}^2 = \pi R_2 l_2 + \pi {R_2}^2 \end{cases}$;

из системы получаем: $\pi {R_1}^2 = \pi {R_2}^2 \Rightarrow R_1 = R_2$.

Тогда из равенства (1) имеем: $\pi R_1 l_1 = \pi R_2 l_2 \Rightarrow l_1 = l_2$, отсюда $H_1 = H_2$.

Итак, $R_1 = R_2, H_1 = H_2$, отсюда следует, что $K_1 = K_2$.

Б. $S'_{б.п.} = S''_{б.п.} \Rightarrow \pi R_1 l_1 = \pi R_2 l_2$.

$V_{к.}' = V_{к.}'' = \frac{1}{3} \cdot \pi {R_1}^2 \cdot H_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi {R_2}^2 \cdot H_2.$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{R_2}{R_1} = \frac{l_1}{l_2} \ (2) \\ \frac{{R_2}^2}{{R_1}^2} = \frac{H_1}{H_2} \ (3) \end{cases} \text{или} \begin{cases} \frac{R_2}{R_1} = \frac{l_1}{l_2} \ (2) \\ \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \frac{H_1}{H_2} \ (3) \end{cases}.$$

Из (2) и (3) имеем: $\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 = \frac{H_1}{H_2} \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{\sqrt{H_1}}{\sqrt{H_2}},$

отсюда не следует, что $l_1 = l_2 \ (H_1 = H_2)$, то есть $l_1 \neq l_2$, вообще говоря.

Тогда из (2) следует, что $R_1 \neq R_2$. Следовательно, конусы K_1 *и* K_2, вообще говоря, не равны.

В. $V_{к.}' = V_{к.}'' \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \pi {R_1}^2 \cdot H_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi {R_2}^2 \cdot H_2.$

$S_{п.п.}' = S_{п.п.}'' \Rightarrow \pi R_1 l_1 + \pi {R_1}^2 = \pi R_2 l_2 + \pi {R_2}^2.$

Отсюда не следует, что $R_1 = R_2, H_1 = H_2$, то есть конусы K_1 *и* K_2, вообще говоря, не равны.

Задача 65 (№ 32.67). Рассмотрим три величины: объем цилиндра, площадь его боковой поверхности и площадь поверхности. Можете ли вы, зная две из них, найти третью? Решите такую же задачу для конуса.

Пусть $V_ц = V, S_{б.ц.} = S_1, S_{п.ц.} = S_2$.

Можно ли, зная две из этих величин, найти третью?

А. Дано: V, S_1.

Можно ли найти: S_2?

Решение.

$V = \pi R^2 \cdot H, S_1 = 2\pi R \cdot H,$ или

$\begin{cases} V = R(\pi RH) \\ S_1 = 2(\pi RH) \end{cases}$, отсюда $\pi RH = \frac{S_1}{2}$, тогда $V = R \cdot \frac{S_1}{2} \Rightarrow R = \frac{2V}{S_1}$.

Поэтому $S_2 = S_1 + 2\pi R^2 = S_1 + 2\pi \cdot \left(\frac{2V}{S_1}\right)^2 = S_1 + \frac{8\pi V^2}{S_1^2}$.

Итак, величину S_2 найти можно.

Б. Дано: $V, \ S_2$.

Можно ли найти: S_1?

Решение.

$V = \pi R^2 \cdot H$ (1), $S_2 = 2\pi R \cdot H + 2\pi R^2$ (2).

Из (1) имеем: $H = \frac{V}{\pi R^2}$, тогда (2) примет вид:

$S_2 = 2\pi R \cdot \frac{V}{\pi R^2} + 2\pi R^2 = 2\left(\frac{V}{R} + \pi R^2\right) = \frac{2(V+\pi R^3)}{R}$.

Но $S_1 = S_{б.ц.} = 2\pi RH = 2\pi R \cdot \frac{V}{\pi R^2} = \frac{2V}{R}$, $S_2 = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2$.

Радиус R цилиндра найти не удается (выразить через V и S_2), следовательно, найти S_1 через V и S_2 также не удается.

В. Дано: $S_2,\ S_1$.

Можно ли найти: V?

Решение.

$S_1 = 2\pi R \cdot H$ (I),

$S_2 = 2\pi R \cdot H + 2\pi R^2$,

отсюда, $S_2 = S_1 + 2\pi R^2 \Rightarrow 2\pi R^2 = S_2 - S_1 \Rightarrow R^2 = \frac{S_2 - S_1}{2\pi} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{S_2 - S_1}}{\sqrt{2\pi}}$.

Тогда из (I) имеем:$S_1 = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{S_2 - S_1}}{\sqrt{2\pi}} \cdot H \Rightarrow S_1 = \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{S_2 - S_1} \cdot H \Rightarrow$

$\Rightarrow H = \frac{S_1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{S_2 - S_1}}$. Тогда $V = \pi R^2 H = \pi \cdot \frac{S_2 - S_1}{2\pi} \cdot \frac{S_1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{S_2 - S_1}} = \frac{S_1\sqrt{S_2 - S_1}}{2\sqrt{2\pi}}$.

Следовательно, найти V можно.

Задача 66 (№ 32.68). Имеются два конуса. Может ли один из них иметь большую площадь боковой поверхности, а другой – большую площадь поверхности?

Дано: $K_1, K_2 -$ конусы.

Возможно ли, чтобы $S'_{б.к.} > S''_{б.к.}$, но $S'_{п.к.} < S''_{п.к.}$.

Решение.

$S'_{б.к.} = \pi R_1 l_1$, $S''_{б.к.} = \pi R_2 l_2$.

По условию, $\pi R_1 l_1 > \pi R_2 l_2$ (1) $\Rightarrow$ $\pi R_1 l_1 - \pi R_2 l_2 > 0$.

$S'_{п.к.} = \pi R_1 l_1 + \pi {R_1}^2$,

$S''_{б.к.} = \pi R_2 l_2 + \pi {R_2}^2$.

По условию, $S'_{п.к.} < S''_{п.к.}$, то есть $\pi R_1 l_1 + \pi {R_1}^2 < \pi R_2 l_2 + \pi {R_2}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ \pi R_1 l_1 - \pi R_2 l_2 < \ \pi {R_2}^2 - \pi {R_1}^2$, но $\pi R_1 l_1 - \pi R_2 l_2 \ > 0$, следовательно,

$\pi {R_2}^2 - \pi {R_1}^2 > 0 \Rightarrow \ \pi {R_2}^2 > \pi {R_1}^2 \Rightarrow R_2 > R_1$.

Из условия $\pi R_1 l_1 > \pi R_2 l_2$ имеем $R_1 l_1 > R_2 l_2 \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} < \frac{l_1}{l_2}$.

Но $R_2 > R_1$, следовательно, $\frac{R_2}{R_1} > 1$, поэтому $\frac{l_1}{l_2} > 1 \Rightarrow l_1 > l_2$.

Итак, если $R_1 < R_2$, но $l_1 > l_2$ и $\pi R_1 l_1 > \pi R_2 l_2$, то возможно, вообще говоря, чтобы $S'_{п.к.} < S''_{п.к.}$

Задача 67 (№ 32.69). Внутри конуса находится сфера. Может ли площадь ее поверхности быть равна: а) площади основания конуса; б) площади боковой поверхности конуса?

Дано: $K -$ конус, $\omega(Q; r) -$ сфера, $\omega -$ внутри K.

Возможно ли, что: а) $S_{сф.} = S_{осн.к.}$; б) $S_{сф.} = S_{б.к.}$.

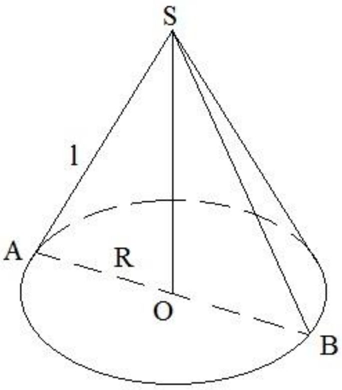


Рис. 93

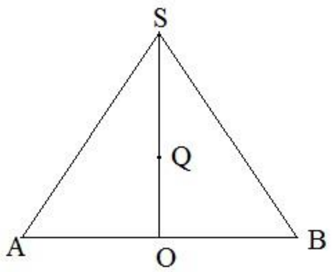


Рис. 94

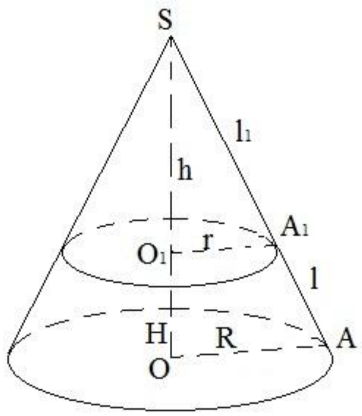


Рис. 95

Решение.

А. $S_{сф.} = 4\pi r^2$, $S_{осн.к.} = \pi R^2$. Допустим, что $4\pi r^2 = \pi R^2 \Rightarrow r^2 = \frac{R^2}{4} \Rightarrow r = \frac{R}{2}$, то есть радиус сферы должен быть равен половине радиуса основания конуса. Рассмотрим плоский аналог этой задачи, взяв осевое сечение конуса, тогда $OA = R, \ r = \frac{R}{2}$ (рис. 93 и 94).

Рассмотрим частный случай, когда высота H конуса такая, что $\Delta ASB -$ равносторонний, то есть $AS = BS = AB = 2R$, тогда $SO = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = R\sqrt{3}$; возьмем точку Q, $Q \in SO$, чтобы $OQ = \frac{1}{3}SO = \frac{R\sqrt{3}}{3}$, ясно, что $OQ > \frac{R}{2}$. С центром Q можно провести окружность радиуса $r = \frac{R}{2}$, которая будет лежать внутри ΔASB. Возвращаясь к данной задаче, получали, что если высота конуса $SO = R\sqrt{3}$ (то есть образующая конуса $l = 2R$), то площадь сферы ω, лежащей внутри конуса, может быть равна площади основания конуса, при этом $r = \frac{R}{2} -$ радиус сферы.

Б. $S_{сф.} = 4\pi r^2, S_{б.к.} = \pi Rl.$

Допустим, что $4\pi r^2 = \pi Rl \Rightarrow r^2 = \frac{Rl}{4} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{Rl}}{2}$, то есть радиус r сферы есть среднее геометрическое величин R, l, деленное на 2.

<u>Пример.</u>

Пусть $l = 2R$, то есть $\Delta ASB -$ равносторонний, тогда $r = \frac{\sqrt{R \cdot 2R}}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$;

для $\Delta ASB (AS = SB = AB = 2R)$ имеем $SO = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = R\sqrt{3}$,

возьмем точку $Q \in SO$, чтобы $OQ = \frac{1}{3}SO = \frac{R\sqrt{3}}{3}$. Но $\frac{R\sqrt{3}}{3} < \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

В этом случае сфера $\omega_1(Q; r)$, где $r = \frac{\sqrt{Rl}}{2}$ не будет лежать внутри конуса. Следовательно, равенство $S_{сф.} = S_{б.к.}$ невозможно.

Задача 68 (№ 32.70). Можно ли получить площадь боковой поверхности усеченного конуса, конуса, цилиндра, следуя схеме, указанной в задаче 32.54?

а) $V_{ус.к.} = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 h$, где $r, h -$ радиус и высота малого конуса (рис. 95).

Из подобия: $\Delta SO_1A_1 \sim \Delta SOA$ имеем: $\frac{r}{R} = \frac{h}{H} \Longrightarrow r = \frac{h}{H} \cdot R$, поэтому

$$V_{ус.к.} = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h}{H} \cdot R\right)^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi \frac{h^3}{H^2} \cdot R^2 .$$

$$\lim_{\Delta R \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta R} = V' = \frac{1}{3}\pi H \cdot 2R - \frac{1}{3}\pi \frac{h^3}{H^2} \cdot 2R =$$

$= \frac{2}{3}\pi HR - \frac{2}{3}\pi R \cdot \frac{h}{H^2} = \frac{\frac{2}{3}\pi H^3 R - \frac{2}{3}\pi R h^3}{H^2} = \frac{\frac{2}{3}\pi R(H^3 - h^3)}{H^2}$.

А. $S_{б.ус.к.} = \pi(R + r) \cdot l$, где $l -$ длина образующей.

Но $\frac{r}{R} = \frac{h}{H} \Longrightarrow r = \frac{h}{H} \cdot R, \frac{l_1}{l_1 + l} = \frac{h}{H}$ (I) (из подобия тех же треугольников),

$l_1 = \sqrt{h^2 + r^2}, l_1 + l = \sqrt{h^2 + r^2} + l,$ поэтому $S_{б.ус.к.} = \pi(R + \frac{h \cdot R}{H}) \cdot l$ (II).

Но из (I): $l_1 H = l_1 h + lh \Rightarrow lh = l_1(H - h) \Rightarrow l = \frac{l_1(H-h)}{h}$, $l_1 = \sqrt{h^2 + r^2}$,

следовательно, $l = \frac{\sqrt{h^2 + r^2}(H-h)}{h}$, следовательно, из (II) имеем:

$$S_{б.ус.к.} = \pi\left(R + \frac{h \cdot R}{H}\right) \cdot \frac{\sqrt{h^2 + r^2}(H-h)}{h} = \pi \cdot \frac{R(h+H)}{H} \cdot \frac{\sqrt{h^2 + r^2}(H-h)}{h} =$$

$= \frac{\pi R(H^2 - h^2) \cdot \sqrt{h^2 + r^2}}{Hh}$; $V'_{ус.к.} = \frac{\frac{2}{3}\pi R(H^3 - h^3)}{H^2}$, Ясно, что $S_{б.ус.к.} \neq V'_{ус.к.}$.

Б. $V = V_{к.} = \frac{1}{3}\pi R^2 H,$

$\lim_{\Delta R \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta R} = V' = \left(\frac{1}{3}\pi R^2 H\right)' = \frac{2}{3}\pi RH$; $S_{б.к.} = \pi Rl$.

В общем случае $\frac{2}{3}\pi RH \neq \pi Rl$, следовательно, $S_{б.к.} \neq V'_{к.}$.

В. $V_{ц.} = \pi R^2 H,$

$\lim_{\Delta R \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta R} = V' = (\pi R^2 H)' = 2\pi RH = S_{б.ц.}$.

Итак, $S_{б.ц.}$ можно получить из объема цилиндра по схеме в задаче 32.54.

ГЛАВА IV. ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «ВЕКТОРЫ И КООРДИНАТЫ»

IV.1. Исследовательские задачи к параграфу «Векторы»

Задача 69 (№ 34.13). Пусть на каждом ребре многогранника задан один вектор. Его длина равна длине ребра. Может ли быть, что: а) среди этих векторов нет равных; б) для каждого вектора найдется равный?

Дано: F – многогранник, каждое его ребро определяет вектор.

Доказать: а) среди этих векторов нет равных; б) для каждого вектора найдется равный?

Решение.

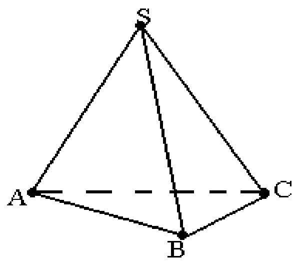


Рис. 96

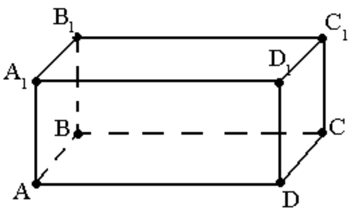


Рис. 97

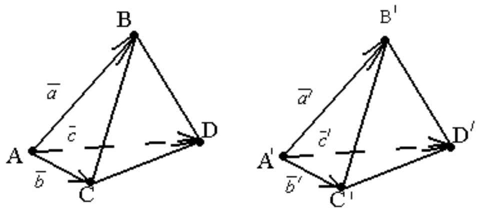


Рис. 98

А. М**ожет быть**, так как в многограннике может не быть равных ребер (по определению) и они могут быть не сонаправлены.

Приведем пример:

F = SABC – тетраэдр (см. рис. 96), тогда для $\forall\vec{a} \in \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}\right\}$ не существует равного ему.

Б. М**ожет быть**, если это куб или параллелепипед.

Пусть F = $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед (рис. 97). Тогда для

$\forall\vec{a} \in \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{DD_1}, \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{B_1C_1}, \overrightarrow{C_1D_1}, \overrightarrow{D_1A_1}\right\}$ существует равный ему вектор (и даже не один!).

Задача 70 (№ 34.14). Даны два многогранника. На каждом ребре каждого из них задан один вектор. Длина этого вектора равна длине ребра. При этом для каждого вектора одного из них можно найти равный ему вектор в другом. *а)* Будет ли у этих многогранников одинаковое число вершин, ребер, граней? *б)* Пусть один из многогранников правильный. Будет ли другой правильным? *в)* Пусть один из многогранников выпуклый. Будет ли другой выпуклым? Как выглядит аналогичная задача на плоскости?

Дано: F, F' – два многогранника. Каждое ребро каждого из них задает вектор, для $(\forall\vec{a}\in F)(\exists\vec{a}'\in F')$, что $\vec{a}'=\vec{a}$ (рис. 98).

Найти: а) равны ли числа e и e', k и k', f и f' (e, k, f – число вершин, ребер и граней соответственно)? б) F – правильный; будет ли F´– правильным? в) F – выпуклый; будет ли F´ – выпуклым?

Решение.

А. По условию, k = k´ (число ребер многогранников F и F´ соответственно). Пусть $\vec{a}=\overrightarrow{AB}(\in F)$, и $\vec{a}'=\overrightarrow{A'B'}(\in F')$, причем $\vec{a}=\vec{a}'$. Выполним параллельный перенос $T_{\vec{u}}:A\to A'$, то есть $\vec{u}=\overrightarrow{AA'}$, тогда, так как векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AC}=\vec{b}, \overrightarrow{BC}=\vec{c}$ (определяемые ребрами, исходящими из точки А) равны векторам $\overrightarrow{A'B'}=\vec{a}, \overrightarrow{A'C'}=\vec{b}, \overrightarrow{A'D'}=\vec{c}$ (определяемыми ребрами, исходящими из точки А´), то получаем, что $T_{\vec{u}}:A\to A', B\to B', C\to C', D\to D'$. Поэтому: $T_{\vec{u}}:ABCD\to A'B'C'D'$. А многогранники F и F´ можно разбить на конечное число тетраэдров, вида ABCD и A´B´C´D´ таких, что $T_{\vec{u}}:ABCD\to A'B'C'D'$. Следовательно, $T_{\vec{u}}:F\to F'\Rightarrow F=F'$, поэтому $e=e', k=k', f=f'$.

Б. Если F – правильный многогранник, то и F´– правильный многогранник, так как соответственные векторы равны, а длина их равна длине стороны. Допустим противное, что F´ – не является правильным многогранником, тогда для него найдутся хотя бы 2 ребра, длины которых не равны, например, $A'B'\neq A'C'$. Но тогда в многограннике F для соответствующих ребер AB и BC

$(AB = A'B', BC = B'C')$, получаем $AB \neq BC$, что невозможно, так как F – правильный многогранник.

В. Если F – выпуклый многогранник, то и F´– выпуклый многогранник. Допустим, что F´– не является выпуклым многогранником, тогда найдутся хотя бы две его вершины A´ и B´, лежащие по разные стороны от плоскости α' некоторой его грани, то есть отрезок A´B´ пересекает плоскость α' в некоторой точке X´. Поэтому для соответствующего многогранника F получаем, что соответствующие вершины A и B лежат по разные стороны от плоскости α соответствующей грани, откуда F – не является выпуклым многогранником, что противоречит условию. Значит, F´ – выпуклый многогранник.

Задача на плоскости будет выглядеть следующим образом.

Даны два многоугольника. На каждом ребре каждого из них задан один вектор. Длина этого вектора равна длине ребра. При этом для каждого вектора одного из них можно найти равный ему вектор в другом. а) Будет ли у этих многоугольников одинаковое число вершин, ребер? б) Пусть один из многоугольников правильный. Будет ли другой правильным? в) Пусть один из многоугольников выпуклый. Будет ли другой выпуклым?

Задача 71 (№ 34.15). $ABCDA_1B_1C_1D_1$ **— параллелепипед. Укажите такую точку X, что верно равенство** $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}+\overrightarrow{XA_1}+\overrightarrow{XB_1}+\overrightarrow{XC_1}+\overrightarrow{XD_1}=\vec{0}$**. Решите такую же задачу для другого многогранника. Единственна ли такая точка?**

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед (рис. 99).

Найти: точку X, что верно равенство

$\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}+\overrightarrow{XA_1}+\overrightarrow{XB_1}+\overrightarrow{XC_1}+\overrightarrow{XD_1}=\vec{0}$.

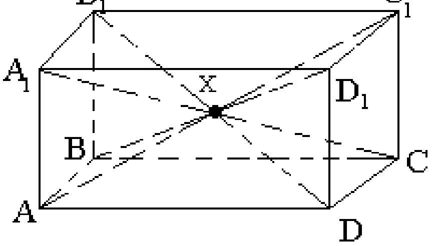


Рис. 99

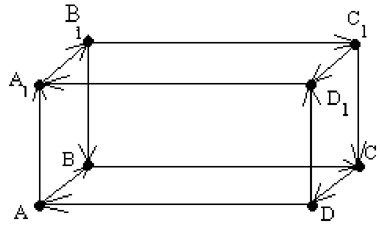


Рис. 100

Решение.

Искомая точка X – это точка пересечения диагоналей параллелепипеда, так как диагонали, пересекаясь, делятся пополам и X – центр симметрии параллелепипеда. Покажем, что должно выполняться равенство:

$\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}+\overrightarrow{XA_1}+\overrightarrow{XB_1}+\overrightarrow{XC_1}+\overrightarrow{XD_1}=\vec{0}$. Так как диагонали делятся пополам, то выполняется:

$\overrightarrow{XA}=-\overrightarrow{XC_1};\overrightarrow{XB}=-\overrightarrow{XD_1};\overrightarrow{XC}=-\overrightarrow{XA_1};\overrightarrow{XD}=-\overrightarrow{XB_1}$. Тогда получаем, что

$-\overrightarrow{XC_1}-\overrightarrow{XD_1}-\overrightarrow{XA_1}-\overrightarrow{XB_1}=\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}$, отсюда и вытекает искомое векторное равенство. В других многогранниках точка X должна быть центром симметрии, и если центр симметрии X есть, то эта точка является искомой, и она единственная!

Задача 72 (№ 34.16). **а)** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ **— параллелепипед. Рассматриваются все векторы, заданные его ребрами (на каждом ребре по одному вектору). Можно ли составить из них сумму, равную** $\vec{0}$**? б) Решите такую же задачу, если дан тетраэдр. в) Решите такую же задачу для другого многогранника.**

А. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед (рис. 100).

Установить:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\vec{0}.$$

Решение.

Параллелепипед состоит из шести граней и все они параллелограммы. А в параллелограмме противоположные ребра равны и параллельны. Поэтому, направив векторы противоположных сторон в разные стороны, получим, что $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD};\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{DA};\overrightarrow{AA_1}=-\overrightarrow{BB_1};\overrightarrow{DD_1}=-\overrightarrow{CC_1};\overrightarrow{A_1B_1}=-\overrightarrow{C_1D_1};\overrightarrow{B_1C_1}=-\overrightarrow{D_1A_1}$. Следовательно, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=$

$$=-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}-\overrightarrow{CC_1}-\overrightarrow{C_1D_1}-\overrightarrow{D_1A_1}+\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\vec{0}.$$

В параллелепипеде можно составить сумму векторов, равную $\vec{0}$.

Б. Дано: F = SABC – тетраэдр (рис. 101).

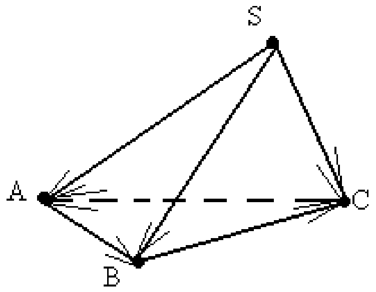


Рис. 101

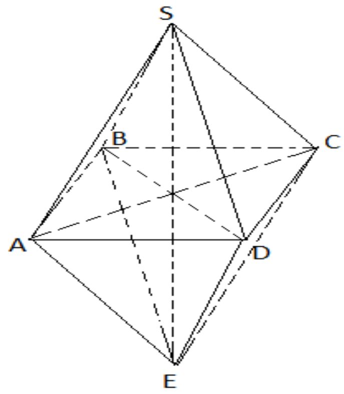


Рис. 102

Установить: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}.$

Решение.

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$, тогда

$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC})=\vec{0}+(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC})=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}.$

2) Но $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\neq\vec{0}$, так как векторы $\overrightarrow{SA},\ \overrightarrow{SB},\ \overrightarrow{SC}$ не лежат в одной плоскости. Если бы $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}$, то это значило бы, что вектор $\overrightarrow{SC}$ лежит в плоскости векторов $\overrightarrow{SA},\ \overrightarrow{SB}$, то есть они компланарны (что невозможно). Вывод: в тетраэдре нельзя составить сумму векторов, равную $\vec{0}$.

В. Дано: F – многогранник, отличный от параллелепипеда и тетраэдра.

Решение.

Для произвольного многогранника такую сумму векторов, определяемых ребрами многогранника, равную $\vec{0}$, составить нельзя, так как, в конечном счете, в этой сумме для каждого вектора должен присутствовать ему противоположный, следовательно, у многогранника должны быть пары равных и параллельных ребер, что не обязательно (например, у тетраэдра). А для некоторых частных случаев, например, правильного октаэдра (рис. 102) такую сумму составить можно: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

Задача 73 (№ 34.17). Может ли выполняться равенство для ненулевых векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},$ не параллельных одной плоскости: а) $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\left|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right|$;

б) $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\left|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}\right|$?

Для того, чтобы определить выполняются эти равенства или нет, рассмотрим куб. Пусть $\vec{a}\in\left\{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{B_1C_1}\,\overrightarrow{AD},\overrightarrow{A_1D_1}\right\}$, так как BC, AD, B_1C_1, A_1D_1 – равны и параллельны; $\vec{b}\in\left\{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{B_1A_1},\overrightarrow{C_1D_1}\right\}$ так как BA, CD, B_1A_1, C_1D_1 – равны и параллельны; $\vec{c}\in\left\{\overrightarrow{DD_1},\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{CC_1}\right\}$ так как DD_1, CC_1, AA_1, BB_1 – равны и параллельны.

А. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб.

Доказать: $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\left|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right|$.

Решение.

1) $\vec{a}=\overrightarrow{BC},\quad \vec{b}=\overrightarrow{CD}$, тогда $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}$, $\vec{c}=\overrightarrow{DD_1}$, и получаем: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{BD_1}$. Следовательно, $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\left|\overrightarrow{BD_1}\right|$ (см. рис. 103).

2) $\vec{a}=\overrightarrow{B_1C_1},\ \vec{b}=\overrightarrow{C_1D_1}$, тогда $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{B_1D_1}$, $\vec{c}=\overrightarrow{DD_1}$, тогда $-\vec{c}=\overrightarrow{D_1D}$ и получаем: $(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}=\overrightarrow{B_1D_1}+\overrightarrow{D_1D}=\overrightarrow{B_1D}$. Следовательно, $\left|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right|=\left|\overrightarrow{B_1D}\right|$ (см. рис. 104).

3) А $\left|\overrightarrow{BD_1}\right|=\left|\overrightarrow{B_1D}\right|$, так как это диагонали куба, а диагонали куба равны. Получаем, что $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\left|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right|$.

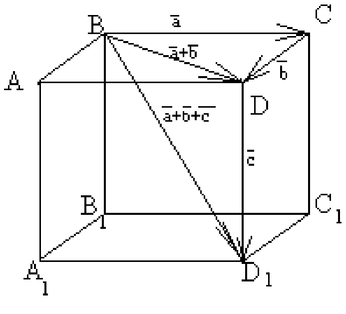


Рис. 103

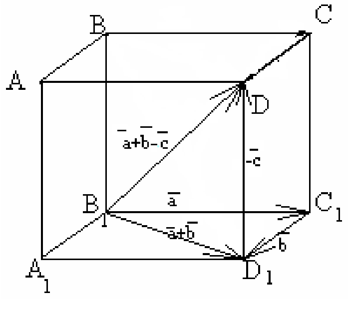


Рис. 104

Б. <u>Дано:</u> $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\left|\overrightarrow{BD_1}\right|$ (см. рис. 105).

<u>Доказать:</u> $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\left|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}\right|$.

<u>Решение.</u>

1) Равенство $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\left|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right|$ уже доказано в случае а). Найдем, чему будет

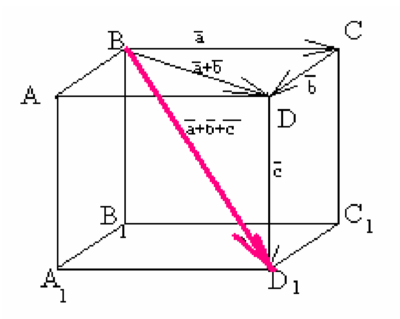


Рис. 105

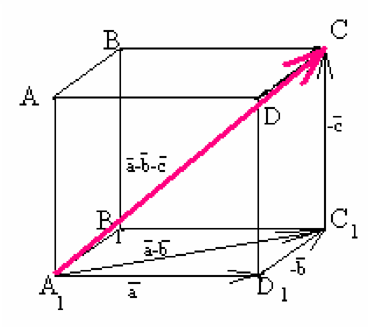


Рис. 106

равно $\left|\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}\right|$, для этого снова возьмем куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где $\vec{a}=\overrightarrow{A_1D_1}$, $\vec{b}=\overrightarrow{C_1D_1}$, $\vec{c}=\overrightarrow{CC_1}$, тогда $-\vec{b}=\overrightarrow{D_1C_1}$, $-\vec{c}=\overrightarrow{C_1C}$. Следовательно, получаем:

$\left|\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}\right|=\left|\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{C_1C}\right|=\left|\overrightarrow{A_1C}\right|$, где A_1C – диагональ куба (см. рис. 106).

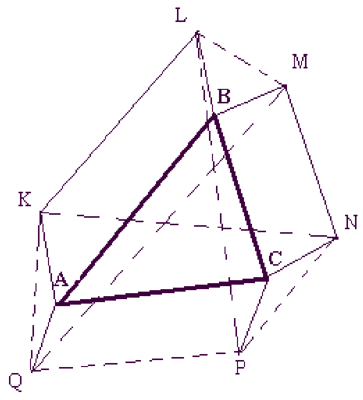
2) А $\left|\overrightarrow{BD_1}\right|=\left|\overrightarrow{B_1D}\right|=\left|\overrightarrow{A_1C}\right|$, так как это диагонали куба, а диагонали куба равны. Получаем, что $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\left|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}\right|$.

Задача 74 (№ 34.18). На сторонах треугольника ABC построены параллелограммы AKLB, BMNC, CPQA (порядок обхода вершин этих параллелограммов один и тот же). Можно ли составить треугольник из отрезков:

а) LM, NP, QK; б) LP, MQ, NK?

<u>Дано:</u> ABC – треугольник, AKLB, BMNC, CPQA – параллелограммы (см. рис. 107).

<u>Установить:</u> возможность построения треугольника: а) из отрезков LM, NP, QK; б) из отрезков LP, MQ, NK.



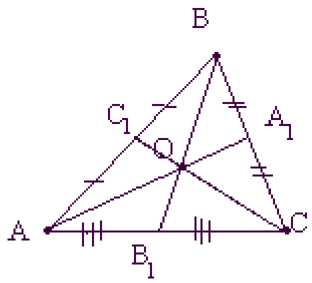


Рис. 107 Рис. 108

<u>Решение.</u>

А. $\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QK}=(\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BL})+(\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CN})+(\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AQ})=$

$$=(\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{AK})+(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{CN})+(\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AQ})=\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AQ}=\vec{0},$$

следовательно, из отрезков LM, NP, QK можно построить треугольник.

Б.

$$\overrightarrow{LP}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{NK}=(\overrightarrow{LB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP})+(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AQ})+(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AK})=$$
$$=(\overrightarrow{LB}+\overrightarrow{AK})+(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC})+(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{AQ})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA})=2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AQ}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA})=$$
$$=2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AQ}+2\overrightarrow{BA}=2(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{BA})=2\overrightarrow{MQ}\neq\vec{0}.$$

Следовательно, из отрезков LP, MQ, NK треугольник построить нельзя.

Задача 75 (№ 34.20). Можно ли составить: а) треугольник из медиан данного треугольника; б) замкнутую ломаную из отрезков, идущих из каждой вершины тетраэдра в точку пересечения медиан противоположной грани?

А. <u>Дано:</u> АВС – треугольник, AA_1, BB_1, CC_1 – его медианы (см. рис. 108).

<u>Можно ли:</u> составить треугольник из отрезков AA_1, BB_1, CC_1?

<u>Решение.</u>

Так как AA_1, BB_1, CC_1 – медианы, то имеем: $\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$,

$\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$, $\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$, отсюда находим, что

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=$$

$$=\frac{1}{2}((\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}))=\frac{1}{2}(\vec{0}+\vec{0})=\vec{0}.$$

Следовательно, из отрезков AA_1, BB_1, CC_1 можно составить треугольник.

Б. <u>Дано:</u> SABC – тетраэдр, A_1, B_1, C_1, S_1 – точки пересечения медиан граней SBC, SAC, SAB, ABC соответственно (см. рис. 109).

<u>Можно ли:</u> составить замкнутую ломаную из отрезков $AA_1,\ BB_1,\ CC_1,\ SS_1$?

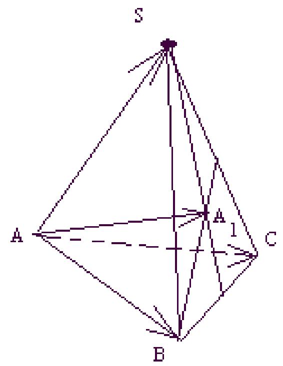


Рис. 109

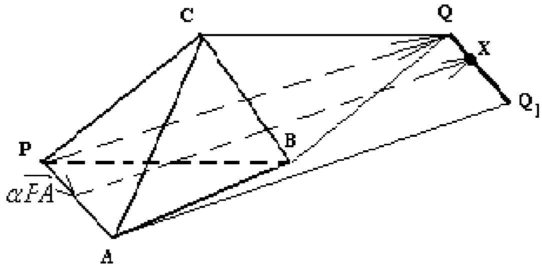


Рис. 110

<u>Решение.</u>

Имеем (см. задачу № 35.4):

$$\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AS});\ \overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BS});$$

$$\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CS});\ \overrightarrow{SS_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}),$$

тогда $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{SS_1}=$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC})=\frac{1}{3}\cdot\vec{0}=\vec{0},$$

следовательно, из отрезков AA_1, BB_1, CC_1, SS_1 можно составить замкнутую ломаную.

Задача 76 (№ 34.21). PABC — тетраэдр. Какую фигуру образуют точки X, такие, что а) $\overrightarrow{PX}=\alpha\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$; б) $\overrightarrow{PX}=\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$;

в) $\overrightarrow{PX}=\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}+\gamma\overrightarrow{PC}$ (0 ≤ α ≤ 1, 0 ≤ β ≤ 1, 0 ≤ γ ≤ 1)?

<u>Дано:</u> PABC – тетраэдр.

<u>Найти:</u> какую фигуру образуют точки X, если:

а) $\overrightarrow{PX}=\alpha\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$; **б)** $\overrightarrow{PX}=\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$; **в)** $\overrightarrow{PX}=\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}+\gamma\overrightarrow{PC}$**.**

<u>Решение.</u>

А. Рассмотрим тетраэдр PABC и построим сумму двух векторов $\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$. Получим, что $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PQ}$ (см. рис. 110).

Тогда, чтобы определить чему равняется $\alpha\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PQ}$, построим параллелограмм PQQ_1A на векторах $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PQ}$. Значит, $\alpha\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\alpha\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PX}$, где X – точка на отрезке QQ_1. Точки X образуют отрезок QQ_1.

Б. 1) Рассмотрим тетраэдр PABC и построим сумму $\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PY}$, тогда точки Y «заполнят» параллелограмм PAA_1B (см. рис. 111).

2) $\overrightarrow{PX}=\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$, поэтому точки X «заполнят» параллелограмм CMNQ (см. рис. 111).

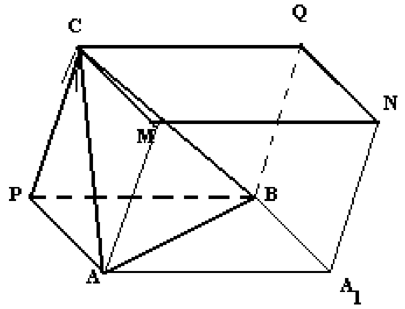


Рис. 111

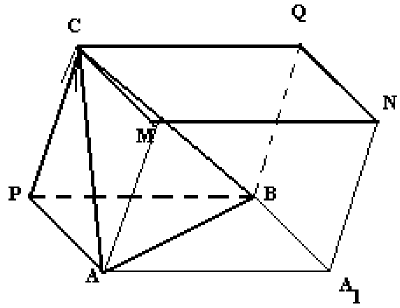


Рис. 112

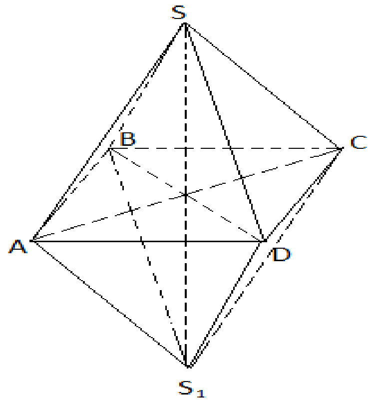


Рис. 113

В. Мы знаем, что $\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PY}$, тогда точки Y «заполнят» параллелограмм PAA_1B. Тогда точка X, для которой $\overrightarrow{PX}=\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}+\gamma\overrightarrow{PC}$ «заполнит» параллелепипед PAA_1BCMNQ (см. рис. 112).

Задача 77 (№ 34.22). Дан правильный октаэдр с ребром 1. Какие значения принимает скалярное произведение векторов, заданных его вершинами? Сможете ли вы решить аналогичную задачу для правильного икосаэдра?

<u>Дано:</u> F – правильный октаэдр, AB = 1 (см. рис. 113).

<u>Найти:</u> скалярное произведение векторов, заданных его вершинами.

<u>Решение.</u>

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DA}=0$, так как ABCD – квадрат.

2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AS}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AS}\right|\cos 60^\circ=1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, так как треугольник ASB – правильный.

3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BS}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BS}\right|\cos(180^\circ-60^\circ)=1\cdot 1\cdot(-\cos 60^\circ)=-\frac{1}{2}$.

Аналогично, все остальные скалярные произведения вектора (из квадрата ABCD) и вектора из множества $\{\overrightarrow{AS},\overrightarrow{BS},\overrightarrow{CS},\overrightarrow{DS},\overrightarrow{AS_1},\overrightarrow{BS_1},\overrightarrow{CS_1},\overrightarrow{DS_1}\}$ принимают значения $+\frac{1}{2}$ или $(-\frac{1}{2})$.

4) $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AS_1}=\overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{BS_1}=\overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{CS_1}=\overrightarrow{DS}\cdot\overrightarrow{DS_1}=0$, так как SAS_1C – квадрат, SBB_1D – квадрат.

5) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=1$, так как перемножаемые векторы равны, параллельны и сонаправлены.

6) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=-1$, так как перемножаемые векторы – противоположны. Итак, возможные значения, которые принимают скалярные произведения векторов: 0, $-\dfrac{1}{2}$, $+\dfrac{1}{2}$, 1, –1 .

Задача 78 (№ 34.23). Пусть ABCD – прямоугольник, а точка P – произвольная точка пространства. Верны ли такие равенства:

а) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$**; б)** $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}$**?**

__Дано:__ ABCD – прямоугольник, P – произвольная точка пространства (рис. 114).

__Проверить:__ а) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$**; б)** $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}$**?**

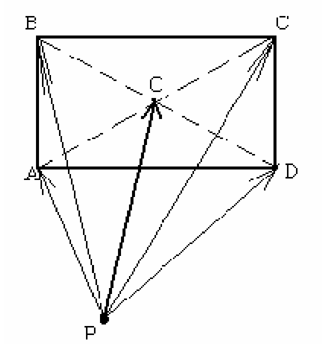


Рис. 114

__Решение.__

А. 1) Имеем: $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OA}$, тогда

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{PO}^2-\overrightarrow{OA}^2=\left|\overrightarrow{PO}\right|^2-\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 \quad (1)$$

2) Аналогично,

$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OB}$, тогда

$$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{PO}^2-\overrightarrow{OB}^2=\left|\overrightarrow{PO}\right|^2-\left|\overrightarrow{OB}\right|^2 \quad (2)$$

3) Но $\left.\begin{matrix}AC=BD\\ AO=OC\\ BO=OD\end{matrix}\right\}\Rightarrow AO=OB$, поэтому правые части в (1) и (2) равны, следовательно, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$.

Б. Проверим, верно ли равенство $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}$?

Имеем: $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OA}$,

$\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OB}$. Тогда:

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{PO}^2+\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$,

$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=\left(\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{PO}^2-\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}.$ Ясно, что

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}\Leftrightarrow\overrightarrow{PO}^2+\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$

$=\overrightarrow{PO}^2-\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow$

$2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PO}=0\Leftrightarrow 2\overrightarrow{PO}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\right)=0\Leftrightarrow\ \overrightarrow{PO}\perp\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\right)$. В общем случае, такого нет, следовательно, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\neq\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}$.

IV.2. Исследовательские задачи к параграфу «Разложение вектора на составляющие»

Замечание.

Составляющими данного вектора *называются векторы, дающие в сумме этот вектор. В пространстве всякий вектор допускает, и притом единственное, разложение: на три составляющие, параллельные трем пересекающимся прямым, не лежащим в одной плоскости. При сложении векторов их соответствующие составляющие складываются. При умножении вектора на число их соответствующие составляющие умножаются на это число.*

Базисом в пространстве *является любая тройка векторов, непараллельных одновременно никакой плоскости* (такие векторы называются ***некомпланарными***).

Радиус-вектором точки X *с началом в точке O называется вектор* $\overrightarrow{OX}$.

Задача 79 (№ 35.36). Векторы $\left(\vec a,\vec b,\vec c\right)$ **образуют базис пространства. Будут ли образовывать базис пространства векторы:** $а)\ x\vec a,\ y\vec b,\ z\vec c$;

$б)\ \vec a+\vec b,\vec b+\vec c,\vec c+\vec a;\ в)\ \vec a+\vec b-\vec c,\ \vec a-\vec b+\vec c,\ -\vec a+\vec b+\vec c;\ г)\ \vec b+x\vec c,\ \vec c+y\vec a,\ \vec a+z\vec b$, **где** x, y, z **– действительные числа?**

Дано: $B=\left(\vec a,\vec b,\vec c\right)$ – базис пространства.

Установить: образуют ли базис пространства векторы:

$а)\ x\vec a, y\vec b, z\vec c;\ б)\ \vec a+\vec b,\vec b+\vec c,\vec c+\vec a;\ в)\ \vec a+\vec b-\vec c,\vec a-\vec b+\vec c,-\vec a+\vec b+\vec c;$

г) $\vec{b}+x\vec{c}, \vec{c}+y\vec{a}, \vec{a}+z\vec{b}$, где $x, y, z \in R$

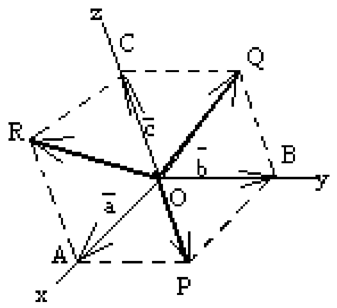


Рис. 115

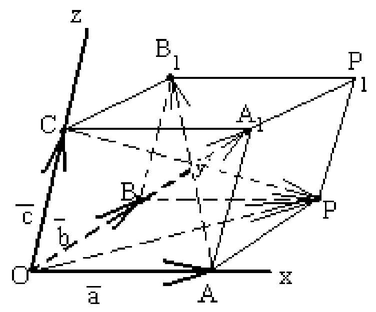


Рис. 116

Решение.

А. Векторы $x\vec{a},\ y\vec{b},\ z\vec{c}$ образуют базис (см. рис. 115), если $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ z \neq 0 \end{cases}$; в этом случае эти векторы не компланарны.

Б. $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}\subset Oxy,\ \vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OQ}\subset Oyz,$

$\vec{c}+\vec{a}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OR}\subset Oxz$ (см. рис. 115); векторы $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ – не компланарны, а потому образуют базис.

В. Пусть $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c},\ \vec{n}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c},\ \vec{p}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; тогда:

$\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CP}$ (рис. 116);

$\vec{n}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA_1};$

$\vec{p}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB_1};$ ясно, что векторы $\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{AB_1}$ – не компланарны, следовательно, векторы $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ образуют базис.

Г. $\vec{u}=\vec{b}+x\vec{c},\ \vec{v}=\vec{c}+y\vec{a},\ \vec{w}=\vec{a}+z\vec{b}\ (x, y, z \in R)$; допустим, что $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ – базис при $\forall x, y, z \in R$; пусть x = -1, y = -1, z = -1, тогда $\begin{cases} \vec{u}=\vec{b}-\vec{c} \\ \vec{v}=\vec{c}-\vec{a} \\ \vec{w}=\vec{a}-\vec{b} \end{cases}$, отсюда $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$, следовательно, векторы $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ лежат в одной плоскости, а значит, не образуют базис; пришли к противоречию. следовательно, векторы $\vec{b}+x\vec{c}, \vec{c}+y\vec{a}, \vec{a}+z\vec{b}$ не образуют базис.

Задача 80 (№ 35.37). Напишите систему двух линейных уравнений с двумя переменными. Дайте ей векторное истолкование. Исходя из него, исследуйте систему.

Дано: $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$ (1).

Дать: векторное истолкование системы (1).

Решение.

Пусть $\vec{a}\{a_1, b_1\}$, $\vec{b}\{a_2, b_2\}$, $\vec{x}\{x, y\}$, тогда $a_1x + b_1y = \vec{a}\vec{x}$, $a_2x + b_2y = \vec{b}\vec{x}$, следовательно, система (1) примет вид: $\begin{cases} \vec{a}\vec{x} = c_1 \\ \vec{b}\vec{x} = c_2 \end{cases}$ (2). В уравнении мы можем умножить на число, отличное от нуля, и левую, и правую часть. Тогда система (2) примет вид: $\begin{cases} b_2(\vec{a}\cdot\vec{x}) = b_2c_1 \\ b_1(\vec{b}\cdot\vec{x}) = b_1c_2 \end{cases}$. Вычтем из верхнего уравнения нижнее, получим: $(b_2\vec{a} - b_1\vec{b})\vec{x} = b_2c_1 - b_1c_2 (*)$. Рассмотрим «коэффициент» при $\vec{x}$:

$\left(b_2\vec{a} - b_1\vec{b}\right)\cdot\vec{x} = \left(b_2a_1 - b_1a_2\right)\cdot x + 0\cdot y = \left(b_2a_1 - b_1a_2\right)\cdot x$, так как

$b_2\vec{a} - b_1\vec{b} = b_2\{a_1, b_1\} - b_1\{a_2, b_2\} = \{b_2a_1 - b_1a_2, 0\}$. Поэтому:

а) если $b_2a_1 - b_1a_2 \neq 0,$ то уравнение (*), а значит и система (2) имеет единственное решение;

б) если $b_2a_1 - b_1a_2 = 0,$ но $b_2c_1 - b_1c_2 \neq 0,$ то уравнение (*) не имеет решений, следовательно, и система (2) не имеет решений;

в) если $b_2a_1 - b_1a_2 = 0,$ $b_2c_1 - b_1c_2 = 0,$ то (*) имеет бесконечно много решений, следовательно, и система (2) имеет бесконечно много решений.

Но мы могли умножить левую и правую части системы (2) не на $b_2, b_1,$ а на a_2, a_1. Тогда уравнение (*) выглядело бы так: $(b_2\vec{a} - b_1\vec{b})\vec{x} = a_2c_1 - a_1c_2 (*)$ и решение было бы:

а) если $b_2a_1 - b_1a_2 \neq 0,$ то уравнение (*), а значит и система (2) имеет единственное решение;

б) если $b_2a_1 - b_1a_2 = 0,$ но $a_2c_1 - a_1c_2 \neq 0,$ то уравнение (*) не имеет решений, следовательно, и система (2) не имеет решений;

в) если $b_2a_1 - b_1a_2 = 0,$ $a_2c_1 - a_1c_2 = 0,$ то уравнение (*) имеет бесконечно много решений, следовательно, и система (2) имеет бесконечно много решений.

Поэтому ответ выглядит так:

а) если $b_2a_1 - b_1a_2 \neq 0,$ то уравнение (*), а значит и система (2) имеет единственное решение;

б) если $b_2a_1 - b_1a_2 = 0,$ но $b_2c_1 - b_1c_2 \neq 0$ или $a_2c_1 - a_1c_2 \neq 0,$ то уравнение (*) не имеет решений, следовательно, и система (2) не имеет решений;

в) если $b_2a_1 - b_1a_2 = 0,$ и $\begin{cases} b_2c_1 - b_1c_2 = 0 \\ a_2c_1 - a_1c_2 = 0 \end{cases},$ то (*) имеет бесконечно много решений, следовательно, и система (2) имеет бесконечно много решений.

Задача 81 (№ 35.38). Пусть O_1, O_2 – центры вписанного и описанного шаров для правильной пирамиды PABC. Сможете ли вы разложить на составляющие по прямым PA, PB и PC векторы $\overrightarrow{PO_1}$ и $\overrightarrow{PO_2}$?

Дано: $PABC-$ правильный тетраэдр $(AB = BC = CA = a, PA = PB = PC = a)$, O_1 – центр вписанного шара $\omega_1(O_1; r),$ O_2 – центр описанного шара $\omega_2(O_2; R)$ (см. рис. 117).

Установить: возможность разложения векторов $\overrightarrow{PO_1}$ и $\overrightarrow{PO_2}$ по базису $\overrightarrow{PA},$ $\overrightarrow{PB},$ $\overrightarrow{PC}.$

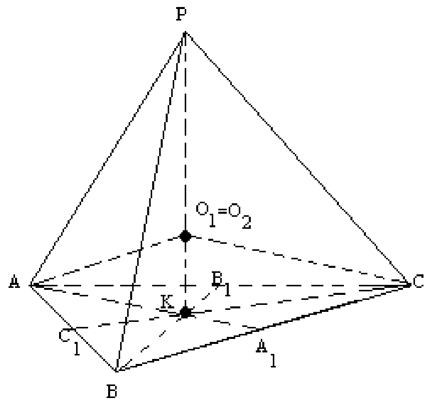


Рис. 117

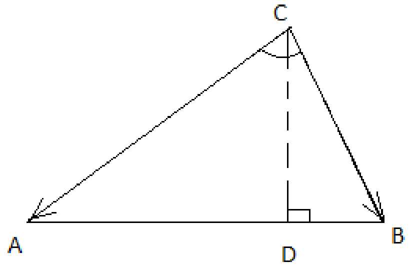


Рис. 118

<u>Решение.</u>

А. Для вектора $\overrightarrow{PO_1}$.

1) Имеем: $\overrightarrow{PK}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$ (К – точка пересечения медиан Δ ABC, см. задачу № 35.5).

2) $AB=BC=CA=a, PA=PB=PC=a$, тогда

$BA_1=\frac{a}{2}, AA_1=\sqrt{AB^2-BA_1^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$AK=\frac{2}{3}AA_1=\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$; найдем высоту:

$PK=\sqrt{AP^2-AK^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

3) $AO_1=PO_1=CO_1=R-$ радиус описанного шара,

$PO_1=PK-O_1K=\frac{a\sqrt{6}}{3}-x=AO_1$. Из треугольника AO_1K получаем:

$(AK)^2+(KO_1)^2=(AO_1)^2$, то есть $\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2+x^2=\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}-x\right)^2$ или получаем:

$\frac{3a^2}{9}+x^2=\frac{\left(a\sqrt{6}-3x\right)^2}{9}$, или

$3a^2+9x^2=6a^2-6ax\sqrt{6}+9x^2\Rightarrow\left(-3a^2=-6ax\sqrt{6}\right)\Rightarrow x=\frac{a\sqrt{6}}{12}$;

$O_1K = \frac{a\sqrt{6}}{12} \Rightarrow PO_1 = PK - O_1K = \frac{a\sqrt{6}}{3} - \frac{a\sqrt{6}}{12} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$; тогда получаем:

$\left.\begin{array}{l} PO_1 = \frac{a\sqrt{6}}{4} \\ PK = \frac{a\sqrt{6}}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow PO_1 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{4}PK.$ Итак, $\overrightarrow{PO_1} = \frac{3}{4}\overrightarrow{PK}.$ Но

$\overrightarrow{PK} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right)$, поэтому $\overrightarrow{PO_1} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}).$

Б. Для вектора $\overrightarrow{PO_2}$.

$r = \rho(O_2,\ \mathrm{APB}) = \rho(\mathrm{O}_2, ABC) = \rho(O_2, BPC) = \rho(O_2, \mathrm{APC}) = \mathrm{O}_2K$.

По Лемме 32.1 [1, п. 32.1] имеем: *объем* $V(F)$ *многогранника* $F = PABC$, *описанного вокруг шара радиуса* r, *и площадь* $S(F)$ *его поверхности связаны соотношением:* $V(F) = \frac{1}{3}\cdot S(F)\cdot r$.

В нашем случае:

$$V(F) = \frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABC}\cdot PK = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a\cdot a\cdot\sin 60^{o}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{18}\cdot a^3\cdot\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a^3\cdot 3\sqrt{2}}{36} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12};$$

$$S(F) = 4\cdot S_{\Delta ABC} = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\sin 60^{o} = 2a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = a^2\cdot\sqrt{3}.$$

Тогда $\frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{1}{3}\cdot a^2\sqrt{3}\cdot r \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{2}\cdot 3}{\sqrt{3}\cdot 12} = \frac{a\sqrt{6}}{12};\quad r = \frac{a\sqrt{6}}{12} = O_2K$;

$$PO_2 = PK - O_2K = \frac{a\sqrt{6}}{3} - \frac{a\sqrt{6}}{12} = \frac{3a\sqrt{6}}{12} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Получаем, $PO_2 = \frac{a\sqrt{6}}{4} = PO_1$ (для правильного тетраэдра).

Следовательно, $\overrightarrow{PO_2} = \overrightarrow{PO_1} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$.

Задача 82 (№ 35.39). **В треугольнике** ABC **проведена высота** CD**. Разложите вектор** $\overrightarrow{CD}$ по $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CA}$.

<u>Дано:</u> $\Delta ABC, CD \perp AB;\ \overrightarrow{CB} = \vec{a},\ \overrightarrow{CA} = \vec{b}$ (рис. 118).

Разложить $\overrightarrow{CD}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение.

1) Пусть $\overrightarrow{CD} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$, а $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$.

Но $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, т.е. $\left(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = 0$ или

$\alpha\vec{a}^2 - \beta\vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b}\left(\beta - \alpha\right) = 0$, или $\alpha a^2 - \beta b^2 + \vec{a}\vec{b}(\beta - \alpha) = 0$ (1),

отсюда $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{\beta b^2 - \alpha a^2}{\beta - \alpha}$ (2).

2) $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{AB}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot \dfrac{\beta b^2 - \alpha a^2}{\beta - \alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot \dfrac{\beta b^2 - \alpha a^2}{\beta - \alpha}}$.

3) Пусть $AD = x$, тогда $DB = AB - x$, имеем: $CD^2 = b^2 - x^2$ и

$CD^2 = a^2 - (AB - x)^2$, то есть $b^2 - x^2 = a^2 - AB^2 + 2AB \cdot x - x^2$ или

$$b^2 = a^2 - (a^2 + b^2 - 2 \cdot \frac{\beta b^2 - \alpha a^2}{\beta - \alpha}) + 2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot \frac{\beta b^2 - \alpha a^2}{\beta - \alpha}} \cdot x \Rightarrow$$

$$2b^2 = 2 \cdot \frac{\beta b^2 - \alpha a^2}{\beta - \alpha} + 2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot \frac{\beta b^2 - \alpha a^2}{\beta - \alpha}} \cdot x;$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot \frac{\beta b^2 - \alpha a^2}{\beta - \alpha}} \cdot x = b^2 - \frac{\beta b^2 - \alpha a^2}{\beta - \alpha} \Rightarrow x = \frac{b^2 - \dfrac{\beta b^2 - \alpha a^2}{\beta - \alpha}}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot \dfrac{\beta b^2 - \alpha a^2}{\beta - \alpha}}};$$

тогда $\overrightarrow{AD} = x \cdot \overrightarrow{AB}$ $(\overrightarrow{DB} = (1 - x) \cdot \overrightarrow{AB})$, то есть $\overrightarrow{AD} = x \cdot (\vec{a} - \vec{b})$.

4) Но $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \vec{b} + x\vec{a} - x\vec{b} = x\vec{a} + (1 - x)\vec{b}$. Итак, $\overrightarrow{CD} = x\vec{a} + (1 - x)\vec{b}$,

где $x = \dfrac{b^2 - \dfrac{\beta b^2 - \alpha a^2}{\beta - \alpha}}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot \dfrac{\beta b^2 - \alpha a^2}{\beta - \alpha}}}$ (*).

С другой стороны, $\overrightarrow{CD} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, поэтому $\begin{cases} \alpha = x, \\ \beta = 1 - x \end{cases}$, и (*) примет вид:

$$x=\frac{b^2-\frac{(1-x)b^2-xa^2}{1-2x}}{\sqrt{a^2+b^2-2\cdot\frac{(1-x)b^2-xa^2}{1-2x}}}=\frac{\frac{b^2(1-2x)-((1-x)b^2-xa^2)}{1-2x}}{\sqrt{\frac{(a^2+b^2)\cdot(1-2x)-2\cdot(1-x)b^2-xa^2}{1-2x}}},$$

$$x=\frac{b^2-b^2 2x-b^2+xb^2+xa^2}{1-2x}\cdot\frac{\sqrt{1-2x}}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{x(a^2-b^2)\sqrt{1-2x}}{(1-2x)\cdot\sqrt{a^2-b^2}},$$

$$x=\left.\frac{x\cdot\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-2x}}\right|:\mathrm{x}\neq 0.$$

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-2x}}=1\Rightarrow\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{1-2x}\Rightarrow a^2-b^2=1-2x\Rightarrow x=\frac{1-a^2+b^2}{2}.$$

Тогда $\alpha=x=\frac{1-a^2+b^2}{2}$, $\beta=1-x=1-\frac{1-a^2+b^2}{2}=\frac{1+a^2-b^2}{2}$.

Итак, $\overrightarrow{CD}=\frac{1-a^2+b^2}{2}\cdot\vec{a}+\frac{1+a^2-b^2}{2}\cdot\vec{b}$.

Задача 83 (№ 35.40). Возьмите правильный многогранник, отличный от тетраэдра и куба. Выберите какую-либо его вершину и три прямые, проходящие через ребра при этой вершине. Возьмите какой-либо вектор, заданный парой его вершин. Сможете ли вы разложить его на составляющие по этим прямым?

Дано: F – правильный октаэдр. Базис $B=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$, где $\vec{a}=\overrightarrow{AS_2},\vec{b}=\overrightarrow{AB},\vec{c}=\overrightarrow{AD}$ (см. рис. 119).

Разложить: $\overrightarrow{S_1A}$, $\overrightarrow{S_1S_2}$ по векторам базиса.

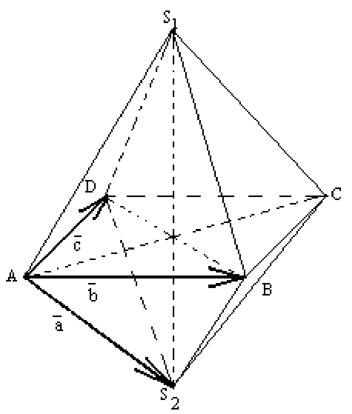


Рис. 119

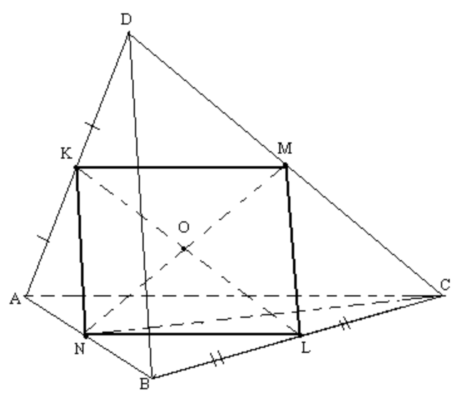


Рис. 120

Решение.

1) $\overrightarrow{S_1A}=\overrightarrow{CS_2}$, так как $F-$правильный октаэдр и AS_1CS_2 – квадрат;

$\overrightarrow{CS_2}=\overrightarrow{AS_2}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AS_2}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$.

2) $\overrightarrow{S_1S_2}=\overrightarrow{S_1A}+\overrightarrow{AS_2}=\left(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}\right)+\vec{a}=2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$.

Задача 84 (№ 35.41). Пусть *ABCD* — тетраэдр.

Существует ли такая точка X, что: а) $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}=\vec{0}$;

б) $\overrightarrow{XA}+2\overrightarrow{XB}+3\overrightarrow{XC}-5\overrightarrow{XD}=\vec{0}$; **в)** $\frac{1}{5}\overrightarrow{XA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{XB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{XC}+\frac{1}{20}\overrightarrow{XD}=\vec{0}$? **Если существует, то единственная ли она? Как она расположена по отношению к тетраэдру?**

Дано: $F=ABCD-$тетраэдр (см. рис. 120).

Существует ли**:** точка X такая, что:

а) $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}=\vec{0}$; б) $\overrightarrow{XA}+2\overrightarrow{XB}+3\overrightarrow{XC}-5\overrightarrow{XD}=\vec{0}$;

в) $\frac{1}{5}\overrightarrow{XA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{XB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{XC}+\frac{1}{20}\overrightarrow{XD}=\vec{0}$?

Решение.

А. Пусть M, L, N, K – середины ребер DC, CB, BA, AD соответственно; KMLN – параллелограмм. Докажем это. Так как KM – средняя линия треугольника ADC, следовательно, KM $\|$AC, $KM=\frac{1}{2}AC$. Аналогично, NL $\|$AC, $NL=\frac{1}{2}AC$. Поэтому $KM\parallel NL$ и $KM=NL$, тогда по признаку параллелограмма, $KMLN$ – параллелограмм. Тогда $MN\cap KL=O; X\equiv O$. Докажем это. Имеем:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{ON},\ \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OM},$ отсюда

$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=2\overrightarrow{ON}+2\overrightarrow{OM}=2(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OM})=2\cdot\vec{0}=\vec{0}$. Поэтому

$X\equiv O$ – единственная точка, так как параллелограмм $KMLN$ – единственный.

Б. Существует ли точка X такая, что: $\overrightarrow{XA}+2\overrightarrow{XB}+3\overrightarrow{XC}-5\overrightarrow{XD}=\vec{0}$? Имеем:

$\overrightarrow{XA}+\left(2\overrightarrow{XB}-2\overrightarrow{XD}\right)+\left(3\overrightarrow{XC}-3\overrightarrow{XD}\right)=\overrightarrow{XA}+2\left(\overrightarrow{XB}-\overrightarrow{XD}\right)+3\left(\overrightarrow{XC}-\overrightarrow{XD}\right)=$

$$= \overrightarrow{XA} + 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{XA} + 2\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right) + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{XA} + 4\overrightarrow{DL} + \overrightarrow{DC} =$$

$= \overrightarrow{XA} + 3\overrightarrow{DL} + \left(\overrightarrow{DL} + \overrightarrow{DC}\right) = \overrightarrow{XA} + 3\overrightarrow{DL} + 2\overrightarrow{DP}$, где P – середина CL;

$\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{DL} + 2\left(\overrightarrow{DL} + \overrightarrow{DP}\right) = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{DL} + 4\overrightarrow{DE}$, где E – середина LP;

$\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{DL} + 4\overrightarrow{DE} = \vec{0}$, если $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{DL} = -4\overrightarrow{DE}$ или $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{DL} = 4\overrightarrow{ED}$.

Следовательно, такая точка X существует, и она единственная.

В. Существует ли точка X такая, что: $\frac{1}{5}\overrightarrow{XA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{XB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{XC} + \frac{1}{20}\overrightarrow{XD} = \vec{0}$? Имеем:

$$\frac{1}{5}\overrightarrow{XA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{XB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{XC} + \frac{1}{20}\overrightarrow{XD} = \frac{1}{20}(4\overrightarrow{XA} + 5\overrightarrow{XB} + 10\overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XD}) =$$
$$= \frac{1}{20}((4\overrightarrow{XA} + 4\overrightarrow{XC}) + (5\overrightarrow{XB} + 5\overrightarrow{XC}) + (\overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XD})) = \frac{1}{20}(4(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}) +$$
$$+ 5(\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}) + 2\overrightarrow{XM}),$$

где M – середина CD;

$\frac{1}{20}(8\overrightarrow{XE} + 10\overrightarrow{XR} + 2\overrightarrow{XM})$, где E и R – середины AC и BC соответственно;

$\frac{1}{20}(8(\overrightarrow{XE} + \overrightarrow{XR}) + 2(\overrightarrow{XR} + \overrightarrow{XM})) = \frac{1}{20}(16\overrightarrow{XS} + 4\overrightarrow{XN})$, где S, N – середины ER, RM соответственно. Тогда:

$$\frac{1}{5}\overrightarrow{XA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{XB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{XC} + \frac{1}{20}\overrightarrow{XD} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{1}{20}(16\overrightarrow{XC} + 4\overrightarrow{XN}) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16\overrightarrow{XC} + 4\overrightarrow{XN} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XN} = \vec{0};$$

$$4\overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XN} = 5\overrightarrow{XC} + (\overrightarrow{XN} - \overrightarrow{XC}) = 5\overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CN} = \vec{0},$$

$$5\overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CN} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{XC} = -\overrightarrow{CN} \Leftrightarrow \overrightarrow{CX} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CN}.$$

Ясно, что такая точка X существует и притом единственная.

Задача 85 (3 35.42). Как расположены точки A, B, C, если известно, что $\alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB} + \gamma \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}, \alpha + \beta + \gamma = 0$? **Каково решение задачи для четырех точек?**

<u>Дано:</u> $\alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB} + \gamma \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}, \alpha + \beta + \gamma = 0.$

<u>Выяснить:</u> как расположены точки A, B, C?

Решение.

1) $\alpha+\beta+\gamma=0 \Rightarrow \gamma=-\alpha-\beta$, тогда векторное равенство

$\alpha\cdot\overrightarrow{OA}+\beta\cdot\overrightarrow{OB}+\gamma\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ примет вид: $\alpha\cdot\overrightarrow{OA}+\beta\cdot\overrightarrow{OB}+(-\alpha-\beta)\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ или

$(\alpha\cdot\overrightarrow{OA}-\alpha\cdot\overrightarrow{OC})+(\beta\cdot\overrightarrow{OB}-\beta\cdot\overrightarrow{OC})=\vec{0},\ \alpha\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+\beta\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=\vec{0},$

$$\alpha\cdot\overrightarrow{CA}+\beta\cdot\overrightarrow{CB}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{CA}}=-\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}\parallel\overrightarrow{CB}\quad(\alpha\neq 0).$$

Итак, точки А, В, С лежат на одной прямой.

2) Если же для четырех точек A, B, C, D:

$\alpha\cdot\overrightarrow{OA}+\beta\cdot\overrightarrow{OB}+\gamma\cdot\overrightarrow{OC}+\delta\cdot\overrightarrow{OD}=\vec{0}, \alpha+\beta+\gamma+\delta=0$, то $\delta=-\alpha-\beta-\gamma$. Тогда:

$\alpha\cdot\overrightarrow{OA}+\beta\cdot\overrightarrow{OB}+\gamma\cdot\overrightarrow{OC}+(-\alpha-\beta-\gamma)\cdot\overrightarrow{OD}=\vec{0}$, отсюда

$\alpha\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD})+\beta\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD})+\gamma\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})=\vec{0}$ или $\alpha\cdot\overrightarrow{DA}+\beta\cdot\overrightarrow{DB}+\gamma\cdot\overrightarrow{DC}=\vec{0}$, а это означает, что векторы $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$ компланарны.

IV.3. Исследовательские задачи к параграфу «Векторное умножение векторов»

Задача 86 (№ 36.8). Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единичные.

а) Найдите | $\vec{a}\times\vec{b}$ |, если $\vec{a}\cdot\vec{b}$ = α.

б) Найдите $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если | $\vec{a}\times\vec{b}$ | = β.

в) Может ли выполняться равенство $|\vec{a}\times\vec{b}|$ = $|\vec{a}\cdot\vec{b}|$?

г) Пусть теперь векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют произвольную длину. Установите связь между $|\vec{a}\times\vec{b}|$, $|\vec{a}\cdot\vec{b}|$, $|\vec{a}|, |\vec{b}|$.

Решение.

А. $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi,$ где $\varphi=(\widehat{\vec{a},\vec{b}}),\ \varphi\in[0,\pi];$

$$\begin{cases} \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=\alpha \\ |\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=1-\text{по условию} \end{cases} \Rightarrow \cos\varphi=\alpha,$$ тогда $\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\sqrt{1-\alpha^2}$.

Поэтому $\begin{cases} |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sqrt{1-\alpha^2} \\ |\vec{a}|=1, |\vec{b}|=1-\text{по условию} \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{1-\alpha^2}$.

Б. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$,

$$\begin{cases} |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi=\beta \\ |\vec{a}|=1, |\vec{b}|=1-\text{по условию.} \end{cases} \Rightarrow \sin\varphi=\beta,$$ тогда $\cos\varphi=\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}=\pm\sqrt{1-\beta^2}$

Поэтому $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\left(\pm\sqrt{1-\beta^2}\right)=\pm\sqrt{1-\beta^2}$.

В. $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}\cdot\vec{b}|$; $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$, $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\cos\varphi|$, поэтому по условию $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\cos\varphi|$; чтобы выполнялось это равенство, необходимо, чтобы выполнялось равенство $\sin\varphi=|\cos\varphi|$, то есть $\varphi_1=\dfrac{\pi}{4}$ или $\varphi_2=\dfrac{3\pi}{4}$ $(\varphi_1,\ \varphi_2\in[0,\pi])$.

Г. $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$ (1), $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\cos\varphi|$ (2); возведем обе части равенств (1) и (2) в квадрат и сложим, получим: $|\vec{a}\times\vec{b}|^2+|\vec{a}\cdot\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2$, что и требовалось.

Задача 87 (№ 36.9). Пусть даны векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$.

Что следует из таких условий: а) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$; б) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$?

<u>Решение.</u>

А. Пусть $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, тогда $|\vec{a}\times\vec{b}|=0$, то есть

$$\begin{cases} |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi=0 \\ |\vec{a}|,|\vec{b}|\neq0 \end{cases} \Rightarrow \sin\varphi=0 \Rightarrow \varphi=0^\circ\ \text{или}\ 180^\circ,$$ то есть $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ или $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.

Б. Пусть $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$, тогда по свойству векторного умножения: для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется $\vec{b}\times\vec{a}=-(\vec{a}\times\vec{b})$, получаем:

$\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$, $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{0}$, $2\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{0}$, $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, отсюда по случаю **А** имеем $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ или $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.

Задача 88 (№ 36.10). Верно ли, что: $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(\vec{b}+\lambda\vec{a}\right)$?

<u>Решение.</u>

В правой части этого векторного равенства по свойству дистрибутивности векторного умножения относительно сложения раскроем скобки:

$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\lambda\vec{a}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\lambda\vec{a}=\vec{a}\times\vec{b}+\lambda\cdot\left(\vec{a}\times\vec{a}\right)=$ (по свойству однородности, поменяли местами числовой множитель и вектор) $=\vec{a}\times\vec{b}+\lambda\cdot\vec{0}$ (по задаче № 36.9) = $=\vec{a}\times\vec{b}$.

Итак, векторное равенство $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(\vec{b}+\lambda\vec{a}\right)$ верно.

IV.4. Исследовательские задачи к параграфу «Координаты»

Задача 89 (№ 37.44). Можете ли вы: а) зная координаты трех вершин параллелограмма, найти его четвертую вершину; б) зная координаты трех вершин правильного тетраэдра, найти его четвертую вершину; в) зная координаты четырех вершин параллелепипеда, найти его остальные вершины; г) зная координаты середин ребер тетраэдра, найти его вершины?

А. <u>Дано:</u> ABCD – параллелограмм (рис. 121), A (x_1, y_1, z_1), B (x_2, y_2, z_2), C (x_3, y_3, z_3).

<u>Найти:</u> D (x, y, z).

<u>Решение.</u>

(ABCD – параллелограмм) $\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{DC}$ (1), но $\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,\ \ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}$,

$\overrightarrow{DC}=\{\mathrm{x}_3-x,\ \ \mathrm{y}_3-y,\ z_3-z\}$. Поэтому из (1) следует, что

$$\begin{cases} x_2-x_1=x_3-x \\ y_2-y_1=y_3-y, \\ z_2-z_1=z_3-z \end{cases} \text{отсюда} \begin{cases} x=x_3-(x_2-x_1) \\ y=y_3-(y_2-y_1) \\ z=z_3-(z_2-z_1). \end{cases}$$

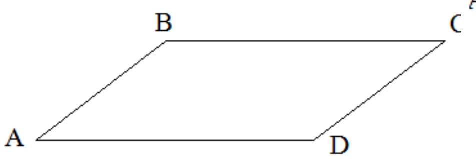


Рис. 121

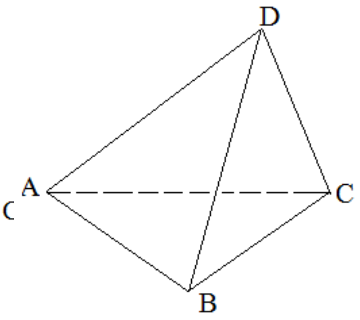


Рис. 122

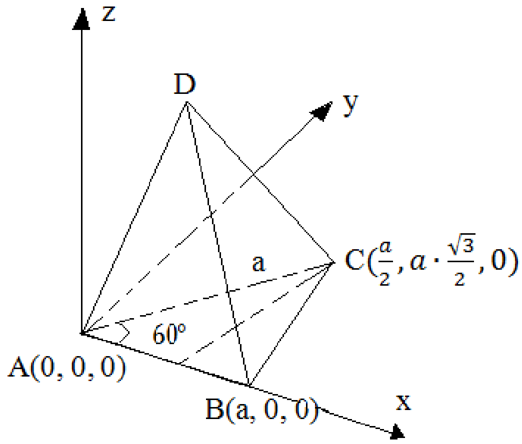


Рис. 123

Б. Дано: ABCD – правильный тетраэдр (рис. 122, 123), A(x_1, y_1, z_1),

B (x_2, y_2, z_2), C (x_3, y_3, z_3).

Найти: D (x, y, z).

Решение.

(ABCD – правильный тетраэдр) ⇒ AD = BD = CD = AB = BC = AC (2),

$$\begin{cases}(x_1 - x)(x_2 - x) + (y_1 - y)(y_2 - y) + (z_1 - z)(z_2 - z) = \frac{a^2}{2} \ (3) \\ (x_1 - x)(x_3 - x) + (y_1 - y)(y_3 - y) + (z_1 - z)(z_3 - z) = \frac{a^2}{2} \ (4) \\ (x_2 - x)(x_3 - x) + (y_2 - y)(y_3 - y) + (z_2 - z)(z_3 - z) = \frac{a^2}{2} \ (5)\end{cases}$$

Вычтем из (3) (4):

$$(x_1 - x)(x_2 - x_3) + (y_1 - y)(y_2 - y_3) + (z_1 - z)(z_2 - z_3) = 0.$$

Вычтем из (3) (5):

$$(x_2 - x)(x_1 - x_3) + (y_2 - y)(y_1 - y_3) + (z_2 - z)(z_1 - z_3) = 0,$$

D (x, y, z).

$$\begin{cases} AD^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ BD^2 = (x - a)^2 + y^2 + z^2 \\ CD^2 = (x - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{a\sqrt{3}}{2})^2 + z^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - a)^2 = x^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 = x^2 \Rightarrow x = \frac{a}{2}.$$

$$BD^2 = CD^2 \Rightarrow (\frac{a}{2} - a)^2 + y^2 + z^2 = (\frac{a}{2} - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{a\sqrt{3}}{2})^2 + z^2,$$

$\frac{a^2}{4} + y^2 = y^2 - 2y\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

$y\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2}{4}$, $y\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{4}(\sqrt{3} - 1)$,

$y = \frac{a}{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{3} - 1\right) = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3} = \frac{a(3-\sqrt{3})}{6}$.

$AD^2 = a^2$, то есть $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

$(\frac{a}{2})^2 + (\frac{a(3-\sqrt{3})}{6})^2 + z^2 = a^2$ или $\frac{a^2}{4} + \frac{a^2(3-\sqrt{3})^2}{36} + z^2 = a^2$;

$$z^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2(3-\sqrt{3})^2}{36} = \frac{36a^2 - 9a^2 - a^2(9 - 6\sqrt{3} + 3)}{36} =$$

$= \frac{27a^2 - 12a^2 + 6a^2\sqrt{3}}{36} = \frac{15a^2 + 6a^2\sqrt{3}}{36} = \frac{5a^2 + 2a^2\sqrt{3}}{12} = \frac{a^2(5+2\sqrt{3})}{12}$,

$z = a\sqrt{\frac{5+2\sqrt{3}}{12}}$.

Итак, $D\left(\frac{a}{2}; \frac{a(3-\sqrt{3})}{6}; a\sqrt{\frac{5+2\sqrt{3}}{12}}\right)$.

В. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед (рис. 124).

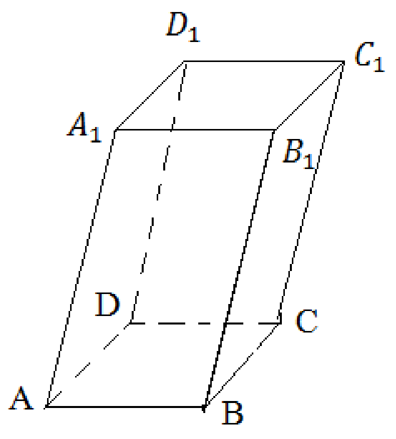


Рис. 124

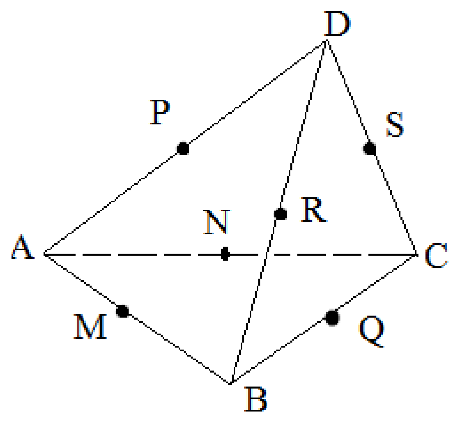


Рис. 125

1 случай. Если известны лишь координаты четырех вершин одной грани параллелепипеда, например, вершины $A, B, C, D,$ то координаты остальных вершин найти нельзя.

2 случай. Пусть известны координаты вершин А (x_1, y_1, z_1), В (x_2, y_2, z_2), D (x_3, y_3, z_3), $A_1(x_4, y_4, z_4)$, не лежащих в одной грани. В этом случае можно найти координаты остальных вершин, так как все грани параллелепипеда – параллелограммы, а найти четвертую вершину параллелограмма по трем известным можно (смотри пункт **А**).

Г. Дано: ABCD – тетраэдр (рис. 125), M – середина AB, N – середина AC, P – середина AD, Q – середина BC, R – середина BD, S – середина CD, $M(x_M, y_M, z_M), N(x_N, y_N, z_N), P(x_P, y_P, z_P), Q\left(x_Q, y_Q, z_Q\right), R(x_R, y_R, z_R), S(x_S, y_S, z_S)$.

Найти: координаты вершин A, B, C, D.

Решение.

1. В ΔADB PR – средняя линия, поэтому $PR = \frac{1}{2}\text{AB} = \text{AM}$, $PR \| \text{AM}$, отсюда $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{\text{AM}}$ (1).

Но $\overrightarrow{PR} = \{x_R - x_P, y_R - y_P, z_R - z_P\}$, $\overrightarrow{AM} = \{x_M - x_A, y_M - y_A, z_M - z_A\}$ поэтому из (1) получаем:

$$\begin{cases} x_B - x_P = x_M - x_A \\ y_B - y_P = y_M - y_A \\ z_B - z_P = z_M - z_A \end{cases}, \text{ отсюда } \begin{cases} x_A = x_M - (x_R - x_P) \\ y_A = y_M - (y_R - y_P) \\ z_A = z_M - (z_R - z_P) \end{cases} \ (1).$$

Итак, координаты вершины А нашли.

С другой стороны $\overrightarrow{\text{MB}} = \overrightarrow{PR}\,(2)$. Но $\overrightarrow{\text{MB}} = \{x_\text{B} - x_\text{M}, y_\text{B} - y_\text{M}, z_\text{B} - z_\text{M}\}$, $\overrightarrow{PR} = \{x_R - x_P, y_R - y_P, z_R - z_P\}$, поэтому из (2) получаем:

$$\begin{cases} x_\text{B} - x_\text{M} = x_R - x_P \\ y_\text{B} - y_\text{M} = y_R - y_P \\ z_\text{B} - z_\text{M} = z_R - z_P \end{cases}, \text{отсюда} \quad \begin{cases} x_\text{B} = x_M + (x_R - x_P) \\ y_\text{B} = y_M + (y_R - y_P) \\ z_\text{B} = z_M + (z_R - z_P) \end{cases} (II).$$

Следовательно, нашли координаты точки В.

2. В $\Delta\,\mathrm{B}D\mathrm{C}$ RS – средняя линия, поэтому $\mathrm{BC} = 2\mathrm{RS}$, $\mathrm{BC}\|\mathrm{RS}$, отсюда $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ (3).

Но $\overrightarrow{RC} = \{x_C - x_R, y_C - y_R, z_C - z_R\}, \overrightarrow{RS} = \{x_S - x_R, y_S - y_R, z_S - z_R\}$, поэтому из (3) получаем: $\begin{cases} x_C - x_B = 2(x_S - x_R) \\ y_C - y_B = 2(y_S - y_R) \\ z_C - z_B = 2(y_S - z_R) \end{cases}$, отсюда $\begin{cases} x_C = x_\mathrm{B} + 2(x_S - x_R) \\ y_C = y_\mathrm{B} + 2(y_S - y_R) \\ z_C = z_\mathrm{B} + 2(y_S - z_R) \end{cases}$ или с учетом формул

$$(II): \begin{cases} x_C = x_M + (x_R - x_P) + 2(x_S - x_\mathrm{P}) \\ y_C = y_M + (y_R - y_P) + 2(y_S - y_\mathrm{P}) \\ z_C = z_M + (z_R - z_P) + 2(y_S - z_\mathrm{P}) \end{cases}, \text{отсюда} \begin{cases} x_C = x_M + x_R + 2x_S - 3x_\mathrm{P} \\ y_C = y_M + y_R + 2y_S - 3y_\mathrm{P} \\ z_C = z_M + z_R + 2y_S - 3z_P \end{cases}.$$

Итак, нашли координаты вершины С.

3. В $\Delta\,\mathrm{AB}D$ MR – средняя линия, поэтому $\mathrm{M}R = \frac{1}{2}\mathrm{A}D$, $MR\|\mathrm{A}D$, отсюда $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{\mathrm{M}R}$ (4). Но $\overrightarrow{AD} = \{x_D - x_A, y_D - y_A, z_D - z_A\}$,

$\overrightarrow{MR} = \{x_R - x_M, y_R - y_M, z_R - z_M\}$, поэтому из (4) получаем:

$\begin{cases} x_D - x_A = 2(x_R - x_M) \\ y_D - y_A = 2(y_R - y_M) \\ z_D - z_A = 2(y_R - z_M) \end{cases}$, отсюда $\begin{cases} x_D = x_A + 2(x_R - x_M) \\ y_D = y_A + 2(y_R - y_M) \\ z_D = z_A + 2(y_R - z_M) \end{cases}$ или с учетом формул (I):

$$\begin{cases} x_D = x_M - (x_R - x_P) + 2(x_R - x_M) \\ y_D = y_M - (y_R - y_P) + 2(y_R - y_M) \\ z_D = z_M - (z_R - z_P) + 2(y_R - z_M) \end{cases}, \text{отсюда} \begin{cases} x_D = x_P + x_R - x_M \\ y_D = y_P + y_R - y_M \\ z_D = z_P + z_R - z_M \end{cases}.$$

Итак, нашли и координаты точки D.

Задача 90 (№ 37.45). Сколько решений имеет уравнение:

а) $\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} = a$ при $a = 1, \sqrt{2}, 2$;

б) $\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2} = a$ при $a = 2, \sqrt{6}, 3$.

А. Дано: $\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}=a$ при $a=1,\sqrt{2},2.$

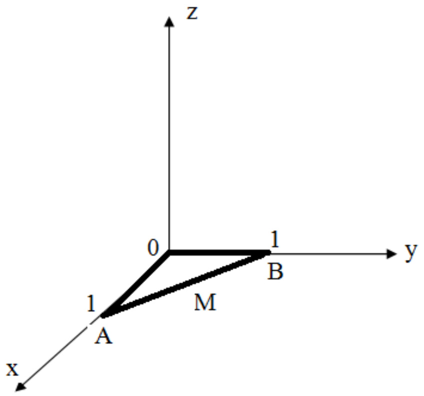


Рис. 126

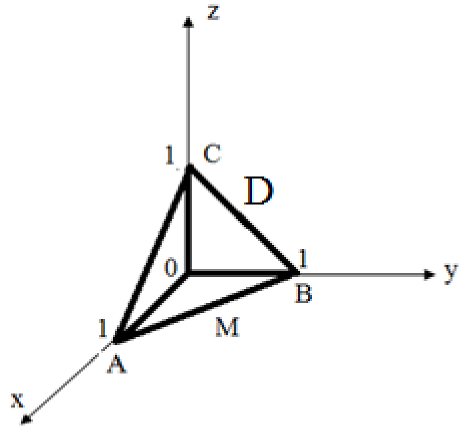


Рис. 127

Решение.

Для рис. 126 имеем:

$\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}=$ МА, где А$(1;0;0)$, М$(x;y;z)$.

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}=MB, \text{где } B(0;1;0).$$

По условию: МА + МВ = a.

1) При $a=1$; МА + МВ = 1, так как $AB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

2) При $a=\sqrt{2}$; МА + МВ = $\sqrt{2}$. Следовательно, М$(x;y;z)\epsilon$АВ, то есть решений бесконечно много.

3) При $a=2$; МА + МВ = 2, отсюда М $\equiv 0$, то есть имеем одно решение.

Б. Для рис. 127 имеем:

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}=a,$$

$$\text{при } a=2,\ \sqrt{6},3.$$

Решение.

МА + МВ + МС = a, где А (1; 0; 0), М (x; y; z), В (0; 1; 0), С (0; 0; 1).

1) $a=2$, МА + МВ + МС = 2 – решений нет.

2) AD – медиана (высота) Δ ABC,

$$AD=\sqrt{AB^2+BD^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=$$

$= \sqrt{2-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

Пусть G – точка пересечения медиан Δ ABC, тогда $AG = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Поэтому $GA + GB + GC = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot 3 = \sqrt{6}$. Итак, $M \equiv G$.

3) $a = 3$, MA + MB + MC = 3, M ≡ 0 – одно решение.

Задача 91 (№ 37.46). Дана сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 25$. Установите расположение относительно нее прямой AB, если:

ω: $x^2 + y^2 + z^2 = 25$**, то есть ω(O; r = 5), S = (AB);**

а) A(0; 0; 6), B(3; 3; 0); б) A(0; $-2; 2$), B(2; 0; -2); в) A($-6; 0; 0$), B(0; $-6; 0$);

г) A($-4; 0; -4$), B(0; 4; 4);

Установить взаимное расположение прямой AB относительно сферы ω.

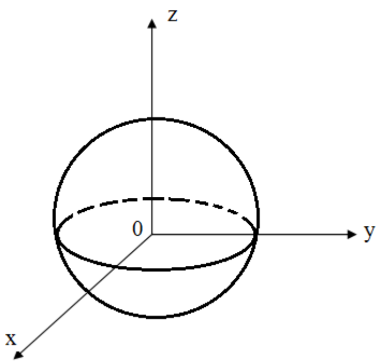


Рис. 128

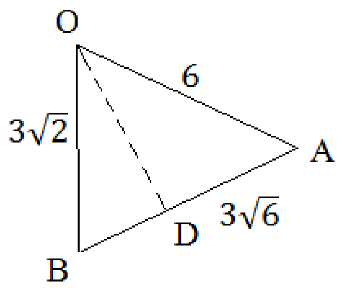


Рис. 129

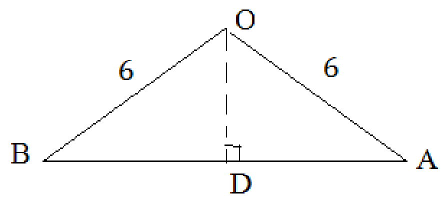


Рис. 130

А. OA = 6, OB $= \sqrt{(3-0)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$,

AB $= \sqrt{(3-0)^2 + (3-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{9+9+36} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$ (см. рис. 129).

Найдем высоту OD в Δ AOB и сравним ее с радиусом сферы r = 5. Пусть

φ= ∠AOB, тогда $cos\varphi = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|}$ или $cos\varphi = \frac{0 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 6 \cdot 0}{6 \cdot 3\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \varphi = 0$.

OB $= 3\sqrt{2} < r$, следовательно, точка B внутри сферы, OA = 6 > r, следовательно, точка A вне сферы. Значит, AB $\cap\, \omega = \{Q_1, Q_2\}$.

Б. $OA = \sqrt{(0-0)^2 + (-2-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $OA < r \Rightarrow A$ – внутри сферы; $OB = \sqrt{(2-0)^2 + (0-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $OB < r \Rightarrow B$ – внутри сферы. Поэтому $AB \cap \omega = \{P_1, P_2\}$.

В. OA = 6, OB = 6 > r, следовательно точки A, B – вне сферы, но $\angle AOB = 90°$. $(A \in Ox, B \in Oy)$ (см. рис. 130), $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$,

$AD = \frac{1}{2}AB = 3\sqrt{2}, BD = AD = 3\sqrt{2} < r,$ следовательно, прямая AB пересекает сферу ω.

Г. $OA = \sqrt{(-4-0)^2 + (0-0)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2} > r$.

$OB = \sqrt{(0-0)^2 + (4-0)^2 + (4-0)^2} = 4\sqrt{2} > r$ (см. рис. 131).

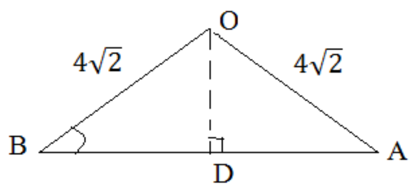


Рис. 131

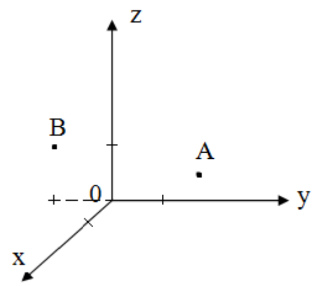


Рис. 132

Следовательно, A, B – вне сферы. $\overrightarrow{OA} = \{-4; 0; -4\}$, $\overrightarrow{OB} = \{0; 4; 4\}$;

$\cos\varphi = \frac{-4\cdot0+0\cdot4-4\cdot4}{4\sqrt{2}\cdot4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 135°.$

$AB = \sqrt{(0+4)^2 + (4-0)^2 + (4+4)^2} = \sqrt{16+16+64} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$.

$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB \cdot \sin 135° = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2},$

$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{6} \cdot h = 2\sqrt{6} \cdot h;$

$2\sqrt{6} \cdot h = 2\sqrt{2} \Rightarrow h = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} < r$. Значит, прямая AB пересекает сферу ω.

Задача 92 (№ 37.47). а) Имеет ли решение система

$(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = x^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$**?**

б) Сколько решений имеет система в зависимости от значения a:

$(x-a)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-a)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-a)^2 = 1$**?**

Решение.

А. Имеем (см. рис. 132):

$(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=x^2+(y+1)^2+(z-1)^2=(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1$**.** Тогда

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=1\ (\omega_1), & \text{A}(-1;1;0)-\ \text{центр},\\ x^2+(y+1)^2+(z-1)^2=1\ (\omega_2), & \text{B}(0;-1;1)-\ \text{центр},\\ (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1\ (\omega_3), & \text{C}(1;0;1)-\ \text{центр}.\end{cases}$$

$AB=\sqrt{(0+1)^2+(-1-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}>2$, следовательно,

$\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$.

Система решений не имеет.

Б. $\begin{cases}(x-a)^2+y^2+z^2=1\ (\omega_1),\ \text{A}(a;0;0),\\ x^2+(y-a)^2+z^2=1\ (\omega_2), B(0;a;0),\\ x^2+y^2+(z-a)^2=1\ (\omega_3),\ C(0;0;a).\end{cases}$

$AB=\sqrt{(0-a)^2+(a-0)^2+(0-a)^2}=a\sqrt{2}$, AC = $a\sqrt{2}$; BC = $a\sqrt{2}$.

<u>1 случай.</u> Если AB = $a\sqrt{2}=2$, то есть $a=\sqrt{2}$, то сферы ω_1, ω_2, ω_3 попарно касаются, но общей точки у них нет, следовательно, система решений не имеет.

<u>2 случай.</u> Если AB = $a\sqrt{2}>2$, то $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$ и система решений не имеет.

<u>3 случай.</u> Если AB = $a\sqrt{2}<2$, то емть $a<\frac{2}{r^2}$ или $a<\sqrt{2}$, то все сферы пересекаются, система имеет бесконечное множество решений.

Задача 93 (№ 37.48). Установите взаимное расположение плоскостей:

а) $5x+8y-z-7=0, x+2y+3z-1=0, 2x-3y+2z-9=0$;

б) $2x-y+5z-4=0, 5x+2y-13z+23=0, 3x-z+5=0$;

в) $5x+2y-6=0, x+3y-3z=0, 3x+2z-1=0, 2x+3y+z+8=0$.

Решение.

А. $\alpha: 5x+8y-z-7=0$
$\beta: x+2y+3z-1=0$
$\gamma: 2x-3y+2z-9=0$.

Решим систему из уравнений плоскостей α, β, γ.

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-3y+2z=9 \\ 5x+8y-z=7 \Rightarrow z=5x+8y-7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+3(5x+8y-7)=1, \\ 2x-3y+2(5x+8y-7)=9 \end{cases}, \quad \begin{cases} 16x+26y=22 \\ 12x+13y=23 \end{cases},$$

$$-\begin{cases} 8x+13y=11 \\ 12x+13y=23 \end{cases}$$

$-4x=-12 \Rightarrow x=3$; тогда

$13y=11-8x=11-8\cdot 3=-13 \Rightarrow y=-1$;

$$z=5x+8y-7=5\cdot 3+8\cdot(-1)-7=0.$$

Итак, точка А(3: –1; 0) – единственная общая точка плоскостей α, β и γ.

Б. $\begin{cases} 2x-y+5z=4 \\ 5x+2y-13z=-23 \\ 3x-z=-5 \Rightarrow z=3x-5. \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x-y+5(3x-5)=4 \\ 5x+2y-13(3x-5)=-23 \end{cases}, \begin{cases} 17x-y=29 \\ -34x+2y=-88 \end{cases},$$

$\begin{cases} 17x-y=29 \\ 17x-y=44 \end{cases}$ – решений нет, следовательно, плоскости α, β и γ не имеют общих точек.

В. $\begin{cases} 5x+2y=6 \Rightarrow y=\dfrac{6-5x}{2} \\ x+3y-3z=0 \\ 3x+2z=1 \Rightarrow z=\dfrac{1-3x}{2} \\ 2x+3y+z=-8 \end{cases}$ **,** тогда второе и четвертое уравнения примут вид:

$$\begin{cases} x+3\left(\dfrac{6-5x}{2}\right)-3\left(\dfrac{1-3x}{2}\right)=0 /\cdot 2 \\ 2x+3\left(\dfrac{6-5x}{2}\right)+\dfrac{1-3x}{2}=-8 /\cdot 2 \end{cases}$$

1) $2x+18-15x-3+9x=0$, $-4x=-15 \Rightarrow x=\dfrac{15}{4}$;

2) $4x + 18 - 15x + 1 - 3x = -16$, $-14x = -35 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$; но $\frac{15}{4} \neq \frac{5}{2}$, поэтому система решений не имеет, следовательно, данные четыре плоскости общих точек не имеют.

IV.5. Исследовательские задачи к главе «Векторы и координаты»

Задача 94 (№ VIII.14). Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – парллелепипед. Прямая пересекает три прямые: AB_1, BC_1, CD_1. Как она расположена по отношению к прямой DA_1 (рис. 133)?

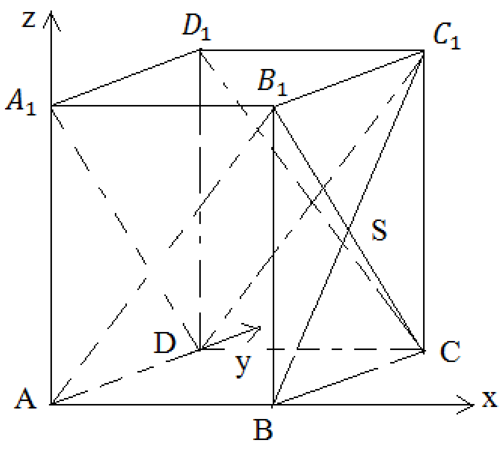


Рис. 133

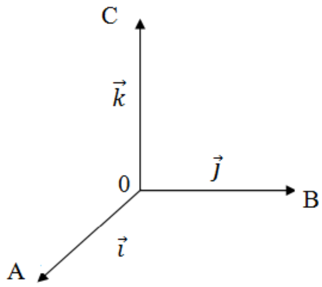


Рис. 134

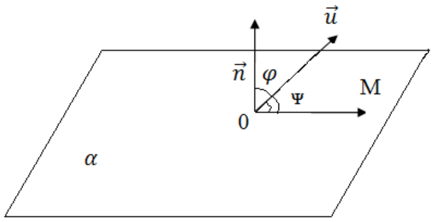


Рис. 135

1) Прямая $1 = (\mathrm{CB}_1)$ пересекает данные прямые:

$(\mathrm{CB}_1) \cap \mathrm{A}B_1 = B_1$, $(\mathrm{CB}_1) \cap \mathrm{B}C_1 = S$ – центр грани BCCB_1, $(\mathrm{CB}_1) \cap \mathrm{C}D_1 = \mathrm{C}$.

2) $(\mathrm{CB}_1) \parallel DA_1$.

Задача 95 (№ VIII.15). Пусть $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ – ортонормированный базис пространства. Через точку О проводится любая плоскость, и этот базис проектируется на нее ортогонально. Пусть известны длины составляющих на

этой плоскости для двух векторов базиса. Сможете ли вы найти длину составляющей на этой плоскости для третьего вектора базиса?

Дано: $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\imath}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\jmath}, \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{k} -$ ортонормированный базис пространства (рис. 134); α: $\mathrm{O} \epsilon \alpha, \alpha -$ любая плоскость. $\mathrm{A}_\alpha = \mathrm{Пр}_\alpha \mathrm{A}$, $B_\alpha = \mathrm{Пр}_\alpha \mathrm{B}$, $C_\alpha = \mathrm{Пр}_\alpha \mathrm{C}$,

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}_\alpha = \mathrm{пр}_\alpha \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}_\alpha = \mathrm{пр}_\alpha \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}_\alpha = \mathrm{пр}_\alpha \overrightarrow{\mathrm{OC}}$. $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}_\alpha\right| = a, \left|\overrightarrow{OB}_\alpha\right| = b$.

Можно ли найти: $\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}_\alpha\right| = \mathrm{c}$?

Решение.

1) α: $\mathrm{A}x + By + Cz = 0, (D = 0, O \in \alpha)(1)$, $\vec{n}\{A, B, C \perp \alpha\}$ (рис. 135).
Отсюда $AD^2 = BD^2 = CD^2 = AB^2 = BC^2 = AC^2$ (2).

Но $AD^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$,

$BD^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2$, $CD^2 = (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2$, $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = a^2$, $\mathrm{BC}^2 = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = a^2$, $AC^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = a^2$.
Поэтому из (2) получаем: $AD^2 = AB^2$, $\mathrm{B}D^2 = BC^2$, $\mathrm{C}D^2 = AC^2$ или

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2, \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 \end{cases}$$

или

$$x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 + z^2 - 2zz_1 + z_1^2 = x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_2y_1 + y_1^2 +$$

$+ z_2^2 - 2z_2z_1 + z_1^2$. Тогда имеем:

$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = \left|\overrightarrow{DA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{DB}\right| \cdot cos60° = a^2 \cdot \frac{1}{2}$,

$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = \left|\overrightarrow{DA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{DC}\right| \cdot cos60° = a^2 \cdot \frac{1}{2}$,

$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DB} = \left|\overrightarrow{DB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{DB}\right| \cdot cos60° = a^2 \cdot \frac{1}{2}.$

Задача 96 (№ VIII.16). Пусть $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}, |\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = |\vec{c}| = \left|\vec{d}\right|$**. Докажите, что** $\angle\vec{a}\vec{b} = \angle\vec{c}\vec{d}$**.**

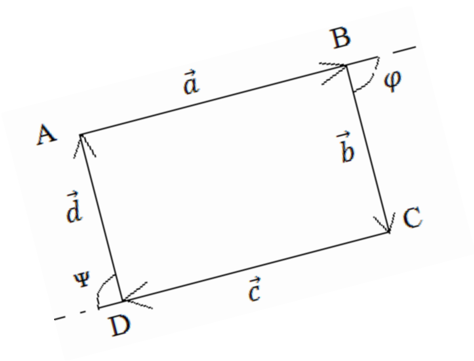


Рис. 136

Дано: на рис. 136 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}, |\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = |\vec{c}| = \left|\vec{d}\right|$.

Доказать: $\angle\vec{a}\vec{b} = \angle\vec{c}\vec{d}$**.**

Доказательство.

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = -(\vec{c} + \vec{d})$.

Тогда $(\vec{a}+\vec{b})^2 = [-(\vec{c}+\vec{d})]^2$, отсюда $\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{c}^2 + 2\vec{c}\vec{d} + \vec{d}^2$ или

$|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \cdot cos\angle\vec{a}\vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2 = |\vec{c}|^2 + 2|\vec{c}|\left|\vec{d}\right| \cdot cos\angle\vec{c}\vec{d} + \left|\vec{d}\right|^2.$

Но $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = |\vec{c}| = \left|\vec{d}\right|$, поэтому получаем: $cos\angle\vec{a}\vec{b} = cos\angle\vec{c}\vec{d} \Rightarrow \angle\vec{a}\vec{b} = \angle\vec{c}\vec{d}$.

Задача 97 (№ VIII.17). Какую фигуру образуют все точки X пространства, такие, что XA : XB = k, где A и B – данные точки, а k > 0**?**

Дано: $\frac{\mathrm{XA}}{\mathrm{XB}} = \mathrm{k}$, где A и B – данные точки, а k > 0.

Найти: $F = \{X\}$.

Решение.

1) Введем ПДСК, чтобы А$(-a, 0, 0)$, В$(a, 0, 0)$.

2) Пусть М(x, y, z) $-$ любая точка пространства, $M \in F \Leftrightarrow \frac{AM}{BM} = k$ (1).

Но $\mathrm{AM} = \sqrt{(x+a)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}$, ВМ = $\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}$,

тогда (1) примет вид:

$\frac{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} = k$, отсюда

$(x+a)^2 + y^2 + z^2 = k^2((x-a)^2 + y^2 + z^2)$, отсюда

$y^2(1-k^2) + z^2(1-k^2) = k^2(x^2 - 2ax + a^2) - x^2 - 2ax - a^2$ или

$y^2(1-k^2) + z^2(1-k^2) = x^2(k^2-1) - 2ax(k^2+1) + a^2(k^2-1)$ (*).

Частные случаи:

1) $k = 1$, тогда (*) примет вид: $-2ax(1^2+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow F = (Oyz)$.

2) $k^2 - 1 < 0 \Rightarrow k^2 < 1, k \in (0, 1)$. Тогда (*) примет вид:

$(1-k^2)x^2 + 2ax(k^2+1) + (1-k^2)(y^2+z^2) = a^2(k^2-1)$, поделим обе части этого равенства на $(1-k^2)$, получим:

$x^2 - 2ax\frac{k^2+1}{1-k^2} + y^2 + z^2 = -a^2$, отсюда имеем:

$\left[x^2 - 2ax\frac{k^2+1}{1-k^2} + (a\frac{k^2+1}{1-k^2})^2\right] + y^2 + z^2 = a^2\frac{(k^2+1)^2}{(1-k^2)^2} - a^2$

$$[x + a\frac{k^2+1}{1-k^2}]^2 + y^2 + z^2 = a^2\left(\frac{(k^2+1)^2}{(1-k^2)^2} - 1\right).$$

$[x + a\frac{k^2+1}{1-k^2}]^2 + y^2 + z^2 = a^2\frac{k^4+2k^2+1-1+2k^2-k^4}{(1-k^2)^2}$.

F: $[x + a\frac{k^2+1}{1-k^2}]^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 \cdot 4k^4}{(1-k^2)^2}$ – сфера ω с центром

Q$\left(-a\frac{k^2+1}{1-k^2}; 0; 0\right), r = \frac{2ka}{1-k^2}$.

3) $k^2 - 1 > 0 \Rightarrow k^2 > 1, k \in (1, +\infty), k > 0$. Тогда (*) примет вид:

$y^2(k^2-1) + z^2(k^2-1) = -x^2(k^2-1) + 2ax(k^2+1) - a^2(k^2-1)$, поделим обе части этого равенства на (k^2-1), получим:

$x^2 - 2ax\frac{k^2+1}{k^2-1} + y^2 + z^2 = -a^2$ или

$\left(x^2 - 2ax\frac{k^2+1}{k^2-1} + a^2\frac{(k^2+1)^2}{(k^2-1)^2}\right) + y^2 + z^2 = a^2\frac{(k^2+1)^2}{(k^2-1)^2} - a^2$,

$[x + a\frac{k^2+1}{k^2-1}]^2 + y^2 + z^2 = a^2\left(\frac{(k^2+1)^2}{(k^2-1)^2} - 1\right)$.

F: сфера ω_1 с центром $Q_1\left(a\frac{k^2+1}{k^2-1}; 0; 0\right), r_1 = \frac{2ka}{k^2-1}$.

Задача 98 (№ VIII.18). Какую фигуру образуют все точки пространства, координаты которх удовлетворяют условию:

а) $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} = 3$;

б) $z \geq 0, 0 \leq x - z \leq 1, 0 \leq y - z \leq 2$**.**

Решение.

А. $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} = 3$ (1).

1) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| = x \\ |y| = y \\ |z| = z \end{cases}$, тогда (1) примет вид: $\frac{x}{x} + \frac{y}{y} + \frac{z}{z} = 3$ или

1 + 1 + 1 = 3, то есть 3 = 3. Следовательно, уравнение (1) определяет весь первый октант.

2) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z < 0 \end{cases}$. Тогда (1) примет вид: $\frac{x}{x} + \frac{y}{y} - \frac{z}{z} = 3$ или

1 + 1 – 1 = 3, то есть 1 = 3, что невозможно, следовательно, уравнение (1) определяет пустое множество.

3) $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$. Тогда (1) примет вид: $\frac{x}{-x} + \frac{y}{-y} + \frac{z}{z} = 3$ или

– 1 – 1 + 1 = 3, то есть – 1 = 3, что невозможно. Следовательно, уравнение (1) определяет пустое множество.

Б. $\begin{cases} z \geq 0 \\ 0 \leq x - z \leq 1 \\ 0 \leq y - z \leq 2 \end{cases}$, из второго и третьего неравенства имеем: $0 \leq x + y - 2z \leq 3$.

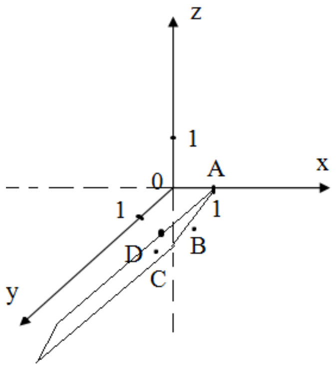


Рис. 137

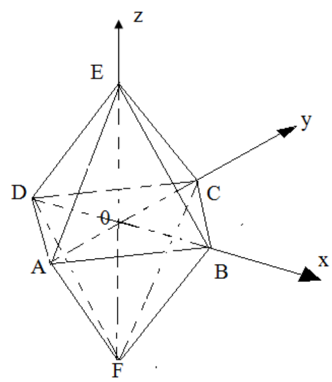


Рис. 138

Пусть: $\alpha_1 : x - z = 1$, $\alpha_2 : x - z = 0$, $\beta_1 : y - z = 0$, $\beta_2 : y - z = 2$ (рис. 137). Тогда

$\alpha_1 \cap \beta_1 = s_1 : \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$. $x - y = 1$.

$A\ (1; 0; 0) \in s_1, B\ (0;\ -1;\ -1) \in s_1$.

$\alpha_2 \cap \beta_2 = s_2 : \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow x - y = -1$.

$x = 0, y = 1, z = -1$.

$C\ (0;1;-1) \in s_2, D\ (1;\ 2;\ 0) \in s_2$.

Задача 99 (№ VIII.20). Дана сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$ и плоскость, уравнение которой $Ax+By+Cz+D=0$. При каком условии на коэффициенты в уравнении плоскости сфера касается этой плоскости?

Дано: $\omega: x^2+y^2+z^2=R^2$ ($\omega(O;R)-$ сфера), $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$.

Найти: $\alpha \cap \omega = \{\mathrm{P}\} -$ точка касания.

Решение.

$\alpha \cap \omega = \{\mathrm{P}\} \Leftrightarrow \rho(O;\ \alpha) = R$.

$\rho(O;\ \alpha) = \frac{|A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = R$, то есть $|D| = R\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, отсюда

$\sqrt{A^2+B^2+C^2} = \pm\frac{D}{R}$.

Задача 100 (№ VIII.21). Известны расстояния от данной точки до трех вершин прямоугольника. Сможете ли вы найти расстояние от нее до четвертой вершины (рис. 129)?

Дано: $ABCD -$ прямоугольник, $AM=d_1, BM=d_2, CM=d_3$.

Можно ли найти $DM=d$?

Решение.

1) Введем ПДСК, как на рис. 129, тогда A$(0,0,0)$, B$(a,0,0)$, D$(0,b,0)$,

C$(a,b,0)$.

2) Пусть $M(x,y,x), AM=d_1, BM=d_2, CM=d_3$, тогда

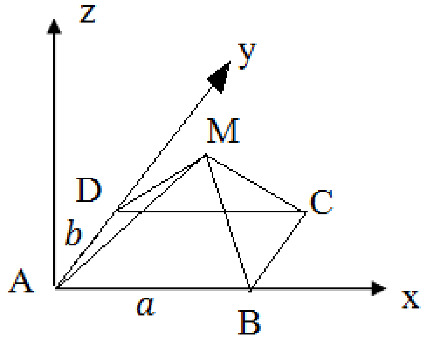


Рис. 129

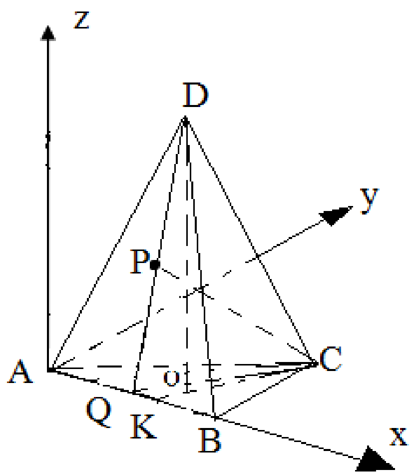


Рис. 130

$$\begin{cases}\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=d_1\\ \sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=d_2\\ \sqrt{(x-0)^2+(y-b)^2+(z-0)^2}=d_3\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x^2+y^2+z^2=d_1 \ (1)\\ (x-a)^2+y^2+z^2=d_2 \quad (2)\\ x^2+(y-b)^2+z^2=d_3 \ (3)\end{cases}$$

Из (1) вычтем (2), получим: $x^2-(x-a)^2=d_1-d_2$,

отсюда $x^2-x^2+2ax+a^2=d_1-d_2$, $x=\frac{d_1-d_2-a^2}{2a}$.

После этого из уравнений (1) и (3) получаем: $y^2-(y-b)^2=d_1-d_3$, отсюда

$y^2-y^2+2by+b^2=d_1-d_3$, $y=\frac{d_1-d_3-b^2}{2b}$.

Тогда из (1):

$$z^2=d_1-x^2-y^2=d_1-\left(\frac{d_1-d_2-a^2}{2a}\right)^2-\left(\frac{d_1-d_3-b^2}{2b}\right)^2=$$

$=\frac{4a^2b^2d_1-b^2(d_1-d_2-a^2)^2-a^2(d_1-d_3-b^2)^2}{4a^2b^2}$, отсюда

$z_M=\frac{\sqrt{4a^2b^2d_1-b^2(d_1-d_2-a^2)^2-a^2(d_1-d_3-b^2)^2}}{2ab}$.

Итак, $M\left(\frac{d_1-d_2-a^2}{2a}, \frac{d_1-d_3-b^2}{2b}, z_M\right)$.

Следовательно, можно найти и расстояние $DM=d$.

Задача 101 (№ VIII.22). В грани правильного тетраэдра лежит точка. Требуется вычеслить расстояние от нее до противоположной вершины тетраэдра. Сколько расстояний между данными точками вам потребуется найти для этого?

Дано: $ABCD - \text{правильный тетраэдр}, \mathrm{P} \in ABD$.

Найти: $d = CP$.

Решение.

1) Пусть $AB = a$, введем ПДСК, как на рис. 130, тогда А$(0, 0, 0)$, В$(a, 0, 0)$, С$\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $D\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{6}, \frac{a\sqrt{6}}{3}\right)$.

2) $\alpha = (ABD) \Rightarrow Ox < (ABD) \Rightarrow \alpha: By + Cz = 0$.

$D\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{6}, \frac{a\sqrt{6}}{3}\right) \in \alpha \Rightarrow B \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} + C \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = 0 / \cdot \frac{6}{\sqrt{3}a}$

$B + C \cdot 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow B = -2\sqrt{2}; C = 1$.

$\alpha: -2\sqrt{2}y + z = 0 / \cdot \sqrt{2}, \alpha: -4y + \sqrt{2}z = 0;$

$F(x, y, z) \in \alpha$, поэтому $-4y + \sqrt{2}z = 0$ (1).

Задача 102 (№ VIII.23). Векторы $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ не лежат в одной плоскости. Выразите угол между $\overrightarrow{OC}$ и плоскостью OAB через эти векторы. Пусть известно разложение каждого из векторов в ортонормированном базисе. Проведите вычисления этого угла по полученной формуле.

Дано: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ – некомплонарны, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}\left\{a_x, a_y, a_z\right\}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}\left\{b_x, b_y, b_z\right\}$,

$$\overrightarrow{OC}\left\{c_x, c_y, c_z\right\}.$$

Найти: φ (рис. 131).

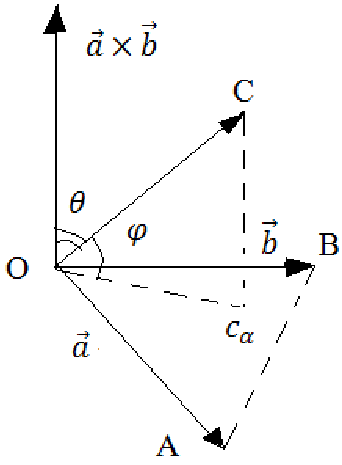


Рис. 131

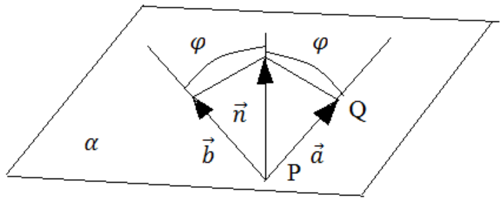


Рис. 132

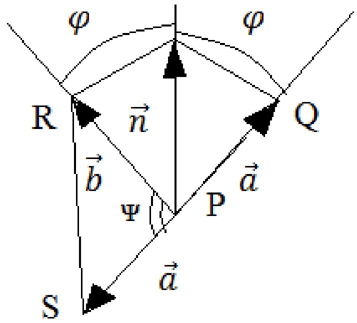


Рис. 133

<u>Решение.</u>

1) $\vec{N}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot\vec{\imath}+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}\cdot\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\cdot\vec{k}.$

2) $\cos\theta=\dfrac{\vec{c}\cdot\vec{N}}{|\vec{c}||\vec{N}|}=\dfrac{c_x\cdot\begin{vmatrix}a_y a_z\\ b_y b_z\end{vmatrix}+c_y\cdot\begin{vmatrix}a_z a_x\\ b_z b_x\end{vmatrix}+c_z\cdot\begin{vmatrix}a_x a_y\\ b_x b_y\end{vmatrix}}{\sqrt{c_x^2+c_y^2+c_z^2}\cdot\sqrt{\begin{vmatrix}a_y a_z\\ b_y b_z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_y a_z\\ b_y b_z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_x a_y\\ b_x b_y\end{vmatrix}^2}}$,

$\varphi=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ (или $\varphi=\theta-\dfrac{\pi}{2}$) $\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$ или $\theta=\dfrac{\pi}{2}+\varphi$,

$\cos\theta=\cos(\dfrac{\pi}{2}\pm\varphi)=\pm\sin\varphi\Rightarrow\sin\varphi=\pm\cos\theta\Rightarrow\sin\varphi=|\cos\theta|=\dfrac{|\vec{c}\cdot\vec{N}|}{|\vec{c}|\cdot|\vec{N}|}$, отсюда

$$\sin\varphi=\frac{\left|\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{c_x{}^2+c_y{}^2+c_z{}^2}\cdot\sqrt{\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}^2}}.$$

Задача 103 (№ VIII.24). На плоскую поверхность падает луч света (рис. 132). Пусть единичный направляющий вектор этого луча $\vec{a}$, единичный

нормальный вектор поверхности $\vec{n}$ и единичный направляющий вектор отраженного луча $\vec{b}$ (рис. 133). Выразите $\vec{b}$ через $\vec{a}$ и $\vec{n}$. Пусть известны координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{n}$. Найдите координаты вектора $\vec{b}$ по выведеной вами формуле.

Решение.

Имеем: $\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{SR}$, $\overrightarrow{SR}\uparrow\uparrow\vec{n}$, поэтому

$$\left|\overrightarrow{SR}\right| = \left|\vec{b}-\vec{a}\right| = \sqrt{\left(\vec{b}-\vec{a}\right)^2} = \sqrt{\vec{b}^2 - 2\vec{b}\vec{a} + \vec{a}^2} =$$

$$= \sqrt{1-2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos(180^\circ-2\varphi)+1} = \sqrt{2+2cos2\varphi} = \sqrt{2(1+\cos 2\varphi)} =$$

$$= \sqrt{2\cdot 2cos^2\varphi} = 2\cos\varphi.$$

$\left|\overrightarrow{SR}\right| = 2\cos\varphi \Rightarrow \overrightarrow{SR} = \vec{n}\cdot 2\cos\varphi$, то есть

$\vec{n}\cdot 2\cos\varphi = \vec{b}-\vec{a} \Rightarrow \vec{b} = \vec{a}+\vec{n}\cdot 2\cos\varphi$; $\cos(180^\circ-2\varphi) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{n}|} = \vec{a}\cdot\vec{n}$;

$\vec{a}\cdot\vec{n} = -cos\varphi \Rightarrow cos\varphi = -\vec{a}\cdot\vec{n}$.

$\vec{b}=\vec{a}+2\vec{n}\cdot(-\vec{a}\cdot\vec{n}), \vec{b}=\vec{a}-2\vec{n}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{n})$.

Если $\vec{a}\{a_x,a_y,a_z\}, \vec{n}\{n_x,n_y,n_z\}$, то

$$\begin{cases} b_x = a_x - 2n_x(a_xn_x + a_yn_y + a_zn_z) \\ b_y = a_y - 2n_y(a_xn_x + a_yn_y + a_zn_z). \\ b_z = a_z - 2n_z(a_xn_x + a_yn_y + a_zn_z) \end{cases}$$

ГЛАВА V. ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «ПРЕОБРАЗОВАНИЯ»

V.1. Исследовательские задачи к параграфу «Движения и их общие свойства»

Задача 104 (№ 38.12). Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$ и f – движение пространства. Как можно определить $f(\vec{a})$? Что при этом требуется доказать?

Дано: $\vec{a} \neq \vec{0}$ и f – движение пространства.

Вопрос: как можно определить $f(\vec{a})$? Что при этом требуется доказать?

Решение.

Зададим вектор $\vec{a}$ направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$, то есть $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$; пусть $f(\vec{a}) = f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'} = \vec{a}'$, где *A′ = f (A), B′ = f (B)* Проверять (доказывать) надо, что $|\vec{a}| = |\vec{a}'|$. Но это следует из того, что f – движение пространства, поэтому $AB = A'B'$ или $|\vec{a}| = |\vec{a}'|$.

Задача 105 (№ 38.13). Нас будут интересовать такие свойства отображения пространства: 1) Является ли оно обратимым? 2) Имеет ли оно неподвижные точки? 3) Имеются ли такие прямые (плоскости), которые при этом отображении отображаются на себя? Ответьте на эти вопросы для отображений пространства, которые точке (x, y, z) ставят в соответствие точку: а) $(-x, y, z)$; б) $(x, -y, -z)$; в) $(-x, -y, -z)$; г) $(|x|, y, z)$; д) $(x, y, 0)$; е) $(0, 0, z)$;

ж) $(x+a, y+b, z+c)$; з) $(2-x, y, z)$; и) (z, x, y); к) $(2x, y, z)$; л) $\left(2x, \frac{1}{2}y, z\right)$;

м) $(x+y, y, z)$; н) $(x+y, y+z, z+x)$.

Дано: а) $f_1:(x,y,z) \to (-x,y,z)$; б) $f_2:(x,y,z) \to (x,-y,z)$;

в) $f_3:(x,y,z) \to (-x,-y,-z)$; г) $f_4:(x,y,z) \to (|x|,y,z)$; д) $f_5:(x,y,z) \to (x,y,0)$;

е) $f_6:(x,y,z) \to (0,0,z)$; ж) $f_7:(x,y,z) \to (x+a,y+b,z+c)$;

з) $f_8:(x,y,z) \to (2-x,y,z)$; и) $f_9:(x,y,z) \to (z,x,y)$;

к) $f_{10}:(x,y,z)\to(2x,y,z)$; л) $f_{11}:(x,y,z)\to(2x,\frac{1}{2}y,z)$;

м) $f_{12}:(x,y,z)\to(x+y,y,z)$; н) $f_{13}:(x,y,z)\to(x+y,y+z,z+x)$;

$f_1, f_2, f_3, f_{4,\dots,} f_{13}$ – отображения пространства.

<u>Вопросы</u>: 1) Является ли оно обратимым? 2) Имеет ли оно неподвижные точки? 3) Имеются ли такие прямые (плоскости), которые при этом отображении отображаются на себя?

<u>Решение.</u>

Вопрос 1. Из п. 38.1. следует, что если *отображение f пространства имеет обратное отображение* f^{-1}, *то f называется обратимым отображением.*

А. Для отображения $f_1:\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \\ z'=z \end{cases}$, отсюда $\begin{cases} x=-x' \\ y=y' \\ z=z' \end{cases}$, то есть

$f_1^{-1}:(x',y',z')\to(-x',y',z')$. Следовательно, f_1 – обратимое отображение.

Б. Для отображения $f_2:\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \\ z'=z \end{cases}$, отсюда $\begin{cases} x=x' \\ y=-y' \\ z=z' \end{cases}$, то есть

$f_2^{-1}:(x',y',z')\to(x',-y',z')$. Следовательно, f_2 – обратимое отображение.

В. Для отображения $f_3:\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \\ z'=-z \end{cases}$, отсюда $\begin{cases} x=-x' \\ y=-y' \\ z=-z' \end{cases}$, то есть

$f_3^{-1}:(x',y',z')\to(-x',-y',-z')$. Следовательно, f_3 – обратимое отображение.

Г. Для отображения $f_4:\begin{cases} x'=|x| \\ y'=y \\ z'=z \end{cases}$, отсюда $\begin{cases} x=\pm x' \\ y=y' \\ z=z' \end{cases}$. Имеем, что f_4 двум разным точкам ставит в соответствие одну и ту же точку, следовательно, f_4 не является обратимым отображением, а потому не имеет обратного отображения f_4^{-1}.

Д. Для отображения $f_5: \begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = 0 \end{cases}$. Имеем, что f_5 двум разным точкам $M(x, y, 4)$ и $N(x, y, 3)$ ставит в соответствие одну и ту же точку $M'(x, y, 0)$, следовательно, f_5 не является обратимым отображением, а потому не имеет обратного отображения f_5^{-1}.

Е. Для отображения $f_6: \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \\ z' = z \end{cases}$. Имеем, что f_6 двум разным точкам $M(2,3,z)$ и $N(4,2,z)$ставит в соответствие одну и ту же точку $M'(0,0,z)$, следовательно, f_6 не является обратимым отображением, а потому не имеет обратного отображения f_6^{-1}.

Ж. Для отображения $f_7: \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$, отсюда $\begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \\ z = z' - c \end{cases}$, то есть $f_7^{-1}: (x', y', z') \to (x' - a, y' - b, z' - c)$. Следовательно, f_7 – обратимое отображение.

З. Для отображения $f_8: \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$, отсюда $\begin{cases} x = -x' + 2 \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$, то есть $f_8^{-1}: (x', y', z') \to (-x' + 2, y', z')$. Следовательно, f_8 – обратимое отображение.

И. Для отображения $f_9: \begin{cases} x' = z \\ y' = x \\ z' = y \end{cases}$, отсюда $\begin{cases} x = y' \\ y = z' \\ z = x' \end{cases}$, то есть $f_9^{-1}: (x', y', z') \to (z', x', y')$. Следовательно, f_9 – обратимое отображение

К. Для отображения $f_{10}: \begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$, отсюда $\begin{cases} x = \dfrac{x'}{2} \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$, то есть

${f_{10}}^{-1}:(x',y',z')\to\left(\frac{x'}{2},y',z'\right)$. Следовательно, f_{10} – обратимое отображение.

Л. Для отображения $f_{11}:\begin{cases} x'=2x \\ y'=\frac{1}{2}y \\ z'=z \end{cases}$, отсюда $\begin{cases} x=\frac{x'}{2} \\ y=2y' \\ z=z' \end{cases}$, то есть

${f_{11}}^{-1}:(x',y',z')\to\left(\frac{x'}{2},2y',z'\right)$. Следовательно, f_{11} – обратимое отображение.

М. Для отображения $f_{12}:\begin{cases} x'=x+y \\ y'=y \\ z'=z \end{cases}$, отсюда $\begin{cases} x=x'-y' \\ y=y' \\ z=z' \end{cases}$, то есть

${f_{12}}^{-1}:(x',y',z')\to(x'-y',y',z')$. Следовательно, f_{12} – обратимое отображение.

Н. Для отображения $f_{13}:\begin{cases} x'=x+y \\ y'=y+z \\ z'=z+x \end{cases}$, отсюда $\begin{cases} x=\frac{x'-y'+z'}{2} \\ y=\frac{y'+x'-z'}{2} \\ z=\frac{z'+y'-x'}{2} \end{cases}$, то есть

${f_{13}}^{-1}:(x',y',z')\to\left(\frac{x'+z'-y'}{2},\frac{y'+x'-z'}{2},\frac{z'+y'-x'}{2}\right)$. Следовательно, f_{13} – обратимое отображение.

Вопрос 2. Из п. 38.1. следует, что *неподвижной точкой отображения* f *называется такая точка* A*, что* $f(A)=A$.

Если отображение $f:(x,y,z)\to(x',y',z')$ задано формулами:

$\begin{cases} x'=g_1(x,y,z) \\ y'=g_2(x,y,z) \\ z'=g_3(x,y,z) \end{cases}$ (1), неподвижная точка отображения f определяется условиями: $\begin{cases} x'=x \\ y'=y \\ z'=z \end{cases}$ (2). Из (1) и (2) получаем систему $\begin{cases} x=g_1(x,y,z) \\ y=g_2(x,y,z) \\ z=g_3(x,y,z) \end{cases}$ (*) для отыскания координат неподвижных точек.

А. Для отображения f_1 система (*) примет вид: $\begin{cases} x=-x \\ y=y \\ z=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y\in R \\ z\in R \end{cases}$.

Следовательно, неподвижные точки для f_1 – это точки М (0; y; z), то есть все точки плоскости Oyz.

Б. Для отображения f_2 система (*) примет вид: $\begin{cases} x=x \\ y=-y \\ z=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}\in R \\ \mathrm{y}=0 \\ \mathrm{z}\in R \end{cases}$.

Следовательно, неподвижные точки для f_2 – это точки М (x; 0; z), то есть все точки плоскости Oxz.

В. Для отображения f_3 система (*) примет вид: $\begin{cases} x=-x \\ y=-y \\ z=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}=0 \\ \mathrm{y}=0 \\ \mathrm{z}=0 \end{cases}$.

Следовательно, единственной неподвижной точкой для f_3 является О (0; 0; 0).

Г. Для отображения f_4 система (*) примет вид: $\begin{cases} x=|x| \\ y=y \\ z=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}\geq 0 \\ \mathrm{y}\in R \\ \mathrm{z}\in R \end{cases}$.

Следовательно, неподвижные точки для f_4 – все точки полупространства, ограниченного плоскостью Oyz, имеющие неотрицательные абсциссы.

Д. Для отображения f_5 система (*) примет вид: $\begin{cases} x=x \\ y=y \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}\in R \\ \mathrm{y}\in R \\ \mathrm{z}=0 \end{cases}$.

Следовательно, неподвижные точки для f_5 – все точки плоскости Oxy.

Е. Для отображения f_6 система (*) примет вид: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}=0 \\ \mathrm{y}=0 \\ z\in R \end{cases}$.

Следовательно, неподвижные точки для f_6 – все точки оси Oz.

Ж. Для отображения f_7 система (*) примет вид: $\begin{cases} x = x + a \\ y = y + b \\ z = z + c \end{cases}$ (I). Отсюда ясно, что если среди чисел a, b, c хотя бы одно отлично от нуля, то система (I) решений не имеет. Следовательно, неподвижных точек для f_7 – нет.

З. Для отображения f_8 система (*) примет вид: $\begin{cases} x = -x + 2 \\ y = y \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y \in R \\ z \in R \end{cases}$, следовательно, неподвижные точки для f_8 – точки плоскости σ, такой что A(1; 0; 0)$\in \sigma$ и $\sigma \| Oyz$.

И. Для отображения f_9 система (*) примет вид: $\begin{cases} x = z \\ y = x \\ z = y \end{cases}$, следовательно, неподвижные точки для f_9 – те точки, все координаты которых равны, например: O(0; 0; 0), A(1,1,1), B(5,5,5) и т.д.

К. Для отображения f_{10} система (*) примет вид: $\begin{cases} x = 2x \\ y = y \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \in R \\ z \in R \end{cases}$, следовательно, неподвижные точки для f_{10} – все точки плоскости Oyz.

Л. Для отображения f_{11} система (*) примет вид: $\begin{cases} x = 2x \\ y = \frac{1}{2} y \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \\ z \in R \end{cases}$ следовательно, неподвижные точки для f_{11} – все точки оси Oz.

М. Для отображения f_{12} система (*) примет вид: $\begin{cases} x = x + y \\ y = y \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in R \\ y = 0, \\ z \in R \end{cases}$ следовательно, неподвижные точки для f_{12} – все точки плоскости Oxz.

Н. Для отображения f_{13} система (*) примет вид: $\begin{cases} x = x + y \\ y = y + z \\ z = z + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, следовательно, неподвижная точка для f_{13} одна – точка О (0; 0; 0).

Вопрос 3.

А. Для f_1 плоскость Oyz – плоскость неподвижных точек, любая прямая этой плоскости также прямая неподвижных точек. Кроме того, любая плоскость (прямая), перпендикулярная плоскости Oyz, отображается на себя, так как $f_1 = S_{oyz}$.

Б. Для f_2 плоскость Oxz – плоскость неподвижных точек, любая прямая этой плоскости также прямая неподвижных точек. Кроме того, любая плоскость (прямая), перпендикулярная плоскости Oxz, отображается на себя, так как $f_2 = S_{oxz}$.

В. Для f_3 любая прямая (плоскость), проходящая через точку О (0;0;0), отображается на себя, так как $f_3 = Z_O$.

Г. Для f_4 неподвижные точки – все точки полупространства: $x \geq 0$.

Д. Для f_5 плоскость Oxy – плоскость неподвижных точек, любая прямая этой плоскости также прямая неподвижных точек. Кроме того, любая плоскость (прямая), перпендикулярная плоскости Oxy, отображается на себя, так как $f_5 = S_{oxy}$.

Е. Для f_6 ось Oz – прямая неподвижных точек.

Ж. Для f_7 те прямые, которые параллельны вектору $\vec{u}\{a, b, c\}$, отображаются на себя. Поэтому отображаются на себя и те плоскости, которые содержат две прямые, параллельные вектору $\vec{u}\{a, b, c\}$.

З. Для f_8 плоскость σ – такая, что $A(1;0;0) \in \sigma$, $\sigma \| Oyz$, является плоскостью неподвижных точек, а любая прямая этой плоскости – прямая неподвижных точек. Кроме того, любая прямая (плоскость), перпендикулярная плоскости σ, отображается на себя, так как $f_8 = S_\sigma \cdot T_{\vec{u}}$, где $T_{\vec{u}}$ – перенос на вектор $\vec{u}\{2;0;0\}$.

И. Для f_9 прямая s, проходящая через точки O (0;0;0), A (1;1;1), есть прямая неподвижных точек, а поэтому любая плоскость, перпендикулярная прямой s, отображается на себя.

К. Для f_{10} плоскость Oyz – плоскость неподвижных точек, любая прямая этой плоскости, проходящая через точку О, неподвижная прямая.

Л. Для f_{11} ось Oz – прямая неподвижных точек.

М. Для f_{12} плоскость Oxz – плоскость неподвижных точек, поэтому любая прямая этой плоскости есть прямая неподвижных точек.

Н. Для f_{13} любая прямая s, проходящая через точки O (0;0;0), A (1;1;1), отображается на себя.

Задача 106 (№ 38.14). Отображение f задано следующим образом:

а) $f(\vec{x})=\vec{x}+\vec{a}$**; б)** $f(\vec{x})=k\vec{x}$**; в)** $f(\vec{x})=(\vec{a}\cdot\vec{x})\cdot\vec{x}$**. При этом все векторы откладываются от одной точки. Выполните то же задание, что и в задаче 38.13.**

Дано: f_1, f_2, f_3 – отображения; а) $f_1(\vec{x})=\vec{x}+\vec{a}$; б) $f_2(\vec{x})=k\vec{x}$; в) $f_3(\vec{x})=(\vec{a}\cdot\vec{x})\cdot\vec{x}$.

Все векторы откладываются от одной точки.

Вопросы: 1) Являются ли отображения обратимыми? 2) Имеют ли они неподвижные точки? 3) Имеются ли такие прямые (плоскости), которые при этих отображениях отображаются на себя?

Решение.

Вопрос 1. Являются ли отображения обратимыми?

А. Для f_1 имеем: $\vec{x}'=\vec{x}+\vec{a}$, отсюда $\vec{x}=\vec{x}'-\vec{a}$, следовательно, $f_1^{-1}(\vec{x}')=\vec{x}'-\vec{a}$, поэтому f_1 – обратимое отображение.

Б. Для f_2 имеем: $\vec{x}'=k\vec{x}\,(k\neq 0)$, отсюда $\vec{x}=\dfrac{1}{k}\vec{x}'$, следовательно, $f_2^{-1}(\vec{x}')=\dfrac{1}{k}\vec{x}'$, поэтому f_2 – обратимое отображение.

В. Для f_3 имеем: $\vec{x}'=(\vec{a}\cdot\vec{x})\cdot\vec{x}$. Если $\vec{x}\perp\vec{a}$, то $\vec{a}\cdot\vec{x}=0$ и $\vec{x}'=0\cdot\vec{x}=\vec{0}$. Следовательно, при отображении f_3 разные векторы, перпендикулярные вектору $\vec{a}$, отображаются в один и тот же нулевой вектор. Поэтому отображение f_3 не является обратимым.

Вопрос 2. Имеются ли неподвижные точки у этих отображений?

Так как все векторы откладываются от одной и той же точки, например, О, то пусть $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$. Точка X – неподвижная при отображении f , если и только $f(\overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{OX}$ или $f(\vec{x}) = \vec{x}$.

А. Для f_1 имеем: $\vec{x} = \vec{x} + \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$. В этом случае все точки пространства остаются на месте, то есть f_1 – тождественное преобразование пространства. Если же $\vec{a} \neq \vec{0}$, то неподвижных точек нет.

Б. Для f_2 имеем: $\vec{x} = k\vec{x} \Rightarrow \vec{x}(1-k) = \vec{0}$, при $k \neq 1$ получаем, что $\vec{x} = \vec{0}$. Следовательно, единственной неподвижной точкой является точка О.

В. Для f_3 имеем: $\vec{x} = (\vec{a} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{x} \Rightarrow \vec{x}(1 - \vec{a} \cdot \vec{x}) = \vec{0}$. Если $\vec{x} \neq \vec{0}$, то тогда $1 - \vec{a} \cdot \vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{x} = 1$. Следовательно, неподвижными точками будут те точки $X = (x, y, z)$, для которых $\vec{a} \cdot \vec{x} = 1$ или в координатной форме:

$a_x \cdot x + a_y \cdot y + a_z \cdot z = 1$ $(\overrightarrow{OX} = \vec{x} = \{x, y, z\})$. Уравнение определяет плоскость перпендикулярную вектору $\vec{a}$.

Вопрос 3. Имеются ли такие прямые (плоскости), которые при этих отображениях отображаются на себя?

А. Для f_1, если $\vec{a} = \vec{0}$, то любая плоскость (прямая) будет отображаться на себя, то есть будет неподвижной. Если же $\vec{a} \neq \vec{0}$, то любая прямая, параллельная вектору $\vec{a}$, будет неподвижной. Любая плоскость, проходящая через две параллельные неподвижные прямые, будет неподвижной.

Б. Для f_2 любая плоскость (прямая), проходящая через точку О(0,0,0), отображается на себя.

В. Для f_3 плоскость, перпендикулярная вектору $\vec{a}$ – плоскость неподвижных точек, любая прямая этой плоскости также прямая неподвижных точек.

Задача 107 (№ 38.15). Отображение f задано следующими условиями: $f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})$ и $f(k\vec{x})=kf(\vec{x})$. При этом все векторы откладываются от одной точки. Приведите примеры таких отображений плоскости на себя. Является ли таким отображением параллельное проектирование? Найдите $f(\vec{0})$, $f^{-1}(\vec{0})$. Какое из отображений задачи 38.13 отвечает этим условиям?

Дано: Отображение f задано следующими условиями: $f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})$ и $f(k\vec{x})=kf(\vec{x})$. При этом все векторы откладываются от одной точки.

Вопросы: 1) Приведите примеры таких отображений плоскости на себя. 2) Является ли таким отображением параллельное проектирование? 3) Найдите $f(\vec{0})$, $f^{-1}(\vec{0})$. 4) Какое из отображений задачи 38.13 отвечает этим условиям?

Решение.

1) *Пример 1*. Пусть $f(\vec{x})=-\vec{x}$ (*). Тогда:

а) $f(\vec{x}+\vec{y})=-(\vec{x}+\vec{y})=-\vec{x}+(-\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})$; б) $f(k\vec{x})=-(k\vec{x})=k(-\vec{x})=kf(\vec{x})$.

Итак, заданное отображение (*) удовлетворяет условиям (1), (2) и является отображением плоскости на себя (центральной симметрией с центром O).

Пример 2. Пусть $f(\vec{x})=m\vec{x}$ (**), где $(m\neq 0)$. Тогда:

а) $f(\vec{x}+\vec{y})=m(\vec{x}+\vec{y})=m\vec{x}+m\vec{y}=f(\vec{x})+f(\vec{y})$;

б) $f(k\vec{x})=m(k\vec{x})=k(m(\vec{x}))=k\cdot f(\vec{x})$.

Итак, заданное отображение (**) удовлетворяет условиям (1), (2) и является отображением плоскости на себя (гомотетией с центром O и коэффициентом m).

2) Параллельное проецирование (на плоскость σ) является отображением, которое удовлетворяет условиям (1), (2), так как

а) $Пр_{\sigma}(\vec{x}+\vec{y})=Пр_{\sigma}\vec{x}+Пр_{\sigma}\vec{y}$; б) $Пр_{\sigma}(k\vec{n})=k\cdot Пр_{\sigma}\vec{n}$.

3) При отображении f, которое задано условиями (1), (2) имеем:

$f(\vec{0})=f(0\cdot\vec{x})=0\cdot f(\vec{x})=\vec{0}$. (Или $f(\vec{0})=f(\vec{x}+(-\vec{x}))=f(\vec{x})+f(-\vec{x})=f(\vec{x})+$ $+(-f(\vec{x}))=\vec{0}$. Из того, что $f(\vec{0})=\vec{0}$ следует, что $f^{-1}(\vec{0})=\vec{0}$.

4) Из отображений $f_1 - f_{13}$ задачи 38.13 условиям (1), (2) удовлетворяют прежде всего те отображения, которые являются обратимыми, то есть отображения f_1, f_2, f_3, f_7 , $f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}, f_{13}$.

Задача 108 (№ 38.16). Зафиксируем точку O в пространстве и рассмотрим такое его отображение, которое каждой точке X ставит в соответствие точку X_1, такую, что $X_1 \in OX$ и $|OX_1| \cdot |OX| = 1$ (рис. 134). Ответьте на вопросы задачи 38.13 для этого отображения.

Дано: O – фиксированная точка пространства, f – отображение пространства, такое, что $f(X) = X_1$, где $\begin{cases} X_1 \in OX \\ OX \cdot OX_1 = 1 \end{cases}$.

Ответить на вопросы из задачи 38.13 для такого отображения.

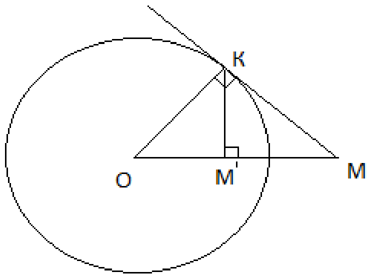


Рис. 134

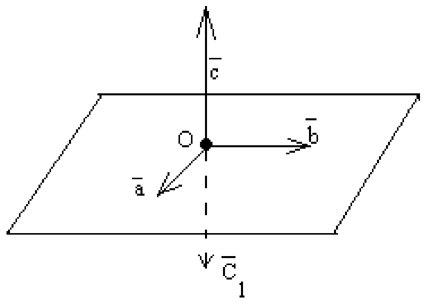


Рис. 135

Решение.

Пусть $\gamma(0; r = 1)$ – окружность (аналог сферы $\omega(O; r = 1)$, $M \notin \gamma$, M – вне γ. Проведем касательную MK к γ, и из точки K опустим перпендикуляр KM' на прямую OM, тогда M' – образ точки M (см. рис. 134). В самом деле, в прямоугольном треугольнике OKM катет OK есть среднее пропорциональное между гипотенузой OM и проекцией OM' катета OK на гипотенузу, то есть $OK^2 = OM \cdot OM'$, но $OK = 1$, поэтому получаем $OM \cdot OM' = 1$, $M' \in OM$, что и требовалось.

1) Является ли отображение f обратимым?

Пусть $f: X \to X'$, что $OX \cdot OX' = 1$; существует ли обратное отображение: $f^{-1}: X' \to X$? Да, так как $X \in OX'$ и $OX' \cdot OX = 1$. Поэтому f – обратимое отображение.

2) Имеет ли оно неподвижные точки?

Существуют ли такие точки X, что $f: X \to X$ и $OX \cdot OX = 1$?

Да, существуют. Неподвижные точки лежат на окружности $\gamma(O, r = 1)$.

Задача 109 (№ 38.17). Является ли движением отображение из задач 38.13, 38.14, 38.15, 38.16?

Дано: Отображения из задач 38.13, 38.14, 38.15, 38.16.

Вопрос: какие из этих отображений являются движениями?

Решение.

Из п. 38.2 следует, что *движение пространства – это такое отображение пространства, которое сохраняет расстояния.*

При этом, движение – взаимно однозначное отображение, оно обратимо. Следовательно, в задачах №38.13–38.16 лишь те отображения могут быть движениями, которые обратимы.

В 38.13 движениями являются отображения: $f_1, f_2, f_3, f_7, f_8, f_9$, так как именно эти отображения сохраняют расстояния.

В 38.14 движением является отображение $f_1: \vec{x} \to \vec{x} + \vec{a}$, а отображение $f_2: \vec{x} \to k\vec{x}$, при $k \neq 1$ не является движением.

В 38.15 отображение $f: \vec{x} \to \left(-\vec{x}\right)$ из примера 1 является движением, а отображение $f: \vec{x} \to m\vec{x}$ из примера 2 не является движением, если $|m| \neq 1$.

Параллельное проецирование (на плоскость) движением не является. Отображение f, удовлетворяющее условиям (1), (2), вообще говоря, движением не является.

В 38.16 заданное отображением f движением не является, так как расстояния не сохраняются.

Задача 110 (№ 38.18). Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – базис пространства. Возьмем движение пространства f , и пусть $f(\vec{a}) = \vec{a}_1,\ f(\vec{b}) = \vec{b}_1,\ f(\vec{c}) = \vec{c}_1.$

а) Будут ли векторы $\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1$ базисом пространства? б) Если будут, то сохранится ли ориентация базиса?

Решение.

А. Векторы $\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1$ будут базисом пространства, так как эти векторы не лежат в одной плоскости (не компланарны).

Б. Ориентация базиса, вообще говоря, не сохранится.

Пример. Пусть σ – плоскость векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а $\vec{c} \perp \sigma$. Рассмотрим $f = S_\sigma$ – симметрию относительно плоскости σ (см. рис. 135), тогда

$f(\vec{a}) = \vec{a},\ f(\vec{b}) = \vec{b},\ f(\vec{c}) = \vec{c}_1$ и $\vec{c}_1 \perp \sigma.$

Тогда базисы $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ и $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1\right)$ имеют разные ориентации.

V.2. Исследовательские задачи к параграфу «Частные виды движений в пространстве»

Задача 111 (№ 39.90). Пусть f — отображение пространства на себя, $f\left(\vec{a}\right) = \vec{a}$ для всякого вектора $\vec{a}$. Верно ли, что f — перенос?

Решение.

f – перенос на нулевой вектор или тождественное отображение.

Задача 112 (№ 39.91). Может ли ограниченное тело иметь больше одного центра симметрии?

Решение.

Нет, докажем это (методом от противного). Допустим, что F – ограниченное тело, и F имеет 2 центра симметрии O_1 и O_2 (см. рис. 126). Тогда $\forall M, N \in F$ имеем:

$Z_{0_1}: M \to M_1, N \to N_1;\ Z_{0_2}: M_1 \to M_2, N_1 \to N_2.$

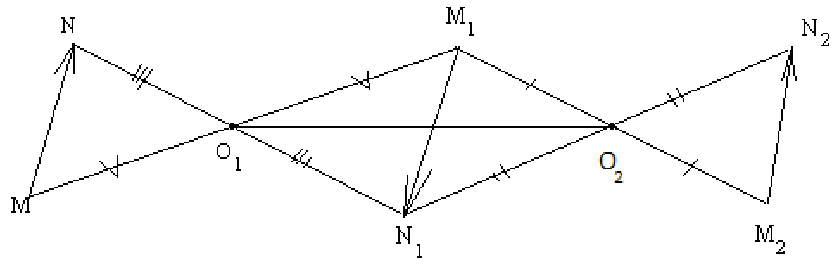


Рис. 136

Тогда $Z_{0_2} \cdot Z_{0_1}: M \to M_2, N \to N_2$ и $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{NN_2} = 2\overrightarrow{OO_2}$.

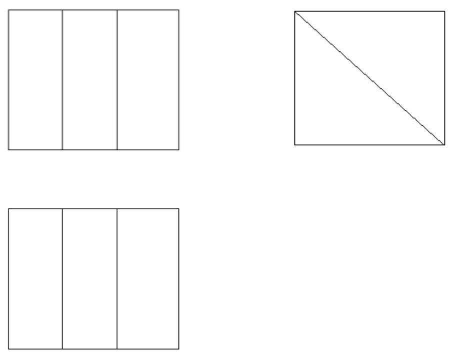
Но и перенос $T_{2\overrightarrow{O_1O_2}}: M \to M_2, N \to N_2$, следовательно, $Z_{o_2} \cdot Z_{o_1} = T_{2\overrightarrow{o_1o_2}}$

Но при переносе ограниченное тело F не может отобразиться на себя. Получили противоречие. Следовательно, F имеет не более одного центра симметрии.

Задача 113 (№ 39.92). Тело F задано тремя ортогональными проекциями. Имеет ли такое тело центр симметрии? Плоскость симметрии? Ось симметрии?

<u>Решение.</u>

А.



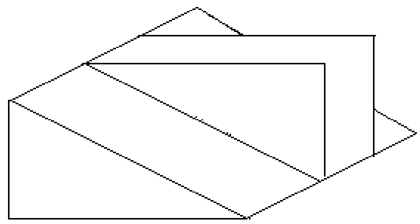


Рис. 137 (эскиз фигуры)

Тело на рис. 137 не имеет центра симметрии, имеет плоскость симметрии, не имеет оси симметрии.

Б.

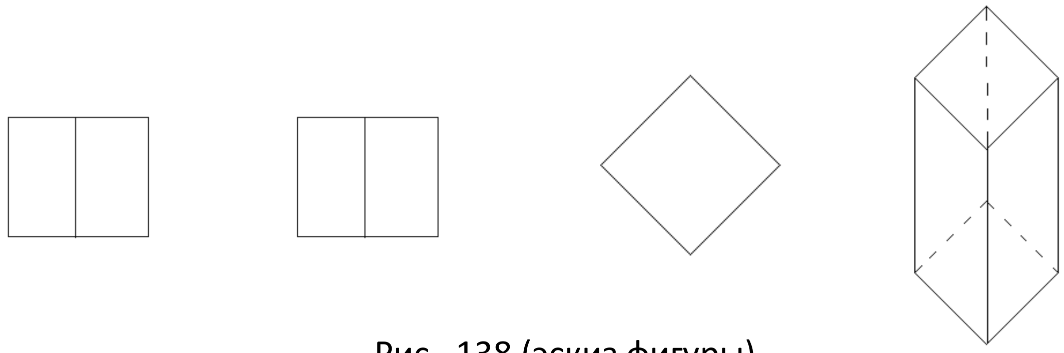


Рис. 138 (эскиз фигуры)

Тело на рис. 138 имеет центр симметрии, плоскость симметрии, ось симметрии.

В.

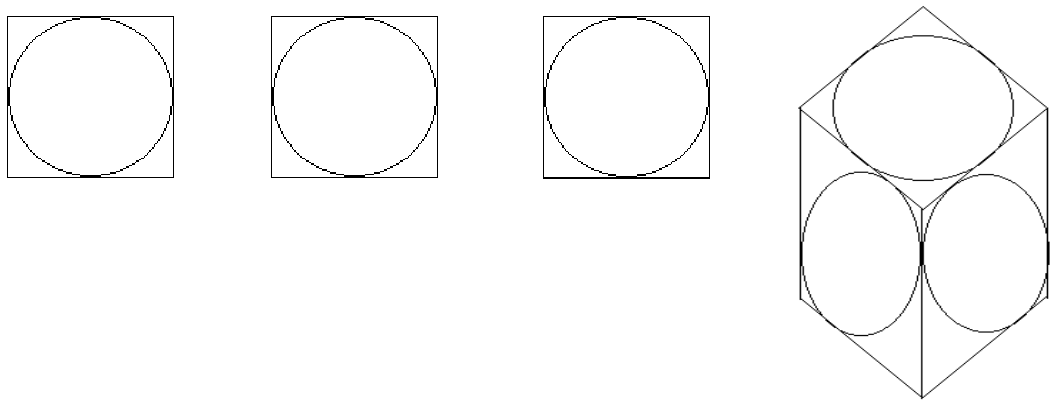


Рис. 139 (эскиз фигуры).

Тело на рис. 139 имеет центр симметрии, плоскость симметрии, ось симметрии.

Г.

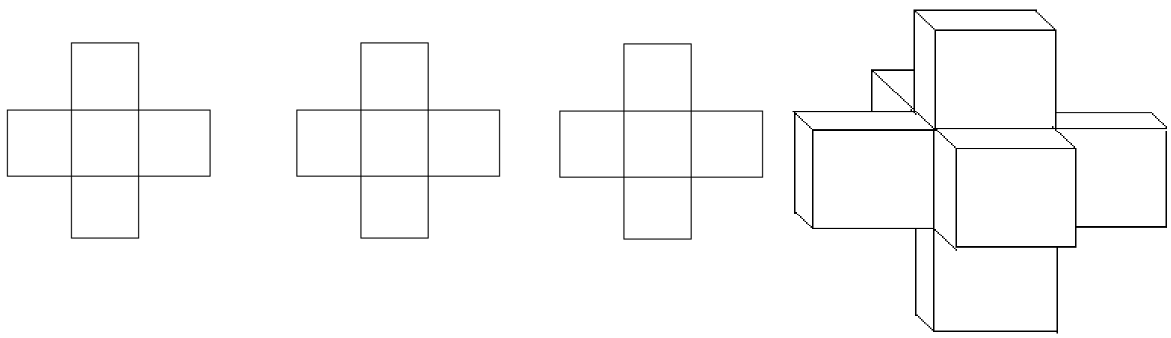


Рис. 140 (эскиз фигуры)

Тело на рис. 140 имеет центр симметрии, плоскость симметрии, ось симметрии.

Д.

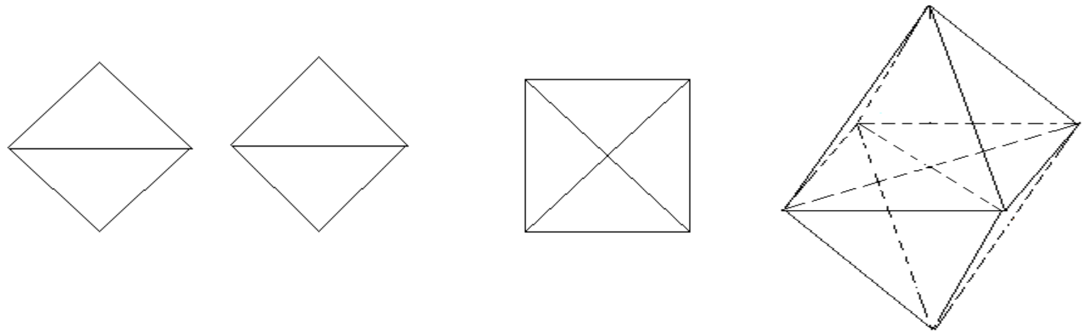


Рис. 141 (эскиз фигуры)

Тело на рис. 114 имеет центр симметрии, плоскость симметрии, ось симметрии.

Задача 114 (№ 39.93). Тело имеет центр симметрии. а) Докажите, что центр симметрии лежит на диаметре тела. б) Верно ли, что с ним совпадает центр наибольшего шара, принадлежащего телу? в) Верно ли, что с ним совпадает центр наименьшего шара, содержащего тело?

Решение.

А. Пусть М – точка тела F, максимально удаленная от точки О, а $M' = Z_0(M)$ – образ точки М при Z_0 – центральной симметрии с центром О. Но так как $Z_0(F) = F$, то $M' \in F$. Следовательно, $OM' = OM = \rho(O, M)$ – наибольшее расстояние, отсюда MM' – наибольшее расстояние между любыми двумя точками тела F. Поэтому отрезок MM', соединяющий наиболее удаленные друг от друга точки тела F, является диаметром тела F, причем $O \in MM'$.

Б. Пусть MM' – диаметр тела F; из параграфа 16 [2] известна теорема: *плоскость, проходящая через конец диаметра тела F перпендикулярно этому диаметру, не имеет с телом F других общих точек и служит опорной плоскостью для тела F.*

Из этой теоремы следует, что всё тело F, кроме концов диаметра MM', расположено строго между плоскостями α и β, проходящими через концы M и M' диаметра MM' перпендикулярно ему, отсюда $\alpha \| \beta$.

Наименьшее расстояние между параллельными опорными плоскостями для тела F назовем шириной тела.

Пусть AB – ширина тела F, Q – середина AB, т.е. $AQ = BQ$, причем $A, B \in F$. Пусть шар $\omega(Q; AQ)$ – наибольший шар, принадлежащий телу F. Так как $Z_0(F) = F$, то и $Z_0(\omega) = \omega \Rightarrow Q \equiv O.$

Итак, точка О совпадает с центром Q наибольшего шара, принадлежащего телу F.

В. Пусть MM' – диаметр тела F, тогда тело F можно поместить в наименьший шар $\omega(O; OM)$, содержащий тело F, при этом точка О совпадает с центром Р наименьшего шара, содержащего тело F.

Задача 115 (№ 39.94). Будет ли сечение центрально-симметричного тела, проходящее через его центр симметрии, центрально симметричным? Сформулируйте и проверьте обратное утверждение.

<u>Решение.</u>

1) Пусть F – тело, имеющее центр симметрии О, то есть $Z_0(F) = F$. Далее, пусть α – плоскость, проходящая через точку О, поэтому $Z_0(\alpha) = \alpha$. Тогда $F_\alpha = F \cap \alpha$ – сечение. Имеем:

$$Z_0(F_\alpha) = Z_0(F \cap \alpha) = Z_0(F) \cap Z_0(\alpha) = F \cap \alpha = F_\alpha.$$

Итак, сечение F_α – симметрично относительно точки О. Следовательно, <u>справедливо утверждение</u>:

если тело F имеет центр симметрии О, то любое его сечение плоскостью α, проходящей через точку О, имеет тот же центр симметрии.

2) <u>Обратное утверждение</u>: *если любое сечение тела F плоскостью α, проходящей через точку О тела F, имеет центр симметрии О, то и тело F симметрично относительно точки О.*

<u>Доказательство.</u> Пусть $F_\alpha = F \cap \alpha$ (1) – сечение тела F плоскостью α, проходящей через точку О; по условию $Z_0(F_\alpha) = F_\alpha, \mathrm{Z}_0(\alpha) = \alpha.$ Тогда имеем: $Z_0(F_\alpha) = Z_0(F \cap \alpha)$ или $F_\alpha = Z_0(F) \cap Z(\alpha),$ или $F_\alpha = Z_0(F) \cap \alpha$ (2).

Из (1) и (2) получаем: $F \cap \alpha = Z_0(F) \cap \alpha$, отсюда следует, что $Z_0(F) = F$, то есть тело F симметрично относительно точки О.

Задача 116 (№ 39.96). Как расположен диаметр тела F по отношению к плоскости σ его симметрии?

<u>Решение.</u>

Пусть АВ – диаметр тела F.

1 случай. $A, B \notin \sigma.$

Тогда $AB \perp \sigma$ и $S_\sigma(A) = B,$ так как $S_\sigma(F) = F.$

2 случай. $A, B \in \sigma.$

Тогда $AB \subset \sigma$.

Итак, либо $AB \perp \sigma, AB \cap \sigma = A_O, A_O A = A_O B$, либо $AB \subset \sigma.$

Задача 117 (№ 39.97). Тело F имеет плоскость симметрии σ. Верно ли, что центр: а) наименьшего шара, содержащего тело, лежит в этой плоскости;

б) наибольшего шара, принадлежащего телу, лежит в этой плоскости?

<u>Решение.</u>

А. Да, верно. Докажем это. По условию $S_\sigma(F) = F,$ пусть AB – диаметр тела F, тогда либо $AB \perp \sigma,$ либо $AB \subset \sigma$ (см. задачу № 39.96). В первом случае: $S_\sigma(A) = B,$ во втором случае: $S_\sigma(A) = A, \ \ \mathrm{S}_\sigma(B) = B.$ Но в обоих случаях шар $\omega(O; R = OA = OB),$ где О – середина АВ, есть наименьший шар, содержащий тело F. При этом, в обоих случаях $O \in \sigma.$

Б. Да, верно. Докажем это. Пусть CD – ширина тела F, то есть CD – наименьшее расстояние между параллельными опорными плоскостями σ_1 и σ_2 для тела F. Далее, пусть О – середина CD. Ясно, что $S_\sigma : C \leftrightarrow D$, поэтому $O \in \sigma$. Значит, шар $\omega_1(O; R = OC = OD)$ – наибольший шар, принадлежащий телу F.

Задача 118 (№ 39.98). Пусть f – движение, g – поворот. Каким движение является $f^{-1} \cdot g \cdot f$?

Решение.

Пусть s – произвольная прямая пространства и $f(s) = t$. Рассмотрим поворот $g = R_t^\varphi$, тогда $g(t) = t$, поэтому $(g \cdot f)(s) = g(f(s)) = t$. Тогда $\left(f^{-1} \cdot (g \cdot f)\right)(s) = f^{-1}\left((g \cdot f)(s)\right) = f^{-1}(t) = s$. Итак, $\left(f^{-1} \cdot (g \cdot f)\right)(s) = s$, следовательно, $f^{-1} \cdot (g \cdot f)$ – поворот вокруг прямой s.

Задача 119 (№ 39.99). Пусть плоскость β является образом плоскости α в результате осевой симметрии с осью l, $\alpha \cap \beta = a$. Верно ли, что $a \perp l$?

Решение.

По условию $S_l : \alpha \leftrightarrow \beta, \alpha \cap \beta = \mathrm{a}$. Так как $S_l : \alpha \leftrightarrow \beta$, то $S_l : (a = \alpha \cap \beta) \to (a' = \beta \cap \alpha = a)$, то есть $S_l : a \to a \Rightarrow a \perp l$.

Задача 120 (№ 39.101). Пусть f – движение, g – осевая симметрия. Каким движением является $f^{-1} \cdot g \cdot f$?

Решение.

Пусть p – произвольная прямая пространства и $f(p) = q$. Рассмотрим осевую симметрию $g = S_q$ с осью q, тогда $g(q) = S_q(q) = q$. Следовательно, $(g \cdot f)(p) = g(f(p)) = g(q) = q$. Тогда $f^{-1}(q) = p$; итак, $h(p) = (f^{-1} \cdot g \cdot f)(p) =$ $= f^{-1}((g \cdot f)p) = f^{-1}(q) = p \Rightarrow h(p) = p \Rightarrow h = S_p$, то есть $f^{-1} \cdot g \cdot f$ **–** осевая симметрия с осью p.

Библиографический список

1. Александров, А.Д. Геометрия–11 / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2006.
2. Александров, А.Д. Геометрия–10 / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И.Рыжик. – М.: Просвещение, 2006.
3. Атанасян, Л.С. Геометрия 10–11 кл. / Л.С. Атанасян и др. – М.: Просвещение, 2008.
4. Шклярский, Д.О. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. / Д.О. Шклярский. – ГИТТЛ, 1954. – Ч. III.
5. Прасолов, В.В. Задачи по стереометрии / В.В. Прасолов, И.Ф. Шарыгин. – М: Наука, 1989.
6. Ходот, Т.Г. Задачи по геометрии / Т.Г. Ходот. – СПб.: Спец. лит., 1997.

Учебное издание

Васильков Вадим Иванович

Биктуанова Гульмира Тагировна

Заикина Евгения Сергеевна

**Исследовательские задачи
в курсе «Геометрия–11» Александрова**

Учебное пособие

ISBN 978-5-906777-26-3

Рекомендована РИСом университета

Протокол № 7 (пункт 21) от 25. 12. 2014 г.

Редактор Е.М. Сапегина

Издательство ЧГПУ

454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 69

Подписано в печать 21. 01. 2015 г.

Объем 6, 0 уч.-изд. л. Формат 60 х 84/8

Тираж 100 экз. Бумага офсетная

Заказ №

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ЧГПУ

454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 69