

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ**

**Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования**

**«Челябинский государственный педагогический университет»**

**В.И. Васильков**

**Исследование подплоскостей  
в конечных проективных плоскостях  
малых порядков**

**Справочное пособие**

**Челябинск**

**2008**

УДК 515 (03)

ББК 22. 151. 32 я 2

В 19

**Васильков В.И.** Исследование подплоскостей в конечных проективных плоскостях малых порядков: справочное пособие / В.И. Васильков. – Челябинск: Изд-во Челяб. гос. пед. ун-та, 2008. – 94 с.

ISBN

В пособии прежде всего единым методом исследованы, с точностью до изоморфизма, все подплоскости в дезарговых конечных проективных плоскостях (КПП) малых порядков 4, 8 и 9, а также в трех недезарговых КПП порядка 9: трансляций, сдвигов и Хьюза. В работе установлено также, что в дезарговой КПП порядка 7 подплоскостей нет.

Кроме того, для подплоскости каждого найденного типа проведены подсчеты общего числа подплоскостей данного типа.

Пособие предназначается в качестве справочника специалистам по комбинаторному анализу и теории КПП, пособия для спецкурсов преподавателям и студентам математических факультетов вузов.

*Научный редактор:* А.А. Махнев, доктор физ.-мат. наук, член-корреспондент РАН, зав. отделом алгебры и топологии ИММ УрО РАН

*Рецензенты:* В.В. Кабанов, доктор физ.-мат. наук, зам. директора ИММ УрО РАН, г. Екатеринбург;

Ю.Н. Мухин, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры геометрии УрГПУ, г. Екатеринбург

ISBN

© Васильков В.И., 2008

© Издательство Челябинского государственного педагогического университета, 2008

## Содержание

Введение .....	4
1. Определение КПП и ее порядка. Некоторые следствия .....	7
2. Простейшие модели КПП .....	12
3. Алгебраическое описание КПП порядка $n$ над конечным полем того же порядка .....	15
4. Метод классификации и подсчета числа подплоскостей в дезарговой КПП порядка $n$ .....	19
5. Исследование подплоскостей в КПП порядка $n = 4, 7, 8$ .....	21
5.1. Исследование подплоскостей в КПП порядка $n = 4$ .....	21
5.2. Исследование подплоскостей в КПП порядка $n = 7$ .....	24
5.3. Исследование подплоскостей в КПП порядка $n = 8$ .....	26
6. Исследование подплоскостей в дезарговой КПП порядка 9 .....	30
6.1. Алгебраическое описание дезарговой КПП порядка 9 .....	30
6.2. Результаты исследования подплоскостей дезарговой плоскости ....	33
7. Исследование подплоскостей в плоскости трансляций порядка 9 .....	35
7.1. Алгебраическое описание плоскости трансляций порядка 9 .....	35
7.2. Группа коллинеаций плоскости трансляций порядка 9 .....	40
7.3. Подплоскости плоскости трансляций .....	43
8. Исследование подплоскостей в плоскости сдвигов порядка 9 .....	49
8.1. Алгебраическое описание плоскости сдвигов порядка 9 .....	49
8.2. Переход от плоскости трансляций к плоскости сдвигов .....	52
8.3. Подплоскости плоскости сдвигов .....	53
9. Исследование подплоскостей в плоскости Хьюза порядка 9 .....	58
9.1. Комбинаторно-геометрическое описание плоскости Хьюза .....	58
9.2. Группа коллинеаций плоскости Хьюза .....	60
9.3. Подплоскости плоскости Хьюза .....	66
Библиографический список .....	74
Приложение .....	76

*Эта книга-справочник написана в память о моем учителе –  
профессоре Гонине Евгении Григорьевиче.*

## **Введение**

Одной из задач теории конечных проективных плоскостей (КПП) является исследование (классификация и подсчеты) подплоскостей в каждой из существующих КПП данного порядка.

Настоящая книга посвящена исследованию **единым методом** подплоскостей в дезарговых КПП порядков 4, 7, 8, 9 и трех недезарговых КПП порядка 9: трансляций, сдвигов (двойственной плоскости трансляций) и Хьюза. Описания указанных КПП взяты из книги [7].

Результаты исследования подплоскостей в дезарговых КПП порядков 4, 7, 8, 9 получаются сравнительно легко, возможно, поэтому они в явном виде не публиковались.

Изучением строения недезарговых КПП порядка 9 и подплоскостей в каждой из них занялись около 50 лет тому назад. В 1955 г. Andre [16], а в 1957 г. Zarra [23] опубликовали статьи, в которых достаточно подробно рассмотрели группы коллинеаций плоскостей трансляций и Хьюза (порядка 9) соответственно.

Используя результаты Andre, Magari [20] в 1958 г. изучил подплоскости плоскости трансляций, провел классификацию и подсчеты подплоскостей каждого типа. При этом им была допущена ошибка в подсчетах числа подплоскостей порядка 3 одного типа, отмеченная еще в работе [2] автора книги.

В 1968 г. Denniston [18] на основе работы Zarra провел классификацию и подсчеты подплоскостей каждого типа в плоскости Хьюза. Метод, который применил Denniston, ничего общего не имеет с методом, использованным Magari.

Независимо и другим способом ту же работу выполнил автор [1], результаты полностью совпали. Следует добавить, что тем же способом автор

исследовал и подплоскости в плоскостях трансляций [2] и сдвигов [4], двойственной плоскости трансляций.

В 1971 г. вышла книга, целиком посвященная КПП порядка 9 [21]. В ней авторы сформулировали 4 (не решенных ими) вопроса относительно связи (пересечения) между подплоскостями одного порядка в плоскости Хьюза:

I. Имеются ли хотя бы две непересекающиеся подплоскости порядка 3?

II. Существуют ли две подплоскости порядка 3, для которых пересечением является тройка коллинеарных точек?

III. Если пара подплоскостей порядка 3 имеет одну общую точку, то имеет ли она общую прямую и будут ли эти общие элементы инцидентны?

IV. Всегда ли число общих точек и число общих прямых у двух подплоскостей порядка 3 равны?

В работе [5] и статье [6] автору удалось найти положительное решение первых двух упомянутых вопросов.

Основой для проведения исследования подплоскостей в КПП малых порядков послужили следующие факты теории КПП:

1) теорема Брука [13]: если  $n$  – порядок КПП, а  $m$  – порядок возможной подплоскости этой КПП, то  $n = m^2$  или  $n \geq m^2 + m$ ;

2) любая КПП порядка  $n$ , построенная над конечным полем того же порядка, является дезарговой, то есть в ней проективно выполняется теорема Дезарга [9, 10, 13];

3) все КПП указанных малых порядков  $n = 4, 7, 8$  являются дезарговыми; одна из четырех КПП порядка 9 также является дезарговой, остальные три – недезарговы [9, 7];

4) в любой дезарговой КПП данного порядка все 4-дуги (четверки точек, любые три из которых не коллинеарны), а поэтому и порождаемые ими четырехвершинники изоморфны относительно группы коллинеаций данной КПП [13];

5) в каждой из трех недезарговых КПП порядка 9 существуют 4-дуги, которые не изоморфны относительно группы коллинеаций этой КПП [4, 8].

Работа включает девять параграфов и приложение.

В параграфе 1 даются определения сначала проективной плоскости, а затем – КПП, после чего рассматриваются некоторые следствия из указанных определений.

В параграфе 2 рассмотрены простейшие модели КПП порядков 2 и 3.

Параграф 3 посвящен алгебраическому описанию КПП порядка  $n$  над конечным полем того же порядка.

В параграфе 4 рассматривается метод классификации и подсчета числа возможных подплоскостей в дезарговой КПП порядка  $n$ , описанной в параграфе 3.

В параграфе 5 излагаются результаты исследования подплоскостей в дезарговых КПП порядка  $n = 4, 7, 8$ .

В параграфе 6 излагаются результаты исследования подплоскостей в дезарговой КПП порядка 9.

В параграфе 7 излагаются результаты исследования подплоскостей в плоскости трансляций порядка 9. Там же рассматривается метод подсчета подплоскостей каждого возможного типа, а также результаты его применения.

В параграфе 8 излагаются результаты исследования подплоскостей в плоскости сдвигов порядка 9, двойственной плоскости трансляций того же порядка. Там же приведены и результаты подсчета числа подплоскостей каждого возможного типа.

В параграфе 9 излагаются результаты исследования подплоскостей в плоскости Хьюза порядка 9. Там же приведены и результаты подсчета числа подплоскостей каждого возможного типа.

В приложении приведены прежде всего описания всех исследуемых КПП порядка  $n = 4, 7, 8, 9$ , взятые из работы [7]. Кроме того, в приложении указаны основные сведения об опорных 4-дугах в недезарговых плоскостях порядка 9: трансляций и Хьюза. Наконец, там же приведены результаты классификации и подсчета подплоскостей в недезарговых плоскостях поряд-

ка 9.

Автор поставил перед собой задачу создать пособие – справочник по подплоскостям КПП малых порядков, чтобы каждый специалист, кому может понадобиться информация о подплоскостях изучаемых КПП, мог ее быстро найти. В то же время в процессе создания пособия учитывалась и возможность его использования для преподавания спецкурсов по теории КПП.

Автор благодарен научному редактору, рецензентам за сделанные ими замечания, которые способствовали улучшению пособия. Автор готов принять и другие замечания и пожелания в адрес данного справочного пособия для дальнейшего его совершенствования.

## 1. Определение КПП и ее порядка. Некоторые следствия

*Определение 1. Проективной плоскостью* называется множество точек  $P$  и множество прямых  $L$ , некоторые элементы которых связаны отношением инцидентности, которое удовлетворяет следующим аксиомам:

$P_1$ . Для любых двух различных точек существует единственная инцидентная им прямая.

$P_2$ . Для любых двух различных прямых существует единственная инцидентная им точка.

$P_3$ . Существуют хотя бы четыре точки, любые три из которых не инцидентны одной прямой.

Замечание 1. Как обычно в геометрии, слова «точка  $A$  инцидентна прямой  $b$ » можно заменять словами «точка  $A$  лежит на прямой  $b$ », «прямая  $b$  проходит через точку  $A$ » и т.п.

Указанное определение 1 охватывает и классическую проективную плоскость, изучаемую в курсе геометрии педвуза, в этой плоскости на каждой прямой лежит бесконечно много точек (через каждую точку проходит бесконечно много прямых). Нас интересует противоположный случай – конечный.

*Определение 2.* Проективная плоскость называется *конечной* (КПП), ес-

ли множество ее точек (прямых) является конечным.

*Определение 3.* Говорят, что КПП имеет **порядок  $n$**  ( $n \geq 2$ ,  $n$  – некоторое натуральное число), если выполняется еще одна аксиома:

**$P_4$ .** *Некоторой прямой проективной плоскости инцидентны точно  $n + 1$  точек.*

**Лемма 1.** В ПП (с аксиомами  **$P_1 - P_3$** ) имеется не менее 7 различных точек и не менее 7 различных прямых.

**Доказательство.** Пусть  $A_1 A_2 A_3 A_4$  – 4-дуга, существующая по аксиоме  **$P_3$**  (рис. 1). Тогда по аксиоме  **$P_1$**  имеем 6 прямых, инцидентных каждой паре вершин 4-дуги:  $A_1 A_2$ ,  $A_1 A_3$ ,  $A_1 A_4$ ,  $A_2 A_3$ ,  $A_2 A_4$ ,  $A_3 A_4$ . Все эти прямые различны, так как любые три вершины 4-дуги не инцидентны одной прямой. Проведем эти прямые, получим фигуру (рис. 2), которая называется **полным четырехвершинником** (это объединение 4-дуги и всех шести сторон или прямых, соединяющих вершины 4-дуги попарно). Занумеруем стороны этого полного четырехвершинника: 1 –  $A_1 A_2$ , 2 –  $A_2 A_3$ , 3 –  $A_3 A_4$ , 4 –  $A_4 A_1$ , 5 –  $A_1 A_3$ , 6 –  $A_2 A_4$ . Как видим, прямые 1 и 3 различны и не имеют общей вершины, поэтому по аксиоме  **$P_2$**  инцидентны одной и только одной новой точке  $B_1 = A_1 A_2 \cap A_3 A_4$  (рис. 3). Аналогично по аксиоме  **$P_2$**  находим новые точки  $B_2 = A_1 A_3 \cap A_2 A_4$  и  $B_3 = A_1 A_4 \cap A_2 A_3$ . Ясно, что точки  $B_1, B_2, B_3$  различны, так как различны 6 указанных прямых. Кроме того, точки  $B_1, B_2, B_3$  отличны от точек  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Точки  $B_1, B_2, B_3$  называются **диагональными точками** полного четырехвершинника. Итак, нашли 7 точек.

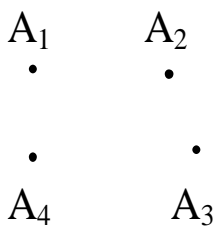


Рис. 1

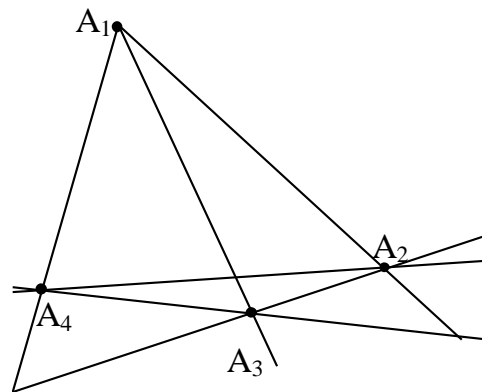


Рис. 2



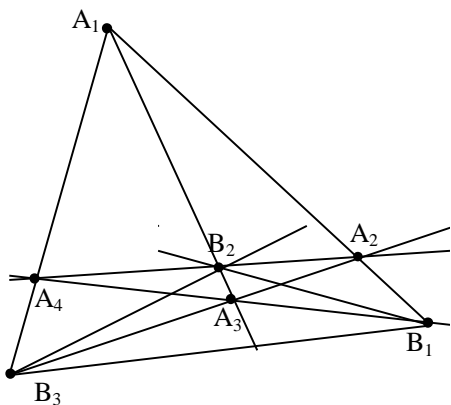


Рис. 3

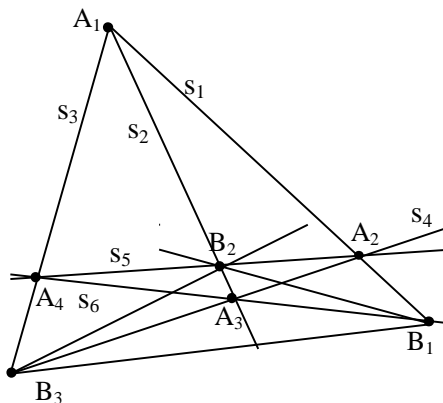


Рис. 4

Но так как  $B_1 \neq B_2$  ( $B_2 \neq B_3, B_1 \neq B_3$ ), то по аксиоме  $\mathbf{P}_1$  имеется и притом единственная новая прямая – **диагональная прямая**  $B_1 B_2$ , инцидентная диагональным точкам  $B_1$  и  $B_2$ . Это седьмая прямая. Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Если  $B_3 \in B_1 B_2$ , то получим точно 7 прямых. Если же  $B_3 \notin B_1 B_2$ , то прямых будет больше, добавятся еще **диагональные прямые**  $B_1 B_3$  и  $B_2 B_3$ .

**Теорема 1.** Каждая прямая ПП (с аксиомами  $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3$ ) инцидентна не менее чем трем точкам.

**Доказательство.** Возьмем полный четырехвершинник, определяемый 4-дугой  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и шестью его сторонами  $s_1 = A_1 A_2, s_2 = A_1 A_3, s_3 = A_1 A_4, s_4 = A_2 A_3, s_5 = A_2 A_4, s_6 = A_3 A_4$  (рис. 4). Затем отметим его диагональные точки  $B_1 = s_1 \cap s_6, B_2 = s_2 \cap s_5, B_3 = s_3 \cap s_4$ . Нетрудно заметить, что прямые  $s_1, s_2, \dots, s_6$  уже содержат по 3 точки. Следовательно, теперь нужно это же доказать для любой другой прямой  $s$ .

**Случай 1.**  $A_1 \notin s$ .

Имеем:  $A_1 \in s_1, s_2, s_3$ , но  $A_1 \notin s$ , следовательно,  $s$  пересекает прямые  $s_1, s_2, s_3$  (по аксиоме  $\mathbf{P}_2$ ) в трех различных точках, то есть  $s$  инцидентна трем точкам, что и требовалось доказать.

**Случай 2.**  $A_2 \notin s$ .

Тогда имеем:  $A_2 \in s_1, s_4, s_5$  и  $A_2 \notin s$ , поэтому (по аксиоме  $\mathbf{P}_2$ ) прямая  $s$  пересекает прямые  $s_1, s_4, s_5$  в трех различных точках, то есть снова  $s$  инци-

дентна трем точкам, что и требовалось доказать.

**Случай 3.**  $A_1 \in s$  и  $A_2 \in s$ .

Так как  $A_1 \neq A_2$ , то по аксиоме  $\mathbf{P}_1$  получаем, что  $s = A_1 A_2$ . По той же аксиоме  $s = s_1$ , а эта прямая содержит 3 точки  $A_1, A_2, B_1$ .

Таким образом, рассмотрены все возможные случаи. Теорема 1 доказана.

Замечание 2. Ясно, что аксиомы  $\mathbf{P}_1$  и  $\mathbf{P}_2$  двойственны друг другу. Если в теореме 1 поменять местами слова «точка» и «прямая» (сохраняя слово «инцидентна»), то получим такую теорему:

**Теорема 1\*.** Каждая точка проективной плоскости (с аксиомами  $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3$ ) инцидентна не менее чем трем прямым.

Понятно, что теоремы 1 и 1\* двойственны друг другу. Поскольку в теории проективных плоскостей (с аксиомами  $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3$ ) справедлив **принцип двойственности** [9, 10]: *предложение, двойственное верному предложению теории проективных плоскостей, также является верным*, то теорема 1\* (как двойственная доказанной теореме 1) верна.

Замечание 3. Принцип двойственности применяется не только для утверждений (аксиом, лемм, теорем), но и для предложений – определений понятий, в том смысле, что если имеет право «на жизнь» некоторое понятие и его определение, то точно также правомерно и двойственное ему понятие, определение которого является двойственным определению данного понятия.

Замечание 4. Из теоремы 1, доказанной без использования аксиомы  $\mathbf{P}_4$ , и аксиомы  $\mathbf{P}_4$  следует, что  $n + 1 \geq 3$ , а отсюда  $n \geq 2$ . Именно такое ограничение и было заложено в определение КПП порядка  $n$ .

**Теорема 2.** Если КПП порядка  $n$  ( $n \geq 2$ ) существует, то:

- (1) каждой прямой инцидентны точно  $n + 1$  точек;
- (2) каждая точка инцидентна  $n + 1$  прямым;
- (3) всего в плоскости  $n^2 + n + 1$  точек;
- (4) всего в плоскости  $n^2 + n + 1$  прямых.

**Доказательство.**

1. Пусть  $a$  – та прямая, которой инцидентны по аксиоме  $\mathbf{P}_4$  точно  $n + 1$  точек по (на рис. 5 для простоты  $n = 4$ ). Возьмем любую прямую  $s$  и докажем, что и ей инцидентны точно  $n + 1$  точек. Прямые  $a$  и  $s$  по аксиоме  $\mathbf{P}_2$  пересекаются в одной из отмеченных точек, например,  $T_1$  (для определенности рассуждений). По теореме 1 прямой  $s$  инцидентны, по крайней мере, 3 различные точки, то есть ей, кроме точки  $T_1$ , инцидентны еще хотя бы две точки  $P$  и  $Q$ . По аксиоме  $\mathbf{P}_1$  имеются различные прямые  $T_2P$  и  $T_3Q$ , по аксиоме  $\mathbf{P}_2$  они пересекаются в точке  $S$ , не инцидентной прямой  $a$ . Соединим точку  $S$  с каждой точкой прямой  $a$ , получим  $n + 1$  прямых, которые пересекают прямую  $s$  в  $n + 1$  точках. Если бы прямая  $s$  содержала еще одну,  $(n + 2)$ -ю точку  $X$ , то прямая  $SX$  пересекала бы прямую  $a$  в новой  $(n + 2)$ -й точке  $Y$ , а это невозможно по условию. Теорема доказана.

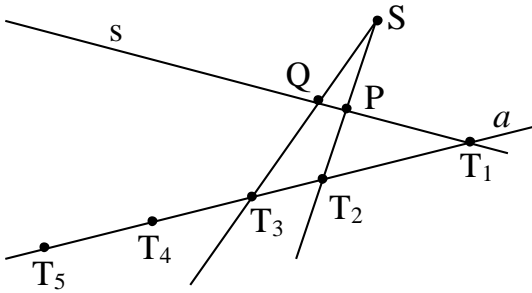


Рис. 5

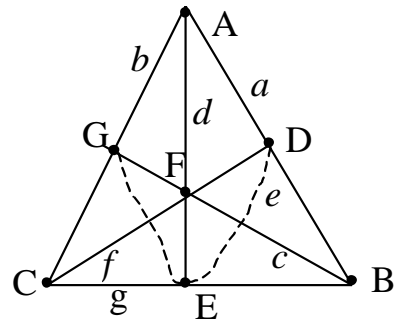


Рис. 6

2. Утверждение (2) двойственно утверждению (1), поэтому верно по принципу двойственности.

3. Утверждения (3) и (4) двойственны друг другу, поэтому достаточно доказать одно из них. Докажем утверждение (3).

По теореме 2 (2) каждая точка  $A$  КПП порядка  $n$  инцидентна  $n + 1$  прямым, но каждой из этих прямых по теореме 2 (1) инцидентны  $n$  точек, отличных от точки  $A$ . Поэтому всего точек будет:  $(n + 1)n + 1 = n^2 + n + 1$ , как и требовалось.

## 2. Простейшие модели конечной проективной плоскости

Чтобы установить содержательность понятий, введенных в определениях 1 и 3, построим модели КПП.

**Определение 4. Моделью КПП** называется любое множество  $P$  элементов («точек»), некоторые подмножества которого объявлены «прямыми» (причем отношение инцидентности «точки» и «прямой» понимается как обычное отношение принадлежности элемента множеству), для которых выполняются аксиомы  $P_1 - P_4$ .

**Модель 1.** Рассмотрим два множества:

множество  $P = \{A, B, C, D, E, F, G\}$  «точек» и множество  $L = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  «прямых», причем  $a = \{A, B, D\}$ ,  $g = \{B, C, E\}$ ,  $f = \{C, D, F\}$ ,  $e = \{D, E, G\}$ ,  $d = \{E, F, A\}$ ,  $c = \{F, G, B\}$ ,  $b = \{G, A, C\}$ .

Чтобы упростить проверку выполнимости всех аксиом  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , составим табл. I, столбцы которой соответствуют «точкам», а строки – «прямым». Отношение инцидентности «точки» и «прямой» пометим знаком «\*» в соответствующей клетке таблицы.

Таблица I

Таблица (матрица) инцидентности КПП порядка 2

$L \setminus P$	A	B	C	D	E	F	G
a	*	*		*			
b	*		*				*
c		*				*	*
d	*				*	*	
e				*	*		*
f			*	*		*	
g		*	*		*		

Вместо этой таблицы можно использовать схему (рис. б), на которой «точки» отмечены обычным образом, «прямые» – линиями, соединяющими точки. При этом кажется, что «прямая»  $e = \{D, E, G\}$  изображена не совсем верно. Но в понятия точки и прямой в определении проективной плоскости мы не вкладываем конкретного, в частности, евклидова смысла.

Проверим теперь справедливость (выполнимость) аксиом  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , используя табл. I или рис. 6.

$P_1$ . В самом деле, взяв любые 2 «точки» (два столбца табл. I), можно найти и притом точно одну строку («прямую»), в клетках которой в выделенных столбцах стоят два знака «\*» (всего имеется  $C_7^2 = 21$  пара точек).

$P_2$ . В самом деле, взяв любые 2 «прямые» (две строки табл. I), можно найти и притом точно один столбец («точку»), в клетках которого в выделенных строках стоят два знака «\*» (всего имеется  $C_7^2 = 21$  пара прямых).

$P_3$ . Четыре «точки»  $A, B, C, F$  удовлетворяют аксиоме  $P_3$  (из рис. 6).

$P_4$ . Из табл. I или рис. 6 сразу следует, что некоторой и даже каждой «прямой» инцидентны точно  $n + 1 = 3$  «точки», то есть  $n = 2$ .

Итак, введенные множества «точек» и «прямых», элементы которых связаны отношением инцидентности, удовлетворяют всем аксиомам  $P_1 - P_4$ . Следовательно, нам удалось построить модель КПП для  $n = 2$  или, как говорят, КПП порядка 2. Впервые эту модель построил еще в 1892 г. итальянский математик Фано (Fano), поэтому ее называют еще *конфигурацией Фано* (или *конфигурацией  $7_3$*  – 7 точек (прямых), каждая из которых инцидентна трем прямым (точкам)).

Из того, что удалось построить конкретную модель КПП порядка 2, вытекают два важных вывода:

**Вывод 1.** КПП существуют.

**Вывод 2.** Аксиоматика КПП не может привести к двум противоречащим друг другу утверждениям, то есть эта аксиоматика непротиворечива.

Замечание 5. В табл. I знак «\*» (инцидентности «точки» и «прямой») расположен симметрично относительно главной диагонали, идущей от клетки  $(a, A)$  до клетки  $(g, G)$ . Это позволяет сказать, что «точки» и «прямые» равноправны в табл. I (на рис. 6). Поменяем взаимно местами слова: «точка  $X$ » и «прямая  $x$ » (где  $X \in \{A, B, C, D, E, F, G\}$ ,  $x \in \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ), сохраняя отношение инцидентности между ними, в результате получим ту же таблицу, в которой строкам соответствуют «точки», а столбцам – «прямые». Прове-

денные рассуждения доказывают, что КПП порядка 2 двойственна сама себе.

**Модель 2.** Рассмотрим два множества:

множество  $P = \{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}\}$  «точек» и множество  $L = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}\}$  «прямых», при-

чем

$$\begin{aligned} a_0 &= \{A_0, A_1, A_3, A_9\}, & a_1 &= \{A_1, A_2, A_4, A_{10}\}, \\ a_2 &= \{A_2, A_3, A_5, A_{11}\}, & a_3 &= \{A_3, A_4, A_6, A_{12}\}, \\ a_4 &= \{A_4, A_5, A_7, A_0\}, & a_5 &= \{A_5, A_6, A_8, A_1\}, \\ a_6 &= \{A_6, A_7, A_9, A_2\}, & a_7 &= \{A_7, A_8, A_{10}, A_3\}, \\ a_8 &= \{A_8, A_9, A_{11}, A_4\}, & a_9 &= \{A_9, A_{10}, A_{12}, A_5\}, \\ a_{10} &= \{A_{10}, A_{11}, A_0, A_6\}, & a_{11} &= \{A_{11}, A_{12}, A_1, A_7\}, \\ a_{12} &= \{A_{12}, A_0, A_2, A_8\}. \end{aligned}$$

Для упрощения проверки выполнимости всех аксиом  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4$  составим табл. II, аналогичную табл. I.

Таблица II

Таблица (матрица) инцидентности КПП порядка 3

$L \setminus P$	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$	$A_9$	$A_{10}$	$A_{11}$	$A_{12}$
$a_0$	*	*		*						*			
$a_{12}$	*		*						*				*
$a_{11}$		*						*				*	*
$a_{10}$	*						*				*	*	
$a_9$						*				*	*		*
$a_8$					*				*	*		*	
$a_7$				*				*	*		*		
$a_6$			*				*	*		*			
$a_5$		*				*	*		*				
$a_4$	*				*	*		*					
$a_3$				*	*		*						*
$a_2$			*	*		*						*	
$a_1$		*	*		*						*		

Проверка аксиом  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  проводится таким же способом, что и для модели 1. В качестве четверки «точек», удовлетворяющей аксиоме  $\mathbf{P}_3$ , можно взять, например,  $\{A_0, A_1, A_2, A_5\}$  или  $\{A_1, A_2, A_3, A_6\}$  и т.д.  $\{A_{12}, A_0, A_1, A_4\}$ .

Выполняется и аксиома  $\mathbf{P}_4$ , что легко увидеть из табл. II. При этом  $n + 1 = 4$ , то есть  $n = 3$ .

Итак, введенные множества «точек» и «прямых», элементы которых связаны отношением инцидентности, удовлетворяют всем аксиомам  $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_4$ . Следовательно, удалось построить модель КПП для  $n = 3$ . Оказывается, и эта КПП порядка 3 двойственна сама себе. Двойственность устанавливается с помощью следующего соответствия между «прямыми» и «точками»:

$a_0 \leftrightarrow A_0, a_{12} \leftrightarrow A_1, a_{11} \leftrightarrow A_2, \dots, a_1 \leftrightarrow A_{12}$  (именно этим и объясняется принятая запись «прямых» в табл. II, чтобы она была симметрична относительно главной диагонали).

В соответствии с теоремой Брука в изучаемых КПП малых порядков порядок возможных подплоскостей может иметь лишь значения 2 или 3.

### **3. Алгебраическое описание КПП порядка $n$ над конечным полем того же порядка**

Известно [11], что для каждого  $n = p^k$  ( $p$  – простое,  $k \in \mathbb{N}$ ) существует единственное, с точностью до изоморфизма, конечное поле порядка  $n$ . В работах [7, 9] подробно описано получение простого поля порядка 7, а также конечных полей порядков 4, 8 и 9 как расширений простых полей:

- а) порядка 2 – для полей порядков 4 и 8;
- б) порядка 3 – для поля порядка 9.

Именно эти конечные поля и были использованы в работе [7] для получения описаний КПП тех же порядков. Приведем общий метод алгебраического описания КПП порядка  $n$  над конечным полем того же порядка.

Пусть  $\mathbf{F}(n)$  – конечное поле порядка  $n$ , и  $\mathbf{F}(n) = \{0, 1, \dots, n-1\}$ . В этом поле заданы операции сложения и умножения, удовлетворяющие всем аксиомам поля.

Как следует из теоремы 2, КПП порядка  $n$  обладает следующими свойствами:

всего точек –  $n^2 + n + 1$ , всего прямых –  $n^2 + n + 1$ ; каждой прямой инцидентны  $n + 1$  точек; каждой точке инцидентны  $n + 1$  прямых. Далее будем обозначать эту КПП как **PG** ( $n$ ).

Для составления списка прямых плоскости **PG** ( $n$ ) рассмотрим следующий способ задания точек и прямых этой плоскости, который был использован в работе [7] и будет использован в настоящей работе при построении дезарговой КПП порядков  $n = 4, 7, 8, 9$  над конечными полями соответствующих порядков.

Пусть  $D$  – множество элементов поля  $F$  ( $n$ ). Обозначим  $D^* = D \cup \{\infty\}$  и зададим множество точек и множество прямых из **PG** ( $n$ ) следующим образом.

1. *Собственной точкой* назовем упорядоченную пару  $(x, y)$ , где  $x, y \in D$  и называются соответственно *абсциссой* и *ординатой* точки. Всего таких точек –  $n^2$ .

2. *Несобственной точкой* назовем одноэлементное множество  $(w)$ , где  $w \in D^*$ . Всего таких точек –  $n + 1$ .

Следовательно, всего точек –  $n^2 + n + 1$ , как и должно быть.

3. *Прямой* назовем упорядоченную пару  $[k, m]$  или просто одноэлементное множество  $[c]$ , где  $k, m \in D, c \in D^*$ , причем при  $c = \infty$  прямая объявляется *несобственной*, а все остальные прямые – *собственными* прямыми. Всего собственных прямых –  $n^2 + n$ , а всего прямых  $n^2 + n + 1$ , как и должно быть.

Отношение инцидентности точки и прямой определим условиями:

- (i)  $(x, y) \in [k, m] \Leftrightarrow y = kx + m$ ;
- (ii)  $(x, y) \in [c] \Leftrightarrow x = c$  (поэтому  $(x, y) \notin [\infty]$ );
- (iii)  $(w) \in [k, m] \Leftrightarrow w = k$  (поэтому  $(\infty) \notin [k, m]$ );
- (iiii)  $(w) \in [c] \Leftrightarrow w = \infty$  или  $c = \infty$ .

Используя эти условия, можно получить список всех  $n^2 + n + 1$  прямых создаваемой плоскости **PG** ( $n$ ) с указанием точек на каждой из них. С целью



получения более компактной записи состава каждой прямой введем следующие сокращенные обозначения точек и прямых плоскости. Обозначим:

1)  $(x, y)$ ,  $[k, m]$  символами «ху», «**km**» соответственно, где «ху», «**km**» – запись двузначного числа в девятеричной системе счисления при  $x, k \neq 0$ , а при  $x = k = 0$  – возможная запись однозначного числа в той же системе;

2)  $(w)$ ,  $[c]$  символами «w», «с» соответственно.

Именно такие обозначения использованы в таблицах 1 – 4, приведенных в приложении для КПП порядков  $n = 4, 7, 8, 9$ .

**Теорема 3.** Построенные множества точек и прямых с введенным отношением инцидентности образуют КПП порядка  $n$ .

**Доказательство.** Проверим выполнимость аксиом  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4$ .

$\mathbf{P}_1$ . Пусть  $A$  и  $B$  – две различные точки. Возможны три случая:

1.  $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ , где  $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbf{D}$ .
2.  $A = (a, b), B = (w)$ , где  $a, b \in \mathbf{D}, w \in \mathbf{D}^*$ .
3.  $A = (w_1), B = (w_2)$ , где  $w_1, w_2 \in \mathbf{D}^*$ .

Рассмотрим каждый из них отдельно.

1. Пусть  $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ . Так как  $A \neq B$ , то  $x_1 \neq x_2$  или  $y_1 \neq y_2$  (или  $x_1 \neq x_2 \wedge y_1 \neq y_2$ ).

1) При  $x_1 = x_2$  искомой прямой (и притом единственной) является прямая  $x = x_1$ , то есть прямая  $[x_1]$ . Если бы точки  $A = (x_1, y_1), B = (x_1, y_2)$  при  $y_1 \neq y_2$  оказались бы на одной прямой  $s = [k, m]$ , то в силу условия (i) получили бы, что

$\begin{cases} y_1 = kx_1 + m \\ y_2 = kx_1 + m \end{cases}$ , а отсюда  $y_1 = y_2$ , что невозможно.

2) При  $x_1 \neq x_2$  прямую ищем в виде  $s = [k, m]$ . Тогда из того, что  $A \in s, B \in s$ , в силу условия (i) получаем:  $y_1 = kx_1 + m \wedge y_2 = kx_2 + m$ . Для нахождения  $k, m$  имеем систему двух уравнений

$\begin{cases} y_1 = kx_1 + m \\ y_2 = kx_2 + m \end{cases}$ . Решим ее, вычитая

второе уравнение из первого и используя свойства поля  $\mathbf{F}(n)$ , в частности,

левую дистрибутивность, получим:  $y_1 - y_2 = k(x_1 - x_2)$ . Так как  $x_1 \neq x_2$ , то

$x_1 - x_2 \neq 0$ , поэтому существует обратный элемент  $(x_1 - x_2)^{-1}$ , и тогда значение

$k = (y_1 - y_2)(x_1 - x_2)^{-1}$  – единственное. Поэтому из первого уравнения системы

имеем:  $m = y_1 - kx_1$  – также единственное значение. Итак, прямая  $s = [k, m]$  – единственная прямая, инцидентная точкам  $A$  и  $B$ .

2. Пусть  $A = (a, b), B = (w)$ .

1) При  $w = \infty, B = (\infty)$ , тогда искомой (и единственной) прямой  $s$ , инцидентной точкам  $A$  и  $B$ , является прямая  $[a]$  (в самом деле, по условию (ii)  $A \in [a]$ , по условию (iii)  $B \in [a]$ ).

2) При  $w \neq \infty, w \in D$  искомой прямой  $s$  является прямая  $s = [w, m]$ . Действительно,  $(w) \in [w, m]$  по условию (iii). Из того, что  $A \in s$  по условию (i) имеем:  $b = wa + m$ , а отсюда  $m = b - wa$  – единственное.

3. Пусть  $A = (w_1), B = (w_2)$ . Тогда единственной прямой, инцидентной точкам  $A$  и  $B$ , является прямая  $[\infty]$ .

Итак, аксиома  $\mathbf{P}_1$  проверена, так как рассмотрены все возможные случаи.

$\mathbf{P}_2$ . Пусть  $s_1$  и  $s_2$  – две различные прямые. Возможны три случая:

1.  $s_1 = [k_1, m_1], s_2 = [k_2, m_2]$ , где  $k_1, m_1, k_2, m_2 \in D$ .

2.  $s_1 = [k, m], s_2 = [c]$ , где  $k, m \in D, c \in D^*$ .

3.  $s_1 = [c_1], s_2 = [c_2]$ , где  $c_1, c_2 \in D^*$ .

Рассмотрим каждый из них отдельно.

1. Пусть  $s_1 = [k_1, m_1], s_2 = [k_2, m_2]$ . Ищем точку  $M(x, y)$ , чтобы  $M \in s_1$  и  $M \in s_2$ . Тогда по условию (i) получаем систему двух уравнений: 
$$\begin{cases} y = k_1x + m_1 \\ y = k_2x + m_2 \end{cases}$$

1) Если  $k_1 \neq k_2$ , то эта система сводится к уравнению  $k_1x + m_1 = k_2x + m_2$  или  $k_1x - k_2x = m_2 - m_1$ . С учетом правой дистрибутивности в поле  $\mathbf{F}$  (n) имеем:  $(k_1 - k_2)x = m_2 - m_1$ , отсюда при  $k_1 - k_2 \neq 0$  получаем  $x = (k_1 - k_2)^{-1} (m_2 - m_1)$  – единственное. Тогда  $y = k_1x + m_1$  – также имеет единственное значение. Следовательно, прямые  $s_1$  и  $s_2$  пересекаются в единственной точке  $M(x, y)$ .

2) Если  $k_1 = k_2 = k$ , то система уравнений 
$$\begin{cases} y = kx + m_1 \\ y = kx + m_2 \end{cases}$$
 при  $m_1 \neq m_2$  не имеет решений, и, следовательно, не существует собственной точки  $M(x, y)$ , инцидентной прямым  $s_1$  и  $s_2$  одновременно. В этом случае существует, и при-

том единственная, несобственная точка  $M = (k)$ , инцидентная прямым  $s_1$  и  $s_2$ .

2. Пусть  $s_1 = [k, m]$ ,  $s_2 = [c]$ , где  $k, m \in D$ ,  $c \in D^*$ .

1)  $s_2 = [\infty]$ . В этом случае все точки прямой  $s_2$  – несобственные, а на прямой  $s_1$  имеется единственная несобственная точка –  $(k)$ , которая и будет единственной общей точкой прямых  $s_1$  и  $s_2$ .

2)  $s_2 = [c]$ , где  $c \in D$  ( $c \neq \infty$ ). Ищем точку  $M(x, y)$ , чтобы  $M \in s_1$  и  $M \in s_2$ .

Тогда по условиям (i) и (ii) имеем систему уравнений  $\begin{cases} y = kx + m \\ x = c \end{cases}$ , которая имеет единственное решение  $(c, kc + m)$ . Значит,  $s_1 \cap s_2 = M(c, kc + m)$  и точка  $M$  – единственная.

3.  $s_1 = [c_1]$ ,  $s_2 = [c_2]$ , где  $c_1 \neq c_2$  и  $c_1, c_2 \in D^*$ . В этом случае единственной общей точкой, инцидентной прямым  $s_1$  и  $s_2$ , будет точка  $(\infty)$ .

Итак, аксиома  $\mathbf{P}_2$  проверена, так как рассмотрены все возможные случаи.

$\mathbf{P}_3$ . В самом деле, точки  $(0)$ ,  $(\infty)$ ,  $(0, 0)$  и  $(1, 1)$  удовлетворяют аксиоме  $\mathbf{P}_3$ .

$\mathbf{P}_4$ . Действительно, прямой  $[\infty]$  инцидентны точно  $n + 1$  точек  $(\infty)$ ,  $(0)$ ,  $(1)$ ,  $(2)$ ,  $\dots$ ,  $(n-1)$ .

Итак, построенные множества точек и прямых с введенным отношением инцидентности образуют КПП порядка  $n$ , так как выполняются все аксиомы  $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_4$ . Теорема 3 доказана.

Замечание 6. В дальнейшем при построении КПП порядка  $n = 4, 7, 8, 9$  над полем соответствующего порядка будем каждый раз ссылаться на теорему 3.

#### 4. Метод классификации и подсчета числа подплоскостей в дезарговой КПП порядка $n$

*Определение 5.* Пусть  $\pi$  – данная КПП порядка  $n$ , а  $\pi_0$  – ее правильная часть (то есть множество точек (прямых) из  $\pi_0$  является собственным подмножеством множества точек (прямых) из  $\pi$ ). Если  $\pi_0$  образует КПП порядка  $m$  ( $m < n$ ), то  $\pi_0$  называют *подплоскостью* данной КПП.

По теореме Брука [13], если  $n$  – порядок данной КПП, а  $m$  – порядок возможной подплоскости, то  $n = m^2$  или  $n \geq m^2 + m$ . Отсюда следует, что при  $n = 4, 7, 8$  КПП, вообще говоря, может содержать лишь подплоскости порядка  $m = 2$  (КПП порядка  $n = 3, 5$  подплоскостей не содержат). Опишем общий метод исследования подплоскостей в КПП порядка  $n$ , построенной над полем того же порядка.

Известно [13], что любая КПП порядка  $n$ , построенная над полем того же порядка, является дезарговой, и в такой КПП все 4-дуги равноправны (изоморфны относительно группы коллинеаций этой КПП).

Поэтому достаточно исследовать одну из 4-дуг данной КПП порядка  $n$ . Расширяем выбранную 4-дугу с помощью аксиом  $P_1$  и  $P_2$  до КПП порядка  $m$ , содержащей эту 4-дугу. Возможны следующие случаи:

- 1) если  $m = n$ , то исследуемая КПП не содержит подплоскостей;
- 2) если  $m < n$ , то получаем подплоскость  $\pi_0$  порядка  $m$ .

Заметим, что во всех исследуемых КПП порядков 4, 7 и 8 в качестве исходной была взята такая 4-дуга:  $S^4 = \{\infty, 0, 00, 11\}$  (в сокращенных обозначениях, принятых в параграфе 3).

После получения подплоскости  $\pi_0$  (случай 2) проводим подсчеты числа  $n(\pi_0)$  подплоскостей типа  $\pi_0$  в исследуемой КПП. Для этого применяем формулу:

$$n(\pi_0) = \frac{\Sigma N^4}{\Sigma n^4} \quad (1),$$

где  $\Sigma N^4$  – число всех 4-дуг в данной КПП, а  $\Sigma n^4$  – число всех 4-дуг в подплоскости  $\pi_0$ . При этом:

$$\Sigma N^4 = \frac{(n^2 + n + 1)(n^2 + n)n^2(n-1)^2}{4!} \quad (2), \quad \Sigma n^4 = \frac{(m^2 + m + 1)(m^2 + m)m^2(m-1)^2}{4!} \quad (3).$$

## 5. Исследование подплоскостей в КПП порядка $n = 4, 7, 8$

### 5.1. Исследование подплоскостей в КПП порядка $n = 4$

#### 5.1.1. Алгебраическое описание КПП порядка 4

##### А. Расширение простого поля $\mathbf{F}_2$ до поля $\mathbf{F}(4)$ порядка 4

Простое поле  $\mathbf{F}_p$  для  $p = 2$  является полем классов вычетов по  $\text{mod } 2$  [11]. Но  $4 = 2^2$  не является простым числом, поэтому поле  $\mathbf{F}(4)$  порядка 4 построить как поле  $\mathbf{F}_2$  уже нельзя.

Из курса алгебры [11] известно, что все конечные поля имеют порядок  $n = p^k$  ( $p$  – простое,  $k \in \mathbf{N}$ ) и для каждого  $n = p^k$  имеется, с точностью до изоморфизма, лишь одно поле порядка  $n$ . Поэтому достаточно построить одно конкретное поле порядка  $n$ . Метод расширения конечного поля порядка  $p$  до поля порядка  $n = p^k$  при  $k > 1$  подробно описан в [9, 11]. Применим этот метод здесь для  $n = 4$ , а в дальнейшем для  $n = 8, 9$ .

Пусть  $f(x) = x^2 + x + 1$  – многочлен второй степени, не имеющий корней в простом поле  $\mathbf{F}_2$ , т.е.  $f(0) \neq 0, f(1) \neq 0$ .

Введем элемент  $i$  – корень многочлена  $f(x)$ , т.е.  $f(i) = i^2 + i + 1 = 0$ , отсюда  $i^2 = -i - 1$  или  $i^2 = i + 1$ , так как  $-1 = 1$  в поле  $\mathbf{F}_2$ .

Рассмотрим множество:

$\mathbf{D} = \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbf{F}_2, i^2 = i + 1\}$ ; оно содержит ровно 4 элемента:  
 $0 = 0 + 0 \cdot i, 1 = 1 + 0 \cdot i, i = 0 + 1 \cdot i, i + 1 = 1 + 1 \cdot i$ .

На множестве  $\mathbf{D}$  введем операции сложения и умножения следующими правилами:

$$(a_1 + b_1 \cdot i) + (a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i;$$

$$(a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 \cdot i + b_1 a_2 \cdot i + b_1 b_2 \cdot i^2 = a_1 a_2 + a_1 b_2 \cdot i + b_1 a_2 \cdot i + b_1 b_2 \cdot (i + 1) \text{ или}$$

$$(a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + b_1 b_2) \cdot i.$$

При этом сложение элементов из  $\mathbf{F}_2$  ведется по ТС этом поле, а  $a_1 a_2, b_1 b_2, a_1 b_2, b_1 a_2$  – произведения элементов из  $\mathbf{F}_2$ , которые находятся по ТУ поля  $\mathbf{F}_2$ .

Построим таблицы сложения (Т С) и умножения (Т У) для поля  $\mathbf{F}(4)$ :

Т С

+	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>i</b>	<b>i + 1</b>
<b>0</b>	0	1	i	i + 1
<b>1</b>	1	0	i + 1	i
<b>i</b>	i	i + 1	0	1
<b>i + 1</b>	i + 1	i	1	0

Т У

·	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>i</b>	<b>i + 1</b>
<b>0</b>	0	0	0	0
<b>1</b>	0	1	i	i + 1
<b>i</b>	0	i	i + 1	1
<b>i + 1</b>	0	i + 1	1	i

Для упрощения дальнейших рассуждений введем новые обозначения элементов из  $\mathbf{D}$ , а именно:  $0 = 0$ ,  $1 = 1$ ,  $2 = i$ ,  $3 = i + 1$ . В этих обозначениях таблицы операций примут вид:

Т С

+	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>0</b>	0	1	2	3
<b>1</b>	1	0	3	2
<b>2</b>	2	3	0	1
<b>3</b>	3	2	1	0

Т У

·	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>0</b>	0	0	0	0
<b>1</b>	0	1	2	3
<b>2</b>	0	2	3	1
<b>3</b>	0	3	1	2

Из курса алгебры известно, что множество  $\mathbf{F}(4) = (\mathbf{D}, +, \cdot)$  является полем порядка 4, так как операции сложения и умножения удовлетворяют всем свойствам (аксиомам) поля.

Легко, например, проверить, что обе операции коммутативны, это следует из симметричности ТС и ТУ относительно главной диагонали. Далее несложно для каждого элемента из  $\mathbf{D}$  найти противоположный элемент:  $-0 = 0$ ,  $-1 = 1$ ,  $-2 = 2$ ,  $-3 = 3$  (это следует из ТС). Достаточно просто найти для каждого ненулевого элемента из  $\mathbf{D}$  обратный элемент:  $1^{-1} = 1$ ,  $2^{-1} = 3$ ,  $3^{-1} = 2$  (это следует из ТУ).

### В. Построение КПП порядка 4 над полем $\mathbf{F}(4)$

Обозначим искомую КПП порядка  $n = 4$  через  $\mathbf{PG}(4)$ . Она обладает следующими свойствами:

всего точек  $- n^2 + n + 1 = 4^2 + 4 + 1 = 21$ ;

всего прямых  $- n^2 + n + 1 = 4^2 + 4 + 1 = 21$ ;

каждой прямой инцидентны  $n + 1 = 4 + 1 = 5$  точек;

каждой точке инцидентны  $n + 1 = 4 + 1 = 5$  прямых.

Для построения КПП порядка 4 применим общий способ алгебраического описания КПП порядка  $n$  над полем того же порядка, изложенный в § 3.

Пусть  $D = \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbf{F}_2, i^2 = i + 1\}$  – множество элементов поля  $\mathbf{F}(4)$ . Обозначим  $D^* = D \cup \{\infty\}$  и зададим множество точек и множество прямых из  $\mathbf{PG}(4)$  следующим образом.

1. *Собственной точкой* назовем упорядоченную пару  $(x, y)$ , где  $x, y \in D$  и называются соответственно *абсциссой* и *ординатой* точки. Всего таких точек  $4^2 = 16$ .

2. *Несобственной точкой* назовем одноэлементное множество  $(w)$ , где  $w \in D^*$ . Всего таких точек  $4 + 1 = 5$ .

Следовательно, всего точек  $16 + 5 = 21$ , как и должно быть.

3. *Прямой* назовем упорядоченную пару  $[k, m]$  или просто одноэлементное множество  $[c]$ , где  $k, m \in D, c \in D^*$ , причем при  $c = \infty$  прямая объявляется *несобственной*, а все остальные прямые – *собственными* прямыми. Всего собственных прямых  $4^2 + 4 = 20$ , а всего прямых  $20 + 1 = 21$ , как и должно быть.

Отношение инцидентности точки и прямой определим условиями:

- (i)  $(x, y) \in [k, m] \Leftrightarrow y = kx + m$ ;
- (ii)  $(x, y) \in [c] \Leftrightarrow x = c$  (поэтому  $(x, y) \notin [\infty]$ );
- (iii)  $(w) \in [k, m] \Leftrightarrow w = k$  (поэтому  $(\infty) \notin [k, m]$ );
- (iiii)  $(w) \in [c] \Leftrightarrow w = \infty$  или  $c = \infty$ .

Используя эти условия, можно получить список всех 21 прямых (строящейся плоскости  $\mathbf{PG}(4)$ ) с указанием точек на каждой из них. Этот список приведен в табл. 1 приложения. В ней использована система сокращенных обозначений точек и прямых, указанная в параграфе 3.

По теореме 3 *построенные множества точек и прямых с введенным отношением инцидентности образуют КПП порядка 4.*

### 5.1.2. Результаты исследования подплоскостей в КПП порядка $n = 4$

Исходная 4-дуга  $S^4 = \{\infty, 0, 00, 11\}$  исследуемой плоскости расширится до подплоскости  $\pi_0$  порядка 2, а именно:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \infty & \infty & \infty & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 00 & 10 & 00 & 01 & 00 & 01 \\
 \hline
 1 & 01 & 11 & 10 & 11 & 11 & 10 \\
 \text{Прямые } \infty & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{00} & \mathbf{01} & \mathbf{10} & \mathbf{11} .
 \end{array}$$

При  $m = 2$  из формулы (3) получаем, что  $\Sigma n^4 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1}{4!} = 7$ , а при  $n = 4$  из формулы (2) имеем, что  $\Sigma N^4 = \frac{21 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 9}{4!} = 2520$ , поэтому по формуле

(1) находим, что  $n(\pi_0) = \frac{\Sigma N^4}{\Sigma n^4} = \frac{2520}{7} = 360$ . Следовательно, верна теорема А.

**Теорема А.** *В КПП порядка 4 содержатся 360 подплоскостей порядка 2 одного типа.*

## 5.2. Исследование подплоскостей в КПП порядка $n = 7$

### 5.2.1. Алгебраическое описание КПП порядка 7

#### А. Простое поле порядка 7

Известно [11], что для простого числа  $p = 7$  множество  $\mathbf{F}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  классов вычетов по модулю 7 образует относительно операций сложения и умножения поле порядка 7 (простое поле классов вычетов по модулю 7). При этом на множестве  $\mathbf{F}_7$  сложение и умножение классов можно производить как сложение и умножение соответственно целых чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 по данному модулю 7, то есть с заменой результата на остаток от деления этого результата на число 7.

Например, имеем:

а)  $3 \cdot 4 = 5$ , так как для целых чисел  $3 \cdot 4 = 12$ , а  $12 = 1 \cdot 7 + 5$ ;

б)  $4 + 5 = 2$ , так как для целых чисел  $4 + 5 = 9$ , а  $9 = 1 \cdot 7 + 2$ .

Учитывая сказанное, составим таблицы операций сложения и умножения на множестве  $\mathbf{F}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  классов вычетов по модулю 7.



Таблица сложения (Т С)

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Таблица умножения (Т У)

·	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

## В. Построение КПП порядка 7 над полем $\mathbf{F}(7)$

КПП  $\mathbf{PG}(7)$  обладает следующими свойствами:

всего точек –  $n^2 + n + 1 = 7^2 + 7 + 1 = 57$ ;

всего прямых –  $n^2 + n + 1 = 7^2 + 7 + 1 = 57$ ;

каждой прямой инцидентны  $n + 1 = 7 + 1 = 8$  точек;

каждой точке инцидентны  $n + 1 = 7 + 1 = 8$  прямых.

Пусть  $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  – множество элементов поля  $\mathbf{F}(7)$ . Обозначим  $D^* = D \cup \{\infty\}$  и зададим множество точек и множество прямых из  $\mathbf{PG}(7)$  следующим образом.

1. *Собственной точкой* назовем упорядоченную пару  $(x, y)$ , где  $x, y \in D$  и называются соответственно *абсциссой* и *ординатой* точки. Всего таких точек –  $7^2 = 49$ .

2. *Несобственной точкой* назовем одноэлементное множество  $(w)$ , где  $w \in D^*$ . Всего таких точек –  $7 + 1 = 8$ .

Следовательно, всего точек –  $49 + 8 = 57$ , как и должно быть.

3. *Прямой* назовем упорядоченную пару  $[k, m]$  или просто одноэлементное множество  $[c]$ , где  $k, m \in D, c \in D^*$ , причем при  $c = \infty$  прямая объявляется *несобственной*, а все остальные прямые – *собственными* прямыми. Всего собственных прямых –  $7^2 + 7 = 56$ , а всего прямых  $56 + 1 = 57$ , как и должно быть в плоскости  $\mathbf{PG}(7)$ .

Отношение инцидентности точки и прямой определим условиями (i), (ii), (iii), (iiii), как в § 3. Используя эти условия, можно получить список всех

57 прямых плоскости  $\mathbf{PG}(7)$  с указанием точек на каждой из них. Этот список приведен в табл. 2 приложения. В ней также использована система сокращенных обозначений точек и прямых, принятая в § 3.

По теореме 3 *построенные множества точек и прямых с введенным отношением инцидентности образуют КПП порядка 7.*

### 5.2.2. Результаты исследования подплоскостей в КПП порядка $n = 7$

Исходная 4-дуга  $S^4 = \{\infty, 0, 00, 11\}$  исследуемой плоскости расширится до всей плоскости, поэтому верна теорема В.

**Теорема В.** *В КПП порядка 7 подплоскостей нет.*

## 5.3. Исследование подплоскостей в КПП порядка $n = 8$

### 5.3.1. Алгебраическое описание КПП порядка 8

#### А. Конечное поле порядка 8

Так как  $8 = 2^3$  не является простым числом, то поле  $\mathbf{F}(8)$  следует строить как расширение поля  $\mathbf{F}_2$  по аналогии с тем, как строилось поле  $\mathbf{F}(4)$  в § 5.1.1, используя общий метод построения расширения поля [9, 11]. Так как имеется с точностью до изоморфизма лишь одно поле порядка 8, то достаточно построить одно конкретное поле  $\mathbf{F}(8)$ .

Пусть  $f(x) = x^3 + x + 1$  – многочлен третьей степени, не имеющий корней в простом поле  $\mathbf{F}_2$ , то есть  $f(0) \neq 0, f(1) \neq 0$ .

Введем элемент  $i$  – корень многочлена  $f(x)$ , то есть  $f(i) = i^3 + i + 1 = 0$ , отсюда  $i^3 = -i - 1$  или  $i^3 = i + 1$ , так как  $-1 = 1$  в поле  $\mathbf{F}_2$ .

Рассмотрим множество:  $\mathbf{D} = \{a \cdot i^2 + b \cdot i + c \mid a, b, c \in \mathbf{F}_2, i^3 = i + 1\}$ ; оно содержит ровно 8 элементов:

$$0 = 0 + 0 \cdot i, 1 = 1 + 0 \cdot i, i = 0 + 1 \cdot i, i + 1 = 1 + 1 \cdot i, i^2 = 0 + 1 \cdot i^2, \\ i^2 + 1 = 1 + 1 \cdot i^2, i^2 + i = 0 + 1 \cdot i + 1 \cdot i^2, i^2 + i + 1 = 1 + 1 \cdot i + 1 \cdot i^2.$$

На множестве  $\mathbf{D}$  введем операцию сложения следующим правилом:

$$(a_1 \cdot i^2 + b_1 \cdot i + c_1) + (a_2 \cdot i^2 + b_2 \cdot i + c_2) = (a_1 + a_2) \cdot i^2 + (b_1 + b_2) \cdot i + (c_1 + c_2).$$

При этом сложение элементов из  $\mathbf{F}_2$  ведется по модулю 2. Построим таблицу сложения (ТС).

Таблица сложения (ТС)

+	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>i</b>	<b>i+1</b>	<b>i<sup>2</sup></b>	<b>i<sup>2</sup>+1</b>	<b>i<sup>2</sup>+i</b>	<b>i<sup>2</sup>+i+1</b>
<b>0</b>	0	1	i	i+1	i <sup>2</sup>	i <sup>2</sup> +1	i <sup>2</sup> +i	i <sup>2</sup> +i+1
<b>1</b>	1	0	i+1	i	i <sup>2</sup> +1	i <sup>2</sup>	i <sup>2</sup> +i+1	i <sup>2</sup> +i
<b>i</b>	i	i+1	0	1	i <sup>2</sup> +i	i <sup>2</sup> +i+1	i <sup>2</sup>	i <sup>2</sup> +1
<b>i+1</b>	i+1	i	1	0	i <sup>2</sup> +i+1	i <sup>2</sup> +i	i <sup>2</sup> +1	i <sup>2</sup>
<b>i<sup>2</sup></b>	i <sup>2</sup>	i <sup>2</sup> +1	i <sup>2</sup> +i	i <sup>2</sup> +i+1	0	1	i	i+1
<b>i<sup>2</sup>+1</b>	i <sup>2</sup> +1	i <sup>2</sup>	i <sup>2</sup> +i+1	i <sup>2</sup> +i	1	0	i+1	i
<b>i<sup>2</sup>+i</b>	i <sup>2</sup> +i	i <sup>2</sup> +i+1	i <sup>2</sup>	i <sup>2</sup> +1	i	i+1	0	1
<b>i<sup>2</sup>+i+1</b>	i <sup>2</sup> +i+1	i <sup>2</sup> +i	i <sup>2</sup> +1	i <sup>2</sup>	i+1	i	1	0

Для упрощения записи ТС введем следующие сокращенные обозначения элементов будущего поля **F** (8):

$$0, 1, 2 = i, 3 = i + 1, 4 = i^2, 5 = i^2 + 1, 6 = i^2 + i, 7 = i^2 + i + 1 (*).$$

Тогда ТС на языке сокращенных обозначений примет вид:

Таблица сложения (ТС)

+	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
<b>0</b>	0	1	2	3	4	5	6	7
<b>1</b>	1	0	3	2	5	4	7	6
<b>2</b>	2	3	0	1	6	7	4	5
<b>3</b>	3	2	1	0	7	6	5	4
<b>4</b>	4	5	6	7	0	1	2	3
<b>5</b>	5	4	7	6	1	0	3	2
<b>6</b>	6	7	4	5	2	3	0	1
<b>7</b>	7	6	5	4	3	2	1	0

Введение операции умножения на множестве **D** за счет специального правила достаточно громоздко. Используем [11] то, что мультипликативная группа поля **F** (8) имеет простой порядок  $7 = 8 - 1$ , поэтому любой ее элемент, отличный от 1, является первообразным. Выберем в качестве первообразного элемент **i** и найдем степени этого элемента, используя равенство

$$i^3 = i + 1:$$

$$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = i^2, i^3 = i + 1, i^4 = i^2 + i, i^5 = i^3 + i^2 = i^2 + i + 1,$$

$$i^6 = i^3 + i^2 + i = i + 1 + i^2 + i = i^2 + 1.$$

Для контроля найдем также и  $i^7 = i^3 + i = i + 1 + i = 1 = i^0$ , как и должно быть.

Используя обычное правило умножения многочлена на многочлен и степени первообразного элемента **i**, получим следующую таблицу умножения:

Таблица умножения (ТУ)

·	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>i</b>	<b>i+1</b>	<b>i<sup>2</sup></b>	<b>i<sup>2</sup>+1</b>	<b>i<sup>2</sup>+i</b>	<b>i<sup>2</sup>+i+1</b>
<b>0</b>	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>1</b>	0	1	i	i+1	i <sup>2</sup>	i <sup>2</sup> +1	i <sup>2</sup> +i	i <sup>2</sup> +i+1
<b>i</b>	0	i	i <sup>2</sup>	i <sup>2</sup> +i	i+1	1	i <sup>2</sup> +i+1	i <sup>2</sup> +1
<b>i+1</b>	0	i+1	i <sup>2</sup> +i	i <sup>2</sup> +1	i <sup>2</sup> +i+1	i <sup>2</sup>	1	i
<b>i<sup>2</sup></b>	0	i <sup>2</sup>	i+1	i <sup>2</sup> +i+1	i <sup>2</sup> +i	i	i <sup>2</sup> +1	1
<b>i<sup>2</sup>+1</b>	0	i <sup>2</sup> +1	1	i <sup>2</sup>	i	i <sup>2</sup> +i+1	i+1	i <sup>2</sup> +i
<b>i<sup>2</sup>+i</b>	0	i <sup>2</sup> +i	i <sup>2</sup> +i+1	1	i <sup>2</sup> +1	i+1	i	i <sup>2</sup>
<b>i<sup>2</sup>+i+1</b>	0	i <sup>2</sup> +i+1	i <sup>2</sup> +1	i	1	i <sup>2</sup> +i	i <sup>2</sup>	i+1

На языке сокращенных обозначений (\*) ТУ примет вид:

Таблица умножения (ТУ)

·	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
<b>0</b>	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>1</b>	0	1	2	3	4	5	6	7
<b>2</b>	0	2	4	6	3	1	7	5
<b>3</b>	0	3	6	5	7	4	1	2
<b>4</b>	0	4	3	7	6	2	5	1
<b>5</b>	0	5	1	4	2	7	3	6
<b>6</b>	0	6	7	1	5	3	2	4
<b>7</b>	0	7	5	2	1	6	4	3

Из курса алгебры известно, что  $\mathbf{F}(8) = (\mathbf{D}, +, \cdot)$  – конечное поле порядка 8. Легко, например, проверить, что обе операции коммутативны, это следует из симметричности ТС и ТУ относительно главной диагонали. Далее несложно для каждого элемента из  $\mathbf{D}$  найти противоположный элемент:

- 0 = 0, - 1 = 1, - 2 = 2, - 3 = 3, - 4 = 4, - 5 = 5, - 6 = 6, - 7 = 7 (это следует из ТС). Достаточно просто найти для каждого ненулевого элемента из  $\mathbf{D}$  обратный элемент:  $1^{-1} = 1$ ,  $2^{-1} = 5$ ,  $3^{-1} = 6$ ,  $4^{-1} = 7$ ,  $5^{-1} = 2$ ,  $6^{-1} = 3$ ,  $7^{-1} = 4$  (это следует из ТУ).

### В. Построение КПП порядка 8 над полем $\mathbf{F}(8)$

Плоскость  $\mathbf{PG}(8)$  обладает следующими свойствами:

всего точек –  $n^2 + n + 1 = 8^2 + 8 + 1 = 73$ ;

всего прямых –  $n^2 + n + 1 = 8^2 + 8 + 1 = 73$ ;

каждой прямой инцидентны  $n + 1 = 8 + 1 = 9$  точек;

каждой точке инцидентны  $n + 1 = 8 + 1 = 9$  прямых.

Пусть  $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  – множество элементов поля  $F(8)$ . Обозначим  $D^* = D \cup \{\infty\}$  и зададим множество точек и множество прямых из  $PG(8)$  следующим образом.

1. *Собственной точкой* назовем упорядоченную пару  $(x, y)$ , где  $x, y \in D$  и называются соответственно *абсциссой* и *ординатой* точки. Всего таких точек –  $8^2 = 64$ .

2. *Несобственной точкой* назовем одноэлементное множество  $(w)$ , где  $w \in D^*$ . Всего таких точек –  $8 + 1 = 9$ .

Следовательно, всего точек –  $64 + 9 = 73$ , как и должно быть.

3. *Прямой* назовем упорядоченную пару  $[k, m]$  или просто одноэлементное множество  $[c]$ , где  $k, m \in D, c \in D^*$ , причем при  $c = \infty$  прямая объявляется *несобственной*, а все остальные прямые – *собственными* прямыми. Всего собственных прямых –  $8^2 + 8 = 72$ , а всего прямых  $72 + 1 = 73$ , как и должно быть.

Отношение инцидентности точки и прямой определим такими же условиями (i) - (iiii), как и в § 3. Используя эти условия, можно получить список всех 73 прямых плоскости  $PG(8)$  с указанием точек на каждой из них. Этот список приведен ниже в табл. 3 приложения. В ней также использована система сокращенных обозначений точек и прямых, принятая в § 3.

По теореме 3 *построенные множества точек и прямых с введенным отношением инцидентности образуют КПП порядка 8*.

### 5.3.2. Результаты исследования подплоскостей в КПП порядка $n = 8$

Исходная 4-дуга  $S^4 = \{\infty, 0, 00, 11\}$  исследуемой плоскости расширится до подплоскости  $\pi_0$  порядка 2, а именно:

$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	0	1	1
0	00	10	00	01	00	01
1	01	11	10	11	11	10
Прямые	$\infty$	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>00</b>	<b>01</b>	<b>10</b> <b>11</b> .

При  $m = 2$  из формулы (3) получаем, что  $\Sigma n^4 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1}{4!} = 7$ , а при  $n = 8$  из формулы (2) имеем, что  $\Sigma N^4 = \frac{73 \cdot 72 \cdot 64 \cdot 49}{4!} = 686\,784$ , поэтому по формуле (1) находим, что  $n(\pi_0) = \frac{\Sigma N^4}{\Sigma n^4} = \frac{686784}{7} = 98\,112$ . Итак, верна теорема С.

**Теорема С.** *В КПП порядка 8 содержатся 98 112 подплоскостей порядка 2 одного типа.*

## 6. Исследование подплоскостей в дезарговой КПП порядка $n = 9$

### 6.1. Алгебраическое описание дезарговой КПП порядка 9

#### А. Конечное поле порядка 9

Так как  $9 = 3^2$  не является простым числом, то поле  $\mathbf{F}(9)$  порядка 9 следует строить как расширение простого поля  $\mathbf{F}_3$ , используя общий метод расширения простого поля [9, 11]. Поскольку имеется с точностью до изоморфизма лишь одно поле порядка 9, то достаточно построить одно конкретное поле  $\mathbf{F}(9)$ .

Пусть  $f(x) = x^2 + 1$  – многочлен второй степени, не имеющий корней в простом поле  $\mathbf{F}_3$ , то есть  $f(0) \neq 0, f(1) \neq 0, f(2) \neq 0$ .

Введем элемент  $i$  – корень многочлена  $f(x)$ , то есть  $f(i) = i^2 + 1 = 0$ , отсюда  $i^2 = -1$  или  $i^2 = 2$ , так как  $-1 = 2$  в поле  $\mathbf{F}_3$ .

Рассмотрим множество  $D = \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbf{F}_3, i^2 = 2\}$ ; оно содержит ровно 9 элементов:  $0 = 0 + 0 \cdot i, 1 = 1 + 0 \cdot i, 2 = 2 + 0 \cdot i, i = 0 + 1 \cdot i, i + 1 = 1 + 1 \cdot i, i + 2 = 2 + 1 \cdot i, 2i = 0 + 2 \cdot i, 2i + 1 = 1 + 2 \cdot i, 2i + 2 = 2 + 2 \cdot i$ .

На множестве  $D$  введем операции сложения и умножения следующими правилами:

$$(a_1 + b_1 \cdot i) + (a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i;$$

$$(a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot i.$$

При этом сложение и умножение элементов из  $\mathbf{F}_3$  ведется по модулю 3. Построим таблицы сложения (ТС) и умножения (ТУ).

Таблица сложения (ТС)

+	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>i</b>	<b>i+1</b>	<b>i+2</b>	<b>2i</b>	<b>2i+1</b>	<b>2i+2</b>
<b>0</b>	0	1	2	i	i+1	i+2	2i	2i+1	2i+2
<b>1</b>	1	2	0	i+1	i+2	i	2i+1	2i+2	2i
<b>2</b>	2	0	1	i+2	i	i+1	2i+2	2i	2i+1
<b>i</b>	i	i+1	i+2	2i	2i+1	2i+2	0	1	2
<b>i+1</b>	i+1	i+2	i	2i+1	2i+2	2i	1	2	0
<b>i+2</b>	i+2	i	i+1	2i+2	2i	2i+1	2	0	1
<b>2i</b>	2i	2i+1	2i+2	0	1	2	i	i+1	i+2
<b>2i+1</b>	2i+1	2i+2	2i	1	2	0	i+1	i+2	i
<b>2i+2</b>	2i+2	2i	2i+1	2	0	1	i+2	i	i+1

Таблица умножения (ТУ)

·	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>i</b>	<b>i+1</b>	<b>i+2</b>	<b>2i</b>	<b>2i+1</b>	<b>2i+2</b>
<b>0</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>1</b>	0	1	2	i	i+1	i+2	2i	2i+1	2i+2
<b>2</b>	0	2	1	2i	2i+2	2i+1	i	i+2	i+1
<b>i</b>	0	i	2i	2	i+2	2i+2	1	i+1	2i+1
<b>i+1</b>	0	i+1	2i+2	i+2	2i	1	2i+1	2	i
<b>i+2</b>	0	i+2	2i+1	2i+2	1	i	i+1	2i	2
<b>2i</b>	0	2i	i	1	2i+1	i+1	2	2i+2	i+2
<b>2i+1</b>	0	2i+1	i+2	i+1	2	2i	2i+2	i	1
<b>2i+2</b>	0	2i+2	i+1	2i+1	i	2	i+2	1	2i

Для упрощения записи ТС и ТУ введем следующие сокращенные обозначения элементов будущего поля  $\mathbf{F}(9)$ :

$$0, 1, 2, 3 = i, 4 = i + 1, 5 = i + 2, 6 = 2i, 7 = 2i + 1, 8 = 2i + 2.$$

Тогда ТС и ТУ на языке сокращенных обозначений примут вид:

ТС

+	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>
<b>0</b>	0	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>1</b>	1	2	0	4	5	3	7	8	6
<b>2</b>	2	0	1	5	3	4	8	6	7
<b>3</b>	3	4	5	6	7	8	0	1	2
<b>4</b>	4	5	3	7	8	6	1	2	0
<b>5</b>	5	3	4	8	6	7	2	0	1
<b>6</b>	6	7	8	0	1	2	3	4	5
<b>7</b>	7	8	6	1	2	0	4	5	3
<b>8</b>	8	6	7	2	0	1	5	3	4

ТУ

·	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>
<b>0</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>1</b>	0	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>2</b>	0	2	1	6	8	7	3	5	4
<b>3</b>	0	3	6	2	5	8	1	4	7
<b>4</b>	0	4	8	5	6	1	7	2	3
<b>5</b>	0	5	7	8	1	3	4	6	2
<b>6</b>	0	6	3	1	7	4	2	8	5
<b>7</b>	0	7	5	4	2	6	8	3	1
<b>8</b>	0	8	4	7	3	2	5	1	6

Из курса алгебры известно, что множество  $\mathbf{F}(9) = (\mathbf{D}, +, \cdot)$  является полем порядка 9, так как операции сложения и умножения удовлетворяют всем аксиомам поля. Легко проверить, что обе операции коммутативны, это следует из симметричности ТС и ТУ относительно главной диагонали. Далее несложно для каждого элемента из  $\mathbf{D}$  найти противоположный элемент:  $-0 = 0, -1 = 2, -2 = 1, -3 = 6, -4 = 8, -5 = 7, -6 = 3, -7 = 5, -8 = 4$  (это следует из ТС). Достаточно просто найти для каждого ненулевого элемента из  $\mathbf{D}$  обратный элемент:  $1^{-1} = 1, 2^{-1} = 2, 3^{-1} = 6, 4^{-1} = 5, 5^{-1} = 4, 6^{-1} = 3, 7^{-1} = 8, 8^{-1} = 7$  (это следует из ТУ).

### В. Построение дезарговой КПП порядка 9 над полем $\mathbf{F}(9)$

Плоскость  $\mathbf{PG}(9)$  известна с 1906 г. [21], она является дезарговой, как и любая КПП над полем. Учитывая сказанное, далее рассматриваемую плоскость будем обозначать  $\mathbf{PD}(9)$ . Плоскость  $\mathbf{PD}(9)$ , как и любая КПП порядка 9, обладает следующими свойствами:

всего точек  $- n^2 + n + 1 = 9^2 + 9 + 1 = 91$ ;

всего прямых  $- n^2 + n + 1 = 9^2 + 9 + 1 = 91$ ;

каждой прямой инцидентны  $n + 1 = 9 + 1 = 10$  точек;

каждой точке инцидентны  $n + 1 = 9 + 1 = 10$  прямых.

Пусть  $\mathbf{D} = \{0, 1, 2, \dots, 8\}$  – множество элементов поля  $\mathbf{F}(9)$ . Обозначим  $\mathbf{D}^* = \mathbf{D} \cup \{\infty\}$  и зададим множество точек и множество прямых из  $\mathbf{PD}(9)$  следующим образом.

1. *Собственной точкой* назовем упорядоченную пару  $(x, y)$ , где  $x, y \in \mathbf{D}$  и называются соответственно *абсциссой* и *ординатой* точки. Всего таких точек  $- 9^2 = 81$ .

2. *Несобственной точкой* назовем одноэлементное множество  $(w)$ , где  $w \in \mathbf{D}^*$ . Всего таких точек  $- 9 + 1 = 10$ .

Следовательно, всего точек  $- 81 + 10 = 91$ , как и должно быть.

3. *Прямой* назовем упорядоченную пару  $[k, m]$  или просто одноэлементное множество  $[c]$ , где  $k, m \in \mathbf{D}, c \in \mathbf{D}^*$ , причем при  $c = \infty$  прямая объявля-



ется *несобственной*, а все остальные прямые – *собственными* прямыми. Всего собственных прямых –  $9^2 + 9 = 90$ , а всего прямых  $90 + 1 = 91$ , как и должно быть.

Отношение инцидентности точки и прямой определим такими же условиями (i) – (iiii), как и в § 3. Используя эти условия, можно получить полный список, включающий все прямые плоскости **PD** (9) с указанием точек на каждой из них. Этот список приведен в табл. 5 приложения, в ней использована система обозначений точек и прямых, принятая в § 3.

По теореме 3 *построенные множества точек и прямых с введенным отношением инцидентности образуют КПП порядка 9*. Разумеется, она является дезарговой, как и любая КПП над полем.

## 6.2. Результаты исследования подплоскостей дезарговой плоскости

По теореме Брука [13] порядок  $n$  всей плоскости и порядок  $m$  возможной подплоскости связаны соотношениями:  $n = m^2$  или  $m^2 + m \leq n$ . Из этой теоремы следует, что при  $n = 9$   $m$  может принимать значения 2 или 3.

Проведем подсчеты и классификацию подплоскостей в КПП **PD** (9) с помощью приведенных ниже рассуждений.

Известно, что группа коллинеаций **G** плоскости **PD** (9) транзитивна на упорядоченных 4-дугах этой плоскости [9, 13]. Поэтому достаточно исследовать «на подплоскость» одну 4-дугу  $S^4 = \{0, \infty, 00, 11\}$ , которая задает исходную систему координат в данной плоскости. Исследование этой 4-дуги «на подплоскость» показало, что она порождает подплоскость  $\pi_0$  порядка 3 (жирным шрифтом обозначены прямые):

0	0	0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1	1	1	2	2	2
$\infty$	00	01	02	00	10	20	00	01	02	00	01	02
1	10	11	12	01	11	21	11	12	10	12	10	11
2	20	21	22	02	12	22	22	20	21	21	22	20
$\infty$	<b>00</b>	<b>01</b>	<b>02</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>20</b>	<b>21</b>	<b>22</b>

При  $m = 3$  из формулы (3) получаем, что  $\Sigma n^4 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 4}{4!} = 234$ , а при

$n = 9$  из формулы (2) имеем, что  $\Sigma N^4 = \frac{91 \cdot 90 \cdot 81 \cdot 64}{4!} = 1\,769\,040$ , поэтому по

формуле (1) находим, что  $n(\pi_0) = \frac{\Sigma N^4}{\Sigma n^4} = \frac{1769040}{234} = 7\,560$ . Итак, верна теоре-

ма D.

**Теорема D.** *В дезарговой КПП порядка 9 содержатся 7 560 подплоскостей порядка 3 одного типа.*

**Следствие.** *Подплоскостей порядка 2 в дезарговой КПП порядка 9 нет.*

В отличие от дезарговой плоскости в трех известных недезарговых плоскостях порядка 9 существуют 4-дуги, неизоморфные относительно группы коллинеаций соответствующей плоскости [4, 5, 8]. Это существенно осложняет решение задачи исследования подплоскостей в указанных плоскостях.

## 7. Исследование подплоскостей в плоскости трансляций порядка 9

### 7.1. Алгебраическое описание плоскости трансляций порядка 9

#### А. Левое почти-поле порядка 9

Плоскость трансляций порядка 9, обозначаемая далее **PT** (9), впервые рассмотрена в работе [22]. Она может быть построена над ассоциативным квазителом или почти-полем **F** порядка 9 с левым дистрибутивным законом [7, 9, 16].

Укажем способ построения почти-поля **F**. Оказывается,  $\mathbf{F} = (\mathbf{D}, +, \otimes)$ , где **D** – множество элементов поля **F** (9), рассмотренное в § 6.1, «+» и « $\otimes$ » – обозначения операций сложения и умножения в **F**, соответственно.

Сложение в **F** то же самое, что и в поле **F** (9). Умножение в **F** производится по правилу умножения многочленов с использованием левого дистрибутивного закона, ассоциативности, равенства  $(a + bi) \otimes c = (a + bi)c$  для  $a, b, c \in \mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K} = \mathbf{F}_3$ , а также следующего правила, заменяющего правый дистрибутивный закон:

$$(a + bi) \otimes i = (a + bi)i = -b + ai \text{ для } a = 0 \text{ или } b = 0,$$

$$(a + bi) \otimes i = -(a + bi)i = b - ai \text{ для } a \neq 0 \text{ и } b \neq 0.$$

Указанные правила выражают умножение в **F** на языке умножения в поле **F** (9). Таблица умножения (ТУ) в **F** приведена ниже. Для упрощения записей умножение в **F** обозначаются далее обычным образом.

Построение левого почти-поля **F** завершено. Отметим, что  $(\mathbf{D}, +)$  – абелева группа,  $\mathbf{D}' = (\mathbf{D} \setminus \{0\}, \cdot)$  – мультипликативная группа, изоморфная группе кватернионов [13, 21].

Таблица умножения (ТУ) в левом почти-поле порядка 9

$\cdot$	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>i</b>	<b>i + 1</b>	<b>i + 2</b>	<b>2i</b>	<b>2i + 1</b>	<b>2i + 2</b>
<b>0</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>1</b>	0	1	2	i	i + 1	i + 2	2i	2i + 1	2i + 2
<b>2</b>	0	2	1	2i	2i + 2	2i + 1	i	i + 2	i + 1
<b>i</b>	0	i	2i	2	i + 2	2i + 2	1	i + 1	2i + 1
<b>i + 1</b>	0	i + 1	2i + 2	2i + 1	2	i	i + 2	2i	1
<b>i + 2</b>	0	i + 2	2i + 1	i + 1	2i	2	2i + 2	1	i
<b>2i</b>	0	2i	i	1	2i + 1	i + 1	2	2i + 2	i + 2
<b>2i + 1</b>	0	2i + 1	i + 2	2i + 2	i	1	i + 1	2	2i
<b>2i + 2</b>	0	2i + 2	i + 1	i + 2	1	2i	2i + 1	i	2

Обозначим элементы множества  $D$ , как и в § 6.1, тогда ТУ в  $F$  примет вид:

ТУ

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	1	6	8	7	3	5	4
3	0	3	6	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	7	2	3	5	6	1
5	0	5	7	4	6	2	8	1	3
6	0	6	3	1	7	4	2	8	5
7	0	7	5	8	3	1	4	2	6
8	0	8	4	5	1	6	7	3	2

Понятно, что в этих обозначениях таблица сложения (ТС) в  $F$  совпадает с таблицей сложения в поле  $F(9)$ .

Элементы множества  $K = F_3 = \{0, 1, 2\}$ , как и в [16, 21], назовем действительными, а элементы множества  $D \setminus K = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  – мнимыми. Нетрудно проверить, что для мнимых элементов  $p^{-1} = -p$ ,  $pq = -qp$  для  $q \neq p$ ,  $p^{-1}$ .

Автоморфизмы почти-поля  $F$  образуют группу порядка 6 [16], изоморфную группе подстановок из трех элементов. Любой из них сохраняет элементы из  $K$ , а для любых двух различных элементов из  $D \setminus K$  существует один и только один автоморфизм, переводящий первый элемент во второй, то есть группа автоморфизмов для  $F$  транзитивна на мнимых элементах. Оказывается [7], автоморфизмы  $F$  порядка 2 действуют на элементы множества  $D$  по формуле:

$$s_j(x) = (j - 1)x + (-j - 1)x \quad (4),$$

где  $j \in D \setminus K$ ,  $x \in D$ . Из (4) следует, что  $s_j = s_{-j}$ , но автоморфизмы  $s_j, s_{j+1}, s_{j-1}$  попарно различны и представляют все автоморфизмы порядка 2. Два других автоморфизма порядка 3 обозначаются через  $s_+$  и  $s_-$ , они получаются как произведения двух автоморфизмов порядка 2, а именно:

$$s_+ = s_j s_{j+1}, s_- = s_{j+1} s_j \quad (5).$$

Отметим, что здесь, как и всюду в дальнейшем, при использовании произведения преобразований раньше выполняется то из них, которое в записи расположено правее.

Из формулы (5) можно найти, что

$$s_+ s_{j+1} = s_j, s_j s_+ = s_{j+1}, s_- s_j = s_{j+1}, s_{j+1} s_- = s_j.$$

Используя формулы (4) и (5), находим действие всех нетождественных автоморфизмов на мнимые элементы:

$$s_3: (36)(47)(58), s_4: (37)(48)(56), s_5: (38)(46)(57), s_+: (345)(687), s_-: (354)(678).$$

## В. Построение плоскости трансляций над почти-полем порядка 9

Пусть  $D = \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbf{F}_3, i^2 + 1 = 0\}$  – множество элементов поля  $\mathbf{F}(9)$  или левого почти-поля  $\mathbf{F}$ . Обозначим  $D^* = D \cup \{\infty\}$  и зададим множество точек и множество прямых из  $\mathbf{PT}(9)$  следующим образом.

1. *Собственной точкой* назовем упорядоченную пару  $(x, y)$ , где  $x, y \in D$  и называются соответственно *абсциссой* и *ординатой* точки. Всего таких точек  $9^2 = 81$ .

2. *Несобственной точкой* назовем одноэлементное множество  $(w)$ , где  $w \in D^*$ . Всего таких точек  $9 + 1 = 10$ .

Следовательно, всего точек  $81 + 10 = 91$ , как и должно быть.

3. *Прямой* назовем упорядоченную пару  $[k, m]$  или просто одноэлементное множество  $[c]$ , где  $k, m \in D, c \in D^*$ , причем при  $c = \infty$  прямая объявляется *несобственной*, а все остальные прямые – *собственными* прямыми. Всего собственных прямых  $9^2 + 9 = 90$ , а всего прямых  $90 + 1 = 91$ , как и должно быть.

Отношение инцидентности точки и прямой определим условиями:

- (i)  $(x, y) \in [k, m] \Leftrightarrow y = kx + m$ ;
- (ii)  $(x, y) \in [c] \Leftrightarrow x = c$  (поэтому  $(x, y) \notin [\infty]$ );
- (iii)  $(w) \in [k, m] \Leftrightarrow w = k$  (поэтому  $(\infty) \notin [k, m]$ );
- (iiii)  $(w) \in [c] \Leftrightarrow w = \infty$  или  $c = \infty$ .

Как видим, условия инцидентности точки и прямой переносятся на

**PT** (9) из § 3 без всяких изменений, но умножение теперь выполняется в левом почти-поле **F**. Точно так же без изменений используются здесь и сокращенные обозначения точек и прямых, принятые в § 3.

Используя эти условия, можно получить полный список прямых создаваемой плоскости **PT** (9) с указанием 10 точек на каждой из них. Полный список из 91 прямой плоскости **PT** (9) (с указанием всех 10 точек на каждой из них) приведен в табл. 5 приложения.

Справедлива следующая теорема:

**Теорема 4.** *Построенные множества точек и прямых с введенным отношением инцидентности образуют КПП порядка 9, отличную от **PD** (9).*

**Доказательство.** Проверим выполнимость аксиом **P**<sub>1</sub>, **P**<sub>2</sub>, **P**<sub>3</sub>, **P**<sub>4</sub>.

**P**<sub>1</sub>. Проверка такая же, как и при доказательстве теоремы 3. Дело в том, что в процессе сделанной там проверки для аксиомы **P**<sub>1</sub> нигде не использовалась коммутативность умножения и правая дистрибутивность (чего как раз и нет в левом почти-поле **F**), зато использовалась левая дистрибутивность при решении системы уравнений  $\begin{cases} y_1 = kx_1 + m \\ y_2 = kx_2 + m \end{cases}$  при  $x_1 \neq x_2$  для отыскания прямой  $s = [k, m]$ , инцидентной точкам  $A = (x_1, y_1)$  и  $B = (x_2, y_2)$ . Но левая дистрибутивность у левого почти-поля имеется.

**P**<sub>2</sub>. Проверка во всех случаях, кроме одного, проводится так же, как и при доказательстве теоремы 3. Сложнее обстоит дело с проверкой аксиомы **P**<sub>2</sub> при отыскании единственной общей точки двух различных прямых –  $s_1 = [k_1, m_1]$  и  $s_2 = [k_2, m_2]$  – в случае, когда  $k_1 \neq k_2$ . Поиск такой точки  $M = (x, y)$ , где  $M \in s_1, M \in s_2$ , приводит в силу условия (i) к системе уравнений:  $\begin{cases} y = k_1x + m_1 \\ y = k_2x + m_2 \end{cases}$ , отсюда  $k_1x + m_1 = k_2x + m_2$  или  $k_1x - k_2x = m_2 - m_1$ . Но  $k_1x - k_2x \neq (k_1 - k_2)x$  для левого почти-поля **F** из-за отсутствия правой дистрибутивности.

Следовательно, требуется установить, что уравнение  $k_1x - k_2x = m_2 - m_1$  или  $k_1x - k_2x = d$  (\*), где  $d = m_2 - m_1$ , при  $k_1 \neq k_2$  имеет, и притом единственное, решение  $x$  (тогда из первого уравнения упомянутой системы найдем и

$$y = k_1 x + m_1).$$

**Лемма.** Уравнение  $k_1 x - k_2 x = d(*)$  при  $k_1 \neq k_2$  всегда разрешимо относительно  $x$ , и притом единственным образом, в левом почти-поле  $\mathbf{F}$  порядка 9.

**Доказательство.**

**1. Единственность.** Допустим, что уравнение  $(*)$  имеет два разных решения  $x_1$  и  $x_2$ , тогда при  $x_1 \neq x_2$  получаем, что  $\begin{cases} k_1 x_1 - k_2 x_1 = d \\ k_1 x_2 - k_2 x_2 = d \end{cases}$ , отсюда

$k_1 x_1 - k_2 x_1 = k_1 x_2 - k_2 x_2$  или  $k_1 x_1 - k_1 x_2 = k_2 x_1 - k_2 x_2$ , то есть благодаря левой дистрибутивности,  $k_1 (x_1 - x_2) = k_2 (x_1 - x_2)$ . Но  $x_1 - x_2 \neq 0$ , поэтому, умножая справа обе части последнего равенства на  $(x_1 - x_2)^{-1}$ , получим:

$$[k_1 (x_1 - x_2)] \cdot (x_1 - x_2)^{-1} = [k_2 (x_1 - x_2)] \cdot (x_1 - x_2)^{-1}.$$

Отсюда  $k_1 [(x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_2)^{-1}] = k_2 [(x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_2)^{-1}]$  или  $k_1 = k_2$ , что невозможно по условию. Допущение опровергнуто, следовательно, уравнение  $(*)$  имеет единственное решение  $x_1 = x_2$  (если имеет).

**2. Существование.** Из проведенного рассуждения следует, что при  $k_1 \neq k_2$  имеем:  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow (k_1 x_1 - k_2 x_1 \neq k_1 x_2 - k_2 x_2)$ . Поэтому выражение  $k_1 x - k_2 x$  для различных значений аргумента « $x$ » имеет различные значения. Так как левое почти-поле  $\mathbf{F}$  состоит из 9 различных элементов  $0, 1, 2, \dots, 8$ , то функция  $k_1 x - k_2 x$  при  $x \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}$  также имеет 9 различных значений из множества  $\{0, 1, 2, \dots, 8\}$ ; ими окажутся все элементы из  $\mathbf{F}$  (но, вообще говоря, расположенные в ином порядке). Поэтому для любого элемента  $d \in \mathbf{F}$  существует (точно одно) такое значение « $x$ », что  $k_1 x - k_2 x = d$ . Лемма доказана.

Из этой леммы и вытекает (с учетом проведенных ранее рассуждений) справедливость аксиомы  $\mathbf{P}_2$  для множества точек и прямых в  $\mathbf{PT}$  (9).

$\mathbf{P}_3$ . Точки  $(0), (\infty), (0, 0)$  и  $(1, 1)$  удовлетворяют аксиоме  $\mathbf{P}_3$ .

$\mathbf{P}_4$ . Аксиома выполняется, так как прямой  $[\infty]$  инцидентны точно 10 точек:  $(\infty), (0), (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8)$ .

Итак, построенные множества точек и прямых с введенным отношением инцидентности точки и прямой образуют КПП порядка 9  $\mathbf{PT}$  (9), так как вы-

полняются все аксиомы  $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_4$ . Эта плоскость не может быть дезарговой, так как построена над левым почти-полем  $\mathbf{F}$ , отличным от поля  $\mathbf{F}$  (9). Теорема 4 доказана.

Замечание 7. Построенная плоскость  $\mathbf{PT}$  (9) является недезарговой, так как в этой плоскости теорема Дезарга не выполняется проективно, то есть не для любой пары трехвершинников, удовлетворяющих условию этой теоремы, выполняется и ее утверждение.

## 7.2. Группа коллинеаций плоскости трансляций порядка 9

Она достаточно подробно рассмотрена в статье [16]. Необходимые результаты относительно этой группы  $\mathbf{G}$  можно привести [7] к следующему виду (при этом используются исходные обозначения точек и прямых).

1. Подгруппу  $\mathbf{G}_t$  порядка 81 образуют трансляции  $t_{a,b}$ , определенные посредством

$$t_{a,b}: (x, y) \rightarrow (x + a, y + b) \quad (6)$$

при  $a, b \in D$ . Из (6) следует, что для любой пары собственных точек существует единственная трансляция, переводящая первую точку во вторую, то есть группа  $\mathbf{G}_t$  транзитивна на собственных точках. Используя (6), можно установить, что при трансляции  $t_{a,b}: [k, m] \rightarrow [k, b - ka + m]; [c] \rightarrow [c + a]$  при  $c \in D; (w) \rightarrow (w); [\infty] \rightarrow [\infty]$ .

Отметим, что группа  $\mathbf{G}_t$  изоморфна прямому произведению аддитивной группы  $(D, +)$  почти-поля  $\mathbf{F}$  на себя, так как

$$t_{a,b} = t_{a,0} t_{0,b} = t_{0,b} t_{a,0}; \quad t_{a1,0} t_{a2,0} = t_{a1+a2,0}; \quad t_{0,b1} t_{0,b2} = t_{0,b1+b2}.$$

2. Подгруппу  $\mathbf{G}_h$  порядка 64 образуют растяжения  $h_{p,q}$ , определенные посредством

$$h_{p,q}: (x, y) \rightarrow (px, qy) \quad (7)$$

при  $p, q \in D'$ . Из (7) следует, что для любых двух собственных точек вне прямых  $[0]$  и  $[0, 0]$  существует единственное растяжение, преобразующее первую точку во вторую, то есть группа  $\mathbf{G}_h$  транзитивна на указанных 64 точках. Используя (7), можно получить, что при  $h_{p,q}: [k, m] \rightarrow [qkp^{-1}, qm]$ ;



$[c] \rightarrow [pc]$  при  $c \in \mathbf{D}$ ;  $(w) \rightarrow (qwp^{-1})$  при  $w \in \mathbf{D}'$ ;  $(w) \rightarrow (w)$  при  $w = 0, \infty$ ;  
 $[\infty] \rightarrow [\infty]$ .

Отметим, что группа  $\mathbf{G}_h$  изоморфна прямому произведению мультипликативной группы  $(\mathbf{D}', \cdot)$  почти-поля  $\mathbf{F}$  на себя, так как

$$h_{p,q} = h_{p,1} h_{1,q} = h_{1,q} h_{p,1}; \quad h_{p1,1} h_{p2,1} = h_{p1 p2,1}; \quad h_{1,q1} h_{1,q2} = h_{1,q1q2}.$$

3. Следующая подгруппа  $\mathbf{G}_v$  порядка 8 порождается коллинеацией  $v$ , определенной посредством

$$v : (x, y) \rightarrow (x - y, x + y) \quad (8).$$

Если назвать точку  $(0, 0)$  началом координат, прямые  $[0, 0]$  и  $[0]$  – осями « $x$ » и « $y$ » соответственно, то  $v$  преобразует:

$[0, 0] \rightarrow [1, 0] \rightarrow [0] \rightarrow [-1, 0]$ , а прямую  $[-1, 0]$  снова в прямую  $[0, 0]$ , то есть ось « $x$ » в прямую  $y = x$ , ее – в ось « $y$ », последнюю – в прямую  $y = -x$ , а эту прямую – снова в ось « $x$ ». Вообще при  $v: [0, m] \rightarrow [1, 2m] \rightarrow [m] \rightarrow [-1, 2m] \rightarrow [0, 2m] \rightarrow [1, m] \rightarrow [2m] \rightarrow [2, m]$ , а прямая  $[2, m]$  преобразуется снова в прямую  $[0, m]$ .

Каждая прямая  $[k, 0]$ , где  $k \in \mathbf{D} \setminus \mathbf{K}$ , с уравнением  $y = kx$  преобразуется посредством  $v$  в себя. В самом деле,  $x + y = k(x - y)$ , так как  $x + kx = k(x - kx)$  ввиду того, что  $x + kx = kx - k^2 x$  или  $x + kx = kx + x (k^2 = -1)$ .

Учитывая сказанное, получим, что на несобственные точки коллинеация  $v$  действует как подстановка  $(0 \ 1 \ \infty \ 2)$ .

4. Подгруппу  $\mathbf{G}_s$  порядка 6 образуют коллинеации, порождаемые автоморфизмами почти-поля  $\mathbf{F}$ , определенные посредством

$$s : (x, y) \rightarrow (s(x), s(y)) \quad (9).$$

Из (9) следует, что  $[k, m] \rightarrow [s(k), s(m)]$ ;  $[c] \rightarrow [s(c)]$  при  $c \in \mathbf{D}$ ;  $(w) \rightarrow (s(w))$  при  $w \in \mathbf{D}$ ;  $(\infty) \rightarrow (\infty)$ ;  $[\infty] \rightarrow [\infty]$ .

Учитывая взаимно однозначное соответствие между автоморфизмами почти-поля  $\mathbf{F}$  и коллинеациями группы  $\mathbf{G}_s$ , последние будем обозначать так же, как и соответствующие автоморфизмы  $\mathbf{F}$ , а именно:  $s_3, s_4, s_5, s_+, s_-, e$ .

5. Подгруппу порядка 2 порождает инволюционная коллинеация  $t$ , транспонирующая оси « $x$ » и « $y$ », определенная посредством

$$t: (x, y) \rightarrow (y, x) \quad (10).$$

Из (10) следует, что при  $t: [k, m] \leftrightarrow [k^{-1}, -k^{-1}m]$  при  $k \neq 0$ ;  $[0, m] \leftrightarrow [m]$ , а отсюда  $(k) \leftrightarrow (k^{-1})$  при  $k \in D'$ ;  $(0) \leftrightarrow (\infty)$ ;  $[\infty] \rightarrow [\infty]$ .

6. Порядок группы  $\mathbf{G}$  можно подсчитать на основании теоремы 19 работы Andre [16], где утверждается, что каждая коллинеация из  $\mathbf{G}$  однозначно представима (в наших обозначениях) посредством:  $h_{p,q} v h_{l,r} s t_{a,b}$  или  $h_{p,q} s t_{a,b}$ , или  $t h_{p,q} s t_{a,b}$ , где  $p, q, r \in D'$ ,  $a, b \in D$ ,  $s \in \mathbf{G}_s$ . Отсюда сразу следует, что группа  $\mathbf{G}$  содержит  $8^3 \cdot 6 \cdot 81 + 8^2 \cdot 6 \cdot 81 + 8^2 \cdot 6 \cdot 81 = 311\,040$  элементов.

7. В качестве образующих элементов группы  $\mathbf{G}$  в данной работе выбраны коллинеации  $s_3, s_4, h_{l,3}, t_{0,3}, v$ . В работах [5, 7] автора показано, что эти образующие позволяют получить любую коллинеацию из указанных подгрупп  $\mathbf{G}_t, \mathbf{G}_h, \mathbf{G}_v, \mathbf{G}_s$  и коллинеацию  $t$ , а поэтому на основании упомянутой теоремы 19 из [16] и любую коллинеацию группы  $\mathbf{G}$ .

Укажем действие образующих элементов группы  $\mathbf{G}$  на собственные точки плоскости  $\mathbf{PT}(9)$  и подстановку ее несобственных точек, индуцируемую этими образующими:

$$\text{для } h_{l,3}: \quad (x, y) \rightarrow (x, 3y), (1326)(4587)(0)(\infty);$$

$$\text{для } t_{0,3}: \quad (x, y) \rightarrow (x, y + 3), (0)(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(\infty);$$

$$\text{для } s_3: \quad (x, y) \rightarrow (5x + 8x, 5y + 8y), (36)(47)(58)(0)(1)(2)(\infty);$$

$$\text{для } s_4: \quad (x, y) \rightarrow (3x + 7x, 3y + 7y), (37)(48)(56)(0)(1)(2)(\infty);$$

$$\text{для } v: \quad (x, y) \rightarrow (x - y, x + y), (01 \infty 2)(3)(4)(5)(6)(7)(8).$$

8. Анализ действия образующих группы  $\mathbf{G}$  на точках плоскости  $\mathbf{PT}(9)$ , а, следовательно, и на прямых этой плоскости, показывает, что прямая  $[\infty]$  является единственной прямой, сохраняемой всеми коллинеациями из  $\mathbf{G}$ . Эта прямая называется далее *особенной прямой*, а ее 10 равноправных (относительно  $\mathbf{G}$ ) точек называются *особенными точками*; все остальные точки (прямые) плоскости относительно  $\mathbf{G}$  равноправны, они называются *неособенными*.

10 особенных точек  $0, 1, 2, \dots, 8, \infty$  прямой  $\infty$  распадаются относительно образующих коллинеаций группы  $\mathbf{G}$  на 5 пар особенных точек:  $\{0, \infty\}, \{1,$

2}, {3, 6}, {4, 8}, {5, 7}, причем, любая образующая коллинеация, а поэтому и любая коллинеация из группы  $\mathbf{G}$ , вообще говоря, переставляет эти пары, но не разбивает ни одной из них. Точки каждой из таких пар далее называются *сопряженными* особенными точками. Две особенные точки из разных пар называются далее *несопряженными* особенными точками.

### 7.3. Подплоскости плоскости трансляций

Из теоремы Брука [13] следует, что в плоскости  $\mathbf{PT}(9)$  теоретически возможны подплоскости порядка  $m = 2, 3$ .

В работах автора [4, 5] установлено, что в плоскости  $\mathbf{PT}(9)$  все 1 769 040 4-дуг плоскости относительно группы  $\mathbf{G}$  коллинеаций этой плоскости разбиваются на 19 классов (орбит), в состав каждого класса входят эквивалентные (изоморфные относительно группы  $\mathbf{G}$ ) между собой 4-дуги, а 4-дуги из разных классов – не изоморфны между собой.

Введем следующее определение.

*Определение 6.* Две 4-дуги КПП порядка  $n$  назовем *эквивалентными (изоморфными)*, если существует коллинеация плоскости, при которой точки первой 4-дуги преобразуются в точки второй 4-дуги. В противном случае, 4-дуги назовем *не изоморфными*.

Выбирая некоторую 4-дугу в каждом из 19 указанных классов, назовем ее представителем соответствующего класса или *опорной 4-дугой*.

Необходимые сведения об опорных 4-дугах и их группах автоморфизмов плоскости  $\mathbf{PT}(9)$  приведены в табл. 6 приложения. В ней  $N_i^4$  – число 4-дуг, изоморфных опорной 4-дуге  $S_i^4$ , оно находится с помощью данных табл. 6 по формуле  $N_i^4 = \frac{|G|}{|G_i^4|}$ , где  $|G|$  – порядок группы коллинеаций изучаемой плоскости (для  $\mathbf{PT}(9)$   $|G| = 311\,040$ ).

В отличие от дезарговой плоскости, в плоскости  $\mathbf{PT}(9)$  имеются опорные 4-дуги четырех типов [5, 7]:

**Тип 1.** Опорная 4-дуга порождает подплоскость порядка 2 одного вида.

**Тип 2.** Опорная 4-дуга порождает подплоскость порядка 3 первого вида.

**Тип 3.** Опорная 4-дуга порождает подплоскость порядка 3 второго вида.

**Тип 4.** Опорная 4-дуга порождает всю плоскость **PT** (9).

1. Опорные 4-дуги с номерами 5, 6, 12 (см. табл. 6) порождают соответственно следующие подплоскости порядка 2 (указаны лишь точки, причем, первые 4 точки – вершины порождающей опорной 4-дуги, выделенные курсивом):

$$\pi_5: \mathit{0}, \mathit{00}, \mathit{01}, \mathit{13}, 50, 61, 03;$$

$$\pi_6: \mathit{0}, \mathit{00}, \mathit{11}, \mathit{23}, 30, 31, 03;$$

$$\pi_{12}: \mathit{00}, \mathit{01}, \mathit{10}, \mathit{13}, \infty, 50, 68.$$

Все эти подплоскости, обозначения которых выбраны согласованно с порождающей опорной 4-дугой (как и в дальнейшем), содержат точно по одной особенной точке и будут изоморфными, так как

$$t_{5,1} h_{4,1}: \pi_6 \rightarrow \pi_5; \quad t h_{1,5} S_+ : \pi_{12} \rightarrow \pi_5.$$

В качестве опорной подплоскости порядка 2 этого типа возьмем подплоскость  $\pi_5 = \alpha$ . Приведем точки и прямые (в сокращенных обозначениях) этой **опорной** подплоскости, порождаемой 4-дугой  $S_5^+ = \{0, 00, 01, 13\}$ , сохраняя выделение вершин этой 4-дуги:

	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>00</i>	<i>00</i>	<i>01</i>	<i>50</i>
	<i>00</i>	<i>01</i>	<i>13</i>	<i>01</i>	<i>13</i>	<i>13</i>	<i>61</i>
	<i>50</i>	<i>61</i>	<i>03</i>	<i>03</i>	<i>61</i>	<i>50</i>	<i>03</i>
<b>Прямые:</b>	<b><i>00</i></b>	<b><i>01</i></b>	<b><i>03</i></b>	<b><i>0</i></b>	<b><i>30</i></b>	<b><i>51</i></b>	<b><i>83</i></b>

Эта подплоскость характеризуется тем, что содержит одну особенную точку 0, а все остальные 6 ее точек, как и все прямые, неособенные.

Укажем теперь **общее правило** подсчета числа подплоскостей порядка 2 и 3 в любой из недезарговых КПП порядка 9, которое является обобщением формулы (1) для дезарговой КПП. Общее число  $n_x$  подплоскостей типа  $X$  для каждого порядка находится по формуле:

$$n_x = \frac{\sum_i N_i^4}{\sum_i n_i^4} \quad (11), \text{ где}$$

$\sum_i N_i^4$  – общее число 4-дуг, входящих в состав всех найденных изоморфных подплоскостей типа  $X$  и изоморфных соответственно опорным 4-дугам, порождающим эти подплоскости,

$\sum_i n_i^4$  – число всех 4-дуг, входящих в состав одной опорной подплоскости и изоморфных соответственно опорным 4-дугам, упомянутым выше.

Фактически,  $\sum_i n_i^4$  – это общее число 4-дуг в составе одной опорной подплоскости, в случае подплоскости порядка  $m = 2$  по формуле (3) имеем, что  $\sum_i n_i^4 = 7$ , а в случае подплоскости порядка  $m = 3$  по той же формуле имеем, что  $\sum_i n_i^4 = 234$ .

Таким образом, в зависимости от порядка подплоскости, получаем две разновидности формулы (11):

$$\text{для порядка 2 } n_x = \frac{\sum_i N_i^4}{7} \quad (12), \text{ для порядка 3 } n_x = \frac{\sum_i N_i^4}{234} \quad (13).$$

Именно эти формулы и используются фактически при подсчете числа подплоскостей данного типа для каждого возможного порядка во всех недезарговых КПП порядка 9.

В исследуемом случае получаем (с помощью табл. 6):

$$\sum_i N_i^4 = N_5^4 + N_6^4 + N_{12}^4 = 155\,020 + 51\,840 + 155\,020 = 362\,880.$$

Тогда по формуле (12) находим, что  $n_\alpha = \frac{362880}{7} = 51\,840$ .

**2.** Опорные 4-дуги с номерами 1, 2, 4, 10, 11 (см. табл. 6) порождают соответственно следующие подплоскости порядка 3 (указаны лишь точки, причем, первые 4 точки – вершины порождающей опорной 4-дуги, выделенные курсивом):

$$\pi_1: \infty, 0, 00, 11, 1, 10, 01, 21, 02, 20, 12, 2, 22;$$

$\pi_2: 0, 1, 00, 01, \infty, 20, 21, 11, 22, 10, 12, 2, 02;$

$\pi_4: 0, 00, 01, 22, 10, 11, 02, 12, \infty, 21, 1, 20, 2;$

$\pi_{10}: 00, 01, 10, 11, \infty, 20, 21, 1, 2, 12, 02, 22, 0;$

$\pi_{11}: 00, 01, 10, 12, \infty, 20, 21, 1, 2, 12, 02, 22, 0.$

Легко заметить, что все эти подплоскости состоят из одних и тех же точек, поэтому совпадают. В качестве опорной подплоскости этого типа возьмем  $\pi_1 = \beta$ . Она содержит 4 особенные точки:  $0, \infty, 1$  и  $2$  из двух пар сопряженных особенных точек:  $\{0, \infty\}$  и  $\{1, 2\}$ .

Приведем точки и прямые (в сокращенных обозначениях) этой *опорной* подплоскости, порождаемой 4-дугой  $S_1^4 = \{\infty, 0, 00, 11\}$ , сохраняя выделение вершин этой 4-дуги:

	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	$\infty$	$\infty$	<i>00</i>	<i>0</i>	$\infty$	1	1	2	2	2
	$\infty$	<i>00</i>	<i>11</i>	<i>00</i>	<i>11</i>	<i>11</i>	02	20	01	<i>00</i>	02	01	02
	1	10	01	01	10	22	12	21	12	10	12	10	<i>11</i>
	2	20	21	02	12	1	22	22	20	21	21	22	20
<b>Прямые:</b>	$\infty$	<b>00</b>	<b>01</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>10</b>	<b>02</b>	<b>2</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>20</b>	<b>21</b>	<b>22</b>

Подсчитаем число подплоскостей порядка 3 типа  $\beta$  по формуле

$$n_\beta = \frac{\sum_i N_i^4}{234} \quad (13').$$

В исследуемом случае получаем (с помощью табл. 6):

$$\begin{aligned} \sum_i N_i^4 &= N_1^4 + N_2^4 + N_4^4 + N_{10}^4 + N_{11}^4 = \\ &= 12\,960 + 25\,920 + 25\,920 + 6\,480 + 12\,960 = 84\,240. \end{aligned}$$

Тогда по формуле (13') находим, что  $n_\beta = \frac{84240}{234} = 360$ .

**3.** Опорные 4-дуги с номерами 3, 7, 17 (см. табл. 6) порождают соответственно следующие подплоскости порядка 3 (указаны лишь точки, причем, первые 4 точки – вершины порождающей опорной 4-дуги, выделенные курсивом):

$\pi_3: 0, 1, 00, 13, 3, 70, 33, 83, 66, 50, 46, 5, 26;$

$\pi_7: 0, 00, 11, 32, 80, 61, 22, 72, 1, 51, 3, 40, 7;$

$\pi_{17}: 00, 01, 13, 14, \infty, 3, 28, 4, 5, 26, 27, 02, 15.$

Все эти подплоскости содержат по 4 особенные точки из четырех различных пар сопряженных особенных точек, а именно:

$$\pi_3 - \{0, 1, 3, 5\}, \pi_7 - \{0, 1, 3, 7\}, \pi_{17} - \{\infty, 3, 4, 5\},$$

поэтому они не изоморфны подплоскости  $\beta$ , но изоморфны между собой, так как

$$h_{3,3}: \pi_7 \rightarrow \pi_3; \quad th_{6,7}S_4: \pi_{17} \rightarrow \pi_3.$$

Приведем точки и прямые (в сокращенных обозначениях) *опорной* подплоскости  $\pi_3 = \gamma$ , порождаемой 4-дугой  $S_3^4 = \{0, 1, 00, 13\}$ , сохраняя выделение вершин этой 4-дуги:

	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>00</i>	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>3</i>	<i>3</i>	<i>5</i>	<i>5</i>	<i>5</i>
	<i>1</i>	<i>00</i>	<i>13</i>	<i>00</i>	<i>13</i>	<i>13</i>	<i>66</i>	<i>50</i>	<i>50</i>	<i>70</i>	<i>00</i>	<i>66</i>	<i>33</i>
	<i>3</i>	<i>50</i>	<i>33</i>	<i>33</i>	<i>46</i>	<i>26</i>	<i>46</i>	<i>26</i>	<i>33</i>	<i>66</i>	<i>46</i>	<i>13</i>	<i>26</i>
	<i>5</i>	<i>70</i>	<i>83</i>	<i>66</i>	<i>70</i>	<i>3</i>	<i>26</i>	<i>83</i>	<i>46</i>	<i>83</i>	<i>83</i>	<i>50</i>	<i>70</i>
<b>Прямые:</b>	$\infty$	<b>00</b>	<b>03</b>	<b>10</b>	<b>15</b>	<b>30</b>	<b>06</b>	<b>17</b>	<b>34</b>	<b>38</b>	<b>50</b>	<b>51</b>	<b>52</b>

Подсчитаем число подплоскостей порядка 3 типа  $\gamma$  по формуле

$$n_\gamma = \frac{\sum_i N_i^4}{234} \quad (13'').$$

В исследуемом случае получаем (с помощью табл. 6):

$$\sum_i N_i^4 = N_3^4 + N_7^4 + N_{17}^4 = 77\,760 + 51\,840 + 38\,880 = 168\,480.$$

Тогда по формуле (13'') находим, что  $n_\gamma = \frac{168840}{234} = 720$ .

**4.** Остальные 8 опорных 4-дуг с номерами 8, 9, 13, 14, 15, 16, 18, 19 (см. табл. 6):

8) 0, 00, 11, 34;    9) 0, 00, 11, 36;    13) 00, 01, 10, 23;    14) 00, 01, 10, 33;

15) 00, 01, 10, 36;    16) 00, 01, 10, 38;    18) 00, 01, 13, 17;    19) 00, 01, 13, 33

все типа 4, то есть порождают всю плоскость (см. [4, 5]).

Замечание 8. Подплоскости порядка 3 первого и второго видов не изоморфны, так как не существует такой коллинеации плоскости **PT** (9), которая

преобразует четверку  $\{0, \infty, 1, 2\}$  особых точек типовой подплоскости  $\beta$  в четверку  $\{0, 1, 3, 5\}$  особых точек типовой подплоскости  $\gamma$  (см. § 7.2 (8) о типах пар особых точек).

Таким образом, справедливы следующие теоремы, доказанные автором [2, 4, 5]:

**Теорема Е.** *В плоскости трансляций порядка 9 из 19 опорных 4-дуг:*

1) *три порождают, с точностью до изоморфизма, одну подплоскость порядка 2 с одной особенной точкой;*

2) *пять порождают, с точностью до изоморфизма, одну подплоскость порядка 3 с двумя парами сопряженных особых точек;*

3) *три порождают, с точностью до изоморфизма, одну подплоскость порядка 3 с четырьмя особыми точками из четырех различных пар сопряженных особых точек;*

4) *остальные восемь порождают всю плоскость.*

**Теорема F.** *В плоскости  $PT$  (9) имеется:*

1) *51 840 подплоскостей порядка 2 одного вида;*

2) *360 подплоскостей порядка 3 первого вида;*

3) *720 подплоскостей порядка 3 второго вида.*

При этом любые две подплоскости порядка 2 изоморфны между собой, то есть существует коллинеация плоскости  $PT$  (9), преобразующая одну из них в другую. Аналогично любые две подплоскости порядка 3 первого вида изоморфны между собой, любые две подплоскости порядка 3 второго вида изоморфны между собой.

В табл. 7 приведены сводные данные об опорных подплоскостях порядка  $m$  в плоскости  $PT$  (9).

Замечание 9. Результаты классификации подплоскостей в плоскости  $PT$  (9) полностью совпали с результатами Магари (Magari) [20], полученными им алгебраическим путем. А результаты подсчета числа подплоскостей отличаются в случае подплоскостей порядка 3 второго вида. В работе Магари это



число равно 2 880 вместо 720, что неверно, как отмечалось уже в работах автора [2, 4]. Ошибка, допущенная Магари, совершена из-за неаккуратного использования аналогии в перенесении выводов, полученных им строго для четверки особенных точек, состоящей из двух пар сопряженных особенных точек, на четверку особенных точек, принадлежащих четырем различным парам сопряженных особенных точек. Но такие четверки особенных точек не изоморфны, что следует из п. 7.2 (8) (и доказано в работах автора [4, 5]).

## 8. Исследование подплоскостей в плоскости сдвигов порядка 9

### 8.1. Алгебраическое описание плоскости сдвигов порядка 9

Эта недезаргова КПП порядка 9 является двойственной плоскости трансляций порядка 9. Назовем ее плоскостью сдвигов и обозначим **PS** (9). Известно [5], что эта плоскость может быть построена над правым почти-полем **F'** порядка 9 с правым дистрибутивным законом  $(b + c)a = ba + ca$ , антиизоморфным левому почти-полю **F**, описанному в § 7.1.A. Поэтому элементы почти-полей **F** и **F'** совпадают. Напомним, что  $\mathbf{F} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{F}_3\}$ , где  $\mathbf{F}_3 = \{0, 1, 2\}$  – поле порядка 3, а  $i$  – корень многочлена  $x^2 + 1$ , неприводимого над  $\mathbf{F}_3$ . Таблицы сложения и умножения в **F** приведены в § 7.1.

Формально положив  $i = 3$ , обозначим элементы **F** (**F'**) так:

$$0 = 0, 1 = 1, 2 = 2, i = 3, i + 1 = 4, i + 2 = 5, 2i = 6, 2i + 1 = 7, 2i + 2 = 8.$$

В этих обозначениях получаем нижеприведенные таблицы сложения (ТС) и умножения (ТУ) в правом почти-поле **F'**. При этом

- 1) ТС в **F'** полностью совпадает с ТС в **F**,
- 2) ТУ в **F'** симметрична ТУ в **F** относительно главной диагонали.

ТС почти-поля **F'**

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7
3	3	4	5	6	7	8	0	1	2

ТУ почти-поля **F'**

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	1	6	8	7	3	5	4
3	0	3	6	2	7	4	1	8	5

<b>4</b>	4	5	3	7	8	6	1	2	0
<b>5</b>	5	3	4	8	6	7	2	0	1
<b>6</b>	6	7	8	0	1	2	3	4	5
<b>7</b>	7	8	6	1	2	0	4	5	3
<b>8</b>	8	6	7	2	0	1	5	3	4

<b>4</b>	0	4	8	5	2	6	7	3	1
<b>5</b>	0	5	7	8	3	2	4	1	6
<b>6</b>	0	6	3	1	5	8	2	4	7
<b>7</b>	0	7	5	4	6	1	8	2	3
<b>8</b>	0	8	4	7	1	3	5	6	2

Именно эта таблица умножения и используется далее.

Определим теперь известным способом множество точек и множество прямых плоскости **PS** (9), которую можно построить над  $\mathbf{F}'$ .

1. *Обыкновенной точкой* назовем упорядоченную пару  $(x, y)$ , где  $x, y$  – произвольные элементы из  $\mathbf{F}' = \{0, 1, 2, \dots, 8\}$ , понимаемые как абсцисса и ордината точки  $(x, y)$ ; всего таких точек –  $9^2 = 81$ .

2. *Несобственными точками* ( $w$ ) будем считать каждый из элементов множества  $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}' \cup \{\infty\}$ ; всего несобственных точек –  $9 + 1 = 10$ .

3. *Прямой* назовем упорядоченную пару  $[k, m]$  или просто одноэлементное множество  $[c]$ , где  $k, m \in \mathbf{F}'$ ,  $c \in \mathbf{F}^*$ , причем при  $c = \infty$  прямая объявляется *несобственной*, а все остальные прямые – *собственными* прямыми. Всего собственных прямых –  $9^2 + 9 = 90$ , а всего прямых  $90 + 1 = 91$ , как и должно быть.

Отношение инцидентности точки и прямой определим следующими условиями (как и в § 3):

- (i)  $(x, y) \in [k, m] \Leftrightarrow y = kx + m$  ;
- (ii)  $(x, y) \in [c] \Leftrightarrow x = c$  (отсюда,  $(x, y) \notin [\infty]$ ) ;
- (iii)  $(w) \in [k, m] \Leftrightarrow w = k$  (отсюда,  $(\infty) \notin [k, m]$ ) ;
- (iv)  $(w) \in [c] \Leftrightarrow w = \infty$  или  $c = \infty$ .

При этом умножение выполняется, разумеется, в почти-поле  $\mathbf{F}'$ .

Используя эти условия, можно получить полный список прямых плоскости **PS** (9) с указанием 10 точек на каждой из них. Этот список приведен ниже в табл. 8 приложения. В ней использована система обозначений точек и прямых, принятая в § 3.

Справедлива теорема (приведем ее без доказательства):

**Теорема 5.** Построенные множества точек и прямых с введенным отношением инцидентности образуют КПП порядка 9, отличную от дезарговой и от плоскости трансляций.

Заметим лишь, что при доказательстве этой теоремы нужно проверять выполнимость всех аксиом  $P_1, P_2, P_3, P_4$ . Определенные трудности возникают при проверке аксиом  $P_1$  и  $P_2$  из-за отсутствия в правом почти-поле  $F'$  левой дистрибутивности. Эта плоскость не может быть дезарговой и плоскостью трансляций, так как построена над правым почти-полем  $F'$ , отличным и от поля  $F(9)$ , и от левого почти-поля  $F$ .

Так как плоскость сдвигов двойственна плоскости трансляций, то относительно группы коллинеаций  $G^*$  плоскости сдвигов (которую можем и не знать) точка  $(\infty)$  является единственной точкой, сохраняемой всеми коллинеациями из  $G^*$ . Эта точка называется далее *особенной точкой*, а ее 10 равноправных (относительно  $G^*$ ) прямых называются *особенными прямыми*; все остальные точки (прямые) плоскости относительно  $G^*$  равноправны, они называются *неособенными*.

10 особенных прямых  $0, 1, 2, \dots, 8, \infty$ , инцидентных особенной точке  $\infty$ , распадаются относительно коллинеаций группы  $G^*$  на 5 пар особенных прямых:  $\{0, \infty\}$ ,  $\{1, 2\}$ ,  $\{3, 6\}$ ,  $\{4, 8\}$ ,  $\{5, 7\}$ , причем, любая коллинеация из группы  $G^*$ , вообще говоря, переставляет эти пары, но не разбивает ни одной из них. Прямые каждой из таких пар далее называются *сопряженными* особенными прямыми. Две особенные прямые из разных пар называются далее *несопряженными* особенными прямыми.

Замечание 10. Построенная плоскость **PS** (9) является недезарговой, так как и в ней теорема Дезарга не выполняется проективно, то есть не для любой пары трехвершинников, удовлетворяющих условию этой теоремы, выполняется и ее утверждение.

## 8.2. Переход от плоскости трансляций к плоскости сдвигов

Некоторые результаты в плоскости сдвигов **PS** (9) можно получать путем решения двойственной задачи в плоскости трансляций **PT** (9), а затем посредством конкретного отображения от плоскости **PT** (9) перейти к плоскости **PS** (9), что позволяет получить искомые результаты для этой плоскости.

Правила перехода от **PT** (9) к **PS** (9) получаются из следующих рассуждений, примененных к точкам и прямым плоскости **PT** (9).

В плоскости **PT** (9) имеем:

$$(i) (x, y) \in [k, m] \Leftrightarrow y = kx + m,$$

где  $y = kx + m$  (a) – уравнение собственной прямой.

В плоскости **PS** (9), если ее строить над тем же левым почти-полем **F**, что и плоскость **PT** (9), имеем:

$$(x', y') \in [k', m'] \Leftrightarrow y' = x'k' + m',$$

где  $y' = x'k' + m'$  (b) – уравнение собственной прямой.

Из (a) находим, что  $m = -kx + y$  (c).

Так как прямая (точка) плоскости **PT** (9) должна стать точкой (прямой) плоскости **PS** (9) с сохранением отношения инцидентности между ними, то в (c) обозначаем:

$$\begin{cases} x' = k \\ y' = m \end{cases}, \quad \begin{cases} k' = -x \\ m' = y \end{cases} \quad (d_1) \text{ или}$$

$$\begin{cases} x' = -k \\ y' = m \end{cases}, \quad \begin{cases} k' = x \\ m' = y \end{cases} \quad (d_2)$$

Как в случае (d<sub>1</sub>), так и в случае (d<sub>2</sub>), из (c) получаем условие (b), что и требовалось.

Выберем случай (d<sub>1</sub>), в этом случае при переходе от плоскости **PT** (9) к плоскости **PS** (9) получаем, что

$$(x, y) \rightarrow [-x, y], [k, m] \rightarrow (k, m) \quad (e).$$

Используя (e), получаем, что тогда

$$[c] \rightarrow (-c) \text{ при } c \in D, (w) \rightarrow [w] \text{ при } w \in D, [\infty] \rightarrow (\infty).$$

*Итак, при переходе от плоскости **PT** (9) к плоскости **PS** (9):*

$$\begin{array}{ll}
[k, m] \rightarrow (k, m) & (x, y) \rightarrow [-x, y] \\
[c] \rightarrow (-c), c \in \mathbb{D} & (w) \rightarrow [w], w \in \mathbb{D} \\
[\infty] \rightarrow (\infty) & (\infty) \rightarrow [\infty]
\end{array} \quad (\text{III}).$$

Назовем полученные соотношения (III) *правилами перехода от плоскости PT (9) к плоскости PS (9)*.

### 8.3. Подплоскости плоскости сдвигов

1. Так как плоскости **PT** (9) и **PS** (9) двойственны друг другу, то каждой подплоскости из **PT** (9) двойственна подплоскость из **PS** (9) и наоборот. Это позволяет сформулировать теорему, которая вытекает из теоремы **F** и соображений двойственности.

**Теорема F\***. В плоскости **PS** (9) имеется:

- 1) 51 840 подплоскостей порядка 2 одного типа;
- 2) 360 подплоскостей порядка 3 первого типа;
- 3) 720 подплоскостей порядка 3 второго типа.

При этом каждая подплоскость порядка 2 содержит точно одну особенную прямую, каждая подплоскость порядка 3 первого вида содержит две пары сопряженных особенных прямых, а каждая подплоскость порядка 3 второго вида содержит четыре особенные прямые, взятых по одной из четырех различных пар сопряженных особенных прямых.

*Эти же результаты можно получить, не используя совсем подплоскости плоскости трансляций.*

Для независимого изучения подплоскостей плоскости сдвигов **PS** (9) нужно:

А) получить все опорные 4-наборы прямых плоскости трансляций, неконкурентные по три, то есть опорные четырехсторонники этой плоскости, с точностью до изоморфизма;

В) исследовать «на подплоскость» указанные опорные четырехсторонники.

А. Результаты изучения, с точностью до изоморфизма, опорных четырехсторонников плоскости трансляций получены в работе [5] автора и приведены в табл. 9.

В. Приведем результаты исследования «на подплоскость» указанных в табл. 9 опорных четырехсторонников.

В.1. Опорные четырехсторонники с номерами 5, 10, 17 порождают соответственно следующие подплоскости порядка 2, обозначения которых выбраны согласованно с порождающими четырехсторонниками (в записи указаны лишь прямые, причем, первые 4 прямые – стороны порождающего опорного четырехсторонника, выделенные курсивом):

$$\pi_5: \mathbf{0}, \mathbf{00}, \mathbf{01}, \mathbf{83}, \mathbf{03}, \mathbf{30}, \mathbf{51};$$

$$\pi_{10}: \mathbf{00}, \mathbf{01}, \mathbf{10}, \mathbf{31}, \mathbf{08}, \mathbf{58}, \mathbf{0};$$

$$\pi_{17}: \mathbf{0}, \mathbf{30}, \mathbf{51}, \mathbf{83}, \mathbf{00}, \mathbf{01}, \mathbf{03}.$$

Все эти подплоскости, содержат точно по одной особенной прямой и будут изоморфными, так как  $\pi_{17} = \pi_5$  и, кроме того,

$$s_5 h_{4,1}: \pi_{10} \rightarrow \pi_5.$$

Переходя от плоскости **PT** (9) к плоскости **PS** (9) по правилам (III), получим, что опорные 4-дуги с теми же номерами порождают, с точностью до изоморфизма, единственную подплоскость порядка 2, а именно (точки опорной 4-дуги выделены курсивом):

$$\pi_5^*: \mathbf{0}, \mathbf{00}, \mathbf{01}, \mathbf{83}, \mathbf{03}, \mathbf{30}, \mathbf{51}.$$

Эта подплоскость принята за *опорную* и обозначается  $\alpha^*$ . Приведем прямые и точки (в сокращенных обозначениях) *опорной подплоскости*  $\alpha^*$ :

	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>00</b>	<b>00</b>	<b>01</b>	<b>70</b>
	<b>00</b>	<b>01</b>	<b>03</b>	<b>01</b>	<b>23</b>	<b>23</b>	<b>31</b>
	<b>70</b>	<b>31</b>	<b>23</b>	<b>03</b>	<b>31</b>	<b>70</b>	<b>03</b>
Точки:	<i>00</i>	<i>01</i>	<i>03</i>	<i>0</i>	<i>30</i>	<i>51</i>	<i>83</i>

Она характеризуется тем, что точки 00, 01, 03 лежат на одной особенной прямой  $\mathbf{0}$  плоскости  $\mathbf{PS}$  (9), а остальные 6 прямых подплоскости, как и все ее точки, неособенные.

Подсчет числа подплоскостей данного типа проводится по формуле

$$n_{\alpha^*} = \frac{\sum_i N_i^4}{7} \quad (12').$$

В исследуемом случае получаем (с помощью табл. 9):

$$\sum_i N_i^4 = N_5^4 + N_{10}^4 + N_{17}^4 = 155\,020 + 155\,020 + 51\,840 = 362\,880.$$

Тогда по формуле (12') находим, что  $n_{\alpha^*} = \frac{362880}{7} = 51\,840$ .

В.2. Опорные четырехсторонники с номерами 1, 3, 4, 6, 8 порождают одну и ту же подплоскость порядка 3 (в записи указаны лишь прямые, причем, первые 4 прямые – стороны порождающего опорного четырехсторонника, выделенные курсивом):

$$\pi_1: \infty, \mathbf{0}, \mathbf{00}, \mathbf{11}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{01}, \mathbf{02}, \mathbf{10}, \mathbf{12}, \mathbf{20}, \mathbf{21}, \mathbf{22}.$$

Переходя от плоскости  $\mathbf{PT}$  (9) к плоскости  $\mathbf{PS}$  (9) по правилам (III), получим, что опорные 4-дуги с теми же номерами порождают, с точностью до изоморфизма, единственную подплоскость порядка 3, а именно (точки опорной 4-дуги выделены курсивом):

$$\pi_1^*: \infty, \mathbf{0}, \mathbf{00}, \mathbf{11}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{01}, \mathbf{02}, \mathbf{10}, \mathbf{12}, \mathbf{20}, \mathbf{21}, \mathbf{22}.$$

Эта подплоскость принята за *опорную* и обозначается  $\beta^*$ . Приведем прямые и точки (в сокращенных обозначениях) *опорной подплоскости*  $\beta^*$ :

	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{2}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{00}$	$\mathbf{10}$	$\mathbf{20}$	$\mathbf{00}$	$\mathbf{01}$	$\mathbf{02}$	$\mathbf{00}$	$\mathbf{01}$	$\mathbf{02}$	$\mathbf{00}$	$\mathbf{01}$	$\mathbf{02}$	
$\mathbf{1}$	$\mathbf{01}$	$\mathbf{11}$	$\mathbf{21}$	$\mathbf{10}$	$\mathbf{11}$	$\mathbf{12}$	$\mathbf{12}$	$\mathbf{10}$	$\mathbf{11}$	$\mathbf{11}$	$\mathbf{12}$	$\mathbf{10}$	
$\mathbf{2}$	$\mathbf{02}$	$\mathbf{12}$	$\mathbf{22}$	$\mathbf{20}$	$\mathbf{21}$	$\mathbf{22}$	$\mathbf{21}$	$\mathbf{22}$	$\mathbf{20}$	$\mathbf{22}$	$\mathbf{20}$	$\mathbf{21}$	
Точки:	$\infty$	0	1	2	00	01	02	10	11	12	20	21	22

Она содержит особенную точку  $\infty$  и четыре особенные прямые  $\mathbf{0}, \infty, \mathbf{1}, \mathbf{2}$  из двух пар сопряженных особенных прямых:  $\{\mathbf{0}, \infty\}$  и  $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}$  для  $\mathbf{PS}$  (9).

Подсчет числа подплоскостей данного типа проводится по формуле

$$n_{\beta^*} = \frac{\sum_i N_i^4}{234} \text{ (13''').}$$

В исследуемом случае получаем (с помощью табл. 9):

$$\begin{aligned} \sum_i N_i^4 &= N_1^4 + N_3^4 + N_4^4 + N_6^4 + N_8^4 = \\ &= 25\,960 + 6\,480 + 25\,920 + 12\,960 + 12\,960 = 84\,240. \end{aligned}$$

Тогда по формуле (13''') находим, что  $n_{\beta^*} = \frac{84240}{234} = 360$ .

В.3. Опорные четырехсторонники с номерами 2, 7, 12 порождают соответственно следующие подплоскости порядка 3 (в записи указаны лишь прямые, причем, первые 4 прямые – стороны порождающего опорного четырехсторонника, выделенные курсивом):

$$\pi_2: \infty, \mathbf{00}, \mathbf{10}, \mathbf{51}, \mathbf{03}, \mathbf{06}, \mathbf{15}, \mathbf{17}, \mathbf{30}, \mathbf{34}, \mathbf{38}, \mathbf{50}, \mathbf{52};$$

$$\pi_7: \mathbf{00}, \mathbf{01}, \mathbf{10}, \mathbf{13}, \infty, \mathbf{02}, \mathbf{16}, \mathbf{50}, \mathbf{54}, \mathbf{58}, \mathbf{80}, \mathbf{85}, \mathbf{87};$$

$$\pi_{12}: \mathbf{00}, \mathbf{01}, \mathbf{10}, \mathbf{35}, \infty, \mathbf{02}, \mathbf{14}, \mathbf{18}, \mathbf{30}, \mathbf{37}, \mathbf{70}, \mathbf{73}, \mathbf{76}.$$

Все эти подплоскости изоморфны между собой, так как

$$h_{5,5} s_5: \pi_7 \rightarrow \pi_2,$$

$$h_{8,8} s.: \pi_{12} \rightarrow \pi_2.$$

Переходя от плоскости **PT** (9) к плоскости **PS** (9) по правилам (III), получим, что опорные 4-дуги с теми же номерами порождают, с точностью до изоморфизма, единственную подплоскость порядка 3, а именно (точки опорной 4-дуги выделены курсивом):

$$\pi_2^*: \infty, \mathbf{00}, \mathbf{10}, \mathbf{51}, \mathbf{03}, \mathbf{06}, \mathbf{15}, \mathbf{17}, \mathbf{30}, \mathbf{34}, \mathbf{38}, \mathbf{50}, \mathbf{52}.$$

Эта подплоскость принята за **опорную** и обозначена  $\gamma^*$ . Приведем прямые и точки (в сокращенных обозначениях) **опорной подплоскости**  $\gamma^*$ :

<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>00</b>	<b>63</b>	<b>00</b>	<b>50</b>	<b>00</b>	<b>36</b>	<b>70</b>	<b>70</b>	<b>50</b>	<b>00</b>	<b>70</b>	<b>50</b>
<b>3</b>	<b>70</b>	<b>23</b>	<b>36</b>	<b>23</b>	<b>23</b>	<b>86</b>	<b>43</b>	<b>63</b>	<b>36</b>	<b>43</b>	<b>36</b>	<b>63</b>
<b>5</b>	<b>50</b>	<b>43</b>	<b>63</b>	<b>86</b>	<b>16</b>	<b>16</b>	<b>16</b>	<b>86</b>	<b>43</b>	<b>86</b>	<b>23</b>	<b>16</b>



Точки:  $\infty$  00 03 10 15 30 06 17 34 38 50 51 52

Опорные подплоскости  $\beta^*$  и  $\gamma^*$  не изоморфны, так как подплоскость  $\gamma^*$  содержит особенную точку  $\infty$  и четыре особенные прямые **0, 1, 3, 5** из четырех различных пар сопряженных особенных прямых (в отличие от подплоскости  $\beta^*$ ).

Подсчет числа подплоскостей данного типа проводится по формуле

$$n_{\gamma^*} = \frac{\sum_i N_i^4}{234} \quad (13'''').$$

В исследуемом случае получаем (с помощью табл. 9):

$$\sum_i N_i^4 = N_2^4 + N_7^4 + N_{12}^4 = 51\,840 + 38\,880 + 77\,760 = 168\,480.$$

Тогда по формуле (13''''') находим, что  $n_{\gamma^*} = \frac{168480}{234} = 720$ .

В.4. Остальные восемь опорных четырехсторонников с номерами 9, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19 порождают всю плоскость трансляций порядка 9, следовательно, соответственно двойственные им опорные 4-дуги плоскости сдвигов порождают всю эту плоскость.

Итак, верны следующие теоремы **E\*** и **F\***.

**Теорема E\*.** В плоскости **PS** (9) из 19 опорных 4-дуг:

1) три порождают, с точностью до изоморфизма, единственную подплоскость порядка 2 с одной особенной прямой;

2) пять порождают, с точностью до изоморфизма, единственную подплоскость порядка 3 с двумя парами сопряженных особенных прямых;

3) три порождают, с точностью до изоморфизма, единственную подплоскость порядка 3 с четырьмя особенными прямыми из четырех различных пар сопряженных особенных прямых.

**Теорема F\*** (см. п. 8.3.1).

В табл. 10 приведены сводные данные об опорных подплоскостях порядка  $m$  в плоскости **PS** (9).

2. Сравним опорные подплоскости плоскостей **PT** (9) и **PS** (9) из табл. 7 и 10. Для этого используем правила перехода (III) от **PT** (9) к **PS** (9) (см. п. 8.2):

$$\begin{array}{ll} [k, m] \rightarrow (k, m) & (x, y) \rightarrow [-x, y] \\ [c] \rightarrow (-c), c \in D & (w) \rightarrow [w], w \in D \\ [\infty] \rightarrow (\infty) & (\infty) \rightarrow [\infty] \end{array} \quad \text{(III).}$$

Опорные подплоскости плоскостей **PT** (9) и **PS** (9) двойственны друг другу, так как точки (прямые) опорных подплоскостей плоскости **PT** (9) при переходе к плоскости **PS** (9) по указанным правилам преобразуются в прямые (точки) соответствующих опорных подплоскостей плоскости **PS** (9) и наоборот.

## 9. Исследование подплоскостей в плоскости Хьюза порядка 9

### 9.1. Комбинаторно-алгебраическое описание плоскости Хьюза

Рассматриваемая плоскость названа именем Хьюза, так как он построил класс плоскостей, в котором наименьший порядок плоскости равен 9 [19], хотя эта плоскость впервые была приведена в работе [22]. Далее будем обозначать эту плоскость **PH** (9).

Плоскость **PH** (9) можно построить над левым почти-полем  $\mathbf{F} = (D, +, \cdot)$  (как в [5, 7]), которое уже использовалось для построения плоскости трансляций порядка 9 в параграфе 7.

Пусть  $\mathbf{V}$  – система троек элементов из  $D$ ,  $\mathbf{V}_0$  – система троек элементов из  $\mathbf{K} = \{0, 1, 2\}$ ,  $\pi_0$  – дезаргова плоскость порядка 3 над полем  $\mathbf{F}(3) = (\mathbf{K}, +, \cdot)$ .

Тогда точка из  $\pi_0$  – любая ненулевая тройка из  $\mathbf{V}_0$  с отождествлением  $(kx, ky, kz) = (x, y, z)$ , где  $(x, y, z) \in \mathbf{V}_0$  и  $k$  – ненулевой элемент из  $\mathbf{K}$ . На основании теоремы Зингера [13]  $\pi_0$  допускает группу коллинеаций  $\mathbf{H}$  порядка  $q = 3^2 + 3 + 1 = 13$ , транзитивную и на множестве точек, и на множестве прямых. Коллинеацию  $\mathbf{A}$ , порождающую  $\mathbf{H}$ , можно задать аналитически формулами [19]:

$$\mathbf{A}: x' = x + z, y' = 2x, z' = 2y + 2z.$$

При этом  $(x, y, z)$  – координаты произвольной точки из подплоскости  $\pi_0$ , а  $(x', y', z')$  – координаты ее образа при коллинеации  $\mathbf{A}$ .

Оказывается,  $\mathbf{A}$  индуцирует преобразование  $\mathbf{V}$  в себя (обозначаемое также через  $\mathbf{A}$ ), которое сохраняет тройку  $(0, 0, 0)$  и удовлетворяет соотношению  $\mathbf{A}(kx, ky, kz) = k \mathbf{A}(x, y, z)$  для любого  $k \in \mathbf{D} \setminus \{0\} = \mathbf{D}'$ .

Назовем точкой плоскости  $\mathbf{PH}$  (9) любую ненулевую тройку из  $\mathbf{V}$  с отождествлением  $(kx, ky, kz) = (x, y, z)$  для любого  $k \in \mathbf{D}'$ . Из сказанного о преобразовании  $\mathbf{A}$  следует, что любая степень  $\mathbf{A}$  переводит точку из  $\mathbf{PH}$  (9) в точку из  $\mathbf{PH}$  (9).

Назовем прямой:

(а) любое множество  $\mathbf{L}_t$  точек, удовлетворяющих уравнению вида

$$x + yt + z = 0, \text{ где } t = 1 \text{ или } t \in \mathbf{D} \setminus \mathbf{K};$$

(б) любое множество  $\mathbf{A}^m(\mathbf{L}_t)$ , полученное из  $\mathbf{L}_t$  типа (а) под действием степени  $\mathbf{A}$  при  $0 \leq m \leq 12$  (заметим, что  $\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}^{13} = e$  – тождественное преобразование).

Введем «базисные» точки:  $\mathbf{A}_0 = (2, 0, 1)$ ,  $\mathbf{B}_0 = (2 + 2j, j, 1)$ ,  $\mathbf{C}_0 = (2j, 2 + j, 1)$ ,  $\mathbf{D}_0 = (1 + 2j, 1 + j, 1)$ ,  $\mathbf{E}_0 = (j, 2 + 2j, 1)$ ,  $\mathbf{F}_0 = (1 + j, 1 + 2j, 1)$ ,  $\mathbf{G}_0 = (2 + j, 2j, 1)$ .

Все эти точки лежат на одной прямой  $\mathbf{L}_1$ :  $x + y + z = 0$ .

Каждая из введенных семи «базисных» точек порождает 13 точек посредством преобразований  $e = \mathbf{A}^0, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^{12}$  по формуле  $\mathbf{X}_m = \mathbf{A}^m(\mathbf{X}_0)$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots, 12$ , а  $\mathbf{X}_m$  – общее обозначение точки с индексом  $m$ .

Введем «базисные» прямые, проходящие через точку  $\mathbf{A}_0$ , с уравнением  $x + yt + z = 0$  (по сравнению с работами [15, 19, 22] здесь, как и в [5, 7], проведена перемена обозначений точек (букв)  $\mathbf{C}_m$  и  $\mathbf{G}_m$ ):

$$\mathbf{L}_1 : \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_9 \mathbf{B}_0 \mathbf{C}_0 \mathbf{D}_0 \mathbf{E}_0 \mathbf{F}_0 \mathbf{G}_0,$$

$$\mathbf{L}_j : \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_8 \mathbf{D}_3 \mathbf{D}_{11} \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_5 \mathbf{E}_6 \mathbf{C}_7 \mathbf{C}_9,$$

$$\mathbf{L}_{2j} : \mathbf{A}_0 \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_8 \mathbf{F}_3 \mathbf{F}_{11} \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_5 \mathbf{C}_6 \mathbf{E}_7 \mathbf{E}_9,$$

$$\mathbf{L}_{j+1} : \mathbf{A}_0 \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_8 \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_{11} \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_5 \mathbf{F}_6 \mathbf{B}_7 \mathbf{B}_9,$$

$$\mathbf{L}_{2j+2} : \mathbf{A}_0 \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_8 \mathbf{G}_3 \mathbf{G}_{11} \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_5 \mathbf{B}_6 \mathbf{F}_7 \mathbf{F}_9,$$

$$\mathbf{L}_{2j+1} : \mathbf{A}_0 \mathbf{F}_1 \mathbf{F}_8 \mathbf{E}_3 \mathbf{E}_{11} \mathbf{D}_2 \mathbf{D}_5 \mathbf{D}_6 \mathbf{G}_7 \mathbf{G}_9,$$

$$L_{j+2} : A_0 C_1 C_8 B_3 B_{11} G_2 G_5 G_6 D_7 D_9.$$

Эти «базисные» прямые обозначим малыми латинскими буквами  $a_0, e_0, c_0, f_0, b_0, d_0, g_0$  соответственно. Такие обозначения оказываются более простыми для применения в дальнейшем.

Преобразование  $A$  отображает индексы по правилу:

$$i \rightarrow i + 1 \pmod{13},$$

как точек, так и прямых, и позволяет получить полный список всех прямых плоскости  $\mathbf{PH}$  (9), который приведен в табл. 11. В ней обозначения прямых выделены жирным шрифтом. Построение плоскости Хьюза порядка 9 завершено.

## 9.2. Группа коллинеаций плоскости Хьюза

1. Группа  $\mathbf{G}$  коллинеаций плоскости  $\mathbf{PH}$  (9) рассматривается в работе [23]. Приведем необходимые для наших целей результаты Цаппы (Zappa) о группе  $\mathbf{G}$  (см. также [5, 7]).

1.1. Любая коллинеация плоскости сохраняет подплоскость  $\pi_0$ .

1.2. Группа  $\mathbf{G}$  есть прямое произведение групп  $\mathbf{G}_0$  и  $\Gamma$ , где  $\mathbf{G}_0$  – группа порядка  $13 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 4 = 5616$ , образованная некоторыми продолжениями всех коллинеаций подплоскости  $\pi_0$  на всю плоскость  $\mathbf{PH}$  (9), а  $\Gamma$  – группа коллинеаций порядка 6, сохраняющих любую точку из  $\pi_0$  и индуцированных на плоскость  $\mathbf{PH}$  (9) автоморфизмами почти-поля  $\mathbf{F}$  (см. § 7.1.A). Поэтому

$$|\mathbf{G}| = |\mathbf{G}_0| \cdot |\Gamma| = 5616 \cdot 6 = 33696.$$

1.3. Плоскость  $\mathbf{PH}$  (9) допускает циклическую группу коллинеаций  $\mathbf{H}$  порядка 13, порожденную коллинеацией  $\mathbf{A}$ . Группы  $\mathbf{H}$  и  $\Gamma$  перестановочны поэлементно и не имеют общих элементов, кроме  $e$ , так что плоскость допускает группу  $\mathbf{H} \times \Gamma$  порядка  $13 \cdot 6 = 78$ .

1.4. Группа  $\Gamma$  коллинеаций, сохраняющих любую точку (прямую) из  $\pi_0$ , изоморфная группе подстановок шести точек на каждой прямой  $a_i$  из  $\mathbf{PH}$  (9) \  $\pi_0$ , транзитивна на этих точках.

2. 2.1. Группа  $\Gamma$  изоморфна группе  $\mathbf{S}'_3$  – группе подстановок из трех элементов  $0, 1, 2$ . Соответствующими в этом изоморфизме элементами групп  $\Gamma$  и  $\mathbf{S}'_3$  являются:  $\mathbf{u}_0 \leftrightarrow \mathbf{s}'_0, \mathbf{u}_1 \leftrightarrow \mathbf{s}'_1, \mathbf{u}_2 \leftrightarrow \mathbf{s}'_2, \mathbf{u}_+ \leftrightarrow \mathbf{s}'_+, \mathbf{u}_- \leftrightarrow \mathbf{s}'_-, \mathbf{e} \leftrightarrow \mathbf{e}$ . При этом  $\mathbf{u}_0: (B_i E_i)(C_i F_i)(D_i G_i) \times (b_i e_i)(c_i f_i)(d_i g_i), \mathbf{u}_1: (B_i F_i)(C_i G_i)(D_i E_i) \times (b_i f_i)(c_i g_i)(d_i e_i), \mathbf{s}'_0 = (1\ 2), \mathbf{s}'_1 = (0\ 2)$  – образующие элементы этих групп, соответственно, а  $i = 0, 1, 2, \dots, 12$ .

Правила умножения коллинеаций в  $\Gamma$  аналогичны правилам умножения подстановок в  $\mathbf{S}'_3$  и имеют вид:

$$\mathbf{u}_j \mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_+, \mathbf{u}_{j+1} \mathbf{u}_j = \mathbf{u}_-, \mathbf{u}_j \mathbf{u}_+ = \mathbf{u}_{j+1}, \mathbf{u}_+ \mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1} \mathbf{u}_- = \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_- \mathbf{u}_j = \mathbf{u}_{j+1},$$

где  $j = 0, 1, 2$  и сложение ведется по mod 3.

В дальнейшем индексы точек (прямых) в записи действия коллинеаций группы  $\Gamma$  указывать не будем, так как они одинаковы у всех шести точек (прямых) из  $\mathbf{PH}(9) \setminus \pi_0$  на каждой прямой  $\mathbf{a}_i$  (для каждой точки  $A_i$ ). Это позволяет легко перейти от группы  $\Gamma$  к группе подстановок букв  $B, C, D, E, F, G$ , порождаемых коллинеациями группы  $\Gamma$ . Обозначим эту группу  $\Lambda$ , а ее элементы через  $\mathbf{u}'_0, \mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_+, \mathbf{u}'_-, \mathbf{e}$ , причем образующие элементы  $\mathbf{u}'_0 = (BE)(CF)(DG)$  и  $\mathbf{u}'_1 = (BF)(CG)(DE)$  группы  $\Lambda$  порождены образующими элементами  $\mathbf{u}_0$  и  $\mathbf{u}_1$  группы  $\Gamma$  соответственно. Остальные нетождественные подстановки  $\mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_+, \mathbf{u}'_-$  порождаются, соответственно, коллинеациями  $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-$  группы  $\Gamma$ .

2.2. Образующим элементом группы  $\mathbf{H}$  порядка 13 является коллинеация  $\mathbf{A}: X_i \rightarrow X_{i+1}, \mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_{i+1} \pmod{13}$ , где  $X_i, \mathbf{x}_i$  – общие обозначения точки и прямой соответственно.

2.3. В качестве остальных образующих элементов группы  $\mathbf{G}_0$  здесь (как и в [5, 7]) выбраны:

1) гиперболическая гомология (далее просто гомология) с осью  $\mathbf{a}_0$  и центром  $A_2$ , обозначаемая через  $\mathbf{w}_{0,2}$ ;

2) коллинеация  $\mathbf{r}$  порядка 3, которая на точки и прямые подплоскости  $\pi_0$  действует по формуле:  $A_i \rightarrow A_{3i}, \mathbf{a}_i \rightarrow \mathbf{a}_{3i} \pmod{13}$ .

Рассмотрим действие указанных коллинеаций на точки (прямые) плоскости  $\mathbf{PH}$  (9).

1) Оказывается, при гомологии  $w_{0,2}$ :  $A_4 \leftrightarrow A_{10}, A_5 \leftrightarrow A_{11}, A_6 \leftrightarrow A_7, A_8 \leftrightarrow A_{12}, \mathbf{a}_0$  – ось,  $\mathbf{a}_1 \leftrightarrow \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \leftrightarrow \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_6 \leftrightarrow \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_{12} \leftrightarrow \mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_3 \leftrightarrow \mathbf{a}_7, \mathbf{a}_4 \leftrightarrow \mathbf{a}_{10}, \mathbf{a}_5 \leftrightarrow \mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_8 \leftrightarrow \mathbf{a}_9$ .

Можно установить, какие подстановки букв В, С, D, E, F, G порождает гомология  $w_{0,2}$  для точек прямых  $\mathbf{a}_i$  из  $\mathbf{PH}$  (9) \setminus  $\pi_0$ , если учесть, что прямая  $\mathbf{a}_0 : A_0 A_1 A_3 A_9 B_0 C_0 D_0 E_0 F_0 G_0$  является осью, а точка  $A_2$  – центром этой гомологии. А именно: на  $\mathbf{a}_0$  – e, на  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_6$  –  $\mathbf{s}_0$ , на  $\mathbf{a}_{12}$  –  $\mathbf{s}_2$ , на упорядоченных парах  $(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_7)$  и  $(\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_{10})$  –  $\mathbf{s}_0$ , на упорядоченной паре  $(\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_{11})$  –  $\mathbf{s}$ . (поэтому на упорядоченной паре  $(\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_5)$  –  $\mathbf{s}_+$ ), на упорядоченной паре  $(\mathbf{a}_8, \mathbf{a}_9)$  –  $\mathbf{s}_2$ .

Эти подстановки – суть элементы группы  $\mathbf{S}_3$  порядка 6, изоморфной группе  $\mathbf{S}'_3$ , а следовательно, и группам  $\Gamma$  и  $\Lambda$ . Нетождественными элементами группы  $\mathbf{S}_3$ , обозначения которых выбраны по указанному изоморфизму, являются:  $\mathbf{s}_0 = (BE)(CG)(DF)$ ,  $\mathbf{s}_1 = (BG)(CF)(DE)$ ,  $\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_+, \mathbf{s}_-$ , причем  $\mathbf{s}_0$  и  $\mathbf{s}_1$  – образующие элементы группы  $\mathbf{S}_3$ .

Заметим, что образующие элементы, а следовательно, и все элементы группы  $\Lambda$  получаются из соответствующих элементов группы  $\mathbf{S}_3$  транспозицией букв F и G. Умножение в  $\mathbf{S}_3$  ведется по тем же правилам, что и в  $\Lambda$ .

Полезным в дальнейшем является знание произведений элементов групп  $\Lambda$  и  $\mathbf{S}_3$ . Эти произведения вида  $\mathbf{u}' \mathbf{s} = \mathbf{s} \mathbf{u}'$  для  $\mathbf{u}' \in \Lambda$  и  $\mathbf{s} \in \mathbf{S}_3$  приведены ниже в табл. А.

2) Оказывается, коллинеация  $\mathbf{r}$  индуцирует подстановку  $\mathbf{s}_+$  букв В, С, D, E, F, G для точек из  $\mathbf{PH}$  (9) \setminus  $\pi_0$  как на прямой  $\mathbf{a}_0$ , так и на каждой из упорядоченных троек прямых:  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_9), (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_5), (\mathbf{a}_7, \mathbf{a}_8, \mathbf{a}_{11}), (\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{10})$ .

Напомним, что при  $\mathbf{r}$ :

$$(A_1 A_3 A_9)(A_2 A_6 A_5)(A_4 A_{12} A_{10})(A_7 A_8 A_{11}), (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_9)(\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_6 \mathbf{a}_5)(\mathbf{a}_4 \mathbf{a}_{12} \mathbf{a}_{10})(\mathbf{a}_7 \mathbf{a}_8 \mathbf{a}_{11})$$

Произведения элементов групп  $\Lambda$  и  $S_3$ 

	<b>e</b>	<b>u<sub>0</sub></b>	<b>u<sub>1</sub></b>	<b>u<sub>2</sub></b>	<b>u<sub>+</sub></b>	<b>u<sub>-</sub></b>
<b>e</b>	e	(BE)(CF)(DG)	(BF)(CG)(DE)	(BG)(CE)(DF)	(BCD)(EGF)	(BDC)(EFG)
<b>s<sub>0</sub></b>	(BE)(CG)(DF)	(CD)(FG)	(BD)(EF)	(BC)(EG)	(BGDECF)	(BFCEDG)
<b>s<sub>1</sub></b>	(BG)(CF)(DE)	(BD)(EG)	(BC)(FG)	(CD)(EF)	(BFDGCE)	(BECGDF)
<b>s<sub>2</sub></b>	(BF)(CE)(DG)	(BC)(EF)	(CD)(EG)	(BD)(FG)	(BEDFCG)	(BGCDFE)
<b>s<sub>+</sub></b>	(BCD)(EFG)	(BFDECG)	(BGDFCE)	(BEDGCF)	(BDC)	(EGF)
<b>s<sub>-</sub></b>	(BDC)(EGF)	(BGCEDF)	(BECFDG)	(BFCGDE)	(EFG)	(BCD)

3. Трансформируя гомологию  $w_{0,2}$  посредством  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}^2 = \mathbf{r}^{-1}$ , получим гомологии  $w_{0,5}$  и  $w_{0,6}$  соответственно, то есть  $w_{0,5} = \mathbf{r}^{-1} w_{0,2} \mathbf{r}$  и  $w_{0,6} = \mathbf{r} w_{0,2} \mathbf{r}^{-1}$ .

Далее несложно находятся остальные 6 гомологий с осью  $a_0$ :

$$w_{0,7} = w_{0,2} w_{0,6} w_{0,2}, \quad w_{0,8} = w_{0,5} w_{0,6} w_{0,5}, \quad w_{0,10} = w_{0,5} w_{0,6} w_{0,2}, \\ w_{0,11} = w_{0,2} w_{0,5} w_{0,2}, \quad w_{0,4} = w_{0,6} w_{0,5} w_{0,2}, \quad w_{0,12} = w_{0,5} w_{0,2} w_{0,6}.$$

Действие всех 9 гомологий с осью  $a_0$  на плоскость указано в табл. В.

Таблица В

Действие гомологий с осью  $a_0$  на плоскость Хьюза порядка 9

Гомологии	на	на	на	на	на	на	на	на
<b>w<sub>0,2</sub></b> : (A <sub>4</sub> A <sub>10</sub> )(A <sub>5</sub> A <sub>11</sub> )(A <sub>6</sub> A <sub>7</sub> )(A <sub>8</sub> A <sub>12</sub> )	<b>a<sub>1</sub>: s<sub>0</sub></b>	<b>a<sub>2</sub>: s<sub>0</sub></b>	<b>a<sub>6</sub>: s<sub>0</sub></b>	<b>a<sub>12</sub>: s<sub>2</sub></b>	<b>(a<sub>3</sub>a<sub>7</sub>): s<sub>0</sub></b>	<b>(a<sub>4</sub>a<sub>10</sub>): s<sub>0</sub></b>	<b>(a<sub>5</sub>a<sub>11</sub>): s<sub>-</sub></b>	<b>(a<sub>8</sub>a<sub>9</sub>): s<sub>2</sub></b>
<b>w<sub>0,4</sub></b> : (A <sub>2</sub> A <sub>10</sub> )(A <sub>5</sub> A <sub>7</sub> )(A <sub>6</sub> A <sub>12</sub> )(A <sub>8</sub> A <sub>11</sub> )	<b>a<sub>1</sub>: s<sub>1</sub></b>	<b>a<sub>3</sub>: s<sub>0</sub></b>	<b>a<sub>4</sub>: s<sub>2</sub></b>	<b>a<sub>8</sub>: s<sub>1</sub></b>	<b>(a<sub>2</sub>a<sub>7</sub>): e</b>	<b>(a<sub>11</sub>a<sub>5</sub>): s<sub>-</sub></b>	<b>(a<sub>6</sub>a<sub>9</sub>): e</b>	<b>(a<sub>10</sub>a<sub>12</sub>): s<sub>0</sub></b>
<b>w<sub>0,5</sub></b> : (A <sub>2</sub> A <sub>11</sub> )(A <sub>4</sub> A <sub>7</sub> )(A <sub>6</sub> A <sub>8</sub> )(A <sub>10</sub> A <sub>12</sub> )	<b>a<sub>2</sub>: s<sub>2</sub></b>	<b>a<sub>4</sub>: s<sub>1</sub></b>	<b>a<sub>5</sub>: s<sub>2</sub></b>	<b>a<sub>9</sub>: s<sub>2</sub></b>	<b>(a<sub>11</sub>a<sub>1</sub>): s<sub>2</sub></b>	<b>(a<sub>7</sub>a<sub>3</sub>): s<sub>1</sub></b>	<b>(a<sub>8</sub>a<sub>6</sub>): s<sub>+</sub></b>	<b>(a<sub>12</sub>a<sub>10</sub>): s<sub>2</sub></b>
<b>w<sub>0,6</sub></b> : (A <sub>2</sub> A <sub>7</sub> )(A <sub>4</sub> A <sub>12</sub> )(A <sub>5</sub> A <sub>8</sub> )(A <sub>10</sub> A <sub>11</sub> )	<b>a<sub>3</sub>: s<sub>1</sub></b>	<b>a<sub>5</sub>: s<sub>1</sub></b>	<b>a<sub>6</sub>: s<sub>1</sub></b>	<b>a<sub>10</sub>: s<sub>0</sub></b>	<b>(a<sub>2</sub>a<sub>7</sub>): s<sub>-</sub></b>	<b>(a<sub>1</sub>a<sub>11</sub>): s<sub>0</sub></b>	<b>(a<sub>12</sub>a<sub>4</sub>): s<sub>1</sub></b>	<b>(a<sub>8</sub>a<sub>9</sub>): s<sub>1</sub></b>
<b>w<sub>0,7</sub></b> : (A <sub>2</sub> A <sub>6</sub> )(A <sub>4</sub> A <sub>5</sub> )(A <sub>8</sub> A <sub>10</sub> )(A <sub>11</sub> A <sub>12</sub> )	<b>a<sub>4</sub>: s<sub>0</sub></b>	<b>a<sub>6</sub>: s<sub>2</sub></b>	<b>a<sub>7</sub>: s<sub>2</sub></b>	<b>a<sub>11</sub>: s<sub>0</sub></b>	<b>(a<sub>3</sub>a<sub>2</sub>): s<sub>-</sub></b>	<b>(a<sub>5</sub>a<sub>1</sub>): s<sub>-</sub></b>	<b>(a<sub>9</sub>a<sub>8</sub>): s<sub>0</sub></b>	<b>(a<sub>12</sub>a<sub>10</sub>): s<sub>1</sub></b>
<b>w<sub>0,8</sub></b> : (A <sub>2</sub> A <sub>12</sub> )(A <sub>4</sub> A <sub>11</sub> )(A <sub>5</sub> A <sub>6</sub> )(A <sub>7</sub> A <sub>10</sub> )	<b>a<sub>5</sub>: s<sub>0</sub></b>	<b>a<sub>7</sub>: s<sub>1</sub></b>	<b>a<sub>8</sub>: s<sub>0</sub></b>	<b>a<sub>12</sub>: s<sub>1</sub></b>	<b>(a<sub>1</sub>a<sub>11</sub>): s<sub>1</sub></b>	<b>(a<sub>2</sub>a<sub>3</sub>): s<sub>-</sub></b>	<b>(a<sub>9</sub>a<sub>6</sub>): s<sub>-</sub></b>	<b>(a<sub>4</sub>a<sub>10</sub>): s<sub>2</sub></b>
<b>w<sub>0,10</sub></b> : (A <sub>2</sub> A <sub>4</sub> )(A <sub>5</sub> A <sub>12</sub> )(A <sub>6</sub> A <sub>11</sub> )(A <sub>7</sub> A <sub>8</sub> )	<b>a<sub>1</sub>: s<sub>2</sub></b>	<b>a<sub>7</sub>: s<sub>0</sub></b>	<b>a<sub>9</sub>: s<sub>0</sub></b>	<b>a<sub>10</sub>: s<sub>1</sub></b>	<b>(a<sub>2</sub>a<sub>3</sub>): e</b>	<b>(a<sub>12</sub>a<sub>4</sub>): s<sub>2</sub></b>	<b>(a<sub>8</sub>a<sub>6</sub>): s<sub>-</sub></b>	<b>(a<sub>5</sub>a<sub>11</sub>): e</b>
<b>w<sub>0,11</sub></b> : (A <sub>2</sub> A <sub>5</sub> )(A <sub>4</sub> A <sub>8</sub> )(A <sub>6</sub> A <sub>10</sub> )(A <sub>7</sub> A <sub>12</sub> )	<b>a<sub>2</sub>: s<sub>1</sub></b>	<b>a<sub>8</sub>: s<sub>2</sub></b>	<b>a<sub>10</sub>: s<sub>2</sub></b>	<b>a<sub>11</sub>: s<sub>1</sub></b>	<b>(a<sub>5</sub>a<sub>1</sub>): s<sub>+</sub></b>	<b>(a<sub>3</sub>a<sub>7</sub>): s<sub>2</sub></b>	<b>(a<sub>6</sub>a<sub>9</sub>): s<sub>-</sub></b>	<b>(a<sub>12</sub>a<sub>4</sub>): s<sub>0</sub></b>
<b>w<sub>0,12</sub></b> : (A <sub>2</sub> A <sub>8</sub> )(A <sub>4</sub> A <sub>6</sub> )(A <sub>5</sub> A <sub>10</sub> )(A <sub>7</sub> A <sub>11</sub> )	<b>a<sub>3</sub>: s<sub>2</sub></b>	<b>a<sub>9</sub>: s<sub>1</sub></b>	<b>a<sub>11</sub>: s<sub>2</sub></b>	<b>a<sub>12</sub>: s<sub>0</sub></b>	<b>(a<sub>1</sub>a<sub>5</sub>): e</b>	<b>(a<sub>2</sub>a<sub>7</sub>): s<sub>+</sub></b>	<b>(a<sub>8</sub>a<sub>6</sub>): e</b>	<b>(a<sub>10</sub>a<sub>4</sub>): s<sub>1</sub></b>

Оказывается,  $A^m w_{0,k} A^{-m} = w_{m,k+m}$  и  $A^{-m} w_{0,k} A^m = w_{-m,k-m}$  (14),

где  $m = 0, 1, 2, \dots, 12$ ,  $k = 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12$  и сложение выполняется

по модулю 13. Формула (14) позволяет из гомологий  $\mathbf{w}_{0,k}$  с осью  $\mathbf{a}_0$  получить все  $9 \cdot 13 = 117$  гомологий  $\mathbf{w}_{m,k+m}$  группы  $\mathbf{G}_0$ . Действие любой гомологии  $\mathbf{w}_{m,k+m}$  на плоскость определяется по действию гомологии  $\mathbf{w}_{0,k}$  из табл. В увеличении индексов всех прямых и точек на  $m$  по mod 13.

Далее гомологии с осью  $\mathbf{a}_0$  позволяют найти все 8 элаций (параболических гомологий) с той же осью и центрами  $A_0, A_1, A_3, A_9 \in \mathbf{a}_0$ : по 2 взаимно обратные элации для каждого центра.

Две элации с осью  $\mathbf{a}_0$  и центром  $A_l (l = 0, 1, 3, 9)$  обозначаются в работе через  $\mathbf{h}_{0,l}^\varepsilon$ , причем знак « $\varepsilon$ » заменяет здесь знак «+» или «-». Знак «+» или «-» выбирается в зависимости от того, какую подстановку:  $\mathbf{s}_+$  или  $\mathbf{s}_-$  для букв В, С, D, E, F, G чаще индуцирует данная элация на двойных прямых, отличных от оси.

Оказывается,  $\mathbf{h}_{0,0}^+ = \mathbf{w}_{0,2}\mathbf{w}_{0,12}$ ;  $\mathbf{h}_{0,1}^+ = \mathbf{w}_{0,2}\mathbf{w}_{0,4}$ ;  $\mathbf{h}_{0,3}^+ = \mathbf{w}_{0,2}\mathbf{w}_{0,5}$ ;  $\mathbf{h}_{0,9}^+ = \mathbf{w}_{0,2}\mathbf{w}_{0,7}$ .

Поэтому можно найти и элации  $\mathbf{h}_{0,l}^-$  для  $l = 0, 1, 3, 9$ .

Заметим, что каждую из восьми указанных элаций можно представить в виде произведения двух гомологий неоднозначно.

Основные элации  $\mathbf{h}_{0,l}^+$  и их действие на плоскость указаны в табл. С.

Все  $8 \cdot 13 = 104$  элации группы  $\mathbf{G}_0$  находятся по формуле

$$\mathbf{A}^m \mathbf{h}_{0,l}^\varepsilon \mathbf{A}^{-m} = \mathbf{h}_{m,l+m}^\varepsilon \quad \text{и} \quad \mathbf{A}^{-m} \mathbf{h}_{0,l}^\varepsilon \mathbf{A}^m = \mathbf{h}_{-m,l-m}^\varepsilon \quad (15),$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots, 12$ ,  $l = 0, 1, 3, 9$  и сложение выполняется по mod 13.

Действие любой элации  $\mathbf{h}_{m,l+m}^+$  на плоскость определяется по действию элации  $\mathbf{h}_{0,l}^+$  из табл. С (см. ниже) увеличением индексов всех прямых и точек на  $m$  по mod 13. А каждая элация  $\mathbf{h}_{m,l+m}^-$  является обратной для элации  $\mathbf{h}_{m,l+m}^+$ .

В дальнейшем применяются гомологии  $\mathbf{w}_{m,k+m}$ , элации  $\mathbf{h}_{m,l+m}^\varepsilon$  и коллинеации группы  $\Gamma$ , реже применяются коллинеации  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{r}$ , но они уже сыграли важную роль в изучении всех гомологий и элаций группы  $\mathbf{G}_0$ . Оказыва-



ется, любая коллинеация группы  $\mathbf{G}_0$  может быть представлена произведением не более трех гомологий [9]. Это и объясняет важную роль гомологий в группе  $\mathbf{G}_0$ .

Таблица С

*Действие элаций с осью  $a_0$  на плоскость Хьюза порядка 9*

$$\begin{aligned} & \mathbf{h}_{0,0}^+ : (A_2 A_{12} A_8)(A_4 A_7 A_5)(A_6 A_{10} A_{11}) \\ & \mathbf{a}_4: s_+, \quad (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3): s_1, \quad (\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_7): s_-, \quad (\mathbf{a}_7 \mathbf{a}_2): s_2, \\ & \mathbf{a}_{10}: s_+, \quad (\mathbf{a}_5 \mathbf{a}_1): s_0, \quad (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_{11}): s_-, \quad (\mathbf{a}_{11} \mathbf{a}_5): s_1, \\ & \mathbf{a}_{12}: s_+, \quad (\mathbf{a}_6 \mathbf{a}_9): s_2, \quad (\mathbf{a}_9 \mathbf{a}_8): s_-, \quad (\mathbf{a}_8 \mathbf{a}_6): s_0. \\ & \mathbf{h}_{0,1}^+ : (A_2 A_4 A_{10})(A_5 A_6 A_8)(A_7 A_{11} A_{12}) \\ & \mathbf{a}_1: s_+, \quad (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3): s_0, \quad (\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_7): e, \quad (\mathbf{a}_7 \mathbf{a}_2): s_0, \\ & \mathbf{a}_5: s_-, \quad (\mathbf{a}_4 \mathbf{a}_{10}): s_-, \quad (\mathbf{a}_{10} \mathbf{a}_{12}): s_+, \quad (\mathbf{a}_{12} \mathbf{a}_4): e, \\ & \mathbf{a}_{11}: s_+, \quad (\mathbf{a}_6 \mathbf{a}_8): s_2, \quad (\mathbf{a}_8 \mathbf{a}_9): s_-, \quad (\mathbf{a}_9 \mathbf{a}_6): s_0. \\ & \mathbf{h}_{0,3}^+ : (A_2 A_5 A_{11})(A_4 A_6 A_{12})(A_8 A_7 A_{10}) \\ & \mathbf{a}_2: s_-, \quad (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_5): s_1, \quad (\mathbf{a}_5 \mathbf{a}_{11}): s_0, \quad (\mathbf{a}_{11} \mathbf{a}_1): s_-, \\ & \mathbf{a}_3: s_+, \quad (\mathbf{a}_4 \mathbf{a}_{10}): s_+, \quad (\mathbf{a}_{10} \mathbf{a}_{12}): e, \quad (\mathbf{a}_{12} \mathbf{a}_4): s_-, \\ & \mathbf{a}_7: s_+, \quad (\mathbf{a}_6 \mathbf{a}_9): s_1, \quad (\mathbf{a}_9 \mathbf{a}_8): e, \quad (\mathbf{a}_8 \mathbf{a}_6): s_1. \\ & \mathbf{h}_{0,9}^+ : (A_2 A_7 A_6)(A_4 A_{11} A_8)(A_5 A_{10} A_{12}) \\ & \mathbf{a}_6: s_-, \quad (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_{11}): e, \quad (\mathbf{a}_{11} \mathbf{a}_5): s_2, \quad (\mathbf{a}_5 \mathbf{a}_1): s_2, \\ & \mathbf{a}_8: s_+, \quad (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_7): s_1, \quad (\mathbf{a}_7 \mathbf{a}_3): s_-, \quad (\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_2): s_2, \\ & \mathbf{a}_9: s_+, \quad (\mathbf{a}_{10} \mathbf{a}_{12}): s_-, \quad (\mathbf{a}_{12} \mathbf{a}_4): s_+, \quad (\mathbf{a}_4 \mathbf{a}_{10}): e. \end{aligned}$$

4. Анализ действия образующих элементов  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{A}, \mathbf{w}_{0,2}$  и  $\mathbf{r}$  группы  $\mathbf{G}$  на точках, а поэтому и на прямых плоскости Хьюза, подтверждает сказанное в п. 1 этого параграфа о том, что на особое положение выделяется подплоскость  $\pi_0$  порядка 3, содержащая точки  $A_0, A_1, \dots, A_{12}$ , как сохраняемая всеми образующими группы  $\mathbf{G}$ , а поэтому и любой коллинеацией этой группы. Все 13 точек и 13 прямых этой подплоскости  $\pi_0$  называются далее *особенными*, в отличие от остальных 78 точек и 78 прямых из  $\mathbf{PH}(9) \setminus \pi_0$ , называемых далее *неособенными*.

Используя коллинеацию  $\mathbf{A}$ , нетрудно установить, что все особенные точки  $A_i$  (прямые  $\mathbf{a}_i$ ) равноправны. Все неособенные точки (прямые) также равноправны, это устанавливается с помощью группы  $\mathbf{H} \times \Gamma$  порядка 78. В

самом деле, для любых двух неособенных точек  $X_i$  и  $Y_j$  ( $X, Y$  – любая из шести букв  $B, C, D, E, F, G$  и  $i, j = 0, 1, \dots, 12$ ) найдется коллинеация  $\mathbf{g} \in \mathbf{H} \times \Gamma$  – такая, что  $\mathbf{g}: X_i \rightarrow Y_j$ . Если  $i = j$ , то  $\mathbf{g} \in \Gamma$ , так как группа  $\Gamma$  транзитивна на неособенных точках  $B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, G_i$  одной особой прямой  $\mathbf{a}_i$ . Пусть  $i \neq j$ , тогда в группе  $\mathbf{H}$  существует коллинеация  $\mathbf{h} = \mathbf{A}^{j-i}$ , которая  $X_i \rightarrow X_j$ . По предыдущему, в группе  $\Gamma$  найдется коллинеация  $\mathbf{u}: X_j \rightarrow Y_j$ . Тогда  $\mathbf{g} = \mathbf{u} \mathbf{h}: X_i \rightarrow Y_j$ , что и требовалось.

Оказывается, множество всех  $C_6^2 = 15$  неособенных точек любой особой прямой  $\mathbf{a}_i$  разбивается относительно всех коллинеаций из  $\mathbf{G}$  с двойной прямой  $\mathbf{a}_i$  на 2 орбиты (2 класса эквивалентности):  $\{BC, BD, CD, EF, EG, FG\}$  и  $\{BE, BF, BG, CE, CF, CG, DE, DF, DG\}$ .

### 9.3. Подплоскости плоскости Хьюза

В работах [1, 3] автора исследованы с точностью до изоморфизма все 4-дуги в рассматриваемой плоскости. Все 1 769 040 4-дуг плоскости Хьюза относительно группы  $\mathbf{G}$  разбиваются на 92 орбиты. В каждой из этих орбит выбран представитель, который назван *опорной 4-дугой*. Основные сведения об этих опорных 4-дугах приведены в табл. 12.

Среди 92 опорных 4-дуг в плоскости Хьюза имеются 4-дуги восьми типов [3, 5]:

**Тип 1.** 4-дуга порождает подплоскость порядка 2 первого вида.

**Тип 2.** 4-дуга порождает подплоскость порядка 2 второго вида.

**Тип 3.** 4-дуга порождает подплоскость порядка 2 третьего вида.

**Тип 4.** 4-дуга порождает подплоскость порядка 3 первого вида.

**Тип 5.** 4-дуга порождает подплоскость порядка 3 второго вида.

**Тип 6.** 4-дуга порождает подплоскость порядка 3 третьего вида.

**Тип 7.** 4-дуга порождает подплоскость порядка 3 четвертого вида.

**Тип 8.** 4-дуга порождает всю плоскость Хьюза.

1. Три опорные 4-дуги с номерами 3, 7, 22 (см. табл. 12) порождают соответственно следующие подплоскости порядка 2 (указаны лишь точки, при-

чем, первые 4 точки – вершины порождающей опорной 4-дуги, выделенные курсивом):

$$\pi_3: A_0, A_1, A_2, B_3, D_0, G_{12}, C_1;$$

$$\pi_7: A_0, A_1, B_1, B_4, A_4, E_9, C_0;$$

$$\pi_{22}: A_0, B_0, B_4, B_{11}, A_3, A_4, B_3.$$

Все эти подплоскости, обозначения которых выбраны согласованно с порождающей опорной 4-дугой (как и в дальнейшем), содержат трехвершинник с тремя особенными вершинами и сторонами. Они будут изоморфными, так как

$$W_{12,1} W_{0,10} u: \pi_7 \rightarrow \pi_3; \quad W_{0,2} W_{0,10} W_{4,9} u_2: \pi_{22} \rightarrow \pi_3.$$

В качестве опорной подплоскости порядка 2 этого типа возьмем подплоскость  $\pi_3 = \alpha_2$ . Приведем точки и прямые этой **опорной** подплоскости, порождаемой 4-дугой  $S_3^4 = \{A_0, A_1, A_2, B_3\}$ , сохраняя выделение вершин этой 4-дуги:

$$\begin{array}{ccccccc} A_0 & A_0 & A_0 & A_1 & A_1 & A_2 & D_0 \\ A_1 & A_2 & B_3 & A_2 & B_3 & B_3 & G_{12} \\ D_0 & G_{12} & C_1 & C_1 & G_{12} & D_0 & C_1 \end{array}$$

**Прямые:**  $\underline{\mathbf{a}_0 \quad \mathbf{a}_{12} \quad \mathbf{g}_0 \quad \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{g}_6}$

Подсчитаем число подплоскостей типа  $\alpha_2$  по формуле

$$n_{\alpha_2} = \frac{\sum_i N_i^4}{7} \quad (12_1).$$

В исследуемом случае получаем (с помощью табл. 12):

$$\sum_i N_i^4 = N_3^4 + N_7^4 + N_{22}^4 = 5\,616 + 16\,848 + 16\,848 = 39\,312.$$

Тогда по формуле (12<sub>1</sub>) находим, что  $n_{\alpha_2} = \frac{39312}{7} = 5\,616$ .

**2.** Пять опорных 4-дуг с номерами 38, 40, 41, 55, 63 (см. табл. 12) порождают соответственно следующие подплоскости порядка 2 (указаны лишь точки, причем, первые 4 точки – вершины порождающей опорной 4-дуги, выделенные курсивом):

$$\pi_{38} : A_0, B_2, C_2, B_1, E_2, E_8, F_3;$$

$$\pi_{40} : A_0, B_2, E_2, C_6, C_2, B_5, D_3;$$

$$\pi_{41} : A_0, B_2, C_6, B_1, D_3, F_3, G_3;$$

$$\pi_{55} : B_0, C_0, B_4, F_1, A_{11}, F_0, F_3;$$

$$\pi_{63} : B_0, E_0, B_4, C_8, A_{12}, C_0, G_1.$$

Каждая из этих подплоскостей содержит особенную точку и особенную прямую, не инцидентные друг другу.

Все эти подплоскости изоморфны, так как:

$$W_{4,11} W_{0,2} : \pi_{40} \rightarrow \pi_{38}; \quad W_{0,10} u_1 : \pi_{41} \rightarrow \pi_{38}; \quad W_{4,11} W_{3,10} u : \pi_{55} \rightarrow \pi_{38};$$

$$W_{4,11} W_{0,2} W_{0,11} W_{4,2} W_{0,5} h^+_{7,8} : \pi_{63} \rightarrow \pi_{38}.$$

В качестве опорной подплоскости порядка 2 этого типа возьмем  $\pi_{38}$  и обозначим ее  $\beta_2$ . Приведем точки и прямые этой *опорной* подплоскости, порождаемой 4-дугой  $S^4_{38} = \{A_0, B_2, C_2, B_1\}$ , сохраняя выделение вершин этой 4-дуги:

$A_0$	$A_0$	$A_0$	$B_2$	$B_2$	$C_2$	$E_2$
$B_2$	$C_2$	$B_1$	$C_2$	$B_1$	$B_1$	$E_8$
$E_8$	$F_3$	$E_2$	$E_2$	$F_3$	$E_8$	$F_3$

**Прямые:**  $\underline{b_0 \quad c_0 \quad e_0 \quad a_2 \quad b_9 \quad e_6 \quad b_7}$

Подсчитаем число подплоскостей типа  $\beta_2$  по формуле

$$n_{\beta_2} = \frac{\sum_i N_i^4}{7} \quad (12_2).$$

В исследуемом случае получаем (с помощью табл. 12):

$$\begin{aligned} \sum_i N_i^4 &= N_{38}^4 + N_{40}^4 + N_{41}^4 + N_{55}^4 + N_{63}^4 = \\ &= 16\,848 + 33\,696 + 16\,848 + 16\,848 + 33\,696 = 117\,936. \end{aligned}$$

Тогда по формуле (12<sub>2</sub>) находим, что  $n_{\beta_2} = \frac{117936}{7} = 16\,848$ .

**3.** Три опорные 4-дуги с номерами 70, 79, 82 (см. табл. 12) порождают соответственно следующие подплоскости порядка 2 (указаны лишь точки,

причем, первые 4 точки – вершины порождающей опорной 4-дуги, выделенные курсивом):

$$\pi_{70}: B_0, B_4, B_{12}, C_1, F_5, B_9, D_8;$$

$$\pi_{79}: B_0, B_4, B_{12}, C_{11}, E_6, F_1, G_3;$$

$$\pi_{82}: B_0, B_4, B_1, B_6, F_2, G_9, E_7.$$

Каждая из этих подплоскостей не содержит особых точек и особых прямых.

Все эти подплоскости изоморфны, так как:

$$w_{11,5} w_{0,4}: \pi_{79} \rightarrow \pi_{70}; \quad w_{10,7} w_{2,9} h_{12,0}^- h_{0,0}^- u. w_{3,9}: \pi_{82} \rightarrow \pi_{70}.$$

В качестве опорной подплоскости порядка 2 этого типа возьмем  $\pi_{70}$  и обозначим ее  $\gamma_2$ . Приведем точки и прямые этой **опорной** подплоскости, порождаемой 4-дугой  $S_{70}^4 = \{B_0, B_4, B_{12}, C_1\}$ , сохраняя выделение вершин этой 4-дуги:

$$\begin{array}{ccccccc} B_0 & B_0 & B_0 & B_4 & B_4 & B_{12} & F_5 \\ B_4 & B_{12} & C_1 & B_{12} & C_1 & C_1 & B_9 \\ F_5 & B_9 & D_8 & D_8 & B_9 & F_5 & D_8 \end{array}$$

Прямые:  $\underline{b_{11} \quad b_7 \quad e_5 \quad g_1 \quad g_6 \quad f_3 \quad f_0}$

Подсчитаем число подплоскостей типа  $\gamma_2$  по формуле

$$n_{\gamma_2} = \frac{\sum_i N_i^4}{7} \quad (12_3).$$

В исследуемом случае получаем (с помощью табл. 12):

$$\sum_i N_i^4 = N_{70}^4 + N_{79}^4 + N_{82}^4 = 33\,696 + 33\,696 + 11\,232 = 78\,624.$$

Тогда по формуле (12<sub>3</sub>) находим, что  $n_{\gamma_2} = \frac{78624}{7} = 11\,232$ .

4. Опорная 4-дуга  $S_1^4 = \{A_0, A_1, A_2, A_5\}$  (см. табл. 12) порождает **единственную** подплоскость  $\pi_1$  порядка 3, причем  $\pi_1 = \pi_0$ , то есть эта подплоскость содержит 13 особенных точек и 13 особенных прямых. Далее эту подплоскость будем обозначать  $\alpha_3$ .

Приведем точки и прямые этой **опорной** подплоскости, порождаемой 4-дугой  $S_1^4 = \{A_0, A_1, A_2, A_5\}$ , сохраняя выделение вершин этой 4-дуги:

	$A_0$	$A_0$	$A_0$	$A_1$	$A_1$	$A_2$	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_5$	$A_3$	$A_3$	$A_4$
	$A_1$	$A_2$	$A_5$	$A_2$	$A_5$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_6$	$A_9$	$A_4$	$A_7$	$A_8$
	$A_3$	$A_8$	$A_4$	$A_4$	$A_6$	$A_3$	$A_{10}$	$A_{11}$	$A_7$	$A_{10}$	$A_6$	$A_8$	$A_9$
	$A_9$	$A_{12}$	$A_7$	$A_{10}$	$A_8$	$A_{11}$	$A_{11}$	$A_{12}$	$A_9$	$A_{12}$	$A_{12}$	$A_{10}$	$A_{11}$
<b>Прямые</b>	<b><math>a_0</math></b>	<b><math>a_{12}</math></b>	<b><math>a_4</math></b>	<b><math>a_1</math></b>	<b><math>a_5</math></b>	<b><math>a_2</math></b>	<b><math>a_{10}</math></b>	<b><math>a_{11}</math></b>	<b><math>a_6</math></b>	<b><math>a_9</math></b>	<b><math>a_3</math></b>	<b><math>a_7</math></b>	<b><math>a_8</math></b>

5. Десять опорных 4-дуг с номерами 2, 4, 8, 9, 12, 20, 25, 26, 57, 65 (см. табл. 12) порождают соответственно следующие подплоскости порядка 3 (указаны лишь точки, причем, первые 4 точки – вершины порождающей опорной 4-дуги, выделенные курсивом):

$$\pi_2: A_0, A_1, A_2, B_2, A_3, A_9, B_1, E_1, E_2, B_6, E_6, D_{12}, G_{12}; \quad \pi_4 = \pi_{12} = \pi_2;$$

$$\pi_8: A_0, A_1, B_1, C_4, A_3, A_9, A_4, G_1, D_3, F_3, E_4, B_8, G_8;$$

$$\pi_9: A_0, A_1, B_1, B_5, A_2, A_8, A_{12}, B_0, E_0, E_1, E_5, D_{11}, G_{11};$$

$$\pi_{20}: A_0, B_0, B_4, B_{12}, A_1, A_7, A_{11}, A_{12}, E_0, E_4, D_{10}, G_{10}, E_{12}; \quad \pi_{57} = \pi_{65} = \pi_{20};$$

$$\pi_{25}: A_0, B_0, B_2, G_2, A_6, A_{10}, A_{11}, A_3, G_0, B_3, G_3, D_2, F_7; \quad \pi_{26} = \pi_{25}.$$

Каждая из этих подплоскостей содержит 5 особенных точек и 5 особенных прямых, причем 4 особенные точки из пяти инцидентны одной особенной прямой. Все эти подплоскости изоморфны между собой, так как:

$$w_{0,10} u_1: \pi_8 \rightarrow \pi_2; \quad A: \pi_9 \rightarrow \pi_2; \quad A^2: \pi_{20} \rightarrow \pi_2; \quad w_{0,5} w_{4,2} u_1: \pi_{25} \rightarrow \pi_2.$$

В качестве опорной подплоскости порядка 3 этого типа возьмем  $\pi_2$  и обозначим ее  $\beta_3$ . Приведем точки и прямые этой **опорной** подплоскости, порождаемой 4-дугой  $S_2^4 = \{A_0, A_1, A_2, B_2\}$ , сохраняя выделение вершин этой 4-дуги:

	$A_0$	$A_0$	$A_0$	$A_0$	$A_1$	$A_1$	$A_1$	$A_3$	$A_3$	$A_3$	$A_9$	$A_9$	$A_9$
	$A_1$	$A_2$	$B_1$	$E_1$	$A_2$	$B_2$	$E_2$	$A_2$	$B_1$	$E_1$	$A_2$	$B_1$	$E_1$

	A <sub>3</sub>	D <sub>12</sub>	E <sub>2</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	E <sub>6</sub>	B <sub>6</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>6</sub>	E <sub>6</sub>	B <sub>6</sub>	B <sub>2</sub>	E <sub>2</sub>
	A <sub>9</sub>	G <sub>12</sub>	E <sub>6</sub>	B <sub>6</sub>	E <sub>1</sub>	D <sub>12</sub>	G <sub>12</sub>	E <sub>2</sub>	D <sub>12</sub>	G <sub>12</sub>	E <sub>6</sub>	G <sub>12</sub>	D <sub>12</sub>
<b>Прямые</b>	<b>a<sub>0</sub></b>	<b>a<sub>12</sub></b>	<b>c<sub>0</sub></b>	<b>b<sub>0</sub></b>	<b>a<sub>1</sub></b>	<b>c<sub>1</sub></b>	<b>b<sub>1</sub></b>	<b>a<sub>2</sub></b>	<b>g<sub>3</sub></b>	<b>d<sub>3</sub></b>	<b>a<sub>6</sub></b>	<b>b<sub>9</sub></b>	<b>c<sub>9</sub></b>

Подсчитаем число подплоскостей порядка 3 типа  $\beta_3$  по формуле

$$n_{\beta_3} = \frac{\sum_i N_i^4}{234} \quad (13_1).$$

В исследуемом случае получаем (с помощью табл. 12):

$$\begin{aligned} \sum_i N_i^4 &= N_2^4 + N_4^4 + N_8^4 + N_9^4 + N_{12}^4 + N_{20}^4 + N_{25}^4 + N_{26}^4 + N_{57}^4 + N_{65}^4 = \\ &= 8424 + 16848 + 8424 + 8424 + 4212 + 8424 + 8424 + 8424 + 2106 + 8424 = 82134. \end{aligned}$$

Тогда по формуле (13<sub>1</sub>) находим, что  $n_{\beta_3} = \frac{82134}{234} = 351$ .

6. Семь опорных 4-дуг с номерами 10, 11, 14, 21, 39, 47, 50 (см. табл. 12) порождают соответственно следующие подплоскости порядка 3 (указаны лишь точки, причем, первые 4 точки – вершины порождающей опорной 4-дуги, выделенные курсивом):

$$\pi_{10}: A_0, A_1, B_1, F_5, A_3, A_9, C_1, D_1, E_5, G_5, B_{11}, C_{11}, D_{11};$$

$$\pi_{11}: A_0, A_1, B_2, C_2, A_3, A_9, D_2, E_3, F_3, G_3, E_7, F_7, G_7; \quad \pi_{11} = \pi_{14};$$

$$\pi_{21}: A_0, B_0, B_4, F_{12}, A_6, A_{10}, A_{11}, C_0, D_0, C_4, D_4, E_{12}, G_{12}; \quad \pi_{21} = \pi_{47} = \pi_{50};$$

$$\pi_{39}: A_0, B_2, C_2, D_6, A_2, A_8, A_{12}, D_2, E_1, F_1, G_1, B_6, C_6, D_6.$$

Каждая из этих подплоскостей содержит 4 особенные точки и 4 особенные прямые, причем особенные точки инцидентны одной прямой, а особенные прямые инцидентны одной точке. Все эти подплоскости изоморфны между собой, так как:

$$W_{4,9}: \pi_{11} \rightarrow \pi_{10}; \quad W_{6,3} W_{4,2}: \pi_{21} \rightarrow \pi_{10}; \quad W_{4,10}: \pi_{39} \rightarrow \pi_{10}.$$

В качестве опорной подплоскости порядка 3 этого типа возьмем  $\pi_{10}$  и обозначим ее  $\gamma_3$ . Приведем точки и прямые **опорной** подплоскости, порождаемой 4-дугой  $S_{10}^4 = \{A_0, A_1, B_1, F_5\}$ , сохраняя выделение вершин этой 4-дуги:

	A <sub>0</sub>	A <sub>0</sub>	A <sub>0</sub>	A <sub>0</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>9</sub>	A <sub>9</sub>	A <sub>9</sub>
	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	E <sub>5</sub>	B <sub>11</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>

	A <sub>3</sub>	E <sub>5</sub>	G <sub>5</sub>	F <sub>5</sub>	C <sub>1</sub>	F <sub>5</sub>	C <sub>11</sub>	G <sub>5</sub>	F <sub>5</sub>	E <sub>5</sub>	F <sub>5</sub>	E <sub>5</sub>	G <sub>5</sub>
	A <sub>9</sub>	D <sub>11</sub>	B <sub>11</sub>	C <sub>11</sub>	D <sub>1</sub>	G <sub>5</sub>	D <sub>11</sub>	C <sub>11</sub>	D <sub>11</sub>	B <sub>11</sub>	B <sub>11</sub>	C <sub>11</sub>	D <sub>11</sub>
<b>Прямые</b>	<b>a<sub>0</sub></b>	<b>c<sub>0</sub></b>	<b>g<sub>0</sub></b>	<b>f<sub>0</sub></b>	<b>a<sub>1</sub></b>	<b>a<sub>5</sub></b>	<b>a<sub>11</sub></b>	<b>g<sub>3</sub></b>	<b>f<sub>3</sub></b>	<b>e<sub>3</sub></b>	<b>b<sub>9</sub></b>	<b>c<sub>9</sub></b>	<b>d<sub>9</sub></b>

Подсчитаем число подплоскостей порядка 3 типа  $\gamma_3$  по формуле

$$n_{\gamma_3} = \frac{\sum_i N_i^4}{234} \quad (13_2).$$

В исследуемом случае получаем (с помощью табл. 12):

$$\begin{aligned} \sum_i N_i^4 &= N_{10}^4 + N_{11}^4 + N_{14}^4 + N_{21}^4 + N_{39}^4 + N_{47}^4 + N_{50}^4 = \\ &= 5\,616 + 2\,808 + 2\,808 + 1\,872 + 5\,616 + 2\,808 + 2\,808 = 24\,336. \end{aligned}$$

Тогда по формуле (13<sub>2</sub>) находим, что  $n_{\gamma_3} = \frac{24336}{234} = 104$ .

7. Восемь опорных 4-дуг с номерами 33, 43, 44, 49, 53, 74, 85, 89 (см. табл. 12) порождают соответственно следующие подплоскости порядка 3 (указаны лишь точки, причем, первые 4 точки – вершины порождающей опорной 4-дуги, выделенные курсивом):

$$\pi_{33}: A_0, B_0, B_2, G_1, C_0, D_0, F_7, F_{11}, C_5, F_8, G_3, G_9, D_6;$$

$$\pi_{43}: A_0, B_2, C_6, E_{11}, E_0, F_0, G_0, F_7, G_8, F_1, D_5, E_9, G_3;$$

$$\pi_{44}: A_0, B_2, C_6, F_8, B_4, C_4, D_4, F_9, B_5, E_7, F_{11}, E_3, F_1;$$

$$\pi_{49}: B_0, C_0, B_4, B_{12}, A_1, D_0, D_{10}, E_6, B_9, C_8, F_3, F_7, D_2;$$

$$\pi_{53}: B_0, C_0, B_4, C_1, A_3, D_0, G_9, B_6, G_8, C_{10}, C_{12}, D_{11}, F_5;$$

$$\pi_{74}: B_0, B_4, B_{12}, G_2, A_7, C_4, D_4, G_{10}, F_5, G_9, G_1, F_8, G_3;$$

$$\pi_{85}: B_0, B_4, B_1, C_2, A_6, E_6, F_6, G_6, C_9, F_8, G_{11}, C_7, E_{12};$$

$$\pi_{89}: B_0, B_4, B_2, C_1, A_6, B_3, C_3, D_3, D_7, G_8, E_{11}, E_{12}, D_9.$$

Каждая из этих подплоскостей содержит одну особенную точку и одну особенную прямую, инцидентные друг другу. Все эти подплоскости изоморфны между собой, так как:

$$W_{0,2} W_{12,3}: \pi_{43} \rightarrow \pi_{33}; \quad W_{0,5} W_{12,11}: \pi_{44} \rightarrow \pi_{33}; \quad W_{0,11} W_{2,9} U_0: \pi_{49} \rightarrow \pi_{33};$$

$$W_{1,9} U_1: \pi_{53} \rightarrow \pi_{33}; \quad W_{0,4} W_{1,3} W_{10,2}: \pi_{74} \rightarrow \pi_{33}; \quad W_{0,4} W_{8,10} U_0: \pi_{85} \rightarrow \pi_{33};$$

$$W_{0,2} W_{2,10} U_0: \pi_{89} \rightarrow \pi_{33};$$



В качестве опорной подплоскости порядка 3 этого типа возьмем  $\pi_{33}$  и обозначим ее  $\delta_3$ . Приведем точки и прямые *опорной* подплоскости, порождаемой 4-дугой  $S_{33}^4 = \{A_0, B_0, B_2, G_1\}$ , сохраняя выделение вершин этой 4-дуги:

	$A_0$	$A_0$	$A_0$	$A_0$	$B_0$	$B_0$	$B_0$	$C_0$	$C_0$	$C_0$	$D_0$	$D_0$	$D_0$
	$B_0$	$B_2$	$G_1$	$G_9$	$B_2$	$G_1$	$C_5$	$B_2$	$F_7$	$F_{11}$	$B_2$	$G_1$	$D_6$
	$C_0$	$F_7$	$F_{11}$	$F_8$	$F_8$	$F_7$	$D_6$	$D_6$	$F_8$	$G_9$	$C_5$	$G_3$	$F_7$
	$D_0$	$G_3$	$C_5$	$D_6$	$F_{11}$	$G_9$	$G_3$	$G_1$	$C_5$	$G_3$	$G_9$	$F_8$	$F_{11}$
<b>Прямые</b>	<b><math>a_0</math></b>	<b><math>b_0</math></b>	<b><math>c_0</math></b>	<b><math>d_0</math></b>	<b><math>f_6</math></b>	<b><math>b_{11}</math></b>	<b><math>g_{10}</math></b>	<b><math>g_{12}</math></b>	<b><math>f_2</math></b>	<b><math>c_8</math></b>	<b><math>g_4</math></b>	<b><math>d_7</math></b>	<b><math>f_5</math></b>

Подсчитаем число подплоскостей порядка 3 типа  $\delta_3$  по формуле

$$n_{\delta_3} = \frac{\sum_i N_i^4}{234} \quad (13_3).$$

В исследуемом случае получаем (с помощью табл. 12):

$$\begin{aligned} \sum_i N_i^4 &= N_{33}^4 + N_{43}^4 + N_{44}^4 + N_{49}^4 + N_{53}^4 + N_{74}^4 + N_{85}^4 + N_{89}^4 = \\ &= 33696 + 5616 + 5616 + 16848 + 16848 + 33696 + 16848 + 16848 = 146\,016. \end{aligned}$$

Тогда по формуле (13<sub>3</sub>) находим, что  $n_{\delta_3} = \frac{146016}{234} = 624$ .

**9.** Остальные 55 опорных 4-дуг (см. табл. 12) порождают всю плоскость Хьюза.

Основные сведения об опорных подплоскостях плоскости Хьюза приведены в табл. 13.

Итак, верны следующие **теоремы Г и Н**, доказанные автором [1, 3].

**Теорема Г.** В плоскости Хьюза порядка 9 из 92 опорных 4-дуг:

1)  $3 + 5 + 3 = 11$  порождают, с точностью до изоморфизма, подплоскости порядка 2 трех типов  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ ;

2)  $1 + 10 + 7 + 8 = 26$  порождают, с точностью до изоморфизма, подплоскости порядка 3 четырех типов  $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3$ ;

3) остальные 55 4-дуг порождают всю плоскость.

**Теорема Н.** В плоскости Хьюза порядка 9 имеются:

1)  $5\,616 + 16\,848 + 11\,232 = 33\,696$  подплоскостей порядка 2 трех типов;

2)  $1 + 351 + 104 + 624 = 1\ 080$  подплоскостей порядка 3 четырех типов.

Замечание 11. Те же результаты классификации и подсчета подплоскостей независимо и другими методами получил и Деннистон (Denniston) [18].

### **Библиографический список**

1. Васильков В.И. Наборы точек и подплоскости плоскости Хьюза порядка 9 / В.И. Васильков // Материалы XXVII конф. мат. кафедр пединститутов Уральской зоны: тезисы докл. – Ижевск, 1969. – С. 231 – 232.
2. Васильков В.И. Подплоскости плоскости трансляций порядка 9 / В.И. Васильков // Материалы XXVII конф. мат. кафедр пединститутов Уральской зоны: тезисы докл. – Ижевск, 1969. – С. 230.
3. Васильков В.И. О строении плоскости Хьюза порядка 9 / В.И. Васильков // Ученые зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь, 1976. – Т. 156. – С. 55 – 68.
4. Васильков В.И. Наборы точек и подплоскости в недзарговых проективных плоскостях порядка 9 / В.И. Васильков // Комбинаторный анализ / Под ред. К.А. Рыбникова. – М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1976. – Вып. 4. – С. 48 – 53.
5. Васильков В.И. О строении проективных плоскостей порядка 9: дис. ... канд. физ.-мат. наук / В.И. Васильков. – Екатеринбург, 1995. – 189 с.
6. Васильков В.И. О существовании непересекающихся подплоскостей порядка 3 в плоскости Хьюза порядка 9 / В.И. Васильков // Кург. гос. пед. ин-т. – Курган, 1994. – 11 с. – Деп. В ВИНТИ РАН 02. 02. 95, № 297 – В 95.
7. Васильков В.И. Конечные проективные плоскости малых порядков / В.И. Васильков. – Челябинск: Изд-во ЧГПУ, 2003. – 197 с.
8. Васильков В.И. Опорные дуги и группы их автоморфизмов в проективных плоскостях малых порядков: справочное пособие / В.И. Васильков, Ю.Н. Зверева, Г.В. Масленников. – Челябинск: Из-во ЧГПУ, 2005. – 261 с.
9. Гонин Е.Г. Конечные проективные плоскости / Е.Г. Гонин. – Пермь: Изд-во ПГПИ, 1983. – 94 с.

10. Картеси Ф. Введение в конечные геометрии: пер. с англ. / Ф. Картеси. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
11. Кострикин А.И. Введение в алгебру /А.И. Кострикин. – М.: Наука, 1977. – 495 с.
12. Скорняков Л.А. Проективные плоскости / Л.А. Скорняков // Успехи математических наук. 1951. – Т. 6. – № 6. – С. 112 – 154.
13. Холл М. Теория групп: пер. с англ. / М. Холл. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
14. Холл М. Комбинаторный анализ: пер. с англ. / М. Холл. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 98 с.
15. Холл М. Комбинаторика: пер. с англ. / М. Холл. – М.: Мир, 1970. – 424 с.
16. Andre J. Projective Ebenen über Fastkörpern / J. Andre // Mat. Z. – 1955. – Vol. 62. – P. 137 – 160.
17. Dembowski P. Finite geometries / P. Dembowski. – Berlin: Springer, 1968.
18. Denniston R.H.F. Subplanes of the Hughes plane of order 9 / R.H.F. Denniston // Proc. Camb. Phil. Soc. math. phys. Sci. – 1968. – Vol. 64, № 3. – P. 589 –598.
19. Hughes D.R. A class of non-Desarguesian projective planes / D.R. Hughes // Canad. J. Math. – 1957. – Vol. 9. – P. 378 – 388.
20. Magari R. Le configurazioni parziali chiuse contenute nel piano, P, sul quasicorpo associativo di ordine 9 / R. Magari // Boll. Un. mat. Ital. – 1958. – № 13. – P. 128 – 140.
21. Room T. G. Miniquaternion geometry / T.G. Room, P.B. Kirkpatrick. – Cambridge, 1971. – 176 p.
22. Veblen O. Non-Desarguesian and non-Pascalian geometries / O. Veblen, J. Wedderburn // Trans. Am. Math. Soc. – 1907. – Vol. 8. – P. 379 – 388.
23. Zappa G. Sui gruppi di collineazioni dei piani di Hughes / G. Zappa // Boll. Un. mat. Ital. – 1957. – Vol. 12. – № 3. – P. 507 – 516.

## Приложение

Таблица 1

### Список прямых КПП порядка 4

$\infty$	$\infty$	0	1	2	3
<b>0</b>	$\infty$	00	01	02	03
<b>1</b>	$\infty$	10	11	12	13
<b>2</b>	$\infty$	20	21	22	23
<b>3</b>	$\infty$	30	31	32	33
<b>00</b>	0	00	10	20	30
<b>01</b>	0	01	11	21	31
<b>02</b>	0	02	12	22	32
<b>03</b>	0	03	13	23	33
<b>10</b>	1	00	11	22	33
<b>11</b>	1	01	10	23	32

<b>12</b>	1	02	13	20	31
<b>13</b>	1	03	12	21	30
<b>20</b>	2	00	12	23	31
<b>21</b>	2	01	13	22	30
<b>22</b>	2	02	10	21	33
<b>23</b>	2	03	11	20	32
<b>30</b>	3	00	13	21	32
<b>31</b>	3	01	12	20	33
<b>32</b>	3	02	11	23	30
<b>33</b>	3	03	10	22	31

Таблица 2

### Список прямых КПП порядка 7

$\infty$	$\infty$	0	1	2	3	4	5	6
<b>0</b>	$\infty$	00	01	02	03	04	05	06
<b>1</b>	$\infty$	10	11	12	13	14	15	16
<b>2</b>	$\infty$	20	21	22	23	24	25	26
<b>3</b>	$\infty$	30	31	32	33	34	35	36
<b>4</b>	$\infty$	40	41	42	43	44	45	46
<b>5</b>	$\infty$	50	51	52	53	54	55	56
<b>6</b>	$\infty$	60	61	62	63	64	65	66
<b>00</b>	0	00	10	20	30	40	50	60
<b>01</b>	0	01	11	21	31	41	51	61
<b>02</b>	0	02	12	22	32	42	52	62
<b>03</b>	0	03	13	23	33	43	53	63
<b>04</b>	0	04	14	24	34	44	54	64
<b>05</b>	0	05	15	25	35	45	55	65
<b>06</b>	0	06	16	26	36	46	56	66
<b>10</b>	1	00	11	22	33	44	55	66
<b>11</b>	1	01	12	23	34	45	56	60
<b>12</b>	1	02	13	24	35	46	50	61
<b>13</b>	1	03	14	25	36	40	51	62
<b>14</b>	1	04	15	26	30	41	52	63
<b>15</b>	1	05	16	20	31	42	53	64
<b>16</b>	1	06	10	21	32	43	54	65
<b>20</b>	2	00	12	24	36	41	53	65
<b>21</b>	2	01	13	25	30	42	54	66
<b>22</b>	2	02	14	26	31	43	55	60
<b>23</b>	2	03	15	20	32	44	56	61
<b>24</b>	2	04	16	21	33	45	50	62
<b>25</b>	2	05	10	22	34	46	51	63
<b>26</b>	2	06	11	23	35	40	52	64

<b>30</b>	3	00	13	26	32	45	51	64
<b>31</b>	3	01	14	20	33	46	52	65
<b>32</b>	3	02	15	21	34	40	53	66
<b>33</b>	3	03	16	22	35	41	54	60
<b>34</b>	3	04	10	23	36	42	55	61
<b>35</b>	3	05	11	24	30	43	56	62
<b>36</b>	3	06	12	25	31	44	50	63
<b>40</b>	4	00	14	21	35	42	56	63
<b>41</b>	4	01	15	22	36	43	50	64
<b>42</b>	4	02	16	23	30	44	51	65
<b>43</b>	4	03	10	24	31	45	52	66
<b>44</b>	4	04	11	25	32	46	53	60
<b>45</b>	4	05	12	26	33	40	54	61
<b>46</b>	4	06	13	20	34	41	55	62
<b>50</b>	5	00	15	23	31	46	54	62
<b>51</b>	5	01	16	24	32	40	55	63
<b>52</b>	5	02	10	25	33	41	56	64
<b>53</b>	5	03	11	26	34	42	50	65
<b>54</b>	5	04	12	20	35	43	51	66
<b>55</b>	5	05	13	21	36	44	52	60
<b>56</b>	5	06	14	22	30	45	53	61
<b>60</b>	6	00	16	25	34	43	52	61
<b>61</b>	6	01	10	26	35	44	53	62
<b>62</b>	6	02	11	20	36	45	54	63
<b>63</b>	6	03	12	21	30	46	55	64
<b>64</b>	6	04	13	22	31	40	56	65
<b>65</b>	6	05	14	23	32	41	50	66
<b>66</b>	6	06	15	24	33	42	51	60

## Список прямых КПП порядка 8

∞	∞	0	1	2	3	4	5	6	7
<b>0</b>	∞	00	01	02	03	04	05	06	07
<b>1</b>	∞	10	11	12	13	14	15	16	17
<b>2</b>	∞	20	21	22	23	24	25	26	27
<b>3</b>	∞	30	31	32	33	34	35	36	37
<b>4</b>	∞	40	41	42	43	44	45	46	47
<b>5</b>	∞	50	51	52	53	54	55	56	57
<b>6</b>	∞	60	61	62	63	64	65	66	67
<b>7</b>	∞	70	71	72	73	74	75	76	77
<b>00</b>	0	00	10	20	30	40	50	60	70
<b>01</b>	0	01	11	21	31	41	51	61	71
<b>02</b>	0	02	12	22	32	42	52	62	72
<b>03</b>	0	03	13	23	33	43	53	63	73
<b>04</b>	0	04	14	24	34	44	54	64	74
<b>05</b>	0	05	15	25	35	45	55	65	75
<b>06</b>	0	06	16	26	36	46	56	66	76
<b>07</b>	0	07	17	27	37	47	57	67	77
<b>10</b>	1	00	11	22	33	44	55	66	77
<b>11</b>	1	01	10	23	32	45	54	67	76
<b>12</b>	1	02	13	20	31	46	57	64	75
<b>13</b>	1	03	12	21	30	47	56	65	74
<b>14</b>	1	04	15	26	37	40	51	62	73
<b>15</b>	1	05	14	27	36	41	50	63	72
<b>16</b>	1	06	17	24	35	42	53	60	71
<b>17</b>	1	07	16	25	34	43	52	61	70
<b>20</b>	2	00	12	24	36	43	51	67	75
<b>21</b>	2	01	13	25	37	42	50	66	74
<b>22</b>	2	02	10	26	34	41	53	65	77
<b>23</b>	2	03	11	27	35	40	52	64	76
<b>24</b>	2	04	16	20	32	47	55	63	71
<b>25</b>	2	05	17	21	33	46	54	62	70
<b>26</b>	2	06	14	22	30	45	57	61	73
<b>27</b>	2	07	15	23	31	44	56	60	72
<b>30</b>	3	00	13	26	35	47	54	61	72
<b>31</b>	3	01	12	27	34	46	55	60	73
<b>32</b>	3	02	11	24	37	45	56	63	70
<b>33</b>	3	03	10	25	36	44	57	62	71
<b>34</b>	3	04	17	22	31	43	50	65	76
<b>35</b>	3	05	16	23	30	42	51	64	77
<b>36</b>	3	06	15	20	33	41	52	67	74
<b>37</b>	3	07	14	21	32	40	53	66	75
<b>40</b>	4	00	14	23	37	46	55	65	71
<b>41</b>	4	01	15	22	36	47	53	64	70
<b>42</b>	4	02	16	21	35	44	50	67	73
<b>43</b>	4	03	17	20	34	45	51	66	72
<b>44</b>	4	04	10	27	33	42	56	61	75
<b>45</b>	4	05	11	26	32	43	57	60	74
<b>46</b>	4	06	12	25	31	40	54	63	77
<b>47</b>	4	07	13	24	30	41	55	62	76
<b>50</b>	5	00	15	21	34	42	57	63	76
<b>51</b>	5	01	14	20	35	43	56	62	77
<b>52</b>	5	02	17	23	36	40	55	61	74
<b>53</b>	5	03	16	22	37	41	54	60	75
<b>54</b>	5	04	11	25	30	46	53	67	72
<b>55</b>	5	05	10	24	31	47	52	66	73
<b>56</b>	5	06	13	27	32	44	51	65	70
<b>57</b>	5	07	12	26	33	45	50	64	71
<b>60</b>	6	00	16	27	31	45	53	62	74
<b>61</b>	6	01	17	26	30	44	52	63	75
<b>62</b>	6	02	14	25	33	47	51	60	76
<b>63</b>	6	03	15	24	32	46	50	61	77
<b>64</b>	6	04	12	23	35	41	57	66	70
<b>65</b>	6	05	13	22	34	40	56	67	71
<b>66</b>	6	06	10	21	37	43	55	64	72
<b>67</b>	6	07	11	20	36	42	54	65	73
<b>70</b>	7	00	17	25	32	41	56	64	73
<b>71</b>	7	01	16	24	33	40	57	65	72
<b>72</b>	7	02	15	27	30	43	54	66	71
<b>73</b>	7	03	14	26	31	42	55	67	70
<b>74</b>	7	04	13	21	36	45	52	60	77
<b>75</b>	7	05	12	20	37	44	53	61	76
<b>76</b>	7	06	11	23	34	47	50	62	75
<b>77</b>	7	07	10	22	35	46	51	63	74

Таблица 4

*Список прямых дезарговой плоскости порядка 9*

$\infty$	$\infty$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>0</b>	$\infty$	00	01	02	03	04	05	06	07	08
<b>1</b>	$\infty$	10	11	12	13	14	15	16	17	18
<b>2</b>	$\infty$	20	21	22	23	24	25	26	27	28
<b>3</b>	$\infty$	30	31	32	33	34	35	36	37	38
<b>4</b>	$\infty$	40	41	42	43	44	45	46	47	48
<b>5</b>	$\infty$	50	51	52	53	54	55	56	57	58
<b>6</b>	$\infty$	60	61	62	63	64	65	66	67	68
<b>7</b>	$\infty$	70	71	72	73	74	75	76	77	78
<b>8</b>	$\infty$	80	81	82	83	84	85	86	87	88
<b>00</b>	0	00	10	20	30	40	50	60	70	80
<b>01</b>	0	01	11	21	31	41	51	61	71	81
<b>02</b>	0	02	12	22	32	42	52	62	72	82
<b>03</b>	0	03	13	23	33	43	53	63	73	83
<b>04</b>	0	04	14	24	34	44	54	64	74	84
<b>05</b>	0	05	15	25	35	45	55	65	75	85
<b>06</b>	0	06	16	26	36	46	56	66	76	86
<b>07</b>	0	07	17	27	37	47	57	67	77	87
<b>08</b>	0	08	18	28	38	48	58	68	78	88
<b>10</b>	1	00	11	22	33	44	55	66	77	88
<b>11</b>	1	01	12	20	34	45	53	67	78	86
<b>12</b>	1	02	10	21	35	43	54	68	76	87
<b>13</b>	1	03	14	25	36	47	58	60	71	82
<b>14</b>	1	04	15	23	37	48	56	61	72	80
<b>15</b>	1	05	13	24	38	46	57	62	70	81
<b>16</b>	1	06	17	28	30	41	52	63	74	85
<b>17</b>	1	07	18	26	31	42	50	64	75	83
<b>18</b>	1	08	16	27	32	40	51	65	73	84
<b>20</b>	2	00	12	21	36	48	57	63	75	84
<b>21</b>	2	01	10	22	37	46	58	64	73	85
<b>22</b>	2	02	11	20	38	47	56	65	74	83
<b>23</b>	2	03	15	24	30	42	51	66	78	87
<b>24</b>	2	04	13	25	31	40	52	67	76	88
<b>25</b>	2	05	14	23	32	41	50	68	77	86
<b>26</b>	2	06	18	27	33	45	54	60	72	81
<b>27</b>	2	07	16	28	34	43	55	61	70	82
<b>28</b>	2	08	17	26	35	44	53	62	71	80
<b>30</b>	3	00	13	26	32	45	58	61	74	87
<b>31</b>	3	01	14	27	30	43	56	62	75	88
<b>32</b>	3	02	15	28	31	44	57	60	73	86
<b>33</b>	3	03	16	20	35	48	52	64	77	81
<b>34</b>	3	04	17	21	33	46	50	65	78	82
<b>35</b>	3	05	18	22	34	47	51	63	76	80
<b>36</b>	3	06	10	23	38	42	55	67	71	84
<b>37</b>	3	07	11	24	36	40	53	68	72	85
<b>38</b>	3	08	12	25	37	41	54	66	70	83

Окончание табл. 4

<b>40</b>	4	00	14	28	35	46	51	67	72	83
<b>41</b>	4	01	15	26	33	47	52	68	70	84
<b>42</b>	4	02	13	27	34	48	50	66	71	85
<b>43</b>	4	03	17	22	38	40	54	61	75	86
<b>44</b>	4	04	18	20	36	41	55	62	73	87
<b>45</b>	4	05	16	21	37	42	53	60	74	88
<b>46</b>	4	06	11	25	32	43	57	64	78	80
<b>47</b>	4	07	12	23	30	44	58	65	76	81
<b>48</b>	4	08	10	24	31	45	56	63	77	82
<b>50</b>	5	00	15	27	38	41	53	64	76	82
<b>51</b>	5	01	13	28	36	42	54	65	77	80
<b>52</b>	5	02	14	26	37	40	55	63	78	81
<b>53</b>	5	03	18	21	32	44	56	67	70	85
<b>54</b>	5	04	16	22	30	45	57	68	71	83
<b>55</b>	5	05	17	20	31	43	58	66	72	84
<b>56</b>	5	06	12	24	35	47	50	61	73	88
<b>57</b>	5	07	10	25	33	48	51	62	74	86
<b>58</b>	5	08	11	23	34	46	52	60	75	87
<b>60</b>	6	00	16	23	31	47	54	62	78	85
<b>61</b>	6	01	17	24	32	48	55	60	76	83
<b>62</b>	6	02	18	25	30	46	53	61	77	84
<b>63</b>	6	03	10	26	34	41	57	65	72	88
<b>64</b>	6	04	11	27	35	42	58	63	70	86
<b>65</b>	6	05	12	28	33	40	56	64	71	87
<b>66</b>	6	06	13	20	37	44	51	68	75	82
<b>67</b>	6	07	14	21	38	45	52	66	73	80
<b>68</b>	6	08	15	22	36	43	50	67	74	81
<b>70</b>	7	00	17	25	34	42	56	68	73	81
<b>71</b>	7	01	18	23	35	40	57	66	74	82
<b>72</b>	7	02	16	24	33	41	58	67	75	80
<b>73</b>	7	03	11	28	37	45	50	62	76	84
<b>74</b>	7	04	12	26	38	43	51	60	77	85
<b>75</b>	7	05	10	27	36	44	52	61	78	83
<b>76</b>	7	06	14	22	31	48	53	65	70	87
<b>77</b>	7	07	15	20	32	46	54	63	71	88
<b>78</b>	7	08	13	21	30	47	55	64	72	86
<b>80</b>	8	00	18	24	37	43	52	65	71	86
<b>81</b>	8	01	16	25	38	44	50	63	72	87
<b>82</b>	8	02	17	23	36	45	51	64	70	88
<b>83</b>	8	03	12	27	31	46	55	68	74	80
<b>84</b>	8	04	10	28	32	47	53	66	75	81
<b>85</b>	8	05	11	26	30	48	54	67	73	82
<b>86</b>	8	06	15	21	34	40	58	62	77	83
<b>87</b>	8	07	13	22	35	41	56	60	78	84
<b>88</b>	8	08	14	20	33	42	57	61	76	85

**Список прямых плоскости трансляций порядка 9**

$\infty$	$\infty$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>0</b>	$\infty$	00	01	02	03	04	05	06	07	08
<b>1</b>	$\infty$	10	11	12	13	14	15	16	17	18
<b>2</b>	$\infty$	20	21	22	23	24	25	26	27	28
<b>3</b>	$\infty$	30	31	32	33	34	35	36	37	38
<b>4</b>	$\infty$	40	41	42	43	44	45	46	47	48
<b>5</b>	$\infty$	50	51	52	53	54	55	56	57	58
<b>6</b>	$\infty$	60	61	62	63	64	65	66	67	68
<b>7</b>	$\infty$	70	71	72	73	74	75	76	77	78
<b>8</b>	$\infty$	80	81	82	83	84	85	86	87	88
<b>00</b>	0	00	10	20	30	40	50	60	70	80
<b>01</b>	0	01	11	21	31	41	51	61	71	81
<b>02</b>	0	02	12	22	32	42	52	62	72	82
<b>03</b>	0	03	13	23	33	43	53	63	73	83
<b>04</b>	0	04	14	24	34	44	54	64	74	84
<b>05</b>	0	05	15	25	35	45	55	65	75	85
<b>06</b>	0	06	16	26	36	46	56	66	76	86
<b>07</b>	0	07	17	27	37	47	57	67	77	87
<b>08</b>	0	08	18	28	38	48	58	68	78	88
<b>10</b>	1	00	11	22	33	44	55	66	77	88
<b>11</b>	1	01	12	20	34	45	53	67	78	86
<b>12</b>	1	02	10	21	35	43	54	68	76	87
<b>13</b>	1	03	14	25	36	47	58	60	71	82
<b>14</b>	1	04	15	23	37	48	56	61	72	80
<b>15</b>	1	05	13	24	38	46	57	62	70	81
<b>16</b>	1	06	17	28	30	41	52	63	74	85
<b>17</b>	1	07	18	26	31	42	50	64	75	83
<b>18</b>	1	08	16	27	32	40	51	65	73	84
<b>20</b>	2	00	12	21	36	48	57	63	75	84
<b>21</b>	2	01	10	22	37	46	58	64	73	85
<b>22</b>	2	02	11	20	38	47	56	65	74	83
<b>23</b>	2	03	15	24	30	42	51	66	78	87
<b>24</b>	2	04	13	25	31	40	52	67	76	88
<b>25</b>	2	05	14	23	32	41	50	68	77	86
<b>26</b>	2	06	18	27	33	45	54	60	72	81
<b>27</b>	2	07	16	28	34	43	55	61	70	82
<b>28</b>	2	08	17	26	35	44	53	62	71	80
<b>30</b>	3	00	13	26	32	45	58	61	74	87
<b>31</b>	3	01	14	27	30	43	56	62	75	88
<b>32</b>	3	02	15	28	31	44	57	60	73	86
<b>33</b>	3	03	16	20	35	48	52	64	77	81
<b>34</b>	3	04	17	21	33	46	50	65	78	82
<b>35</b>	3	05	18	22	34	47	51	63	76	80
<b>36</b>	3	06	10	23	38	42	55	67	71	84
<b>37</b>	3	07	11	24	36	40	53	68	72	85
<b>38</b>	3	08	12	25	37	41	54	66	70	83



<b>40</b>	4	00	14	28	37	42	53	65	76	81
<b>41</b>	4	01	15	26	38	40	54	63	77	82
<b>42</b>	4	02	13	27	36	41	55	64	78	80
<b>43</b>	4	03	17	22	31	45	56	68	70	84
<b>44</b>	4	04	18	20	32	43	57	66	71	85
<b>45</b>	4	05	16	21	30	44	58	67	72	83
<b>46</b>	4	06	11	25	34	48	50	62	73	87
<b>47</b>	4	07	12	23	35	46	51	60	74	88
<b>48</b>	4	08	10	24	33	47	52	61	75	86
<b>50</b>	5	00	15	27	34	46	52	68	71	83
<b>51</b>	5	01	13	28	35	47	50	66	72	84
<b>52</b>	5	02	14	26	33	48	51	67	70	85
<b>53</b>	5	03	18	21	37	40	55	62	74	86
<b>54</b>	5	04	16	22	38	41	53	60	75	87
<b>55</b>	5	05	17	20	36	42	54	61	73	88
<b>56</b>	5	06	12	24	31	43	58	65	77	80
<b>57</b>	5	07	10	25	32	44	56	63	78	81
<b>58</b>	5	08	11	23	30	45	57	64	76	82
<b>60</b>	6	00	16	23	31	47	54	62	78	85
<b>61</b>	6	01	17	24	32	48	55	60	76	83
<b>62</b>	6	02	18	25	30	46	53	61	77	84
<b>63</b>	6	03	10	26	34	41	57	65	72	88
<b>64</b>	6	04	11	27	35	42	58	63	70	86
<b>65</b>	6	05	12	28	33	40	56	64	71	87
<b>66</b>	6	06	13	20	37	44	51	68	75	82
<b>67</b>	6	07	14	21	38	45	52	66	73	80
<b>68</b>	6	08	15	22	36	43	50	67	74	81
<b>70</b>	7	00	17	25	38	43	51	64	72	86
<b>71</b>	7	01	18	23	36	44	52	65	70	87
<b>72</b>	7	02	16	24	37	45	50	63	71	88
<b>73</b>	7	03	11	28	32	46	54	67	75	80
<b>74</b>	7	04	12	26	30	47	55	68	73	81
<b>75</b>	7	05	10	27	31	48	53	66	74	82
<b>76</b>	7	06	14	22	35	40	57	61	78	83
<b>77</b>	7	07	15	20	33	41	58	62	76	84
<b>78</b>	7	08	13	21	34	42	56	60	77	85
<b>80</b>	8	00	18	24	35	41	56	67	73	82
<b>81</b>	8	01	16	25	33	42	57	68	74	80
<b>82</b>	8	02	17	23	34	40	58	66	75	81
<b>83</b>	8	03	12	27	38	44	50	61	76	85
<b>84</b>	8	04	10	28	36	45	51	62	77	83
<b>85</b>	8	05	11	26	37	43	52	60	78	84
<b>86</b>	8	06	15	21	32	47	53	64	70	88
<b>87</b>	8	07	13	22	30	48	54	65	71	86
<b>88</b>	8	08	14	20	31	46	55	63	72	87

Сведения об опорных 4–дугах плоскости  $PT(9)$ 

$i$	Опорная 4–дуга $S_i^4$	Образующие элементы группы $G_i^4$	$ G_i^4 $	$N_i^4$
1	$\infty, 0, 00, 11$	$s_3; s_4; t; h_{2,2} t_{2,2}$	24	12960
2	$0, 1, 00, 01$	$s_3; s_4; h_{2,2} t_{0,2}$	12	25920
3	$0, 1, 00, 13$	$h_{8,4} v; h_{2,2} t_{2,6}$	4	77760
4	$0, 00, 01, 22$	$s_3; s_4; h_{1,2} t_{0,2}$	12	25920
5	$0, 00, 01, 13$	$h_{1,2} t_{0,2} s_4$	2	155020
6	$0, 00, 11, 23$	$h_{2,2} t_{2,2} s_4; h_{2,3} s_3$	6	51840
7	$0, 00, 11, 32$	$h_{2,2} t_{2,2} s_4; h_{3,2} s_3$	6	51840
8	$0, 00, 11, 34$	$t_{3,4} h_{6,8} s$	3	103680
9	$0, 00, 11, 36$	$h_{3,6} s_3$	2	155020
10	$00, 01, 10, 11$	$s_3; s_4; t; t_{0,1} h_{1,2}; t t_{1,1} h_{2,2}$	48	6480
11	$00, 01, 10, 12$	$s_3; s_4; t_{0,1} v h_{1,2}; t_{1,0} h_{2,2}; v h_{2,1} t_{0,2}$	24	12960
12	$00, 01, 10, 13$	$t_{1,0} h_{2,3} s_3$	2	155020
13	$00, 01, 10, 23$	$e$	1	311040
14	$00, 01, 10, 33$	$t; t_{3,3} h_{8,1} v h_{6,7}$	4	77760
15	$00, 01, 10, 36$	$t s_3$	2	155020
16	$00, 01, 10, 38$	$t s_5$	2	155020
17	$00, 01, 13, 14$	$h_{6,2} v h_{1,6}; h_{1,2} t_{0,2} s_3; t_{1,4} h_{4,7} v h_{5,8}$	8	38880
18	$00, 01, 13, 17$	$h_{1,2} t_{0,2} s_4; t_{1,3} h_{2,4} s_4$	8	38880
19	$00, 01, 13, 33$	$t t_{3,3} h_{7,7} s_5$	2	155020

Таблица 7

Сведения об опорных подплоскостях порядка  $t$  в плоскости трансляций

<b>m</b>	<b>i</b>	Порождающая опорная 4-дуга $S_i^4$	$n_x$	Точки и прямые опорной подплоскости
<b>2</b>	5	$0, 00, 01, 13$	<b>51 840</b> типа $\alpha$	$0 \ 0 \ 0 \ 00 \ 00 \ 01 \ 50$ $00 \ 01 \ 13 \ 01 \ 13 \ 13 \ 61$ $50 \ 61 \ 03 \ 03 \ 61 \ 50 \ 03$ <b><math>00 \ 01 \ 03 \ 0 \ 30 \ 51 \ 83</math></b>
	6	$0, 00, 11, 23$		
	12	$00, 01, 10, 13$		
<b>3</b>	1	$\infty, 0, 00, 11$	<b>360</b> типа $\beta$	$0 \ 0 \ 0 \ \infty \ \infty \ 00 \ 0 \ \infty \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2$ $\infty \ 00 \ 21 \ 00 \ 21 \ 21 \ 02 \ 10 \ 01 \ 02 \ 00 \ 01 \ 02$ $1 \ 20 \ 01 \ 01 \ 20 \ 12 \ 22 \ 11 \ 22 \ 20 \ 22 \ 20 \ 21$ $2 \ 10 \ 11 \ 02 \ 22 \ 1 \ 12 \ 12 \ 10 \ 11 \ 11 \ 12 \ 10$ <b><math>\infty \ 00 \ 01 \ 0 \ 2 \ 10 \ 02 \ 1 \ 11 \ 12 \ 20 \ 21 \ 22</math></b>
	2	$0, 1, 00, 01$		
	4	$0, 00, 01, 22$		
	10	$00, 01, 10, 11$		
	11	$00, 01, 10, 12$		
<b>3</b>	3	$0, 1, 10, 13$	<b>720</b> типа $\gamma$	$0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 00 \ 0 \ 1 \ 3 \ 3 \ 5 \ 5 \ 5$ $1 \ 00 \ 13 \ 00 \ 13 \ 13 \ 66 \ 50 \ 50 \ 70 \ 00 \ 66 \ 33$ $3 \ 50 \ 33 \ 33 \ 46 \ 26 \ 46 \ 26 \ 33 \ 66 \ 46 \ 13 \ 26$ $5 \ 70 \ 83 \ 66 \ 70 \ 3 \ 26 \ 83 \ 46 \ 83 \ 83 \ 50 \ 70$ <b><math>\infty \ 00 \ 03 \ 10 \ 15 \ 30 \ 06 \ 17 \ 34 \ 38 \ 50 \ 51 \ 52</math></b>
	7	$0, 00, 11, 32$		
	17	$00, 01, 13, 14$		

*Список прямых плоскости сдвигов порядка 9*

$\infty$	$\infty$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>0</b>	$\infty$	00	01	02	03	04	05	06	07	08
<b>1</b>	$\infty$	10	11	12	13	14	15	16	17	18
<b>2</b>	$\infty$	20	21	22	23	24	25	26	27	28
<b>3</b>	$\infty$	30	31	32	33	34	35	36	37	38
<b>4</b>	$\infty$	40	41	42	43	44	45	46	47	48
<b>5</b>	$\infty$	50	51	52	53	54	55	56	57	58
<b>6</b>	$\infty$	60	61	62	63	64	65	66	67	68
<b>7</b>	$\infty$	70	71	72	73	74	75	76	77	78
<b>8</b>	$\infty$	80	81	82	83	84	85	86	87	88
<b>00</b>	0	00	10	20	30	40	50	60	70	80
<b>01</b>	0	01	11	21	31	41	51	61	71	81
<b>02</b>	0	02	12	22	32	42	52	62	72	82
<b>03</b>	0	03	13	23	33	43	53	63	73	83
<b>04</b>	0	04	14	24	34	44	54	64	74	84
<b>05</b>	0	05	15	25	35	45	55	65	75	85
<b>06</b>	0	06	16	26	36	46	56	66	76	86
<b>07</b>	0	07	17	27	37	47	57	67	77	87
<b>08</b>	0	08	18	28	38	48	58	68	78	88
<b>10</b>	1	00	11	22	33	44	55	66	77	88
<b>11</b>	1	01	12	20	34	45	53	67	78	86
<b>12</b>	1	02	10	21	35	43	54	68	76	87
<b>13</b>	1	03	14	25	36	47	58	60	71	82
<b>14</b>	1	04	15	23	37	48	56	61	72	80
<b>15</b>	1	05	13	24	38	46	57	62	70	81
<b>16</b>	1	06	17	28	30	41	52	63	74	85
<b>17</b>	1	07	18	26	31	42	50	64	75	83
<b>18</b>	1	08	16	27	32	40	51	65	73	84
<b>20</b>	2	00	12	21	36	48	57	63	75	84
<b>21</b>	2	01	10	22	37	46	58	64	73	85
<b>22</b>	2	02	11	20	38	47	56	65	74	83
<b>23</b>	2	03	15	24	30	42	51	66	78	87
<b>24</b>	2	04	13	25	31	40	52	67	76	88
<b>25</b>	2	05	14	23	32	41	50	68	77	86
<b>26</b>	2	06	18	27	33	45	54	60	72	81
<b>27</b>	2	07	16	28	34	43	55	61	70	82
<b>28</b>	2	08	17	26	35	44	53	62	71	80
<b>30</b>	3	00	13	26	32	47	54	61	78	85
<b>31</b>	3	01	14	27	30	48	55	62	76	83
<b>32</b>	3	02	15	28	31	46	53	60	77	84
<b>33</b>	3	03	16	20	35	41	57	64	72	88
<b>34</b>	3	04	17	21	33	42	58	65	70	86
<b>35</b>	3	05	18	22	34	40	56	63	71	87
<b>36</b>	3	06	10	23	38	44	51	67	75	82
<b>37</b>	3	07	11	24	36	45	52	68	73	80
<b>38</b>	3	08	12	25	37	43	50	66	74	81

<b>40</b>	4	00	14	28	35	42	56	67	73	81
<b>41</b>	4	01	15	26	33	40	57	68	74	82
<b>42</b>	4	02	13	27	34	41	58	66	75	80
<b>43</b>	4	03	17	22	38	45	50	61	76	84
<b>44</b>	4	04	18	20	36	43	51	62	77	85
<b>45</b>	4	05	16	21	37	44	52	60	78	83
<b>46</b>	4	06	11	25	32	48	53	64	70	87
<b>47</b>	4	07	12	23	30	46	54	65	71	88
<b>48</b>	4	08	10	24	31	47	55	63	72	86
<b>50</b>	5	00	15	27	38	43	52	64	71	86
<b>51</b>	5	01	13	28	36	44	50	65	72	87
<b>52</b>	5	02	14	26	37	45	51	63	70	88
<b>53</b>	5	03	18	21	32	46	55	67	74	80
<b>54</b>	5	04	16	22	30	47	53	68	75	81
<b>55</b>	5	05	17	20	31	48	54	66	73	82
<b>56</b>	5	06	12	24	35	40	58	61	77	83
<b>57</b>	5	07	10	25	33	41	56	62	78	84
<b>58</b>	5	08	11	23	34	42	57	60	76	85
<b>60</b>	6	00	16	23	31	45	58	62	74	87
<b>61</b>	6	01	17	24	32	43	56	60	75	88
<b>62</b>	6	02	18	25	30	44	57	61	73	86
<b>63</b>	6	03	10	26	34	48	52	65	77	81
<b>64</b>	6	04	11	27	35	46	50	63	78	82
<b>65</b>	6	05	12	28	33	47	51	64	76	80
<b>66</b>	6	06	13	20	37	42	55	68	71	84
<b>67</b>	6	07	14	21	38	40	53	66	71	85
<b>68</b>	6	08	15	22	36	41	54	67	70	83
<b>70</b>	7	00	17	25	34	46	51	68	72	83
<b>71</b>	7	01	18	23	35	47	52	66	70	84
<b>72</b>	7	02	16	24	33	48	50	67	71	85
<b>73</b>	7	03	11	28	37	40	54	62	75	86
<b>74</b>	7	04	12	26	38	41	55	60	73	87
<b>75</b>	7	05	10	27	36	42	53	61	74	88
<b>76</b>	7	06	14	22	31	43	57	65	78	80
<b>77</b>	7	07	15	20	32	44	58	63	76	81
<b>78</b>	7	08	13	21	30	45	56	64	77	82
<b>80</b>	8	00	18	24	37	41	53	65	76	82
<b>81</b>	8	01	16	25	38	42	54	63	77	80
<b>82</b>	8	02	17	23	36	40	55	64	78	81
<b>83</b>	8	03	12	27	31	44	56	68	70	85
<b>84</b>	8	04	10	28	32	45	57	66	71	83
<b>85</b>	8	05	11	26	30	43	58	67	72	84
<b>86</b>	8	06	15	21	34	47	50	62	73	88
<b>87</b>	8	07	13	22	35	48	51	60	74	86
<b>88</b>	8	08	14	20	33	46	52	61	75	87

Таблица 9

Сведения об опорных четырехсторонниках плоскости  $PT(9)$ 

<b>i</b>	<b>Опорный четырех- сторонник <math>S_i^4</math></b>	<b>Образующие элементы группы <math>G_i^4</math></b>	<b><math> G_i^4 </math></b>	<b><math>N_i^4</math></b>
1	$\infty, 0, 00, 11$	$s_3; s_4; h_{2,2} t$	12	25920
2	$\infty, 00, 10, 51$	$v h_{8,4}; t_{5,0} h_{1,5} s_5$	6	51840
3	$0, 1, 00, 01$	$s_3; s_4; h_{1,2} t_{0,2}; h_{2,1} t_{2,0}; t$	48	6480
4	$0, 00, 01, 12$	$s_3; s_4; h_{1,2} t_{0,2}$	12	25920
5	$0, 00, 01, 83$	$s_4 h_{1,2} t_{0,2}$	2	155020
6	$00, 01, 10, 11$	$s_3; s_4; h_{2,2} t_{0,2}; t_{1,1} v h_{1,2}$	24	12960
7	$00, 01, 10, 13$	$s_3 h_{2,2} t_{2,2}; s_3 t_{3,0}; v h_{3,6}$	8	38880
8	$00, 01, 10, 21$	$s_3; s_4; h_{2,2} t_{2,2}; t_{1,0} h_{2,1}$	24	12960
9	$00, 01, 10, 23$	$s_5 h_{2,2} t_{2,2}; t_{3,0} h_{2,1}$	4	77760
10	$00, 01, 10, 31$	$t_{1,0} h_{3,2} s_3$	2	155520
11	$00, 01, 10, 32$	$e$	1	311040
12	$00, 01, 10, 35$	$t_{1,1} h_{2,2}; t_{8,0} h_{6,1} s_3$	4	77760
13	$0, 00, 21, 13$	$s_3 t; s_3 h_{3,6}; h_{8,4} t_{3,2} v$	8	38880
14	$0, 00, 21, 32$	$s_3 h_{3,2}$	2	155020
15	$0, 00, 21, 34$	$t s_3 h_{7,8}$	2	155020
16	$0, 00, 21, 35$	$s_3 t$	2	155020
17	$0, 30, 51, 83$	$h_{1,2} t_{0,2} s_4; s_3 h_{3,6}$	6	51840
18	$0, 30, 51, 82$	$h_{1,2} t_{0,2} s_4$	2	155020
19	$0, 30, 51, 46$	$h_{6,2} v h_{1,3} t_{0,2} s_4$	3	103680

Сведения об опорных подплоскостях порядка  $t$  в плоскости сдвигов

$m$	$i$	Порождающая опорная 4-дуга $S_i^4$	$n_x$	Прямые и точки опорной подплоскости
2	5	$0, 00, 01, 83$	<b>51 840</b> типа $\alpha^*$	<b>0 0 0 00 00 01 70</b> <b>00 01 03 01 23 23 31</b> <b>70 31 23 03 31 70 03</b> <u>00 01 03 0 30 51 83</u>
	10	$00, 01, 10, 31$		
	17	$0, 30, 51, 83$		
3	1	$\infty, 0, 00, 11$	<b>360</b> типа $\beta^*$	$\infty \infty \infty \infty$ <b>0 0 0 1 1 1 2 2 2</b> <b>0 00 10 20 00 01 02 00 01 02 00 01 02</b> <b>1 01 11 21 10 11 12 12 10 11 11 12 10</b> <b>2 02 12 22 20 21 22 21 22 20 22 20 21</b> <u><math>\infty 0 1 2 00 01 02 10 11 12 20 21 22</math></u>
	3	$0, 2, 00, 01$		
	4	$0, 00, 01, 12$		
	6	$00, 01, 10, 11$		
	8	$00, 01, 10, 21$		
	3	2	$\infty, 00, 10, 51$	<b>720</b> типа $\gamma^*$
7		$00, 01, 10, 13$		
12		$00, 01, 10, 35$		

## Список прямых плоскости Хьюза порядка 9

<b>a<sub>0</sub></b>	A <sub>0</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>9</sub>	B <sub>0</sub>	C <sub>0</sub>	D <sub>0</sub>	E <sub>0</sub>	F <sub>0</sub>	G <sub>0</sub>
<b>a<sub>1</sub></b>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>10</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	E <sub>1</sub>	F <sub>1</sub>	G <sub>1</sub>
<b>a<sub>2</sub></b>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>11</sub>	B <sub>2</sub>	C <sub>2</sub>	D <sub>2</sub>	E <sub>2</sub>	F <sub>2</sub>	G <sub>2</sub>
<b>a<sub>3</sub></b>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>6</sub>	A <sub>12</sub>	B <sub>3</sub>	C <sub>3</sub>	D <sub>3</sub>	E <sub>3</sub>	F <sub>3</sub>	G <sub>3</sub>
<b>a<sub>4</sub></b>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>7</sub>	A <sub>0</sub>	B <sub>4</sub>	C <sub>4</sub>	D <sub>4</sub>	E <sub>4</sub>	F <sub>4</sub>	G <sub>4</sub>
<b>a<sub>5</sub></b>	A <sub>5</sub>	A <sub>6</sub>	A <sub>8</sub>	A <sub>1</sub>	B <sub>5</sub>	C <sub>5</sub>	D <sub>5</sub>	E <sub>5</sub>	F <sub>5</sub>	G <sub>5</sub>
<b>a<sub>6</sub></b>	A <sub>6</sub>	A <sub>7</sub>	A <sub>9</sub>	A <sub>2</sub>	B <sub>6</sub>	C <sub>6</sub>	D <sub>6</sub>	E <sub>6</sub>	F <sub>6</sub>	G <sub>6</sub>
<b>a<sub>7</sub></b>	A <sub>7</sub>	A <sub>8</sub>	A <sub>10</sub>	A <sub>3</sub>	B <sub>7</sub>	C <sub>7</sub>	D <sub>7</sub>	E <sub>7</sub>	F <sub>7</sub>	G <sub>7</sub>
<b>a<sub>8</sub></b>	A <sub>8</sub>	A <sub>9</sub>	A <sub>11</sub>	A <sub>4</sub>	B <sub>8</sub>	C <sub>8</sub>	D <sub>8</sub>	E <sub>8</sub>	F <sub>8</sub>	G <sub>8</sub>
<b>a<sub>9</sub></b>	A <sub>9</sub>	A <sub>10</sub>	A <sub>12</sub>	A <sub>5</sub>	B <sub>9</sub>	C <sub>9</sub>	D <sub>9</sub>	E <sub>9</sub>	F <sub>9</sub>	G <sub>9</sub>
<b>a<sub>10</sub></b>	A <sub>10</sub>	A <sub>11</sub>	A <sub>0</sub>	A <sub>6</sub>	B <sub>10</sub>	C <sub>10</sub>	D <sub>10</sub>	E <sub>10</sub>	F <sub>10</sub>	G <sub>10</sub>
<b>a<sub>11</sub></b>	A <sub>11</sub>	A <sub>12</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>7</sub>	B <sub>11</sub>	C <sub>11</sub>	D <sub>11</sub>	E <sub>11</sub>	F <sub>11</sub>	G <sub>11</sub>
<b>a<sub>12</sub></b>	A <sub>12</sub>	A <sub>0</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>8</sub>	B <sub>12</sub>	C <sub>12</sub>	D <sub>12</sub>	E <sub>12</sub>	F <sub>12</sub>	G <sub>12</sub>
<b>b<sub>0</sub></b>	A <sub>0</sub>	E <sub>1</sub>	E <sub>8</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>5</sub>	B <sub>6</sub>	G <sub>3</sub>	G <sub>11</sub>	F <sub>7</sub>	F <sub>9</sub>
<b>b<sub>1</sub></b>	A <sub>1</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>9</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>6</sub>	B <sub>7</sub>	G <sub>4</sub>	G <sub>12</sub>	F <sub>8</sub>	F <sub>10</sub>
<b>b<sub>2</sub></b>	A <sub>2</sub>	E <sub>3</sub>	E <sub>10</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>7</sub>	B <sub>8</sub>	G <sub>5</sub>	G <sub>0</sub>	F <sub>9</sub>	F <sub>11</sub>
<b>b<sub>3</sub></b>	A <sub>3</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>11</sub>	B <sub>5</sub>	B <sub>8</sub>	B <sub>9</sub>	G <sub>6</sub>	G <sub>1</sub>	F <sub>10</sub>	F <sub>12</sub>
<b>b<sub>4</sub></b>	A <sub>4</sub>	E <sub>5</sub>	E <sub>12</sub>	B <sub>6</sub>	B <sub>9</sub>	B <sub>10</sub>	G <sub>7</sub>	G <sub>2</sub>	F <sub>11</sub>	F <sub>0</sub>
<b>b<sub>5</sub></b>	A <sub>5</sub>	E <sub>6</sub>	E <sub>0</sub>	B <sub>7</sub>	B <sub>10</sub>	B <sub>11</sub>	G <sub>8</sub>	G <sub>3</sub>	F <sub>12</sub>	F <sub>1</sub>
<b>b<sub>6</sub></b>	A <sub>6</sub>	E <sub>7</sub>	E <sub>1</sub>	B <sub>8</sub>	B <sub>11</sub>	B <sub>12</sub>	G <sub>9</sub>	G <sub>4</sub>	F <sub>0</sub>	F <sub>2</sub>
<b>b<sub>7</sub></b>	A <sub>7</sub>	E <sub>8</sub>	E <sub>2</sub>	B <sub>9</sub>	B <sub>12</sub>	B <sub>0</sub>	G <sub>10</sub>	G <sub>5</sub>	F <sub>1</sub>	F <sub>3</sub>
<b>b<sub>8</sub></b>	A <sub>8</sub>	E <sub>9</sub>	E <sub>3</sub>	B <sub>10</sub>	B <sub>0</sub>	B <sub>1</sub>	G <sub>11</sub>	G <sub>6</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>4</sub>
<b>b<sub>9</sub></b>	A <sub>9</sub>	E <sub>10</sub>	E <sub>4</sub>	B <sub>11</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	G <sub>12</sub>	G <sub>7</sub>	F <sub>3</sub>	F <sub>5</sub>
<b>b<sub>10</sub></b>	A <sub>10</sub>	E <sub>11</sub>	E <sub>5</sub>	B <sub>12</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	G <sub>0</sub>	G <sub>8</sub>	F <sub>4</sub>	F <sub>6</sub>
<b>b<sub>11</sub></b>	A <sub>11</sub>	E <sub>12</sub>	E <sub>6</sub>	B <sub>0</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	G <sub>1</sub>	G <sub>9</sub>	F <sub>5</sub>	F <sub>7</sub>
<b>b<sub>12</sub></b>	A <sub>12</sub>	E <sub>0</sub>	E <sub>7</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	G <sub>2</sub>	G <sub>10</sub>	F <sub>6</sub>	F <sub>8</sub>
<b>c<sub>0</sub></b>	A <sub>0</sub>	G <sub>1</sub>	G <sub>8</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>5</sub>	C <sub>6</sub>	F <sub>3</sub>	F <sub>11</sub>	E <sub>7</sub>	E <sub>9</sub>
<b>c<sub>1</sub></b>	A <sub>1</sub>	G <sub>2</sub>	G <sub>9</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>6</sub>	C <sub>7</sub>	F <sub>4</sub>	F <sub>12</sub>	E <sub>8</sub>	E <sub>10</sub>
<b>c<sub>2</sub></b>	A <sub>2</sub>	G <sub>3</sub>	G <sub>10</sub>	C <sub>4</sub>	C <sub>7</sub>	C <sub>8</sub>	F <sub>5</sub>	F <sub>0</sub>	E <sub>9</sub>	E <sub>11</sub>
<b>c<sub>3</sub></b>	A <sub>3</sub>	G <sub>4</sub>	G <sub>11</sub>	C <sub>5</sub>	C <sub>8</sub>	C <sub>9</sub>	F <sub>6</sub>	F <sub>1</sub>	E <sub>10</sub>	E <sub>12</sub>
<b>c<sub>4</sub></b>	A <sub>4</sub>	G <sub>5</sub>	G <sub>12</sub>	C <sub>6</sub>	C <sub>9</sub>	C <sub>10</sub>	F <sub>7</sub>	F <sub>2</sub>	E <sub>11</sub>	E <sub>0</sub>
<b>c<sub>5</sub></b>	A <sub>5</sub>	G <sub>6</sub>	G <sub>0</sub>	C <sub>7</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>11</sub>	F <sub>8</sub>	F <sub>3</sub>	E <sub>12</sub>	E <sub>1</sub>
<b>c<sub>6</sub></b>	A <sub>6</sub>	G <sub>7</sub>	G <sub>1</sub>	C <sub>8</sub>	C <sub>11</sub>	C <sub>12</sub>	F <sub>9</sub>	F <sub>4</sub>	E <sub>0</sub>	E <sub>2</sub>
<b>c<sub>7</sub></b>	A <sub>7</sub>	G <sub>8</sub>	G <sub>2</sub>	C <sub>9</sub>	C <sub>12</sub>	C <sub>0</sub>	F <sub>10</sub>	F <sub>5</sub>	E <sub>1</sub>	E <sub>3</sub>
<b>c<sub>8</sub></b>	A <sub>8</sub>	G <sub>9</sub>	G <sub>3</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>0</sub>	C <sub>1</sub>	F <sub>11</sub>	F <sub>6</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>4</sub>
<b>c<sub>9</sub></b>	A <sub>9</sub>	G <sub>10</sub>	G <sub>4</sub>	C <sub>11</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	F <sub>12</sub>	F <sub>7</sub>	E <sub>3</sub>	E <sub>5</sub>
<b>c<sub>10</sub></b>	A <sub>10</sub>	G <sub>11</sub>	G <sub>5</sub>	C <sub>12</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	F <sub>0</sub>	F <sub>8</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>6</sub>
<b>c<sub>11</sub></b>	A <sub>11</sub>	G <sub>12</sub>	G <sub>6</sub>	C <sub>0</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>	F <sub>1</sub>	F <sub>9</sub>	E <sub>5</sub>	E <sub>7</sub>
<b>c<sub>12</sub></b>	A <sub>12</sub>	G <sub>0</sub>	G <sub>7</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>4</sub>	C <sub>5</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>10</sub>	E <sub>6</sub>	E <sub>8</sub>
<b>d<sub>0</sub></b>	A <sub>0</sub>	F <sub>1</sub>	F <sub>8</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>5</sub>	D <sub>6</sub>	E <sub>3</sub>	E <sub>11</sub>	G <sub>7</sub>	G <sub>9</sub>
<b>d<sub>1</sub></b>	A <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>9</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>6</sub>	D <sub>7</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>12</sub>	G <sub>8</sub>	G <sub>10</sub>
<b>d<sub>2</sub></b>	A <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	F <sub>10</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>7</sub>	D <sub>8</sub>	E <sub>5</sub>	E <sub>0</sub>	G <sub>9</sub>	G <sub>11</sub>
<b>d<sub>3</sub></b>	A <sub>3</sub>	F <sub>4</sub>	F <sub>11</sub>	D <sub>5</sub>	D <sub>8</sub>	D <sub>9</sub>	E <sub>6</sub>	E <sub>1</sub>	G <sub>10</sub>	G <sub>12</sub>
<b>d<sub>4</sub></b>	A <sub>4</sub>	F <sub>5</sub>	F <sub>12</sub>	D <sub>6</sub>	D <sub>9</sub>	D <sub>10</sub>	E <sub>7</sub>	E <sub>2</sub>	G <sub>11</sub>	G <sub>0</sub>
<b>d<sub>5</sub></b>	A <sub>5</sub>	F <sub>6</sub>	F <sub>0</sub>	D <sub>7</sub>	D <sub>10</sub>	D <sub>11</sub>	E <sub>8</sub>	E <sub>3</sub>	G <sub>12</sub>	G <sub>1</sub>
<b>d<sub>6</sub></b>	A <sub>6</sub>	F <sub>7</sub>	F <sub>1</sub>	D <sub>8</sub>	D <sub>11</sub>	D <sub>12</sub>	E <sub>9</sub>	E <sub>4</sub>	G <sub>0</sub>	G <sub>2</sub>
<b>d<sub>7</sub></b>	A <sub>7</sub>	F <sub>8</sub>	F <sub>2</sub>	D <sub>9</sub>	D <sub>12</sub>	D <sub>0</sub>	E <sub>10</sub>	E <sub>5</sub>	G <sub>1</sub>	G <sub>3</sub>



<b>d<sub>8</sub></b>	A <sub>8</sub>	F <sub>9</sub>	F <sub>3</sub>	D <sub>10</sub>	D <sub>0</sub>	D <sub>1</sub>	E <sub>11</sub>	E <sub>6</sub>	G <sub>2</sub>	G <sub>4</sub>
<b>d<sub>9</sub></b>	A <sub>9</sub>	F <sub>10</sub>	F <sub>4</sub>	D <sub>11</sub>	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	E <sub>12</sub>	E <sub>7</sub>	G <sub>3</sub>	G <sub>5</sub>
<b>d<sub>10</sub></b>	A <sub>10</sub>	F <sub>11</sub>	F <sub>5</sub>	D <sub>12</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	E <sub>0</sub>	E <sub>8</sub>	G <sub>4</sub>	G <sub>6</sub>
<b>d<sub>11</sub></b>	A <sub>11</sub>	F <sub>12</sub>	F <sub>6</sub>	D <sub>0</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>	E <sub>1</sub>	E <sub>9</sub>	G <sub>5</sub>	G <sub>7</sub>
<b>d<sub>12</sub></b>	A <sub>12</sub>	F <sub>0</sub>	F <sub>7</sub>	D <sub>1</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>5</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>10</sub>	G <sub>6</sub>	G <sub>8</sub>
<b>e<sub>0</sub></b>	A <sub>0</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>8</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>5</sub>	E <sub>6</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>11</sub>	C <sub>7</sub>	C <sub>9</sub>
<b>e<sub>1</sub></b>	A <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>9</sub>	E <sub>3</sub>	E <sub>6</sub>	E <sub>7</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>12</sub>	C <sub>8</sub>	C <sub>10</sub>
<b>e<sub>2</sub></b>	A <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>10</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>7</sub>	E <sub>8</sub>	D <sub>5</sub>	D <sub>0</sub>	C <sub>9</sub>	C <sub>11</sub>
<b>e<sub>3</sub></b>	A <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>11</sub>	E <sub>5</sub>	E <sub>8</sub>	E <sub>9</sub>	D <sub>6</sub>	D <sub>1</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>12</sub>
<b>e<sub>4</sub></b>	A <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	B <sub>12</sub>	E <sub>6</sub>	E <sub>9</sub>	E <sub>10</sub>	D <sub>7</sub>	D <sub>2</sub>	C <sub>11</sub>	C <sub>0</sub>
<b>e<sub>5</sub></b>	A <sub>5</sub>	B <sub>6</sub>	B <sub>0</sub>	E <sub>7</sub>	E <sub>10</sub>	E <sub>11</sub>	D <sub>8</sub>	D <sub>3</sub>	C <sub>12</sub>	C <sub>1</sub>
<b>e<sub>6</sub></b>	A <sub>6</sub>	B <sub>7</sub>	B <sub>1</sub>	E <sub>8</sub>	E <sub>11</sub>	E <sub>12</sub>	D <sub>9</sub>	D <sub>4</sub>	C <sub>0</sub>	C <sub>2</sub>
<b>e<sub>7</sub></b>	A <sub>7</sub>	B <sub>8</sub>	B <sub>2</sub>	E <sub>9</sub>	E <sub>12</sub>	E <sub>0</sub>	D <sub>10</sub>	D <sub>5</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>3</sub>
<b>e<sub>8</sub></b>	A <sub>8</sub>	B <sub>9</sub>	B <sub>3</sub>	E <sub>10</sub>	E <sub>0</sub>	E <sub>1</sub>	D <sub>11</sub>	D <sub>6</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>4</sub>
<b>e<sub>9</sub></b>	A <sub>9</sub>	B <sub>10</sub>	B <sub>4</sub>	E <sub>11</sub>	E <sub>1</sub>	E <sub>2</sub>	D <sub>12</sub>	D <sub>7</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>5</sub>
<b>e<sub>10</sub></b>	A <sub>10</sub>	B <sub>11</sub>	B <sub>5</sub>	E <sub>12</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>3</sub>	D <sub>0</sub>	D <sub>8</sub>	C <sub>4</sub>	C <sub>6</sub>
<b>e<sub>11</sub></b>	A <sub>11</sub>	B <sub>12</sub>	B <sub>6</sub>	E <sub>0</sub>	E <sub>3</sub>	E <sub>4</sub>	D <sub>1</sub>	D <sub>9</sub>	C <sub>5</sub>	C <sub>7</sub>
<b>e<sub>12</sub></b>	A <sub>12</sub>	B <sub>0</sub>	B <sub>7</sub>	E <sub>1</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>5</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>10</sub>	C <sub>6</sub>	C <sub>8</sub>
<b>f<sub>0</sub></b>	A <sub>0</sub>	D <sub>1</sub>	D <sub>8</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>5</sub>	F <sub>6</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>11</sub>	B <sub>7</sub>	B <sub>9</sub>
<b>f<sub>1</sub></b>	A <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>9</sub>	F <sub>3</sub>	F <sub>6</sub>	F <sub>7</sub>	C <sub>4</sub>	C <sub>12</sub>	B <sub>8</sub>	B <sub>10</sub>
<b>f<sub>2</sub></b>	A <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>10</sub>	F <sub>4</sub>	F <sub>7</sub>	F <sub>8</sub>	C <sub>5</sub>	C <sub>0</sub>	B <sub>9</sub>	B <sub>11</sub>
<b>f<sub>3</sub></b>	A <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>11</sub>	F <sub>5</sub>	F <sub>8</sub>	F <sub>9</sub>	C <sub>6</sub>	C <sub>1</sub>	B <sub>10</sub>	B <sub>12</sub>
<b>f<sub>4</sub></b>	A <sub>4</sub>	D <sub>5</sub>	D <sub>12</sub>	F <sub>6</sub>	F <sub>9</sub>	F <sub>10</sub>	C <sub>7</sub>	C <sub>2</sub>	B <sub>11</sub>	B <sub>0</sub>
<b>f<sub>5</sub></b>	A <sub>5</sub>	D <sub>6</sub>	D <sub>0</sub>	F <sub>7</sub>	F <sub>10</sub>	F <sub>11</sub>	C <sub>8</sub>	C <sub>3</sub>	B <sub>12</sub>	B <sub>1</sub>
<b>f<sub>6</sub></b>	A <sub>6</sub>	D <sub>7</sub>	D <sub>1</sub>	F <sub>8</sub>	F <sub>11</sub>	F <sub>12</sub>	C <sub>9</sub>	C <sub>4</sub>	B <sub>0</sub>	B <sub>2</sub>
<b>f<sub>7</sub></b>	A <sub>7</sub>	D <sub>8</sub>	D <sub>2</sub>	F <sub>9</sub>	F <sub>12</sub>	F <sub>0</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>5</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>3</sub>
<b>f<sub>8</sub></b>	A <sub>8</sub>	D <sub>9</sub>	D <sub>3</sub>	F <sub>10</sub>	F <sub>0</sub>	F <sub>1</sub>	C <sub>11</sub>	C <sub>6</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>4</sub>
<b>f<sub>9</sub></b>	A <sub>9</sub>	D <sub>10</sub>	D <sub>4</sub>	F <sub>11</sub>	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	C <sub>12</sub>	C <sub>7</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>5</sub>
<b>f<sub>10</sub></b>	A <sub>10</sub>	D <sub>11</sub>	D <sub>5</sub>	F <sub>12</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	C <sub>0</sub>	C <sub>8</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>6</sub>
<b>f<sub>11</sub></b>	A <sub>11</sub>	D <sub>12</sub>	D <sub>6</sub>	F <sub>0</sub>	F <sub>3</sub>	F <sub>4</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>9</sub>	B <sub>5</sub>	B <sub>7</sub>
<b>f<sub>12</sub></b>	A <sub>12</sub>	D <sub>0</sub>	D <sub>7</sub>	F <sub>1</sub>	F <sub>4</sub>	F <sub>5</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>10</sub>	B <sub>6</sub>	B <sub>8</sub>
<b>g<sub>0</sub></b>	A <sub>0</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>8</sub>	G <sub>2</sub>	G <sub>5</sub>	G <sub>6</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>11</sub>	D <sub>7</sub>	D <sub>9</sub>
<b>g<sub>1</sub></b>	A <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>9</sub>	G <sub>3</sub>	G <sub>6</sub>	G <sub>7</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>12</sub>	D <sub>8</sub>	D <sub>10</sub>
<b>g<sub>2</sub></b>	A <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>10</sub>	G <sub>4</sub>	G <sub>7</sub>	G <sub>8</sub>	B <sub>5</sub>	B <sub>0</sub>	D <sub>9</sub>	D <sub>11</sub>
<b>g<sub>3</sub></b>	A <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>	C <sub>11</sub>	G <sub>5</sub>	G <sub>8</sub>	G <sub>9</sub>	B <sub>6</sub>	B <sub>1</sub>	D <sub>10</sub>	D <sub>12</sub>
<b>g<sub>4</sub></b>	A <sub>4</sub>	C <sub>5</sub>	C <sub>12</sub>	G <sub>6</sub>	G <sub>9</sub>	G <sub>10</sub>	B <sub>7</sub>	B <sub>2</sub>	D <sub>11</sub>	D <sub>0</sub>
<b>g<sub>5</sub></b>	A <sub>5</sub>	C <sub>6</sub>	C <sub>0</sub>	G <sub>7</sub>	G <sub>10</sub>	G <sub>11</sub>	B <sub>8</sub>	B <sub>3</sub>	D <sub>12</sub>	D <sub>1</sub>
<b>g<sub>6</sub></b>	A <sub>6</sub>	C <sub>7</sub>	C <sub>1</sub>	G <sub>8</sub>	G <sub>11</sub>	G <sub>12</sub>	B <sub>9</sub>	B <sub>4</sub>	D <sub>0</sub>	D <sub>2</sub>
<b>g<sub>7</sub></b>	A <sub>7</sub>	C <sub>8</sub>	C <sub>2</sub>	G <sub>9</sub>	G <sub>12</sub>	G <sub>0</sub>	B <sub>10</sub>	B <sub>5</sub>	D <sub>1</sub>	D <sub>3</sub>
<b>g<sub>8</sub></b>	A <sub>8</sub>	C <sub>9</sub>	C <sub>3</sub>	G <sub>10</sub>	G <sub>0</sub>	G <sub>1</sub>	B <sub>11</sub>	B <sub>6</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>4</sub>
<b>g<sub>9</sub></b>	A <sub>9</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>4</sub>	G <sub>11</sub>	G <sub>1</sub>	G <sub>2</sub>	B <sub>12</sub>	B <sub>7</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>5</sub>
<b>g<sub>10</sub></b>	A <sub>10</sub>	C <sub>11</sub>	C <sub>5</sub>	G <sub>12</sub>	G <sub>2</sub>	G <sub>3</sub>	B <sub>0</sub>	B <sub>8</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>6</sub>
<b>g<sub>11</sub></b>	A <sub>11</sub>	C <sub>12</sub>	C <sub>6</sub>	G <sub>0</sub>	G <sub>3</sub>	G <sub>4</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>9</sub>	D <sub>5</sub>	D <sub>7</sub>
<b>g<sub>12</sub></b>	A <sub>12</sub>	C <sub>0</sub>	C <sub>7</sub>	G <sub>1</sub>	G <sub>4</sub>	G <sub>5</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>10</sub>	D <sub>6</sub>	D <sub>8</sub>

Таблица 12

Сведения об опорных 4–дугах плоскости  $PH(9)$ 

$i$	Опорная 4–дуга $S_i^4$	Образующие элементы группы $G_i^4$	$ G_i^4 $	$N_i^4$
1	$A_0 A_1 A_2 A_5$	$u_0; u_1; W_{0,11}; W_{4,10}; W_{2,9}; W_{0,11}$	144	234
2	$A_0 A_1 A_2 B_2$	$W_{0,2} u_0; W_{2,9}$	4	8 424
3	$A_0 A_1 A_2 B_3$	$W_{10,4} u_1; W_{6,3} u_2$	6	5 616
4	$A_0 A_1 B_1 B_2$	$W_{0,2} u_0$	2	16 848
5	$A_0 A_1 B_1 C_2$	$e$	1	33 696
6	$A_0 A_1 B_1 F_2$	$e$	1	33 696
7	$A_0 A_1 B_1 B_4$	$W_{3,9} u_0$	2	16 848
8	$A_0 A_1 B_1 C_4$	$W_{0,4} u_2; W_{3,9} u_2$	4	8 424
9	$A_0 A_1 B_1 B_5$	$W_{12,1} u_0; W_{0,12}$	4	8 424
10	$A_0 A_1 B_1 F_5$	$W_{0,12} u_1; h_{0,1}^+ u_-$	6	5 616
11	$A_0 A_1 B_2 C_2$	$W_{0,5} u_0; W_{2,9}; h_{0,3}^+ u_+$	12	2 808
12	$A_0 A_1 B_2 E_2$	$W_{2,9}; W_{0,2} u_0; u_0;$	8	4 212
13	$A_0 A_1 B_2 B_3$	$W_{0,10}; W_{9,3} u_1$	4	8 424
14	$A_0 A_1 B_2 F_3$	$h_{0,3}^+ u_+; W_{0,10} u_1; W_{9,3} u_1$	12	2 808
15	$A_0 A_1 B_2 C_6$	$W_{12,1} u_2$	2	16 848
16	$A_0 B_0 B_4 B_1$	$W_{10,2} u_2$	2	16 848
17	$A_0 B_0 B_4 F_1$	$e$	1	33 696
18	$A_0 B_0 B_4 C_1$	$e$	1	33 696
19	$A_0 B_0 B_4 B_2$	$e$	1	33 696
20	$A_0 B_0 B_4 B_{12}$	$W_{12,11}; W_{11,0} u_0$	4	8 424
21	$A_0 B_0 B_4 F_{12}$	$W_{12,11}; h_{10,0}^+ u_-; W_{0,10}$	18	1 872
22	$A_0 B_0 B_4 B_{11}$	$W_{10,12} u_0$	2	16 848
23	$A_0 B_0 B_2 C_2$	$W_{12,3} u_2$	2	16 848
24	$A_0 B_0 B_2 E_2$	$W_{0,2}$	2	16 848
25	$A_0 B_0 B_2 G_2$	$W_{10,3} u_2; W_{0,11}$	4	8 424
26	$A_0 B_0 B_2 B_3$	$W_{10,3} u_2; W_{0,10}$	4	8 424
27	$A_0 B_0 B_2 C_3$	$W_{0,7}$	2	16 848
28	$A_0 B_0 B_2 E_3$	$e$	1	33 696
29	$A_0 B_0 B_2 B_7$	$W_{0,2}$	2	16 848
30	$A_0 B_0 B_2 B_1$	$e$	1	33 696
31	$A_0 B_0 B_2 C_1$	$e$	1	33 696
32	$A_0 B_0 B_2 F_1$	$W_{12,9} u_1$	2	16 848
33	$A_0 B_0 B_2 G_1$	$e$	1	33 696
34	$A_0 B_0 B_2 C_6$	$e$	1	33 696
35	$A_0 B_0 B_2 E_6$	$W_{1,0} u_0$	2	16 848
36	$A_0 B_0 B_2 G_6$	$e$	1	33 696
37	$A_0 B_0 B_2 C_{11}$	$W_{8,0} u_1$	2	16 848
38	$A_0 B_2 C_2 B_1$	$W_{4,2} u_1$	2	16 848
39	$A_0 B_2 C_2 D_6$	$W_{0,2} u_2; h_{12,2}^+ u_-$	6	5 616

Продолжение табл. 12

<b>i</b>	<b>Опорная 4–дуга <math>S_i^4</math></b>	<b>Образующие элементы группы <math>G_i^4</math></b>	<b><math> G_i^4 </math></b>	<b><math>N_i^4</math></b>
40	$A_0 B_2 E_2 C_6$	e	1	33 696
41	$A_0 B_2 C_6 B_1$	$W_{12,4} u_1$	2	16 848
42	$A_0 B_2 C_6 B_{11}$	e	1	33 696
43	$A_0 B_2 C_6 E_{11}$	$W_{12,1} u_2; W_{4,3} u_1$	6	5 616
44	$A_0 B_2 C_6 F_8$	$W_{12,1} u_2; W_{0,5} u_1$	6	5 616
45	$A_0 B_2 C_6 C_8$	e	1	33 696
46	$A_0 B_2 C_6 D_7$	$W_{12,10} u_0$	2	16 848
47	$B_0 C_0 B_4 C_4$	$h^+_{10,0} u_-; W_{11,0} u_2; W_{12,11}$	12	2 808
48	$B_0 C_0 B_4 E_4$	$W_{6,0} u_0; W_{0,7}$	4	8 424
49	$B_0 C_0 B_4 B_{12}$	$W_{5,0} u_2$	2	16 848
50	$B_0 C_0 B_4 G_{12}$	$h^+_{10,0} u_-; W_{3,0} u_1; W_{0,6}$	12	2 808
51	$B_0 C_0 B_4 E_{10}$	$W_{6,0} u_0; W_{0,2}$	4	8 424
52	$B_0 C_0 B_4 B_1$	e	1	33 696
53	$B_0 C_0 B_4 C_1$	$W_{3,9} u_2$	2	16 848
54	$B_0 C_0 B_4 B_{11}$	e	1	33 696
55	$B_0 C_0 B_4 F_1$	$W_{8,3} u_2$	2	16 848
56	$B_0 C_0 B_4 G_6$	$W_{11,3} u_0$	2	16 848
57	$B_0 E_0 B_4 E_4$	$W_{4,1}; W_{11,0} u_0; W_{0,7}; W_{12,11}$	16	2 106
58	$B_0 E_0 B_4 F_4$	$W_{4,1}; W_{0,4}; W_{10,2} u_2$	8	4 212
59	$B_0 E_0 B_4 F_1$	e	1	33 696
60	$B_0 E_0 B_4 D_1$	$W_{8,3}$	2	16 848
61	$B_0 E_0 B_4 B_2$	e	1	33 696
62	$B_0 E_0 B_4 D_8$	e	1	33 696
63	$B_0 E_0 B_4 C_8$	e	1	33 696
64	$B_0 E_0 B_4 D_6$	$W_{0,7} u_0$	2	16 848
65	$B_0 E_0 B_4 B_{12}$	$W_{11,0} u_0; W_{0,11} u_0$	4	8 424
66	$B_0 E_0 B_4 C_{12}$	$W_{0,10} u_0$	2	16 848
67	$B_0 E_0 B_4 F_{12}$	$W_{0,10}$	2	16 848
68	$B_0 E_0 B_4 B_{11}$	$W_{0,7} u_0; W_{7,9} u_0$	4	8 424
69	$B_0 B_4 B_{12} B_1$	e	1	33 696
70	$B_0 B_4 B_{12} C_1$	e	1	33 696
71	$B_0 B_4 B_{12} B_6$	e	1	33 696
72	$B_0 B_4 B_{12} F_6$	e	1	33 696
73	$B_0 B_4 B_{12} B_2$	e	1	33 696
74	$B_0 B_4 B_{12} G_2$	e	1	33 696
75	$B_0 B_4 B_{12} F_9$	e	1	33 696
76	$B_0 B_4 B_{12} D_9$	$W_{10,12} u_0$	2	16 848
77	$B_0 B_4 B_{12} B_{10}$	r u.	3	11 232
78	$B_0 B_4 B_{12} B_{11}$	$W_{10,12} u_0$	2	16 848

<b>i</b>	<b>Опорная 4–дуга <math>S_i^4</math></b>	<b>Образующие элементы группы <math>G_i^4</math></b>	<b><math> G_i^4 </math></b>	<b><math>N_i^4</math></b>
79	$B_0 B_4 B_{12} C_{11}$	e	1	33 696
80	$B_0 B_4 F_{12} B_1$	e	1	33 696
81	$B_0 B_4 F_{12} G_2$	e	1	33 696
82	$B_0 B_4 B_1 B_6$	$A^6 r A^7 u_.$	3	11 232
83	$B_0 B_4 B_1 C_6$	$W_{10,2} u_2; W_{5,7} u_1; W_{2,0} u_2$	24	1 404
84	$B_0 B_4 B_1 B_2$	$W_{3,8} u_1$	2	16 848
85	$B_0 B_4 B_1 C_2$	$W_{10,2} u_2$	2	16 848
86	$B_0 B_4 B_1 E_2$	$W_{10,2} u_2$	2	16 848
87	$B_0 B_4 B_{11} B_2$	e	1	33 696
88	$B_0 B_4 B_{11} G_2$	$W_{7,6} u_2$	2	16 848
89	$B_0 B_4 B_2 C_1$	$W_{5,12} u_2$	2	16 848
90	$B_0 B_4 B_2 E_1$	e	1	33 696
91	$B_0 B_4 B_2 G_6$	$W_{7,12} W_{5,9} u_1$	4	8 424
92	$B_0 B_4 B_2 G_{11}$	$W_{10,8} u_1; W_{7,6}$	4	8 424

Сведения об опорных подплоскостях порядка  $t$  в плоскости Хьюза

$m$	$i$	Порождающая опорная 4-дуга $S_i^4$	$n_x$	Точки и прямые опорной подплоскости													
2	3	$A_0 A_1 A_2 B_3$	5 616 типа $\alpha_2$	$A_0 A_0 A_0 A_1 A_1 A_2 D_0$							$A_1 A_2 B_3 A_2 B_3 B_3 G_{12}$						
				$D_0 G_{12} C_1 C_1 G_{12} D_0 C_1$													
				<hr/>							$a_0 a_{12} g_0 a_1 b_1 e_2 g_6$						
	7	$A_0 A_1 B_1 B_4$															
	22	$A_0 B_0 B_4 B_{11}$															
2	38	$A_0 B_2 C_2 B_1$	16 848 типа $\beta_2$	$A_0 A_0 A_0 B_2 B_2 C_2 E_2$							$B_2 C_2 B_1 C_2 B_1 B_1 E_8$						
				$E_8 F_3 E_2 E_2 F_3 E_8 F_3$													
				<hr/>							$b_0 c_0 e_0 a_2 b_9 e_6 b_7$						
	40	$A_0 B_2 E_2 C_6$															
	41	$A_0 B_2 C_6 B_1$															
	55	$B_0 C_0 B_4 F_1$															
	63	$B_0 E_0 B_4 C_8$															
2	70	$B_0 B_4 B_{12} C_1$	11 232 типа $\gamma_2$	$B_0 B_0 B_0 B_4 B_4 B_{12} F_5$							$B_4 B_{12} C_1 B_{12} C_1 C_1 B_9$						
				$F_5 B_9 D_8 D_8 B_9 F_5 D_8$													
				<hr/>							$b_{11} b_7 e_5 g_1 g_6 f_3 f_0$						
	79	$B_0 B_4 B_{12} C_{11}$															
	82	$B_0 B_4 B_1 B_6$															
3	1	$A_0 A_1 A_2 A_5$	1 типа $\alpha_3$	$A_0$	$A_0$	$A_0$	$A_1$	$A_1$	$A_2$	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_5$	$A_3$	$A_3$	$A_4$	
				$A_1$	$A_2$	$A_5$	$A_2$	$A_5$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_6$	$A_9$	$A_4$	$A_7$	$A_8$	
				$A_3$	$A_8$	$A_4$	$A_4$	$A_6$	$A_3$	$A_{10}$	$A_{11}$	$A_7$	$A_{10}$	$A_6$	$A_8$	$A_9$	
				$A_9$	$A_{12}$	$A_7$	$A_{10}$	$A_8$	$A_{11}$	$A_{11}$	$A_{12}$	$A_9$	$A_{12}$	$A_{12}$	$A_{10}$	$A_{11}$	
				$a_0$	$a_{12}$	$a_4$	$a_1$	$a_5$	$a_2$	$a_{10}$	$a_{11}$	$a_6$	$a_9$	$a_3$	$a_7$	$a_8$	

12

Сведения об опорных подплоскостях порядка  $t$  в плоскости Хьюза

<b>m</b>	<b>i</b>	Порождающая опорная 4-дуга $S_i^4$	$n_x$	Точки и прямые опорной подплоскости																																																																
<b>3</b>	2	$A_0 A_1 A_2 B_2$	351 типа $\beta_3$	$A_0$	$A_0$	$A_0$	$A_0$	$A_1$	$A_1$	$A_1$	$A_3$	$A_3$	$A_3$	$A_9$	$A_9$	$A_9$	$A_1$	$A_2$	$B_1$	$E_1$	$A_2$	$B_2$	$E_2$	$A_2$	$B_1$	$E_1$	$A_3$	$D_{12}$	$E_2$	$B_2$	$B_1$	$E_6$	$B_6$	$B_2$	$B_6$	$E_6$	$B_6$	$B_2$	$E_2$	$A_9$	$G_{12}$	$E_6$	$B_6$	$E_1$	$D_{12}$	$G_{12}$	$E_2$	$D_{12}$	$G_{12}$	$E_6$	$G_{12}$	$D_{12}$	$a_0$	$a_{12}$	$c_0$	$b_0$	$a_1$	$c_1$	$b_1$	$a_2$	$g_3$	$d_3$	$a_6$	$b_9$	$c_9$			
	4	$A_0 A_1 B_1 B_2$																																																																		
	8	$A_0 A_1 B_1 C_4$																																																																		
	9	$A_0 A_1 B_1 B_5$																																																																		
	12	$A_0 A_1 B_2 E_2$																																																																		
	20	$A_0 B_0 B_4 B_{12}$																																																																		
	25	$A_0 B_0 B_2 G_2$																																																																		
	26	$A_0 B_0 B_2 B_3$																																																																		
	57	$B_0 E_0 B_4 E_4$																																																																		
65	$B_0 E_0 B_4 B_{12}$																																																																			
<b>3</b>	10	$A_0 A_1 B_1 F_5$	104 типа $\gamma_3$	$A_0$	$A_0$	$A_0$	$A_0$	$A_1$	$A_1$	$A_1$	$A_3$	$A_3$	$A_3$	$A_9$	$A_9$	$A_9$	$A_1$	$B_1$	$C_1$	$D_1$	$B_1$	$E_5$	$B_{11}$	$B_1$	$C_1$	$D_1$	$B_1$	$C_1$	$D_1$	$A_3$	$E_5$	$G_5$	$F_5$	$C_1$	$F_5$	$C_{11}$	$G_5$	$F_5$	$E_5$	$F_5$	$E_5$	$G_5$	$A_9$	$D_{11}$	$B_{11}$	$C_{11}$	$D_1$	$G_5$	$D_{11}$	$C_{11}$	$D_{11}$	$B_{11}$	$B_{11}$	$C_{11}$	$D_{11}$	$a_0$	$c_0$	$g_0$	$f_0$	$a_1$	$a_5$	$a_{11}$	$g_3$	$f_3$	$e_3$	$b_9$	$c_9$	$d_9$
	11	$A_0 A_1 B_2 C_2$																																																																		
	14	$A_0 A_1 B_2 F_3$																																																																		
	21	$A_0 B_0 B_4 F_{12}$																																																																		
	39	$A_0 B_2 C_2 D_6$																																																																		
	47	$B_0 C_0 B_4 C_4$																																																																		
50	$B_0 C_0 B_4 G_{12}$																																																																			
<b>3</b>	33	$A_0 B_0 B_2 G_1$	624 типа $\delta_3$	$A_0$	$A_0$	$A_0$	$A_0$	$B_0$	$B_0$	$B_0$	$C_0$	$C_0$	$C_0$	$D_0$	$D_0$	$D_0$	$B_0$	$B_2$	$G_1$	$G_9$	$B_2$	$G_1$	$C_5$	$B_2$	$F_7$	$F_{11}$	$B_2$	$G_1$	$D_6$	$C_0$	$F_7$	$F_{11}$	$F_8$	$F_8$	$F_7$	$D_6$	$D_6$	$F_8$	$G_9$	$C_5$	$G_3$	$F_7$	$D_0$	$G_3$	$C_5$	$D_6$	$F_{11}$	$G_9$	$G_3$	$G_1$	$C_5$	$G_3$	$G_9$	$F_8$	$F_{11}$	$a_0$	$b_0$	$c_0$	$d_0$	$f_6$	$b_{11}$	$g_{10}$	$g_{12}$	$f_2$	$c_8$	$g_4$	$d_7$	$f_5$
	43	$A_0 B_2 C_6 E_{11}$																																																																		
	44	$A_0 B_2 C_6 F_8$																																																																		
	49	$B_0 C_0 B_4 B_{12}$																																																																		
	53	$B_0 C_0 B_4 C_1$																																																																		
	74	$B_0 B_4 B_{12} G_2$																																																																		
	85	$B_0 B_4 B_1 C_2$																																																																		
89	$B_0 B_4 B_2 C_1$																																																																			

Справочное издание

Вадим Иванович Васильков

Исследование подплоскостей в конечных проективных  
плоскостях малых порядков

Справочное пособие

Редактор О.В. Куныгина

Издательство ЧГПУ

454080 г. Челябинск, пр. Ленина, 69

ISBN 978 – 5 – 85716 – 749 – 6

Подписано к печати 10. 11. 2008

Формат 60 x 84/8

Бумага типографская

Объем 4, 7 уч.-изд. л.

Тираж 100 экз.

Заказ №

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ЧГПУ.

454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 69.