МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

Физико-математический факультет
Кафедра математики и методики обучения математике

«Методика изучения координатного метода решения задач в курсе математики основной школы»

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05 Педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»

Проверка на объем заимствований:
65 % авторского текста

Выполнил:
Студент группы ОФ-513/086-5-1
Данькова Анна Алексеевна

Работа рекомендована к защите
«29» марта 2019 г.
Зав. кафедрой МиМОМ
Шумакова Е.О.

Научный руководитель:
к.ф-м.н., доцент кафедры МиМОМ
Шумакова Екатерина Олеговна

Челябинск
2019

Содержание

Введение

В наше время для того чтобы стать высококвалифицированным специалистом практически в любой отрасли, требуется получение достойного образования.

В числе приоритетных задач, стоящих перед современной системой образования, особую значимость приобрела задача развития критического и творческого мышления ученика, приобщение его к достижениям информационного общества, и формирование умения самостоятельно конструировать собственные знания. Возникла новая для образования проблема: подготовить человека, умеющего находить и извлекать необходимую ему информацию в условиях ее многообразия, усваивать ее в виде новых знаний. Решение этой проблемы вызвало необходимость применения новых педагогических подходов и технологий в общеобразовательной школе [14].

На сегодняшний день многие учителя математики и методисты, изучающие преимущества и недостатки различных методов решения геометрических задач, практически сходны во мнении, что наиболее оптимальным методом решения геометрических задач является координатный метод. Изучение этого метода является неотъемлемой частью школьного курса геометрии, так как его можно успешно применять при решении большого числа задач, в том числе, задач Основного Государственного экзамена (задания 24 и 26). А так как, эти задания – повышенной сложности, то они приносят учащимся хорошие баллы при сдаче ОГЭ.

Тема «Метод координат» является связующей между алгеброй и геометрией. Благодаря использованию данного метода можно эффективно осуществлять поиск решения задач не только математики, но и других наук, например, физики. Математическое содержание материала по механике и кинематике наполняют такие понятия как «координатная ось», «точка», «система координат», «координаты точки», а решение многих задач основывается, опираясь на метод координат [7].

Данный метод переносит в геометрию наиболее важную особенность алгебры – единообразие способов решения задач. Координатный метод не требует интуиции, сложных дополнительных построений, решение задач во многом алгоритмизировано, что в большинстве случаев упрощает поиск и само решение [11].

Поэтому необходима методика изучения метода координат, позволяющая ученикам применять его при решении задач, и показывающая, что это лишь вспомогательный метод.

Всем вышесказанным и определяется актуальность тема выпускной квалификационной работы: «Методика изучения координатного метода решения задач в курсе математики основной школы».

Объект исследования – это процесс обучения школьников геометрии.

Предметом исследования является обучение использованию координатного метода решения задач в курсе математики основной школы.

Цель работы – разработать элективный курс для девятого класса, который будет направлен на повышение эффективности изучения темы «Метод координат».

Для достижения данной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Изучить учебную и методическую литературу, связанную с проблемой изучения темы «Метод координат» в школе;
2. Рассмотреть подходы к изучению метода координат;
3. Разработать элективный курса для учащихся 9 класса на тему «Метод координат в решении задач планиметрии».

Гипотеза данного исследования предполагает, что прохождение элективного курса в 9 классе позволяет сделать изучение координатного метода решения задач более эффективным.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы, приложения 1, в котором представлен конспект урока, и приложение 2, в котором представлено домашнее задание к конспекту урока.

Глава 1. Теоретические основы обучения решению задач координатным методом в основной школе

1.1. Суть метода координат

Французские математики Рене Декарт и Пьер Ферма стали первооткрывателями координатного метода. В их формулировках расстояния до координатных осей могли быть только положительными числами или нулем.

Позже ученый И.Ньютон высказал важнейшую идею о том, что одно или оба расстояния до осей координат можно так же считать и отрицательными. Немного позднее Лейбниц назвал данные расстояния «координатами».

Метод координат – это способ перевода с геометрического языка на язык алгебры, после чего геометрические проблемы превращаются в алгебраические, и появляется возможность использовать для решения геометрических задач алгебраические методы [2].

Знакомство с координатами у учеников начинается уже с пятого класса на примере измерительных приборов при изучении алгебраического материала: «Шкалы и координаты». В шестом классе начинается изучение отрицательных чисел, появляется новое понятие «координатная прямая». В геометрии координаты начинают изучать только в девятом классе при знакомстве с темами: «Координаты вектора», «Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца», «Уравнение линии на плоскости», «Уравнение окружности и прямой». Простейшими задачами, которые изучаются в данный период, являются: задача на нахождение координат середины отрезка; задача на нахождение длины вектора, если известны его координаты; задача на нахождение расстояния между двумя точками [12].

Главная задача современной геометрии - показать учащимся применение координатного метода к решению задач.

Раскроем суть метода координат. В курсе алгебры 7 класса, во время начала изучения функции, становится известным понятие прямоугольной системы координат. При задании на плоскости системы координат, любую точку плоскости можно охарактеризовать ее координатами, то есть парой действительных чисел, а геометрическую фигуру, разбив ее на более простые элементы, задать аналитическими условиями, а именно, с помощью уравнений, неравенств, или системы уравнений или неравенств. Благодаря этому можно осуществить перевод задач геометрии на алгебраический язык.

Для изучения фигур с помощью метода координат выделяются две взаимно обратных задачи: найти уравнение данной фигуры по ее геометрическим свойствам, и исследовать геометрические свойства фигуры (сначала разбив ее на более простые элементы) по ее заданному уравнению.

Достижение обеих целей изучения метода координат демонстрируется в задачах на отыскание множества точек плоскости.

В школьном курсе метод координат дает возможность доказывать и решать задачи рациональнее, чем только геометрическими способами. Одну и ту же задачу можно представить аналитически по-разному в зависимости от выбора системы координат. Чем больше опыт ученика в решении задач, тем больше вероятность того, что он выберет более подходящую для данной задачи систему координат [6].

1.2. Анализ учебников

Обучение применению метода координат к решению задач и само изучение данного метода проходит в несколько этапов. На первоначальном этапе, в 5-6 классах, проходит подготовка к изучению данной темы в последствие (пропедевтика). Вводится основной понятийный аппарат, который хорошо отрабатывается, а затем систематизируется в курсе геометрии.

Итак, рассмотрим учебник для 5 класса А.Г. Мерзляка, В.Б.Полонского и М.С. Якира. В первую очередь, вводятся опорные понятия метода координат: «отрезок», «длина отрезка», «прямая», «луч». Далее определяют метрическую систему, дается история ее появления, также рассказывается об устаревших системах измерения. Позже идет ознакомление с измерительными приборами, рассказывается про шкалы и деления, а потом про координатный луч. Самые первые задачи, связанными с изучением метода координат являются: нахождение координат точек, определение показаний термометра, нахождение расстояния между объектами и задачи на движение. Далее появляются следующие задания – сравнить числа или буквенные выражения на координатном луче.

В следующем учебнике для 5 класса Н.Я. Виленкина и др. изучение происходит по немного другой схеме. Школьники сначала изучают понятия «отрезок», «длина отрезка» и «треугольник». Позже ученики знакомятся с понятиями «плоскость», «прямая» и «луч». Далее тема «Шкалы и координаты» объясняется на примере измерительных приборов. Больше данная тема нигде не встречается, кроме решения некоторых задач графическим способом.

Дополнение координатного луча до координатной прямой происходит в 6 классе при изучении отрицательных чисел, которое происходит к концу первого полугодия. В качестве примера, аналогично программе 5 класса, приводится термометр. Позднее сложение и вычитание чисел будут показаны на координатной прямой. Позже, при дополнении изученных числовых множеств до множества рациональных чисел вводится понятие «координатная плоскость». Примерами координатной плоскости в учебниках являются поле для игры в морской бой и шахматная доска.

Второй этап изучения метода координат проходит в 7-8 классах. Школьники изучают элементарные функции с помощью координатного метода, находят координаты точки и отмечают их на координатной плоскости. Но на данном этапе данному методу уделяется мало внимания.

Третий этап изучения проходит в 9 классе. Вначале раскрываются основные этапы применения метода, после при решении задач показывается непосредственное применение координатного метода.

Рассмотрим примеры изучения данного метода в различных УМК.

На изучение темы «Метод координат» в УМК «Геометрия 7-9 класс» авторов Л.С.Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б Кадомцева отводится 18 часов. Данной теме в учебнике посвящена отдельная глава.

Координатный метод изучается после изучения темы «Векторы», но до изучения скалярного произведения векторов.

Определение метода координат дается следующим, указанным ниже, образом.

Введение системы координат дает возможность изучать различные фигуры и их свойства с помощью уравнений и неравенств и решать задачи геометрии с помощью методов алгебры. Такой подход к изучению свойств геометрических фигур называется методом координат [2].

В данной главе изучаются координаты вектора, уравнение прямой и окружности, решаются простейшие задачи в координатах (нахождение координат середины отрезка, длины вектора по его координатам, расстояния между точками). В этом учебнике метод координат дается как метод изучения геометрических фигур с помощью средств алгебры. Автор задается целью обучить учеников применять координатный метод не только к задачам на построение фигур по их уравнению, но и к задачам на доказательство, также для вывода геометрических формул.

Позже с помощью метода координат доказываются определения тригонометрических функций, основное тригонометрическое тождество, формулы приведения и теорема косинусов. На этом использование этого метода заканчивается [1].

При изучении линий координатным методом появляются две задачи: по геометрическим свойствам данной линии найти ее уравнение и по заданному уравнению линии исследовать ее геометрические свойства.

По авторской программе А.Г. Мерзляка, В.Б. Полонского, М.С. Якира, Д.А. Номировского на изучение предмета геометрии в 9 классе отводится примерно 70 часов в год.

Изучение метода координат в учебнике «Геометрия 9 класс» Мерзляка начинается с главы «Декартовы координаты». Материал данной главы расширяет знания учащихся о координатной плоскости и о методах решения задач, в которых используются свойства точек и фигур на координатной плоскости. На базе освоенного материала далее будут изучаться векторы на плоскости и в пространстве, элементы аналитической геометрии и так далее [5].

Первый параграф этой главы - «Расстояние между двумя точками с заданными координатами. Координаты середины отрезка». Формула расстояния между двумя точками на координатной плоскости выводится на основе теоремы Пифагора.

Авторы методического пособия к учебнику советуют напомнить учащимся, что две точки, лежащие на прямой, параллельной оси абсцисс, имеют одинаковую ординату, а две точки, лежащие на прямой, параллельной оси ординат, — одинаковую абсциссу [5].

Вводятся понятие «декартовы координаты».

В этом параграфе представлен ряд задач, в которых необходимо по известным координатам вершин треугольника или четырёхугольника определить или доказать некоторые его свойства. То есть учащиеся должны находить расстояние между точками, искать координаты середины отрезка и делать вывод о совпадении двух точек на основании равенства их координат. Для поиска величин углов между прямыми на координатной плоскости авторы рекомендуют использовать теорему косинусов.

Следующий параграф «Уравнение фигуры. Уравнение окружности». Дается понятие «уравнение фигуры на координатной плоскости», «уравнение окружности».

Проводится аналогию между уравнением фигуры на координатной плоскости и графиком функции, подчеркивая при этом разницу между ними: для графика каждому значению координаты x может соответствовать не более одного значения координаты y, для уравнения фигуры может существовать любое количество различных точек с одной и той же координатой x.

Также указывается, что фигуру можно рассматривать как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению. Поэтому:

• пересечение фигур рассматривается как множество решений системы уравнений, составленной из уравнений этих фигур;

• объединение фигур рассматривается как множество решений совокупности уравнений, составленной из уравнений этих фигур.

Благодаря данному подходу можно использовать метод ГМТ, который был рассмотрен в 7 классе (учебник «Геометрия. 7 класс» А.Г. Мерзляка, В.Б. Полонского, М.С. Якира), в совокупности с методом координат.

Применение описанного подхода описывается более подробно в пункте «Метод координат».

Следующий параграф «Уравнение прямой». Вводятся понятия «уравнение прямой», «вертикальная прямая», «невертикальная прямая».

Далее в параграфе «Угловой коэффициент прямой» вводится понятие угла между прямой и положительным направлением оси абсцисс. Также приводится два важных факта, позволяющих по уравнению прямой устанавливать её расположение на координатной плоскости:

1) угол наклона координатной прямой к положительному направлению оси абсцисс зависит от коэффициента k в уравнении прямой, записанном в виде $y = kx + by;$

2) все прямые с одинаковым значением коэффициента k параллельны, и наоборот, если невертикальные прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны [9].

Рассмотрим введение метода координат в учебнике «Геометрия 9 класс» авторов В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева, В.В. Прасолова

Сразу после введения, посвященного повторению пройденного в 8 классе материала, в данном учебнике начинается глава «Векторы и координаты». Понятие «декартова прямоугольная система координат» школьники уже знают из курса алгебры. Также авторы акцентируют внимание на важнейшем значении системы координат для применения в геометрии алгебраических методов [3].

Глава начинается параграфа «Ось координат». Дается определение понятий «ось координат», «начало координат», «координата точки». Учащиеся должны твёрдо усвоить, что ось координат — это прямая, на которой выбрана точка (начало координат), разделяющая прямую на две полуоси (два луча), одна из которых называется положительной полуосью и отмечается стрелкой, а другая — отрицательной полуосью; кроме того, выбрана единица измерения отрезков. Каждой точке на оси координат соответствует определённое число — координата этой точки [4].

Приводится доказательство утверждения о координатах середины отрезка. Длину отрезка AM обозначают $x - x_1$. Для доказательства справедливости обозначения AM в виде данного равенства необходимо рассмотреть все возможные случаи расположения точек A и M относительно начала координат (точки O), учитывая условие $x_1 < x_2$, то есть точка M лежит на оси правее точки.

Следующий параграф - «Прямоугольная система координат». Даются определения понятий «прямоугольная система координат», «ось абсцисс», «ось ординат». Доказывается утверждение «каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат концов этого отрезка». В УМК справедливость данного равенства предлагается доказать с помощью теоремы Фалеса [3].

Далее в параграфе «Длина вектора и расстояние между двумя точками» приводится формула расстояния между двумя точками в виде следствия. Дается доказательство данного следствия через формулу длины вектора.

Рассматриваются задачи на нахождение координат вершин равнобедренного треугольника, параллелограмма, координаты точки пересечения диагоналей прямоугольника, расстояния между двумя точками.

В параграфе «Уравнение окружности» определяется понятие «уравнение линии L», выводится уравнение окружности через нахождение расстояние от центра окружности до точки на окружности, которое в то же время является радиусом окружности.

В следующем параграфе выводится уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно к ненулевому вектору. Определяется понятие «угловой коэффициент прямой» и показывается значение углового коэффициента в расположении двух прямых. Аналогично выводу уравнения прямой, проходящей через одну точку, выводится уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Авторы представили задачи на вывод уравнения окружности по известным координатам центра и радиусу, задачи на вычисление угловых коэффициентов прямых, задачи на вывод уравнения прямых, задачи на выяснение взаимного расположения прямой и окружности.

1.3. Умения, формируемые с помощью координатного метода

Для формирования у учащихся умения применять метод координат, необходимо выявить требования, которые предъявляет логическая структура решения задач к мышлению ученика. Координатный метод предусматривает наличие у учащихся знаний, умений и навыков, необходимых для применения данного метода на практике.

Выделим умения, являющиеся важными компонентами для использования метода координат при решении задач:

1. переводить с геометрического языка на аналитический для одного типа задач и с аналитического на геометрический для другого типа;
2. строить точку по заданным координатам;
3. находить координаты заданных точек;
4. вычислять расстояние между точками, заданными координатами;
5. оптимально выбирать систему координат;
6. составлять уравнения заданных фигур;
7. видеть за уравнением конкретный геометрический образ;
8. выполнять преобразование алгебраических соотношений [16].

В процессе решения комплекса задач рассмотрим применение перечисленных умений:

№1. В треугольнике ABC: $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$, BD - медиана. Докажите, что $BD^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$ [2].

Подберем систему координат так, чтобы точка A служила началом координат, а осью Ox - прямая AC.

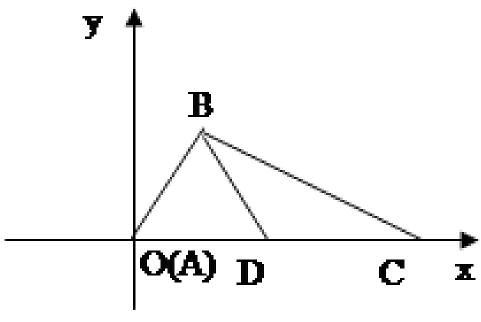


Рисунок 1

Формируется умение оптимально выбирать систему координат.

В выбранной системе координат точки A, C и D имеют следующие координаты: $A(0,0)$, $D(\frac{b}{2},0)$ и $C(b,0)$.

На данном этапе решения задачи формируется умение находить координаты заданных точек.

Обозначим координаты точки B через x и y. По формуле нахождения расстояний между двумя точками, заданными своими координатами, получим:

$$x^2 + y^2 = c^2 \quad (1)$$

$$(x - b)^2 + y^2 = a^2 \quad (2)$$

В данном случае формируется умение находить расстояние между двумя точками, заданными координатами.

$$BD^2 - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2 \quad (3)$$

$$x = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b} \quad (4)$$

$$y = \sqrt{c^2 - \frac{(c^2 - a^2 + b^2)}{4b^2}} \quad (5)$$

Подставим x и y в условие. Получим:

$$BD^2 = \left(\frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b} - \frac{b}{2}\right)^2 + c^2 - \frac{(c^2 - a^2 + b^2)^2}{4b^2} \quad (6)$$

$$BD^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \quad (7)$$

Выше рассматривалось формирование умение выполнять преобразования алгебраических выражений.

№2. Найти множество точек, для каждой из которых разность квадратов расстояний от двух данных точек есть величина постоянная.

Обозначим данные точки A и B. Выберем систему координат так, чтобы ось Ox совпадала с прямой AB, а началом координат служила точка A.

Формируется умение оптимально выбирать систему координат.

Предположим $AB = a$, тогда в выбранной системе координат $A(0; 0), B(a; 0)$.

Показано формирование умения находить координаты заданных точек.

Точка $M(x, y)$ принадлежит искомому множеству тогда и только тогда, когда

$$AM^2 - MB^2 = b^2 \ , \tag{8}$$

где b - постоянная величина.

Формируется умение переводить с геометрического языка на аналитический и умение составлять уравнения фигур.

По формуле расстояния между двумя точками, получаем:

$$AM^2 = x^2 + y^2 \tag{9}$$

$$MB^2 = (x - a)^2 + y^2 \tag{10}$$

$$AM^2 - MB^2 = 2ax - a^2 = b \tag{11}$$

$$x = \frac{b + a^2}{2a} \tag{12}$$

Формируется умение вычислять расстояние между точками, заданными координатами.

Уравнение, указанное в формуле (12), является уравнением прямой, параллельной оси Oy и находящейся от точки A на расстоянии

$$d = \frac{|b + a^2|}{2a}. \tag{13}$$

Формируется умение видеть за уравнением конкретный геометрический образ.

Из предыдущих задач видно, что и для решения этой задачи необходимо овладение перечисленными выше умениями. Также для решения приведенной задачи и множества других задач важно сформировать умение «видеть за уравнением» конкретный геометрический образ, которое является обратным умению составлять уравнения конкретных фигур.

№3. В координатной системе находится равнобедренный треугольник ABC $(AC = BC)$. Проведены медианы AN и BM к боковым сторонам треугольника. Длина стороны $AB = 12$, а высоты $CO = 6$. Определите координаты вершин треугольника, координаты точек M и N и длину медиан AN и

BM (ответ округлите до сотых) [17].

Решение:

Выберем систему координат так, чтобы ось Oy совпадала с высотой OC, а ось Ox со стороной AB, точка O совпадает с началом координат.

Формируется умение оптимально выбирать систему координат.

В равнобедренном треугольнике высота является медианой: $AO = OB$, $\frac{AB}{2} = 6$.

Тогда точки имеют следующие координаты: $A(-6; 0)$, $B(6; 0), C(0; 6)$.

Так как AM – медиана, то M – середина BC**.**

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{6+0}{2} = 3 \quad (14)$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0+6}{2} = 3 \quad (15)$$

Получаем координаты середины - $M(3; 3)$. Аналогично, получим координаты N – середины AC (BN – медиана).

$$x_N = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-6+0}{2} = -3 \quad (16)$$

$$y_N = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0+6}{2} = 3 \quad (17)$$

Получаем координаты середины - $N(-3; 3)$.

Формируется умение находить координаты заданных точек и умение выражать недостающие координаты через известные величины.

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = 3\sqrt{10} \approx 9{,}49 \quad (18)$$

$$BN = \sqrt{(x_N - x_B)^2 + (y_N - y_B)^2} = 3\sqrt{10} \approx 9{,}49 \quad (19)$$

Формируется умение вычислять расстояние между точками, заданными координатами.

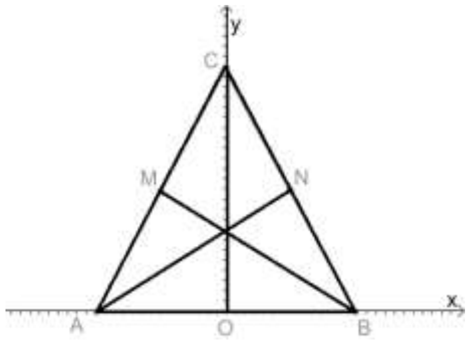


Рисунок 2

№4. Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых: $AM^2 + BM^2 = k^2$, где k – данное число [13].

Решение:

Пусть $AB = 2a$, точка O – середина отрезка AB.

Формируется умение оптимально выбирать систему координат.

Тогда точки имеют следующие координаты: $A(-a; 0)$, $B(a; 0)$.

Формируется умение определять координаты заданных точек.

Для выбранной точки $M(x, y)$ имеем:

$$AM^2 = (x + a)^2 + y^2 \tag{20}$$

$$BM^2 = (x - a)^2 + y^2 \tag{21}$$

Формируется умение находить расстояние между двумя точками, заданными координатами.

Запишем данное условие $AM^2 + BM^2 = k^2$ в координатах.

$$((x + a)^2 + y^2) + ((x - a)^2 + y^2) = k^2 \tag{22}$$

Формируется умение переводить с геометрического языка на аналитический.

Раскрыв скобки, получим:

$$x^2 + y^2 = \frac{k^2 - 2a^2}{2} \tag{23}$$

Формируется умение выполнять алгебраические преобразования.

По условию k является любым. Рассмотрим несколько случаев (в зависимости от знаков букв в числителе):

1 случай. $k^2 > 2a^2$, значит, искомое множество – окружность с радиусом $\sqrt{\frac{k^2-2a^2}{2}}$ с центром в точке O (середина отрезка AB).

2 случай. $k = 2a$, значит, в уравнении правая часть будет равна 0, следовательно, уравнению удовлетворяют координаты единственной точки $O(0; 0)$. Итак, искомое множество точек состоит из одной точки O – середины отрезка AB.

3 случай. $k^2 < 2a^2$, значит, в уравнении правая часть отрицательна, следовательно, координаты ни одной точки не удовлетворяют уравнению.

Формируется умение выполнять алгебраические преобразования; умение видеть за уравнением конкретный геометрический образ.

1.4. Типы и виды задач, решаемых методом координат

Существует несколько этапов решения алгебраических и геометрических задач двух типов координатным методом.

Автор Ляш А.А. в журнале «Путь в науку: материалы межрегиональной научно-практической конференции» приводит этапы решения задач первого типа (задачи на составление уравнения фигуры по элементам, из которых она состоит):

1. Выявить характеристическое свойство фигуры (геометрическое свойство, которым обладают только такие точки плоскости, которые принадлежат данной фигуре);
2. Выбрать на плоскости прямоугольную систему координат;
3. Записать характеристическое свойство фигуры на языке координат [8].

Этапы решения задач второго типа (геометрические задачи, решаемые аналитическим методом):

1. Перевести задачу на аналитический язык;
2. Преобразовать аналитическое выражение;

3. Определить по виду уравнения вид фигуры [15].

В качестве примера представим решение алгебраических и геометрических задач двух типов методом координат с использованием вышеуказанных этапов.

Задачи первого типа:

№1. Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек М, для каждой из которых $BM^2 - AM^2 = 2AB^2$ [2].

Решение:

Введем прямоугольную систему координат с началом в точке $O(0;0)$, причем точка O - середина отрезка AB.

Таким образом, точки A и B имеют такие координаты $A(-a;0)$, $B(a;0)$, $AB = 2a$.

Для случайной точки $M(x;y)$ получим:

$$AM^2 = (x+a)^2 + y^2 \tag{24}$$

$$BM^2 = (x-a)^2 + y^2 \tag{25}$$

Если точка принадлежит искомому множеству, то

$$BM^2 - AM^2 = 2AB^2 \tag{26}$$

Запишем это условие в координатах:

$$((x-a)^2 + y^2) - ((x+a)^2 + y^2) = 8a^2 \tag{27}$$

Раскрыв скобки, получаем $x = -2a$.

Таким образом, искомое множество – прямая, параллельная оси *Oy*. (полученная прямая перпендикулярна к прямой *AB* и пересекает продолжение луча *AB* в точке *C*, причем $AC = \frac{1}{2}AB$).

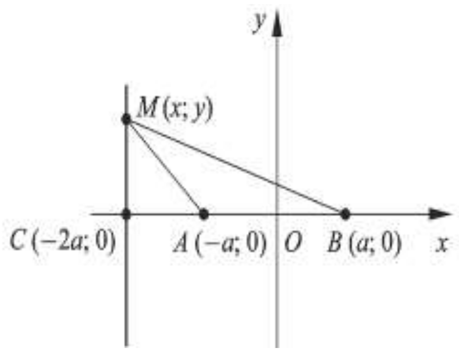


Рисунок 3

№2. Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых: а) $AM^2 - BM^2 = 2AB^2$; б) $AM^2 + 2BM^2 = 6AB^2$ [2].

Решение:

а) Введем прямоугольную систему координат с началом в точке

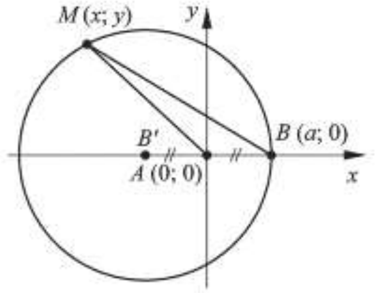


Рисунок 4

$A(0;0)$.

В данной системе координат: $B(a;0)$, $a = AB$.

Выберем произвольную точку $M(x;y)$.

$$AM = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \; AM^2 = x^2 + y^2 \qquad (28)$$

$$BM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \Rightarrow \; BM^2 = (x-a)^2 + y^2 \qquad (29)$$

Запишем условие $2AM^2 - BM^2 = 2AB^2$ в координатах:

$$2(x^2 + y^2) - ((x-a)^2 + y^2) = 2a^2 \qquad (30)$$

$$2x^2 + 2y^2 - x^2 + 2ax - a^2 - y^2 - 2a^2 = 0 \qquad (31)$$

$$x^2 + y^2 + 2ax - 3a^2 = 0 \qquad (32)$$

$$x^2 + 2ax + a^2 + y^2 - 4a^2 = 0 \qquad (33)$$

$$(x+a)^2 + y^2 = (2a)^2 \qquad (34)$$

Получили уравнение окружности с радиусом 2a (2AB) с центром в точке $B'(-a;0)$.

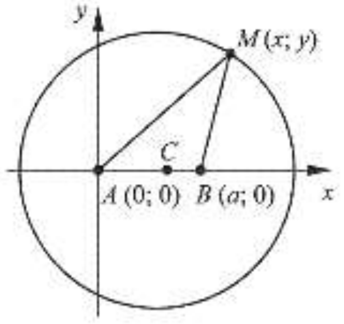


Рисунок 5

б) Введем прямоугольную систему координат с началом в точке $A(0;0)$.

В данной системе координат: $B(a;0)$, $a = AB$.

Выберем произвольную точку $M(x,y)$.

$$AM = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow AM^2 = x^2 + y^2 \quad (35)$$

$$BM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \Rightarrow BM^2 = (x-a)^2 + y^2 \quad (36)$$

Запишем в координатах условие $AM^2 + 2BM^2 = 6AB^2$.

$$(x^2 + y^2) + 2((x-a)^2 + y^2) = 6a^2 \quad (37)$$

$$x^2 + y^2 + 2x^2 - 4ax + 2a^2 + 2y^2 - 6a^2 = 0 \quad (38)$$

$$x^2 - \frac{4}{3}ax + y^2 - \frac{4}{3}a^2 = 0 \quad (39)$$

$$x^2 - \frac{4}{3}ax + \frac{4}{9}a^2 + y^2 - \frac{16}{9}a^2 = 0 \quad (40)$$

$$\left(x - \frac{2}{3}a\right)^2 + y^2 = \left(\frac{4}{3}a\right)^2 \quad (41)$$

Получили окружность радиуса $\frac{4}{3}a$ $\left(\frac{4}{3}AB\right)$ с центром в точке $C\left(\frac{2}{3}a;0\right)$.

№3. Дан ромб $ABCD$, диагонали которого равны $2a$ и $2b$. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых $AM^2 + DM^2 = BM^2 + CM^2$ [2].

Решение:

Введем прямоугольную систему координат таким образом, чтобы диагонали ромба лежали на координатных осях.

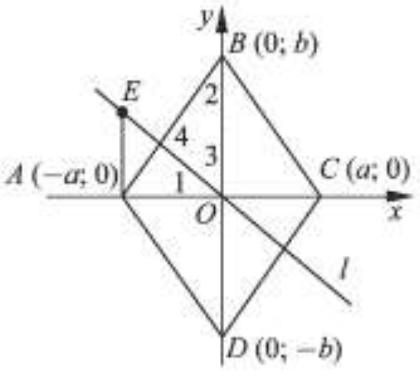


Рисунок 6

В этой системе координат вершины ромба будут иметь такие координаты: $A(-a;0), B(0;b), C(a;0), D(0;-b)$.

Выберем произвольную точку $M(x;y)$.

Найдем расстояния от выбранной произвольной точки до каждой вершины ромба.

$$AM^2 = (x+a)^2 + y^2 \qquad (42)$$

$$BM^2 = x^2 + (y-b)^2 \qquad (43)$$

$$CM^2 = (x-a)^2 + y^2 \qquad (44)$$

$$DM^2 = x^2 + (y+b)^2 \qquad (45)$$

Запишем в координатах условие $AM^2 + DM^2 = BM^2 + CM^2$: $((x+a)^2 + y^2) + (x^2 + (y+b)^2) = (x^2 + (y-b)^2) + ((x-a)^2 + y^2)$ (46)

Выполнив раскрытие скобок, получим: $ax + by = 0$.

Получено уравнение прямой, проходящей через начало координат, то есть, через точку пересечения диагоналей ромба.

Задачи второго типа:

№1. Две стороны треугольника равны 17 см и 28 см, а высота, проведенная к большей стороне, равна 15 см. Найдите медианы треугольника [2].

Решение:

Пусть в ΔABC: $AB = 17$ *см*, $AC = 28$ *см*, $BH = 15$ *см*.

Введем прямоугольную систему координат (возможны 2 случая расположения):

Тогда вершины ΔABC имеют следующие координаты: $A(0;0)$,

$B(x;15), C(28;0)$.

а) если точка $H \in AC, x > 0$

б) H лежит на продолжении $AC, x < 0$

Используя формулу расстояния между двумя точками, получаем:

$$AB = \sqrt{x^2 + 15^2} \tag{47}$$

$$\sqrt{x^2 + 15^2} \tag{48}$$

$$AB = 17 \tag{49}$$

$$x^2 = 64 \tag{50}$$

$$x_1 = 8 \tag{51}$$

$$x_2 = -8 \tag{52}$$

Таким образом, точка B имеет координаты:

а) (8;15), б) (-8;15)

Пусть точки $A_1(x_1; y_1), B_1(x_2; y_2), C_1(x_3; y_3)$ – середины сторон BC, CA и AB.

В случае а) получим:

$$x_1 = \frac{8+28}{2} = 18 \tag{53}$$

$$y_1 = \frac{15+0}{2} = 7{,}5 \tag{54}$$

$$x_2 = \frac{0+28}{2} = 14 \tag{55}$$

$$y_2 = \frac{0+0}{2} = 0 \tag{56}$$

$$x_3 = \frac{0+8}{2} = 4 \tag{57}$$

$$y_3 = \frac{0+15}{2} = 7{,}5 \tag{58}$$

Аналогично, в случае б):

$$x_1 = \frac{-8+28}{2} = 10 \tag{59}$$

$$y_1 = \frac{15+0}{2} = 7{,}5 \tag{60}$$

$$x_2 = \frac{0+28}{2} = 14 \tag{61}$$

$$y_2 = \frac{0+0}{2} = 0 \tag{62}$$

$$x_3 = \frac{0-8}{2} = -4 \quad (63)$$

$$y_3 = \frac{0+15}{2} = 7{,}5 \quad (64)$$

По формуле расстояния между двумя точками, найдем медианы AA_1, BB_1, CC_1:

Под а):

$$AA_1 = \sqrt{(18+0)^2 + (7{,}5-0)^2} = 19{,}5 \text{ см} \quad (65)$$

$$BB_1 = \sqrt{(14-8)^2 + (0-15)^2} = 3\sqrt{29} \text{ см} \quad (66)$$

$$CC_1 = \sqrt{(4-28)^2 + (7{,}5-0)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{281} \text{ см} \quad (67)$$

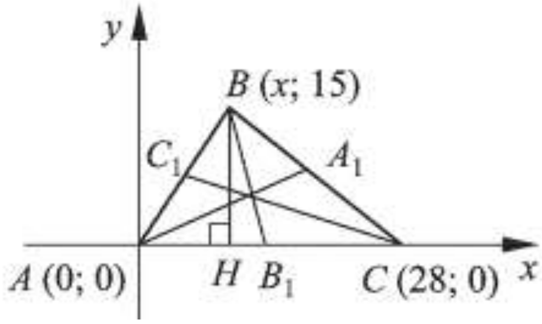


Рисунок 7

В случае б):

$$AA_1 = \sqrt{(10-0)^2 + (7{,}5-0)^2} = 12{,}5 \text{ см} \quad (68)$$

$$BB_1 = \sqrt{(14+8)^2 + (0-15)^2} = \sqrt{709} \text{ см} \quad (69)$$

$$CC_1 = \sqrt{(-4-28)^2 + (7{,}5-0)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4321} \text{ см} \quad (70)$$

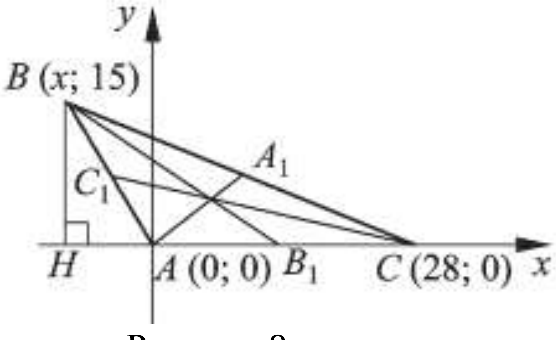


Рисунок 8

№2. Докажите, что в равнобедренной трапеции диагонали равны. Сформулируйте и докажите обратное утверждение [2].

Решение:

Пусть четырехугольник $ABCD$ – равнобедренная трапеция. $AD = 2a$, $BC = 2b$.

Введем прямоугольную систему координат таким образом, чтобы основание AD лежало на оси Ox; точка O середина AD. Ось Oy делит основание BC пополам.

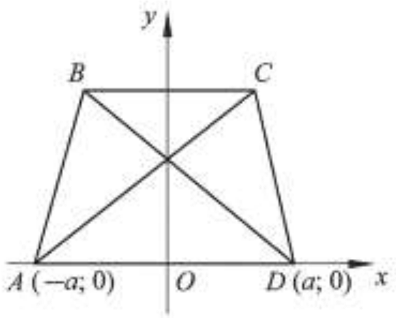


Рисунок 9

Итак, вершины трапеции имеют такие координаты: $A(-a; 0), B(-b; h),\ C(b; h), D(a; 0)$.

Найдем основания AC и BD:

$$AC = \sqrt{(b + a)^2 + h^2} \Rightarrow AC = BD \tag{71}$$

$$BD = \sqrt{(a + b)^2 + (-h)^2} \tag{72}$$

Первое утверждение доказано.

Докажем обратное утверждение: если диагонали трапеции равны, то трапеция является равнобедренной.

Пусть в трапеции $ABCD$ (основания AD и BC) диагонали равны, то есть $AC = BD$. Пусть $AD = 2a$.

Введем прямоугольную систему координат таким образом, чтобы основание AD лежало на оси Ox; точка O середина AD.

Итак, вершины A и D имеют координаты: $A(-a; 0), D(a; 0)$, а вершины

B и C: $B(b; h), C(c; h)$, также $b < c$, h - высота трапеции.

По условию $AC = BD$ $(AC^2 = BD^2)$, то есть:

$$(c + a)^2 + h^2 = (b - a)^2 + h^2 \Rightarrow (c + a)^2 - (b - a)^2 = 0 \tag{73}$$

$$(c + 2a - b)(c + b) = 0 \tag{74}$$

Известно, что $b < c, a > 0$, следовательно первый множитель положительный, значит, второй множитель будет равен нулю:

$$c + b = 0 \quad (75)$$

$$b = -c \quad (76)$$

6) Найдем AB и CD, используя известные координаты $A(-a; 0), B(-c; h), C(c; h), D(a; 0)$.

$$\begin{cases} AB = \sqrt{(a-c)^2 + h^2} \\ CD = \sqrt{(a-c)^2 + h^2} \end{cases} \Rightarrow AB = CD \quad (77)$$

Таким образом, трапеция $ABCD$ является равнобедренной, что и требовалось доказать.

№3. Докажите, что если диагонали параллелограмма равны, то параллелограмм является прямоугольником [2].

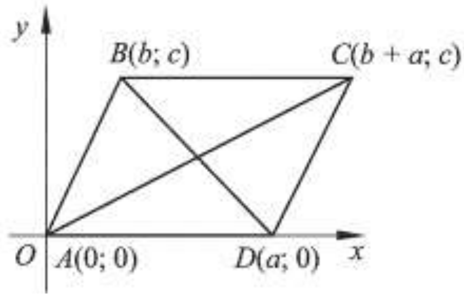


Рисунок 10

Решение:

Пусть в параллелограмме $ABCD$ диагонали равны: $AC = BD$. Пусть $AD = BC = a$.

Введем прямоугольную систему координат с началом в точке $A(0; 0)$.

В данной системе координат вершины параллелограмма будут иметь следующие координаты: $A(0; 0), B(b; c), C(b + a; c), D(a; 0)$, где b и c – некоторые числа.

Найдем диагонали AC и BD:

$$AC^2 = (a + b)^2 + c^2 \quad (78)$$

$$BD^2 = (a - b)^2 + c^2 \quad (79)$$

По условию $AC = BD$, следовательно, $AC^2 = BD^2$.

Запишем указанное условие в координатах:

$$(a+b)^2 + c^2 = (a-b)^2 + c^2 \qquad (80)$$

Раскроем скобки, получим $ab = 0$, но $a \neq 0 \Longrightarrow b = 0$.

Таким образом, вершина B имеет следующие координаты $(0; c)$, то есть вершина B лежит на оси Oy. Значит $\angle BAD = 90°$, следовательно, параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником.

Существует несколько видов задач на применение координатного метода:

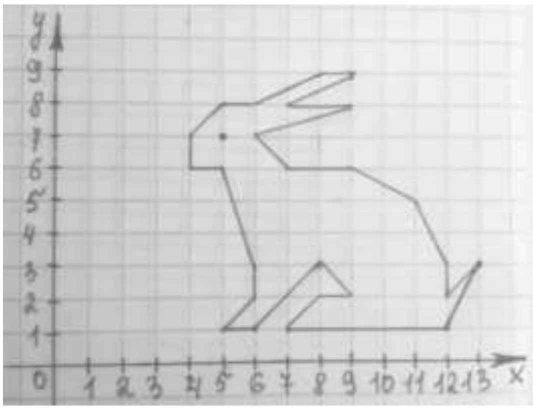
1) задачи на построение точки по ее координатам;
2) задачи на нахождение координат заданных точек;
3) задачи на вычисление расстояния между точками, заданными координатами;
4) задачи на оптимальный выбор системы координат;
5) задачи на составление уравнения фигуры по ее характеристическому свойству;
6) задачи на определение фигуры по ее уравнению;
7) задачи на преобразование алгебраических равенств;

Рассмотрим некоторые из перечисленных видов задач.

I. Задачи на построение точек по их координатам.

№1. За единичный отрезок взять 1кл. тетради и нарисовать фигуру по заданным координатам точек:

(4; 7); (5; 8); (6; 8); (8; 9); (9; 9); (7; 8); (9; 8); (6; 7); (7; 6); (9; 6); (11; 5); (12; 3); (12; 2); (13; 3); (12; 1); (7; 1); (8; 2); (9; 2); (8; 3); (6; 1); (5; 1);



$(6; 2); (6; 3); (5; 6); (4; 6); (4; 7); (5; 7)$.

II. Задачи на выбор системы координат

№1. Длина отрезка AB равна 5см.

а) Выберите систему координат, в которой можно было бы наиболее просто определить координаты концов отрезка.

б) Выберите систему координат так, чтобы координаты концов отрезка были бы: $A(-2{,}5; 0), B(2{,}5; 0)$.

№2. Треугольник ABC равносторонний (длина стороны равна 6 см).

Рисунок 11

Выберите систему координат так, чтобы можно проще было бы определить координаты его вершин.

III. Задачи на вычисление расстояния между точками.

Вершины четырехугольника $ABCD$ имеют следующие координаты: $A(-3; -1)$, $B(1; 2)$, $C(5; -1)$ и $D(1; -4)$. Докажите, что этот четырехугольник – ромб [1].

По формуле расстояния между двумя точками найдем AB, BC, CD, AD - длины сторон четырехугольника.

$$AB = \sqrt{(1+3)^2 + (2+1)^2} = 5 \tag{81}$$

$$DC = \sqrt{(5-1)^2 + (-1+4)^2} = 5 \tag{82}$$

$$BC = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-2)^2} = 5 \tag{83}$$

$$AD = \sqrt{(1+3)^2 + (-4+1)^2} = 5 \tag{84}$$

Все стороны четырехугольника равны, значит, данный четырехугольник – квадрат или ромб.

По свойству: диагонали квадрата равны. Найдем AC, BD и сравним их.

$$AC = \sqrt{(5+3)^2 + (-1+1)^2} = 8 \tag{85}$$

$$BD = \sqrt{(1-1)^2 + (-4-2)^2} = 6 \tag{86}$$

Так как, $AC \neq BD$, то $ABCD$ – ромб.

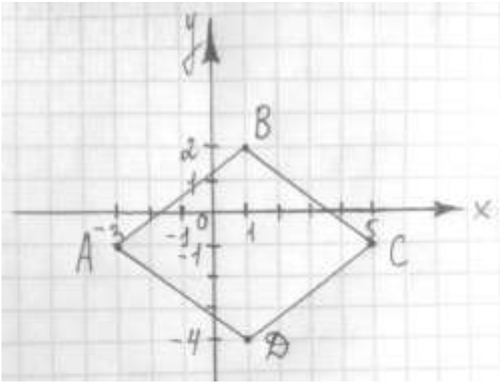


Рисунок 12

IV. Задачи на составление уравнения фигур по элементам, из которых данная фигура состоит.

№1. Запишите уравнение прямой, содержащей точки $A(2;7)$ и $B(1;3)$.

Уравнение прямой имеет вид $ax+by+c=0$. Так как точки A и B лежат на прямой AB, то их координаты удовлетворяют этому уравнению:

$$\begin{cases} 2a+7b+c=0 \\ a+3b+c=0 \end{cases} \tag{87}$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим:

$$a+4b=0 \Rightarrow a=-4b \tag{88}$$

Подставим найденное значение в первое уравнение:

$$2(-4b)+7b+c=0 \tag{89}$$

$$b=c \tag{90}$$

Подставив найденные значения из формул (88) и (90) в уравнение прямой общего вида, получим:

$$-4bx+by+b=0 \tag{91}$$

При любом $b \neq 0$ это уравнение является уравнением прямой AB. Сократив на b, запишем искомое уравнение:

$$-4x+y+1=0 \tag{92}$$

Глава 2. Разработка элективного курса по теме «Метод координат» для 9 класса

2.1. Тематическое планирование

Представленный элективный курс подходит для углубленного изучения математики. Курс по выбору предлагается учащимся девятых классов. В элективном курсе рассматриваются варианты использования метода координат для решения задач планиметрии, в том числе и задач ОГЭ.

Класс: 9.

Тип элективного курса: углубленный.

Количество часов: 11 (1 час в неделю).

Образовательная область: математика.

Используемая литература: «Геометрия 7-9 класс» Атанасян Л.С., интернет-ресурсы.

Цель изучения курса - предоставить больше вариантов решения нестандартных задач, способствовать формированию высокого интереса к предмету, развитию логического мышления.

Основные задачи курса: закрепить знания, полученные 9 классе; продемонстрировать возможности разных методов решения задач; отточить умение решать задачи.

Основные организационные формы реализации предлагаемой программы – лекционные и практические занятия.

Формы обучения: фронтальная, групповая, индивидуальная.

Организация изучения курса. Целесообразно включать предлагаемый элективный курс в учебный процесс после изучения метода координат в основной школе. При обучении по УМК Атанасяна Л.С. это произойдет в середине 9 класса.

Система оценки достижений учащихся. По завершении изучения двух тем проходит зачет, в конце изучения проходит итоговая работа.

Тематическое планирование:

№	Тема занятия	Количество часов
1	Введение	1
2	Уравнение прямой	2
3	Уравнение окружности	2
4	Зачет	1
5	Задачи ОГЭ	2
6	Доказательство теорем методом координат и другие задачи	2
7	Итоговая тестовая работа	1

2.2. Содержание курса

Тема I. Введение. (1ч).

Цели и задачи курса. Виды контроля (зачет и итоговое тестирование). Определение метода координат. Повторение формул, необходимых для решения задач координатным методом. Введение алгоритма решения задач методом координат.

Тема II. Уравнение прямой. (2ч).

Повторение вида уравнения, задающего прямую. Вывод уравнения прямой. Прямая Эйлера. Решение задач.

Пример 1. Определить положение прямой a: $3x+4y-12=0$ относительно $\triangle ABC$, если $A(-4;1), B(2;5), C(6;3)$.

Решение:

Так как $a(-4;1)<0,\ a(2;5)>0$, то $A\in a_-,\ B,C\in a_+$.

Таким образом, прямая a пересекает стороны AB и AC.

Пример 2. Даны уравнения прямых, на которых лежат высоты h_a и h_b $\varDelta ABC$, и координаты вершины $C(x_3; y_3)$. Найти координаты вершин A и B, если $h_a\colon a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $h_b\colon a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Ответ: $A\left(\frac{b_1b_2x_3 - a_2b_1y_3 - a_2c_1}{a_1a_2 + b_1b_2}; \frac{a_1a_2y_3 - a_1b_2x_3 - b_2c_1}{a_1a_2 + b_1b_2}\right)$,

$$B\left(\frac{b_1b_2x_3 - a_1b_2y_3 - a_1c_2}{a_1a_2 + b_1b_2}; \frac{a_1a_2y_3 - a_2b_1x_3 - b_1c_2}{a_1a_2 + b_1b_2}\right).$$

Пример 3. Даны две пересекающиеся прямые $a\colon 3x + 4y - 5 = 0$ и $b\colon 5x - 12y + 2 = 0$. Найти уравнение биссектрисы острого угла, образованного прямыми a и b.

Ответ: $14x + 112y - 75 = 0$.

Пример 4. Найти длину биссектрисы AD треугольника ABC, если $A(4; 1)$; $B(7; 5)$; $C(-4; 7)$.

Пример 5. Даны две точки — A и B. Найти множество точек M, для которых $AM^2 - BM^2 = k$, где k — данное число.

Решение:

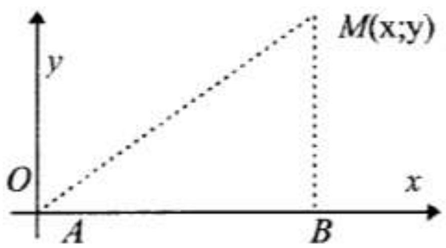


Рисунок 13

Введем систему координат так, чтобы точка A совпадала с началом координат, точка B имела координаты $(a; 0)$, где $a = AB$.

Найдем расстояния от произвольной точки $M(x; y)$ до точек A и B:

$$AM = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{93}$$

$$BM = \sqrt{(x - a)^2 + y^2} \tag{94}$$

Если точка $M(x; y)$ принадлежит искомому множеству, то $AM^2 - BM^2 = k$, поэтому координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$x^2 + y^2 - (x - a)^2 - y^2 = k, \tag{95}$$

$$\text{или } 2ax - a^2 - k = 0. \tag{96}$$

Если же точка M не принадлежит искомому множеству, то ее координаты не удовлетворяют этому уравнению.

Таким образом, уравнение, которое мы получили является уравнением искомого множества точек. Этим уравнением определяется прямая, параллельная оси Oy, если $a^2 + k \neq 0$, и сама ось Oy, если $a^2 + k = 0$.

Итак, искомым множеством является прямая, перпендикулярная к прямой AB.

Пример 6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(5; 10)$, и перпендикулярной прямой a: $x - y + 1 = 0$.

Пример 7. Найти расстояние от начала O прямоугольной системы координат до прямой b: $3x - 4y - 2 = 0$.

Пример 8. Доказать, что центр Cописанной окружности, точка H пересечения высот и центр тяжести T треугольника лежат на одной прямой (прямая Эйлера).

Тема III. Уравнение окружности. (2ч).

Повторение вида уравнения, задающего окружность. Вывод уравнения окружности методом выделения полного квадрата. Окружность Аполлония (Аполлоний Пергский – древнегреческий геометр, 262 до н.э. – 190 до н.э.). Решение задач.

Пример 1. Определите вид линии, задаваемой уравнением:

а) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$;

б) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$;

в) $y - 1 = \sqrt{4 - x^2}$;

г) $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 5x^2 - 5y^2 + 4$.

Решение:

а) $$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 0 \qquad (97)$$

$$(x-2)^2+(y-3)^2=0 \qquad (98)$$

Так как выражение равно 0, то оно задает точку $A(2;3)$.

б)
$$(x^2-4x+4)+(y^2-6y+9)=4 \qquad (99)$$

$$(x-2)^2+(y-3)^2=2^2 \qquad (100)$$

Получили уравнение окружности с центром $C(2;3)$ и радиусом $R=2$.

в) При возведении в квадрат получим равносильную систему:

$$\begin{cases} y-1\geq 0, \\ x^2+(y-1)^2=4 \end{cases} \qquad (101)$$

Полученная система определяет верхнюю половину окружности с центром $C(0;1)$, радиусом 2.

г)
$$(x^2+y^2)^2-5(x^2+y^2)+4=0 \qquad (102)$$

$$(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)=0 \qquad (103)$$

$$\begin{matrix} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2=4 \end{matrix} \qquad (104)$$

Получили уравнения двух концентрических окружностей.

Пример 2. Даны две точки — A и B. Найти множество точек M, для которых $AM^2+BM^2=k^2$, где k — данное число.

Решение:

Введем систему координат так, как показано на рисунке $A(0;0), B(a;0), M(x;y)$.

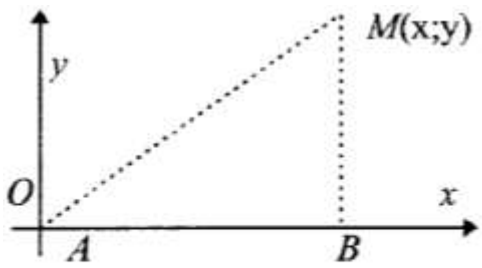


Рисунок 14

$$\begin{cases} AM^2 = x^2 + y^2 \\ BM^2 = (a-x)^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + (a-x)^2 + y^2 = k^2 \quad (105)$$

$$2x^2 - 2ax + 2y^2 = k^2 - a^2 \quad (106)$$

$$2\left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right) + 2y^2 = k^2 - a^2 \quad (107)$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{2k^2 - a^2}{4} \quad (108)$$

Мы получили уравнение окружности с центром в точке $\left(\frac{a}{2}; 0\right)$ и $R = \sqrt{\frac{2k^2-a^2}{4}}$, но

$$\frac{2k^2-a^2}{4} \geq 0, \Rightarrow |k| \geq \left|\frac{a}{\sqrt{2}}\right|. \quad (109)$$

Пример 3. Окружность Аполлония. Что представляет собой множество точек плоскости, отношение расстояний от которых до двух данных точек есть величина постоянная?

Пример 4. Даны две точки $-$ A и B. Найти множество точек M, для которых $AM\colon B = k$, где $k \neq 1 -$ данное число (окружность Аполлония). Что представляет собой множество точек плоскости, отношение расстояний от которых до двух данных точек есть величина постоянная?

Решение:

Пусть даны две точки A и B и некоторое положительное число k, равное отношению расстояний. Если $k = 1$, то множество точек M, для которых $\frac{MA}{MB} = 1$, то есть, $MA = MB$ является прямой $-$ серединным перпендикуляром отрезка AB.

Рассмотрим случай, когда $k \neq 1$. Например, $k = 2$. Решение задачи состоит из двух этапов:

1. Вывод уравнения фигуры (множество точек). Введем систему координат. Начало выберем в точке B. В качестве положительной оси возьмем луч BA. Будем считать, что точка A имеет координаты $(3; 0)$. Возьмем точку $M(x; y)$, удовлетворяющую условию задачи, и выразим расстояния от нее до точек A и B по формулам:

$$MA^2 = (x - 3)^2 + y^2, \qquad (110)$$

$$MB^2 = x^2 + y^2. \qquad (111)$$

Так как, по условию $\frac{MA}{MB} = 2$, то $MA^2 = 4MB^2$. В координатах равенство выражается так:

$$(x - 3)^2 + y^2 = 4(x^2 + y^2) \qquad (112)$$

$$\text{или } x^2 + y^2 + 2x = 3 \qquad (113)$$

$$\text{или } (x + 1) + y^2 = 4 \qquad (114)$$

Итак, точка $M(x; y)$удовлетворяет условию $\frac{MA}{MB} = 2$ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют последнему уравнению. Мы знаем, что последнее уравнение задает окружность с центром в точке $(-1; 0)$ и радиусом 2.

Пример 5. Окружность описана около правильного треугольника. Доказать, что расстояние от любой точки окружности до наиболее удаленной вершины треугольника равно сумме расстояний от этой точки до двух других его вершин.

Пример 6. Окружность вписана в треугольник с вершинами $O(0,0)$; $A(a; 0)$; и $B(0; b)$. Найти центр этой окружности.

Пример 7. Даны окружность и точка А. Найти множество точек М пересечения серединного перпендикуляра к отрезку АК и касательной к окружности, проходящей через К, где К ─ произвольная точка окружности.

Зачёт. (1ч).

Контроль усвоения тем «Уравнение окружности» и «Уравнение прямой».

Тема IV. Задачи ОГЭ. (2ч).

Знакомство с заданиями 24 и 26 Основного Государственного Экзамена. Решение задач.

Задание 24.

Пример 1. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD, равна одному метру. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD.

Решение:

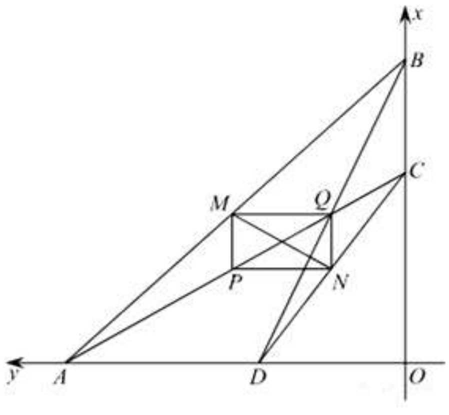


Рисунок 15

Введем систему координат. Свяжем взаимно перпендикулярные прямые, данные в задаче, системой координат. Тогда пусть сторона BC лежит на оси Ox, а сторона AD лежит на оси Oy.

Координаты вершин четырехугольника $A(0;a), B(b;0), C(c;0)$, $D(0;d)$.

Обозначим середины сторон AB и CD. Пусть M - середина AB, и N - середина CD. Также обозначим середины диагоналей AC и BD - точки P и Q.

По формуле нахождения координат середины отрезков, найдем координаты точек M и N: $M\left(\frac{b}{2};\frac{a}{2}\right), N\left(\frac{c}{2};\frac{d}{2}\right)$.

Найдем длину отрезка MN через координаты его концов:

$$MN = \frac{1}{2}\sqrt{(c-b)^2 + (a-d)^2} \tag{115}$$

Аналогично получаем: $P\left(\frac{c}{2};\frac{a}{2}\right), Q\left(\frac{b}{2};\frac{d}{2}\right)$.

$$PQ = \frac{1}{2}\sqrt{(c-b)^2 + (a-d)^2} \tag{116}$$

$MN = PQ$. Следовательно, искомая длина равна 1 метру.

Задание 26.

Пример 2. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, вершины которого заданы координатами: $A(2;2), B(3;5), C(6;6), D(5;3)$.

Решение:

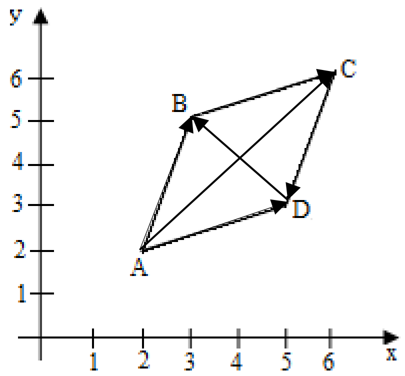


Рисунок 16

Решим задачу векторно-координатным методом.

Найдем координаты сторон четырехугольника, чтобы найти потом их длины, то есть векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB}\{1;3\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10} \tag{117}$$

$$\overrightarrow{DC}\{1;3\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{DC}\right| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10} \tag{118}$$

Длины векторов равны, также векторы $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{DC}$. Этот четырехугольник является параллелограммом, так как в нем противоположные стороны равны и параллельны.

Найдем координаты и длины векторов $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{BC}\{3;1\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10} \tag{119}$$

$$\overrightarrow{AD}\{3;1\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10} \tag{120}$$

Параллелограмм, у которого все стороны равны является ромбом.

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

Зададим направление диагоналям ромба AC и DB. Вычислим координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$ и найдем их длину.

$$\overrightarrow{AC}\{4;4\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} \tag{121}$$

$$\overrightarrow{AD}\{-2;2\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} \tag{122}$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{32} * \sqrt{8} = \frac{1}{2}\sqrt{256} = 8 \tag{123}$$

Пример 3. В треугольнике ABC биссектриса BF и медиана AK перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 208. Найдите стороны треугольника ABC.

Решение:

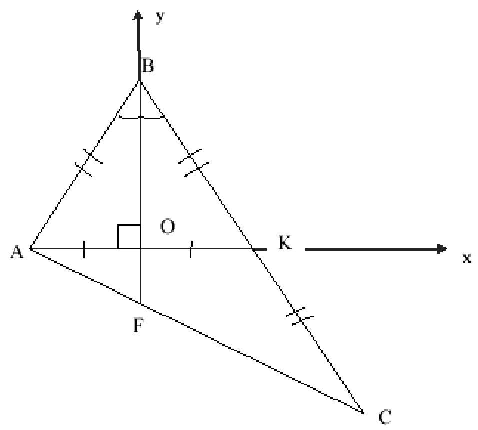


Рисунок 17

Введем систему координат. Взаимно перпендикулярные прямые, данные в задаче, это биссектриса BF и медиана AK. Тогда пусть медиана AK лежит на оси Ox, а биссектриса BF лежит на оси Oy, O - точка пересечения биссектрисы BF и медианы AK.

Треугольник AOB равен треугольнику KOB (прямоугольные) по катету и острому углу.

Значит $AO = OK = 104$, $AB = BK, BC = 2BK = 2AB$.

Точка $A(-104; 0)$, точка $B(0; y_B)$, точка $K(104; 0)$, точка K середина BC, тогда точка $C(208;\ -y_C)$, точка $F(0; y_F)$ принадлежит прямой AC.

Составим уравнение прямой AC:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \tag{124}$$

$$\frac{x+104}{208+104} = \frac{y-0}{-y_C-0} \tag{125}$$

Точка $F(0; y_F)$ принадлежит прямой AC:

$$\frac{0+104}{312} = \frac{y_F}{-y_C} \tag{126}$$

$$y_F = \frac{-y_C}{3} \tag{127}$$

Применим формулу расстояние между точками:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \tag{128}$$

$$BF^2 = \left(\frac{y_C}{3} + y_B\right)^2 \tag{129}$$

$$y_B = 156 \tag{130}$$

Точка $B(0; 156)$, тогда точка $C(208; -156)$.

По формуле расстояние между точками найдем стороны треугольника ABC:

$$AB = \sqrt{(0 + 104)^2 + (0 - 156)^2} \tag{131}$$

$$AB = 52\sqrt{13} \tag{132}$$

$$BC = 2AB = 104\sqrt{13} \tag{133}$$

$$AC = \sqrt{(208 + 104)^2 + (-156 - 0)^2} \tag{134}$$

$$AC = 156\sqrt{5} \tag{135}$$

Тема V. Доказательство теорем методом координат и другие задачи. (2ч).

Доказательство теорем из курса геометрии основной школы координатным методом и решение задач.

Пример 1. Теорема Стюарта. Пусть треугольник со сторонами a, b и с разделен на два треугольника отрезком длины d, проходящим через вершину C и делящим сторону BA на отрезки, равные m и n. Докажите, что $a^2n + b^2m - d^2c = mnc$.

Доказательство:

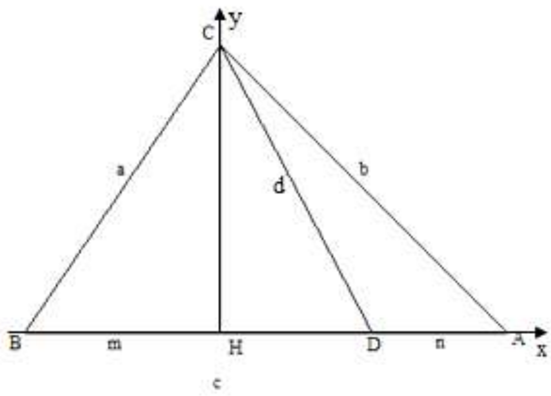


Рисунок 18

Вводим систему координат так, чтобы ось Ox совпала со стороной AB, а ось Oy с высотой CH. Обозначим точки $A(x_1; 0)$, $B(x_2; 0)$, $C(0; y_0)$, $D(x; 0)$. Проверим наше равенство.

По теореме Пифагора:

$$b^2 = x_1^2 + y_0^2 \quad (136)$$

$$a^2 = x_2^2 + y_0^2 \quad (137)$$

$$d^2 = x^2 + y_0^2 \quad (138)$$

Найдем координаты следующих отрезков:

$$m = x - x_2 \quad (139)$$

$$n = x_1 - x \quad (140)$$

$$c = x_1 - x_2 \quad (141)$$

$$-m = x_2 - x \quad (142)$$

$$-n = x - x_1 \quad (143)$$

$$-c = x_2 - x_1 \quad (144)$$

$$a^2n + b^2m - d^2c = mnc \quad (145)$$

$$-a^2n - b^2m + d^2c = -mnc \quad (146)$$

Подставим в равенство, которое нужно доказать, найденные координаты:

$(x_2^2 + y_0^2)(x - x_1) + (x_1^2 + y_0^2)(x_2 - x) - (x^2 + y_0^2)(x_2 - x_1) = (x_2 - x)(x - x_1)(147)$

Раскроем скобки:

$$x_2^2x - x_2^2x_1 + y_0^2x - y_0^2x_1 + x_1^2x_2 - x_1^2x + y_0^2x_2 - y_0^2x - x^2x_2 + x^2x_1 - y_0^2x_2 + y_0^2x_1 = (x_2^2 - x_2x - x_1x_2 + x_1x)(x - x_1) \quad (148)$$

$$x_2^2x - x_2^2x_1 + x_1^2x_2 - x_1^2x - x^2x_2 + x^2x_1$$

$$= x_2^2x - x_2^2x_1 - x_2x^2 + x_2xx_1 - x_1x_2x + x_1^2x_2 - x_1x^2 + x_1^2x \quad (149)$$

$$0 = 0 \quad (150)$$

Равенство выполнено.

Пример 2. Доказать теорему Гаусса: в любом четырехугольнике, противоположные стороны которого не параллельны, середины диагоналей и середина отрезка, концами которого являются точки пересечения прямых, содержащих противоположные стороны четырехугольника, лежат на одной прямой.

Пример 3. Диагонали ромба $ABCD$ имеют длины $2a$ и $2b$. Найти множество точек M, для которых $AM^2 + DM^2 = BM^2 + CM^2$.

Пример 4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Найти множество точек М, для которых $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.

Пример 5. В круге с центром O проведены два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD. На радиусе OB взята точка K так, что $OK = \frac{1}{3}OB$, а на радиусе OD - точка M так, что $OM = \frac{1}{2}OD$. Доказать, что точка пересечения прямых CK и AM расположена на данной окружности.

Доказательство:

Пусть дана окружность с диаметрами $AB \perp CD$. Расположим систему координат так, что центр окружности совпадает с началом координат, диаметр AB лежит на оси абсцисс, а диаметр CD - на оси ординат.

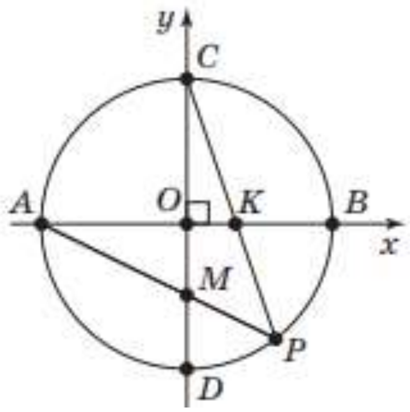


Рисунок 19

Пусть радиус окружности равен 1. Тогда координаты точки на окружности и внутри нее: $A(-1;0)$; $B(1;0)$; $C(0;1)$; $D(0;-1)$; $K\left(\frac{1}{3};0\right)$; $M\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

Составим уравнения прямых, проходящих через точки:

C и $K, y = kx + b$	A и $M, y = kx + b$
Подставим координаты точек в уравнение $y = kx + b$	
$C(0;1)$: $K\left(\frac{1}{3};0\right)$: $\begin{cases} b = 1, \\ \frac{1}{3}k + b = 0; \end{cases}$ $b = 1, k = -3$ $y = -3x + 1.$	$A(-1;0): -k + b = 0;$ $M\left(0;-\frac{1}{2}\right): b = -\frac{1}{2}, k = -\frac{1}{2}.$ $y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}.$

Найдем точку пересечения прямых $y = -3x + 1$ и $y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$:

$$-3x + 1 = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}; x = \frac{3}{5}; y = -\frac{4}{5}. \quad (151)$$

Точка пересечения $P\left(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$. Подставим эти значения в уравнение окружности с единичным радиусом:

$$x^2 + y^2 = 1: \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1. \qquad (152)$$

Координаты удовлетворяют уравнению окружности. Точка P лежит на окружности, что и требовалось доказать.

Задачи на построение.

Пример 6. Даны три отрезка, последовательно расположенные на прямой. Построить на плоскости точку, из которой эти отрезки были видны под равными углами.

Решение:

Поставленная задача на построение на плоскости решается методом геометрических мест точек (ГМТ). Проведенный анализ показывает, что для ΔAMC отрезок MB является биссектрисой $\angle AMC$. Поэтому точка M принадлежит ГМТ, для каждой из которых $|AM|:|MC| = a:b$.

Последнее условие означает, что точка M принадлежит окружности Аполлония, проходящей через точки B и M, центр которой лежит на прямой (AB).

Аналогично для ΔBMD отрезок MC является биссектрисой $\angle BMM$. Поэтому точка M принадлежит ГМТ, для каждой из которых $|BM|:|MD| = b:c$. Таким образом, точка M принадлежит и окружности Аполлония, проходящей через точки C и M, центр которой лежит на прямой (AB).

Построение искомой точки трудностей не представляет. Проблема возникает в процессе исследования, когда требуется выяснить условия, при которых задача имеет решение. Исследование было проведено методом координат.

Для этого на плоскости вводится прямоугольная систем координат, в которой осью абсцисс является прямая (AB). Тогда точки A, B, C и D будут иметь координаты $A(0;0), B(a;0), C(a+b), D(a+b+c)$.

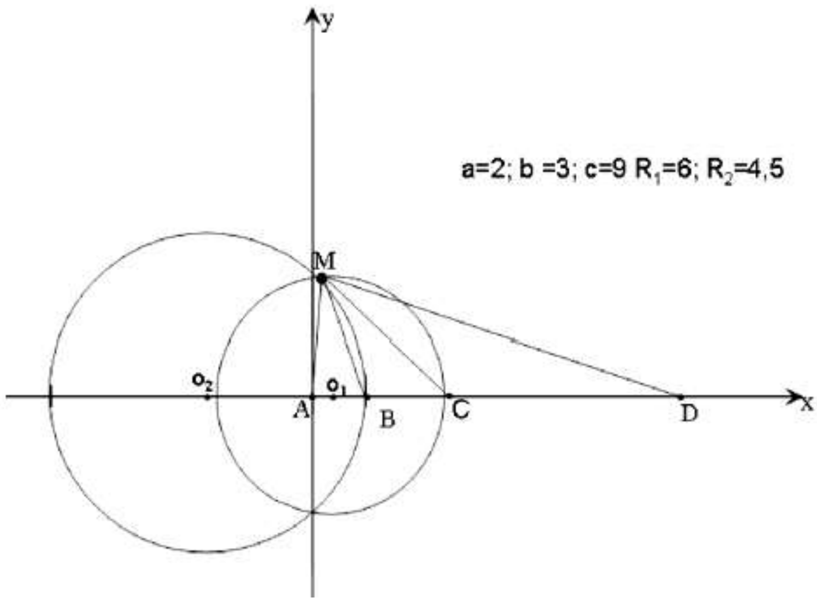


Рисунок 20

Составив уравнение первой из окружностей Аполлония, и, рассмотрев условия пересечения двух окружностей, получаем, что построение точки M возможно при следующих выборах длин отрезков:

1) $a = b, b < c$;

2) $b = c, a > b$;

3) $a = c, b < a$;

4) $b < a, b < c$;

5) $a < b < c,$ если $\frac{c+b}{3c-b} < \frac{a}{b}$;

6) $a > b > c,$ если $\frac{a+b}{3a-b} < \frac{b}{c}$.

На рисунке приведено решение задачи в случае 5).

Итоговая тестовая работа. (1ч).

Итоговое тестирование по всем изученным темам, которое включает вопросы теоретического и практического характера.

После изучения полного курса учащиеся должны иметь следующие результаты обучения:

а) Умеют правильно выбирать нужные формулы для решения задач;

б) Умеют решать задачи с использованием изученного метода;

в) Умеют находить дополнительный материал по изучаемой теме во всех допустимых средствах информации; умеют предоставлять результаты своих находок по окончании курса.

В приложении 1 представлен один из разработанных уроков по теме «Решение задач ОГЭ», в приложении 2 – домашнее задание на карточках (решить задачи по готовым чертежам).

Заключение

Метод координат во многих случаях является оптимальным методом, который в значительной мере сокращает процесс решения задач.

В первой главе данной работы рассматривались теоретические основы координатного метода, его основные положения. Также рассмотрена практика изучения и применения данного метода в средней школе. Были рассмотрены учебно-методические комплекты таких авторов, как Бутузов В.Ф., Атанасян Л.С. и Мерзляк А.Г. Были выделены отличительные особенности введения темы «Метод координат» в учебниках по геометрии.

Во второй главе, то есть в практической части, разработан элективный курс для девятого класса «Метод координат в решении задач планиметрии». Тематическое планирование курса представлено в виде таблицы, также перечислены цели каждого урока и примеры, разбираемые на них.

На практике было проведено два урока из разработанного элективного курса: по теме «Задачи ОГЭ» и зачетный урок. Положительные результаты, которые ученики показали на зачетном уроке, дали возможность, сделать вывод, что прохождение элективного курса по теме «Метод координат» будет полезным как для решения заданий ОГЭ (24 и 26 задания), так и для решения задач стереометрии при продолжении обучения в старшей школе [10].

Список литературы

1. Афанасьева Т.Л., Тапилина Л.А. Геометрия. 9 класс : поурочные планы по учебнику Л.С. Атанасяна [и др.] / авт.-сост. Т.Л. Афанасьева, Л.А. Тапилина – Волгоград : Учитель, 2013. – 167 с.
2. Атанасян Л.С. Геометрия: Учеб.для 7-9 кл. общеобразоват. учреждений. / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б Кадомцев и др.– М.:Просвещение, 2015. – 384 с.
3. Бутузов В.Ф. Геометрия 9 класс: Учеб.для общеобразоват. учреждений. / В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, В.В. Прасолов – М.: Просвещение, 2012. – 143 с.
4. Бутузов В. Ф. Геометрия. Поурочные разработки. 9 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, В.В.Прасолов. — 2-е изд. — М. : Просвещение, 2017.—160 с.
5. Буцко Е.В., Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.. Геометрия : 9 класс : методическое пособие — М. : Вентана-Граф, 2018. — 176 с.
6. Гусак А.А. Справочник по высшей математике. / А.А. Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Бричикова. - 9-е изд. - Минск: ТеатрСистема, 2009. – 640 с.
7. Кумакова Е.А. Некоторые методические аспекты обучения школьников решению геометрических задач методом координат в средней школе // Педагогика и современное образование: традиции, опыт и инновации. Сборник статей международной научно-практической конференции - Пенза, 2018. 35-37 с.
8. Ляш А.А. Путь в науку: материалы межрегиональной научно-практической конференции, 13-29 апреля 2016 года / отв. ред. А.А. Ляш. – Мурманск: МАГУ, 2017, - 77 с.
9. Мерзляк А.Г. Геометрия: 9 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир.- М.: Вентана-Граф, 2014. – 240 с.

10. Милюхина К.Б. Разные способы при решении геометрической задачи // Информационно-коммуникационные технологии в педагогическом образовании / Милюхина К.Б., Сердюк С.А. / Кузбасская государственная педагогическая академия – Новокузнецк, 2018. – 28-35 с.
11. Москвитина Е.О. Методика обучения решению стереометрических задач векторно-координатным методом / Дербенева Н.Н .//Математика и математическое образование: современные тенденции и перспективы развития / редкол.: Л.С. Капкаева(отв.ред.) [и др.]; Мордов. гос. пед. ин-т им.М.Е.Евсевьева, - Саранск, 2017. – 114-120 с.
12. Погорелов А. В. Геометрия 7-9 кл.: Учеб. для общеобразоват.организаций / Погорелов А. В.- 2-е изд. - М:Просвещение 2014. – 240 с..
13. Прояева И.В. О методе координат в школьном курсе геометрии // Россия и Европа: связь культуры и экономики. Материалы XIV международной научно-практической конференции ./ Отв. редактор Уварина Н.В. – Прага, Чешская Республика: Изд-во WORLD PRESS s.r.o., 2016. – 679 с.
14. Ракитянский А.С. Компетенстно-ориентированные задачи и возможные их применения в преподавании математических дисциплин. // Россия и Европа: связь культуры и экономики. Материалы VII международной научно-практической конференции. – Прага, Чешская республика, 2015. – 372-374 с.
15. Севрюков П.Ф. Векторы и координаты в решении задач школьного курса стереометрии: учебное пособие / П.Ф. Севрюков, А.Н.Смоляков. – М.: Илекса; НИИ Школьных технологий; Ставрополь: Сервисшкола, 2008. – 164 с.
16. Сумина Г.Н. Методические рекомендации к изучению метода координат на плоскости // Певзнеровское чтение / Амурский гуманитарно-педагогический государственный – Комсомольск-на-Амуре, 2013. – 13-76 с.
17. Электронный ресурс https://www.yaklass.ru

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Технологическая карта урока

Тема урока: «Задачи ОГЭ»

Класс: 9 класс

Тип урока: урок объяснения нового материала

Цель урока: формирование умений решать геометрические задачи повышенного уровня сложности методом координат

Планируемые результаты:

Личностные:

- проявлять самостоятельность и интерес при выполнении практических заданий

Предметные:

- самостоятельно и рационально определять способы решения задач; проводить необходимые преобразования выражений и расчеты

Метапредметные:

- уметь слушать и вступать в диалог;
- уметь распознавать, отбирать и структурировать учебный материал;
- уметь развернуто обосновывать суждения;
- уметь самостоятельно контролировать и оценивать учебную деятельность и ее результаты

Личностные УУД: смыслообразование, формирование положительного отношения к процессу познания.

Познавательные УУД: правильно формулируют проблему, умеют структурировать знания, контролируют и оценивают процесс и результаты деятельности, самостоятельно создают алгоритмы деятельности при решении проблем творческого и поискового характера.

Регулятивные УУД: формулируют познавательную цель и строят свои действия в соответствии с ней.

Коммуникативные УУД: регулируют собственную деятельность посредством речевых действий, сотрудничают с учащимися и учителем во время учебной деятельности.

Оборудование: учебник «Геометрия 9 класс» Атанасян и др., презентация, доска, проектор, распечатанные листы с заданиями.

Этап урока Методы и приемы	**Время**	**Содержание урока. Деятельность учителя**	**Деятельность ученика**	**УУД**
I. Этап самоопределения к деятельности *Словесный: слово учителя*	2 мин	Приветствие, настрой на изучение новой темы.	Приветствовать учителя. Настраиваться на работу на уроке	Личностные: выражать положительное отношение к процессу познания.
II. Актуализация знаний и мотивация *Словесный: слово учителя, ответы на вопросы*	10 мин	Учитель предлагает ученикам разобрать задачи, в решении которых было больше всего ошибок, с зачета, который проходил на прошлом уроке. Учитель направляет учеников, смотрит за правильностью решения. Работа со слайдами. Повторение алгоритма решения задач методом координат. Актуальность изучаемой темы.	Ученики решают по очереди у доски задания с зачетного урока. Проверяют пра-	Личностные: обеспечивают ценностно-смысловую ориентацию учащихся. Предметные: осуществлять поиск необходимой информации

			вильность решения. Работа со слайдами. Слушают учителя.	
III. Объянение нового материала *Словесный: слово учителя, ответы на вопросы*	10 мин	Учитель рассказывает ученикам суть 24 и 26 задания ОГЭ. Раздает листы с заданиями по одному на парту.	Слушают учителя.	Предметные: определение основной и второстепенной информации; Регулятивные: принимать и сохранять учебную задачу Развивают операции мышления. Коммуникативные: общение и взаимодействие.
IV. Решение задач *Словесный: ответы на вопросы Практический: работа с задачами*	17 мин	Учитель решает пример по алгоритму с помощью учеников, показывает оформление. Учитель задает наводящие вопросы, чтобы помочь ученикам перейти к следующему этапу решения. Пример 1. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD, равна одному	Ученики подсказывают учителю варианты решения по алгоритму.	Коммуникативные - общение и взаимодействие. Регулятивные - принимать и сохранять учебную задачу;

		метру. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD. Ответ: искомая длина равна 1 метру. Задание 26. Пример 2. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, вершины которого заданы координатами: $A(2;2)$; $B(3;5)$; $C(6;6)$; $D(5;3)$ Ответ: $S=\frac{1}{2}\sqrt{32}*\sqrt{8}=\frac{1}{2}\sqrt{256}=8$ Далее учитель вызывает учеников по очереди к доске для решения различных этапов задачи. Пример 3. В треугольнике ABC биссектриса BF и медиана AK перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 208. Найдите стороны треугольника ABC. Ответ: $AB=52\sqrt{13}$ $BC=2AB=104\sqrt{13}$ $AC=156\sqrt{5}$	Ученики по вызову учителя решают примеры у доски, остальные – в тетради.	Предметные - осуществлять поиск необходимой информации. Развивают операции мышления
V.Итог урока Рефлексия	1 мин	Итог урока. Домашнее задание: решить задачи на готовых чертежах. Приложение 2.	Подводят итог под руководством учителя.	Личностные: способность к самооценке.

			Записывают домашнее задание.	

Конспект урока

Тема урока: «Задачи ОГЭ»

Класс: 9 класс

Тип урока: урок объяснения нового материала

Цель урока: формирование умений решать геометрические задачи повышенного уровня сложности методом координат

Оборудование: учебник «Геометрия 9 класс» Атанасян и др., презентация, доска, проектор, распечатанные листы с заданиями.

Ход урока:

I. Этап самоопределения к деятельности (2 мин)

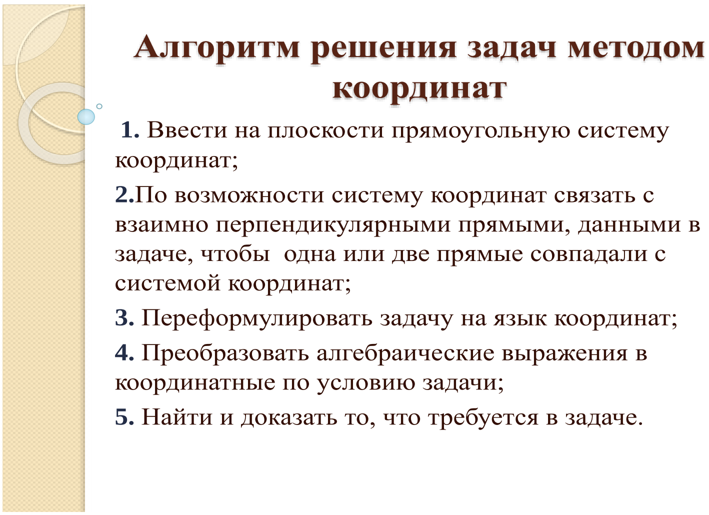
- Здравствуйте, ребята! Успокаиваемся! Можете садиться.

II. Актуализация знаний и мотивация (20 мин)

- На прошлом уроке проходило зачетное занятие, результаты вы узнаете после урока, а сейчас мы разберем задачи, в которых было больше всего ошибок.

-Вспомним алгоритм решения задач методом координат. Я раздаю этапы решения задач, вы должны расположить их в правильной последовательности. Задание в парах. Время выполнения задания: 2 минуты.

- На экране указан верный алгоритм. Проверяем правильность выполнения самостоятельно. (Слайд 1).



- Совсем скоро вам предстоит сдать свой первый государственный экзамен, и чтобы сдать его на положительную оценку, необходимо уметь решать задачи различного уровня. Рассмотрим применение метода координат при решении экзаменационных задач.

- Итак, какой же будет тема сегодняшнего занятия?

- *Тема занятия «Задачи ОГЭ».*

- Верно. (2 слайд).

- Вы уже знаете структуру экзамена, из каких частей он состоит. Настало время познакомиться с заданиями повышенного и высокого уровня сложности, заданиями 24 и 26.

III. Объяснение нового материала (5 мин)

- Задание 24 ОГЭ по математике открывает блок из трёх геометрических задач с развёрнутым решением, представленных в качестве трёх последних заданий ОГЭ. Это планиметрическая задача на вычисление, для решения которой нужно достаточно свободно ориентироваться в материале школьного курса планиметрии, в его теоремах, связанных с треугольниками, многоугольниками (преимущественно с параллелограммами и трапециями) и окружностями.

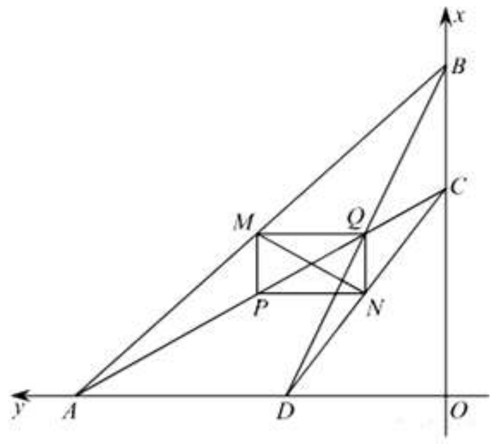
- Последнее, 26-е задание ОГЭ по математике представляет собой планиметрическую задачу на вычисление, более сложную по сравнению с задачей 24. Последнюю можно рассматривать как своего рода подготовительную задачу: многие идеи и методы, необходимые для её решения, используются и при решении задания 24. Большая часть задач связана с окружностью. Рассмотрим типичные примеры.

IV. Решение задач (32 мин)

-Итак, читаем первое задание с листов, которые раздали в начале урока.

Пример 1. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD, равна одному метру. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD.

Решение:



- Для решения воспользуемся нашим алгоритмом. Что мы делаем в начале решения задачи?

- *Вводим систему координат.*

- Каким образом лучше ввести систему координат? Прочитайте внимательно второй пункт алгоритма.

- *Нужно связать взаимно перпендикулярные прямые, данные в задаче, системой координат. Тогда пусть сторона* BC *лежит на оси* Ox, *а сторона* AD *лежит на оси* Oy.

- Какие координаты будут иметь вершины четырехугольника?

-*Координаты вершин четырехугольника* $A(0; a), B(b; 0), C(c; 0)$, $D(0; d)$.

- Обозначим середины сторон AB и CD. Пусть M - середина AB, и N - середина CD. Также обозначим середины диагоналей AC и BD - точки P и Q.

- Итак, что можно вычислить, зная координаты вершин четырехугольника и то, что точки M - середина AB, N - середина CD?

- *Можно найти координаты середин сторон* AB *и* CD.

- По формуле нахождения координат середины отрезков, найдем координаты точек M и N: $M\left(\frac{b}{2}; \frac{a}{2}\right), N\left(\frac{c}{2}; \frac{d}{2}\right)$.

- Что можно найти, зная координаты точек M и N?

- *Можно найти длину отрезка* MN *через координаты его концов:*

$$MN = \frac{1}{2}\sqrt{(c-b)^2 + (a-d)^2}$$

- Также мы знаем, что точки P и Q - это середины диагоналей AC и BD. Что мы сможем найти?

- *Также можно найти координаты этих точек.*

- Аналогично получаем: $P\left(\frac{c}{2}; \frac{a}{2}\right), Q\left(\frac{b}{2}; \frac{d}{2}\right)$.

$$PQ = \frac{1}{2}\sqrt{(c-b)^2 + (a-d)^2}$$

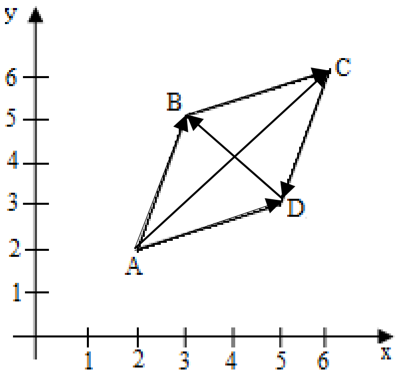
- Какой можно сделать вывод?

- $MN = PQ$. *Следовательно, искомая длина равна 1 метру.*

Задание 26.

Пример 2. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, вершины которого заданы координатами: $A(2; 2), B(3; 5), C(6; 6), D(5; 3)$.

Решение:



- Решим задачу векторно-координатным методом.

- Что можно найти, зная координаты вершин четырехугольника?

- *Можно найти координаты сторон четырехугольника, чтобы найти потом их длины, то есть векторов* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB}\{1; 3\} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{DC}\{1; 3\} \Rightarrow |\overrightarrow{DC}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

- Итак, мы видим, что длины векторов равны, также векторы $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{DC}$. Что мы можем сказать про данный четырехугольник?

- *Этот четырехугольник является параллелограммом, так как в нем противоположные стороны равны и параллельны.*

- Найдем координаты и длины векторов $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{BC}\{3; 1\} \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{AD}\{3; 1\} \Rightarrow |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

- Итак, как называется параллелограмм, у которого все стороны равны?

- *Параллелограмм, у которого все стороны равны является ромбом.*

- Как вычислить площадь ромба?

- *Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.*

- Зададим направление диагоналям ромба AC и DB. Вычислим координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$ и найдем их длину.

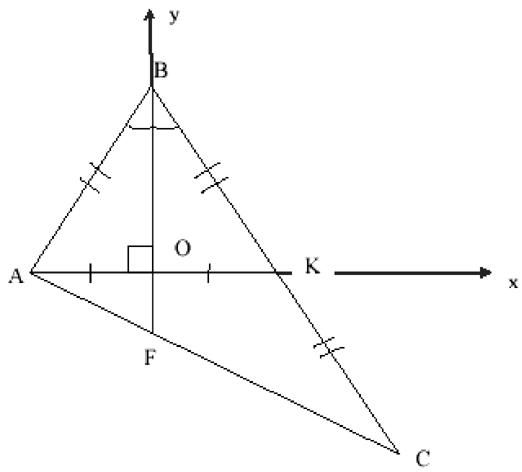
$$\overrightarrow{AC}\{4;4\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32}$$

$$\overrightarrow{AD}\{-2;2\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8}$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{32} * \sqrt{8} = \frac{1}{2}\sqrt{256} = 8$$

Пример 3. В треугольнике ABC биссектриса BF и медиана AK перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 208. Найдите стороны треугольника ABC.

Решение:



- Воспользуемся алгоритмом. Что мы делаем в начале решения задачи?

- *Вводим систему координат.*

- Каким образом лучше ввести систему координат в данном случае?

- *Взаимно перпендикулярные прямые, данные в задаче, это биссектриса BF и медиана AK. Тогда пусть медиана AK лежит на оси Ox, а биссектриса BF лежит на оси Oy, O - точка пересечения биссектрисы BF и медианы AK.*

- Рассмотрим треугольники AOB и KOB. Какие они будут?

- *Треугольник AOB равен треугольнику KOB (прямоугольные) по катету и острому углу.*

- Что следует из равенства данных треугольников?

- *Значит $AO = OK = 104$, $AB = BK, BC = 2BK = 2AB$.*

- Итак, точка $A(-104; 0)$, точка $B(0; y_B)$, точка $K(104; 0)$, точка K середина BC, тогда точка $C(208; \ -y_C)$, точка $F(0; y_F)$ принадлежит прямой AC.

- Составим уравнение прямой AC:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\frac{x + 104}{208 + 104} = \frac{y - 0}{-y_C - 0}$$

- Что можно сделать с уравнением прямой AC, зная, что точка $F(0; y_F)$ принадлежит данной прямой?

- *Можно подставить координаты точки F в уравнение прямой AC.*

$$\frac{0 + 104}{312} = \frac{y_F}{-y_C}$$

$$y_F = \frac{-y_C}{3}$$

- Применим формулу расстояние между точками:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$BF^2 = \left(\frac{y_C}{3} + y_B\right)^2$$

$$y_B = 156$$

- Точка $B(0; 156)$, тогда точка $C(208; -156)$.

- Что можно найти, зная координаты вершин треугольника?

-*Можно найти стороны треугольника ABC по формуле нахождения расстояния между двумя точками.*

$$AB = \sqrt{(0 + 104)^2 + (0 - 156)^2}$$

$$AB = 52\sqrt{13}$$

$$BC = 2AB = 104\sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{(208 + 104)^2 + (-156 - 0)^2}$$

$$AC = 156\sqrt{5}$$

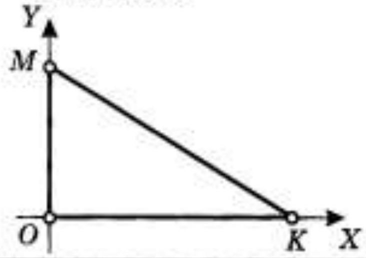
V. Итог урока, рефлексия (1 мин)

-Сегодня мы изучили решение 24 и 26 задания методом координат. Повторим алгоритм решения данных задач.

-Домашнее задание - решить задачи на готовых чертежах. Приложение 2.

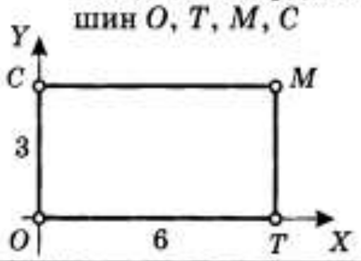
1

Дано: $OK = 3$, $OM = 2$
Найдите координаты вершин ΔMOK



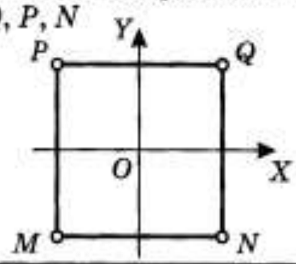
2

Дано: $TOCM$ — прямоугольник
Найдите координаты вершин O, T, M, C



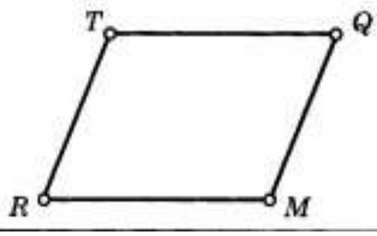
3

Дано: $MQPN$ — квадрат
$M\ (-2; -2)$
Найдите координаты вершин Q, P, N



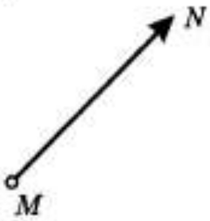
4

Дано: $TQMR$ — параллелограмм
$R\ (0; 0)$, $M\ (10; 0)$, $Q\ (24; 6)$
Найдите координату вершины T



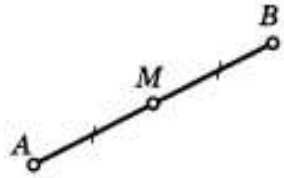
5

Дано: $M\ (3; 5)$, $N\ (-2; 4)$
Найдите координаты вектора $\overline{MN}$



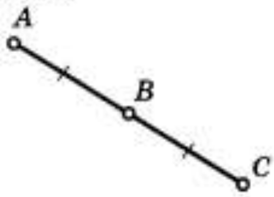
6

Дано: $A\ (2; 6)$, $B\ (6; 2)$
Найдите координаты точки M



7

Дано: $A\ (2; 4)$, $B\ (0; 18)$
Найдите координаты точки C



8

Дано: $M\ (4; 6)$, $N\ (x; 1)$
Найдите: x